Analyse 1

Polycopié de cours pour étudiants des écoles préparatoires

Dr. Imene Meriem Mostefaoui

Je dédie ce travail à tout étudiant passionné qui prend du plaisir à apprendre.

Je remercie toutes les personnes négatives qui ont voulu empêché la diffusion de ce modeste travail, je les remercie par ce qu'ils ont alimenté mon envie et ma volonté d'aller jusqu'au bout de moi même.

Introduction

Cet Ouvrage est conçu des programmes des classes préparatoires. Il est donc avant tout destiné à ce public. Sauf que les étudiants des universités peuvent aussi en servir pour le détail qui contient. Nous abordons les chapitres suivants :

— Ensemble des nombres réels,
— Suites sur $\mathbb{R}$,
— Fonctions d'une variable réelle,
— Des applications de la dérivée,
— Développement limité.

Les cours sont présentés d'une façon très claire avec beaucoup d'exemples ce qui permet aux étudiants la meilleure compréhension du programme. Dans chaque cours, nous avons proposé des exercices d'entrainement avec solutions détaillées. Dans le chapitre 2, nous avons abordé un exemple qui se trouve en écologie, dans prochains ouvrages l'auteur va présenter plus d'exemples de ce genre.

Dans certaines sections, nous avons présenté des notes historiques afin de faire voyager l'étudiant dans le temps et lui permettre de découvrir la progression des résultats mathématiques dans l'histoire.

Table des matières

1. Ensemble des nombres réels

Dans la vie de tous les jours, les nombres réels sont utilisés pour représenter une mesure tels que : la distance entre deux points, le volume d'un objet, la masse d'un corps, etc. Ces mesures dépendent du choix d'une unité, par exemple, la distance entre deux positions est représentée par centimètre, mètre ou kilomètre. Par conséquent, les nombres réels sont utilisés chaque jour en économie, informatique, mathématique, physique, chimie ou ingénierie.

Dans ce chapitre, nous allons étudier les nombres réels : leur définition, l'histoire derrière et certains propriétés dont nous en aurons besoin dans la suite, comme la notion de maximum, minimum, borne supérieure et inférieure, etc.

1.1 Nombres réels : définition générale et un peu d'histoire

L'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$ contient les sous ensembles :

— $\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres **rationnels**. Ce sont ceux qui peuvent s'exprimer sous la forme $\dfrac{a}{b}$, où a et b sont deux entiers relatifs, bien évidemment avec $b \neq 0$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

— $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres **irrationnels**. Un irrationnel est par définition un nombre réel qui n'est pas rationnel, plus précisément, c'est un nombre qui ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction $\dfrac{a}{b}$, avec a et b sont deux entiers relatifs.

1.1.1 Histoire des nombres irrationnels

Les grecs qui connaissaient les nombres rationnels sont les premiers qui ont découvert le cas où une grandeur n'est pas toujours rationnelle. En fait, ils étaient affligés par la longueur d de la diagonale d'un carré de côté 1 (voir Fig 1.1). La longueur d telle que

$d^2 = 2$ qui ne pouvait pas s'exprimer sous la forme d'une fraction. Ils ont donné quelques approximations comme $d = \frac{7}{5}$ ou autres mais il étaient conscients que c'était qu'une valeur approchée, mais pas exacte. Au quatrième siècle avant J.-C, Aristote a donné les grandes

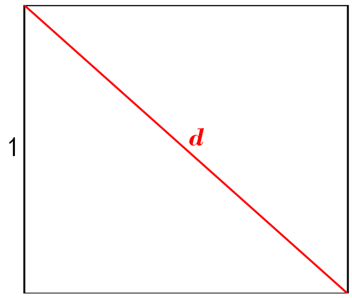


FIGURE 1.1 – Diagonale d'un carré de côté 1

lignes d'une démonstraton concernant l'irrationalité de d. Par ailleurs, le symbole $\sqrt{\ }$ a été utilisé la première fois par le mathématicien Allemand Cristoff Rudolff (1500-1545). Dans le paragraphe suivant, nous allons présenter quelques exemples de nombres rationnels les plus connus.

1.1.2 Exemples de nombres irrationnels

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,
$$\sqrt{n} \text{ est } \begin{cases} \text{entier si } n \text{ est carré parfait,} \\ \text{irrationnel sinon.} \end{cases}$$
En particulier, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \ldots$
2. Les nombre e et e^2 sont irrationnels (démontré par L. Euler en 1737).
3. Le nombre π est irrationnel, de plus l'exponentiel et le logarithme de tout rationnel non nul est irrationnel (démontrés par J-H Lambert en 1761).
4. Pour $a, b \in \mathbb{Q}^*$ et $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $a + rb$ est un nombre irrationnel. Par exemple, les nombres $\sqrt{2} + 3$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sont irrationnels.

Exercice d'entrainement 1 :

Démontrons que les nombres ci-dessous sont des irrationnels :
$$\sqrt{2}, \quad \ln(5), \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}.$$

1. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel c'est à dire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$ et a et b sont premiers entre eux. Alors,
$$\begin{aligned} \sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2 = \frac{a^2}{b^2} \\ &\Longleftrightarrow \quad 2b^2 = a^2. \end{aligned}$$
Ceci implique que a^2 est pair. Maintenant, allons démontrer la proposition suivante :
$$a^2 \text{ est pair } \Rightarrow a \text{ est un nombre pair.} \tag{1.1}$$

La proposition (1.1) est de la forme $p \Rightarrow q$, pour la démontrer on peut utiliser la contraposition, c'est à dire il suffit de prouver que $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$. En effet, supposons que a est impair, i.e $a = 2m+1$, avec $m \in \mathbb{Z}$, donc

$$a^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1,$$

on en déduit que a^2 est impair. Revenons à notre démonstration principale, a^2 est pair donc a est pair i.e $a = 2k$, avec $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$2b^2 = 4k^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$$

d'après ce qui précède, on a b est pair. a et b sont deux nombres pairs donc ils ne sont pas premiers entre eux, ce qui contredit notre hypothèse de départ. On conclut que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

2. Supposons par l'absurde que $\ln(5)$ est rationnel c'est à dire $\ln(5) = \dfrac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$ et a et b sont premiers entre eux. Donc
$$\begin{aligned} b\ln(5) = a \quad &\Longleftrightarrow \quad b\ln(5) = a\ln e \\ &\Longleftrightarrow \quad \ln(5^b) = \ln(e^a) \\ &\Longleftrightarrow \quad 5^b = e^a. \end{aligned}$$
L'unicité de la décomposition entraîne que $a = b = 0$, ce qui n'est pas compatible avec notre hypothèse de départ.

3. Supposons par l'absurde que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est rationnel c'est à dire $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$ et a, b sont premiers entre eux. Donc,
$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{b} \quad &\Longleftrightarrow \quad b(1+\sqrt{5}) = 2a \\ &\Longleftrightarrow \quad b + b\sqrt{5} = 2a \\ &\Longleftrightarrow \quad b\sqrt{5} = 2a - b \\ &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{5} = 2\frac{a}{b} - 1 \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$
d'où la contradiction (essayer de démontrer que $\sqrt{5}$ est irrationnel de la même façon que pour $\sqrt{2}$).

4. On pose
$$x = \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}.$$
D'où,
$$x^2 = 4 + 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})},$$
il vient
$$x^2 = 8 + 2\sqrt{16 - (2\sqrt{3})^2} \Longrightarrow x^2 = 12.$$
Ainsi, $x = 2\sqrt{3}$ ou $x = -2\sqrt{3}$. Ce qu'il fallait démontrer.

On peut voir $\sqrt{2}$ comme une solution de l'équation d'inconnu x suivante

$$x^2 - 2 = 0.$$

D'une manière générale, soit une équation d'inconnu x de la forme

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x^1 + \alpha_0 = 0, \tag{1.2}$$

où $n \in \mathbb{N}$ et les coefficients $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ ne sont pas tous nuls.

On se pose la question suivante : est ce que tout nombre réel peut être une solution d'une équation de la forme (1.2) ? La réponse est non. Dans ce contexte, on va présenter la notion des nombres **algébriques** et **transcendants**.

1.1.3 Nombres algébriques, Nombres transcendants

Le mathématicien allemand **Leibniz (1646-1716)** est le premier qui a remarqué qu'il existe des nombres réels qui ne peuvent pas être une solution d'une équation de la forme (1.2). Il les a appelés nombres transcendants.

Definition 1.1.1 Un nombre réel est dit **algébrique sur** $\mathbb{Q}$ si et seulement s'il est solution d'une équation de la forme (1.2), avec des coefficients dans $\mathbb{Q}$.

■ **Example 1.1**
1. Soit a un nombre rationnel quelconque, alors il est solution de l'équation
$$x - a = 0$$
qui est à coefficients dans $\mathbb{Q}$. On en déduit que tout nombre rationnel est algébrique.
2. $5^{1/3}$ est un nombre algébrique, car il est solution de l'équation
$$x^3 - 5 = 0.$$
3. Le nombre $3 + 2\sqrt{2}$ est algébrique, car il est solution de l'équation
$$x^2 - 6x + 1 = 0,$$
il en est de même pour le nombre d'or $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui est solution de l'équation
$$x^2 - x - 1 = 0.$$

■

Proposition 1.1.1 Soient a et b deux nombres algébriques, alors
— $-a$ est un nombre algébrique.
— Si $a \neq 0$, alors $\dfrac{1}{a}$ est un nombre algébrique.
— La somme et le produit de deux nombres algébriques est un nombre algébrique.

Definition 1.1.2 Un nombre réel est dit **transcendant sur** $\mathbb{Q}$ si et seulement s'il n'est pas algébrique. Autrement dit, un nombre transcendant sur $\mathbb{Q}$ n'est solution d'aucune équation de la forme (1.2).

■ **Example 1.2** Ci-dessous quelques nombres transcendants connus :

1. Le nombre e est transcendant. Plus généralement, e^a est transcendant pour tout nombre a algébrique non nul.
2. $\sin(1)$ est un nombre transcendant. Plus généralement, $\sin(a)$ est transcendant pour tout nombre a algébrique non nul.
3. π est un nombre transcendant.

■

Une information importante concerne les nombres transcendants est la suivante :
la somme de deux nombres transcendants n'est pas nécessairement un nombre transcendant.

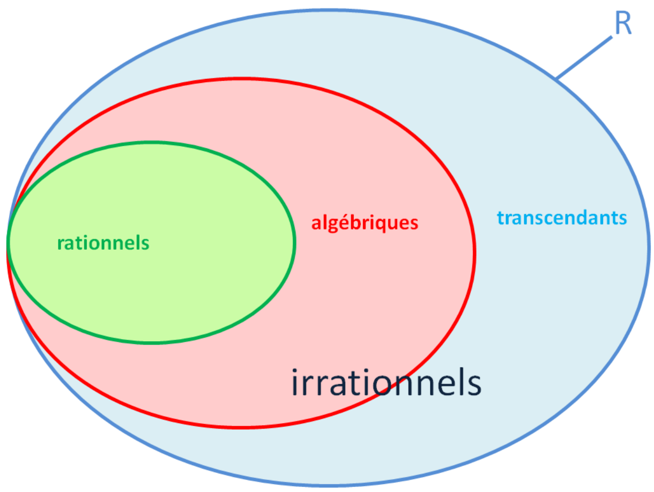


FIGURE 1.2 – Ensemble des nombres réels

Exercice d'entrainement 2 :

1. Soit $q \in \mathbb{Q}_+$, montrons que $\sqrt{q}$ est un nombre algébrique. En fait, $\sqrt{q}$ est solution de l'équation à coefficients dans $\mathbb{Q}^*$ suivante :
$$(x-\sqrt{q})(x+\sqrt{q}) = 0 \Longleftrightarrow x^2 - q = 0.$$
On déduit qu'il est un nombre algébrique.
2. Construisons un ensemble des nombres algébriques à partir d'un nombre algébrique a. D'après les propriétés des nombres algébriques, on sait que si a est nombre algébrique, alors $a+a$ est aussi algébrique, de même pour $a+a+a$. Donc, on peut proposer l'ensemble E défini comme suit
$$E = \{na,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

1.2 Définition axiomatique des nombres réels

Dans cette partie, nous présentons les axiomes des nombres réels. En fait, sur $\mathbb{R}$ on peut définir deux applications :

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x \times y. \end{aligned}$$

Nous avons les axiomes suivantes, pour x, y et z des nombres réels quelconques :

1. $x+(y+z) = (x+y)+z$ (l'addition est associative),
2. $x+y = y+x$, (l'addition est commutative)
3. il existe $0 \in \mathbb{R}$, pour lequel on a pour tout x réel $x+0 = x$,
4. pour chaque élément x, il existe $-x$ s'appelle son inverse vérifiant $x+(-x) = 0$,
5. $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$ (le produit est associatif),
6. $x \times y = y \times x$, (le produit est commutatif)
7. il existe $1 \in \mathbb{R}$ pour lequel on a pour tout x réel $1 \times x = x$,
8. pour chaque élément $x \neq 0$, il existe $\frac{1}{x}$ satisfaisant à $x \times \left(\frac{1}{x}\right) = 1$,
9. $x \times (y+z) = x \times y + x \times z$ (le produit est distributif sur l'addition).

Exercice d'entrainement 3 :

À partir des axiomes sur $\mathbb{R}$, montrons que $x \times 0 = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les axiomes ci-dessous pour des nombres réels x, y et z :

$$\begin{cases} x+(-x) = 0, \\ 1 \times x = x, \\ x+0 = x, \\ x \times (y+z) = x \times y + x \times z, \end{cases}$$

il vient que

$$x \times 0 = x \times (0+0) = x \times 0 + x \times 0.$$

Il en résulte,

$$\begin{aligned} x \times 0 + (-x)0 &= x \times 0 + x \times 0 + (-x)0 \\ &= x \times 0 + (x+(-x)) \times 0 \\ 0 &= x \times 0 + 0, \end{aligned}$$

c'est à dire $x \times 0 = 0$. Ce qui achève la preuve.

Maintenant, nous citons quelques propriétés sur les nombres réels nécessaires pour la suite. Soient α, β et γ des nombres réels quelconques, alors les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

— $\alpha \leq \alpha$,
— si $\alpha \leq \beta$ et $\beta \leq \alpha$, alors $\alpha = \beta$,
— si $\alpha \leq \beta$ et $\beta \leq \gamma$, alors $\alpha \leq \gamma$.

De plus, on sait que pour deux nombres réels quelconques a et b, il y'a deux possibilités : soit $a \leq b$ ou bien $b \leq a$. Ces propriétés sont celles d'une relation d'**ordre totale**. Dans ce cas, on dit que $\mathbb{R}$ est un ensemble ordonné par $\leq$. Grâce à la relation d'ordre $\leq$, on peut parler de la notion de sup et inf d'un ensemble donné. Nous précisons que les mêmes propriétés resteront valables dans $\mathbb{Q}$.

1.3 Borne Supérieure, Borne inférieure

Definition 1.3.1 Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Soient M et m deux nombres réels.
On dit que M est un **majorant** de A dans $\mathbb{R}$ si pour tout $x \in A$, on aura $x \leq M$.
En revanche, m est dit **minorant** de A **dans** $\mathbb{R}$ si pour tout $x \in A$, on aura $m \leq x$.

D'après cette définition, on peut facilement déduire qu'un majorant ou un minorant d'un ensemble donné peut ne pas appartenir à ceci. Par ailleurs, un ensemble peut avoir plusieurs majorants et minorants.

■ **Example 1.3**

1. Soit $A = [-1,1[$, alors les nombres 1, $\frac{\sqrt{11}}{2}$ et $\sqrt{3}$ sont des **majorants** de A, car pour tout $x \in [-1,1[$, on a $x \leq 1$, $x \leq \frac{\sqrt{11}}{2}$ et $x \leq \sqrt{3}$. Ensuite, $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont des **minorants** de A dans $\mathbb{R}$, puisque pour tout $x \in [-1,1[$, on a $x \geq -\frac{\sqrt{5}}{2}$ et $x \geq -\sqrt{2}$.
2. Les nombres $-3, 2$ sont des minorants de l'intervalle $\left[2,\sqrt{5}\right[$ car pour tout $x \in \left[2,\sqrt{5}\right[$, $x \geq 2$ et $x \geq -3$.
3. Les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ n'ont ni majorants, ni minorants. En effet, il n'existe pas un nombre rationnel ou irrationnel qui est plus grand ou plus petit que tous les nombres de $\mathbb{Z}$, de même pour $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
4. Soit $A \subset \mathbb{Q}$ défini par
$$B = \left\{x \in \mathbb{Q} : x \leq \sqrt{2}\right\}.$$
$\sqrt{2}$ est un majorant de B.

■

Auparavant, nous avons noté que les majorants ou les minorants d'un ensemble s'ils existent ne sont pas nécessairement uniques. Dans ce contexte, on se pose la question suivante : est ce que l'ensemble de tous les majorants d'un ensemble A admet un plus petit élément ? La réponse est oui dans certains cas et non dans d'autres cas.

On peut se poser la même question sur l'existence de plus grand des minorants et la réponse restera la même : oui dans certains cas et non dans d'autres cas.

R On cherche le plus petit des majorants et non pas le plus grand étant donné que si M est un majorant de l'ensemble A alors tout M' plus grand que M est aussi un majorant de A. Ainsi il est intéressant de chercher le plus petit élément de l'ensemble des majorant de A, cet ensemble contient nécessairement l'intervalle $[M,+\infty[$.

Definition 1.3.2 Soit A une partie de $\mathbb{R}$ différente de l'ensemble vide.
— Si l'ensemble des majorants de A admet un plus **petit** élément, alors cet élément s'appelle **borne supérieure** de A et on note $\sup A$.

— Si l'ensemble des minorants de A admet un plus **grand** élément, alors cet élément s'appelle **borne inférieure de** A et on note $\inf A$.

De plus, nous avons l'unicité de $\sup A$ et $\inf A$, dans le cas où ils existent.

Example 1.4
1. Les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ n'admettent ni borne supérieure, ni borne inférieure, car nous l'avons déjà précisé ils n'admettent pas de minorants et majorants. Cependant, $\inf \mathbb{N} = 0$.
2. Soient $\mathscr{A} =]-1,1[$, $\mathscr{B} = [-1,1]$. Alors, on a
$$\sup \mathscr{A} = \sup \mathscr{B} = 1 \text{ et } \inf \mathscr{A} = \inf \mathscr{B} = -1.$$
3. Soit l'ensemble $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$. Alors,
$$\sup A = 1 \text{ et } \inf A = 0.$$
4. Soit l'ensemble $B = \left\{x \in \mathbb{Q},\, x^2 \leq 3\right\} = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}$. Alors,
$$\sup B = \sqrt{3} \text{ et } \inf B = -\sqrt{3}.$$

■

R Si on prend l'ensemble $A = [0,1[$, alors $\sup A = 1$. Soit $\eta = 1 - 10^{-10}$ qui est un nombre très proche de 1 appartenant à A, de plus on peut trouver un x dans A entre $1 - 10^{-10}$ et 1. De même, on peut trouver un $y \in A$ compris entre x et 1, ainsi de suite. Cette propriété est celle de borne supérieure.

Dans les exemples précédents, nous avons donné $\sup A$ et $\inf A$ sans démonstration mathématique. Le théorème suivant nous offre une définition plus théorique du sup et inf.

Theorem 1.3.1 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
— $\sup A$ est l'unique réel tel que
$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists x \in A \;:\; \sup A - \varepsilon < x < \sup A.$$
— $\inf A$ est l'unique réel tel que
$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists x \in A \;:\; \inf A < x < \inf A + \varepsilon.$$

Exercice d'entrainement 4 :

Soit l'ensemble $A = [-2,2[$, démontrons que $\sup A = 2$ et $\inf A = -1$. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, est ce qu'il existe $x \in A$ tel que
$$2 - \varepsilon < x < 2,$$
il suffit de prendre $x = 2 - \frac{\varepsilon}{2} \in [-2,2[$. D'autre part, est ce qu'il existe $x \in A$ tel que
$$-2 < x < -2 + \varepsilon,$$
il suffit de choisir $x = -2 + \frac{\varepsilon}{2} \in [-2,2[$. D'où le résultat.

Le théorème suivant nous montre le lien entre la borne supérieure et le plus grand élément d'un ensemble.

Definition 1.3.3 — Si le $\sup A$ existe et appartient à A, on dit que c'est un maximum de A et on le note $\max A$.
— Si l'$\inf A$ existe et appartient à A, on dit que c'est un minimum de A et on le note $\min A$.

■ **Example 1.5** 1. Soit l'intervalle $I =]-1, 1]$, alors

$$\max I = \sup I = 1.$$

2. Soit l'ensemble $\mathscr{C} \subset \mathbb{Q}$ défini par

$$\mathscr{C} = \{x \in \mathbb{Q} : e^x \leq 2\}.$$

C'est à dire $\mathscr{C}$ est l'ensemble des nombres **rationnels** tels que leurs exponentielles soient plus petits que 2. Comme $x \mapsto \ln x$ est une fonction croissante alors

$$\begin{aligned} \mathscr{C} &= \{x \in \mathbb{Q} : x \leq \ln 2\} \\ &=]-\infty, \ln 2] \cap \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

$\sup \mathscr{C} = \ln 2$ est irrationnel, donc $\max \mathscr{C}$ n'existe pas. $\inf \mathscr{C}$ n'existe pas, alors $\min \mathscr{C}$ n'existe pas non plus.

■

Ici, nous présentons la définition d'un ensemble borné sur $\mathbb{R}$.

Definition 1.3.4 Soit A une partie de $\mathbb{R}$, A est dite bornée si et seulement si

$$\exists\, M,\ m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A\ :\ m \leq x \leq M.$$

Maintenant, nous énonçons les axiomes suivantes
— **Axiome 1 :** Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
— **Axiome 2 :** Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.
— **Axiome 3 :** Toute partie non vide bornée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.

1.4 Fonction de valeur absolue

La valeur absolue d'un nombre x, notée $|x|$ est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

on peut voir la valeur absolue comme une fonction $x \mapsto |x|$. Elle est aussi définie par l'expression

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Dans les prochains chapitres, nous aurons besoin des propriétés ci-dessous. Soient a et b deux nombres réels
— $|a| \geq 0$,
— $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$,
— $|ab| = |a||b|$,

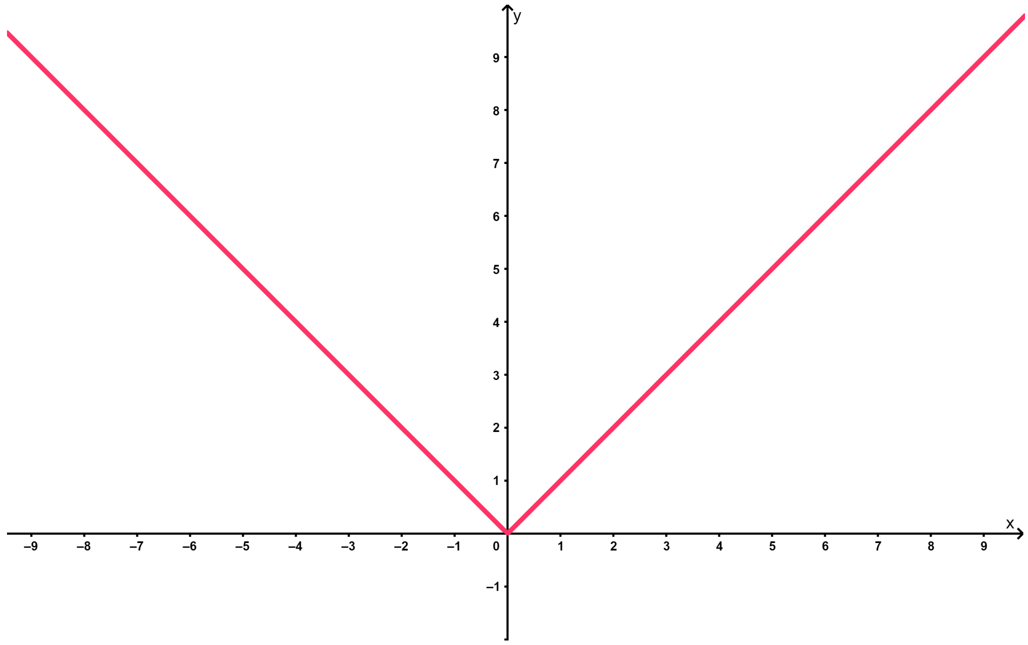


FIGURE 1.3 – Représentation graphique de la fonction $x \mapsto |x|$

— $b \neq 0$, $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$,
— $|a|^n = |a^n|$,
— Inégalité triangulaire
$$||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|.$$
— Soit un réel $\varsigma > 0$, alors
$$|a| \leq \varsigma \Leftrightarrow -\varsigma \leq a \leq \varsigma.$$

Exercice d'entrainement 5 :

Soit la fonction $f(x) = |x-3| + |x+3|$.

1. Étudier f, ceci en écrivant f sans la valeur absolue et en faisant une présentation graphique. En fait,
$$|x-3| = \begin{cases} -x+3, & x \in]-\infty, 3], \\ x-3, & x \in [3, +\infty[, \end{cases}$$
en outre
$$|x+3| = \begin{cases} -x-3, & x \in]-\infty, -3], \\ x+3, & x \in [-3, +\infty[, \end{cases}$$
il vient donc
$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x \in]-\infty, -3], \\ 6, & x \in]-3, 3[, \\ 2x, & x \in [3, +\infty[. \end{cases}$$
Pour la présentation graphique voir Fig 1.4.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $|u-3|+|u+3|=12$. Nous utilisons la propriété $|a|=\sqrt{a^2}$ pour tout réel a. Ceci donne
$$\begin{aligned}|u-3|+|u+3|=12 &\iff \sqrt{(u-3)^2}+\sqrt{(u+3)^2}=12\\ &\iff (u-3)^2+(u+3)^2+2\sqrt{(u^2-9)^2}=144\\ &\iff 2u^2+18+2\sqrt{(u^2-9)^2}=144\\ &\iff \sqrt{(u^2-9)^2}=63-u^2\\ &\iff (u^2-9)^2=(63-u^2)^2.\end{aligned}$$
Ainsi, il existe deux solutions $u=-6$ ou $u=6$.
3. En déduire la solution de l'équation
$$|\sqrt{x+2}-3|+|\sqrt{x+2}+3|=12.$$
D'après la question précédente, il suffit de chercher x tel que $\sqrt{x+2}=6$ car la racine est toujours positive. Donc,
$$x+2=36 \Rightarrow x=34.$$

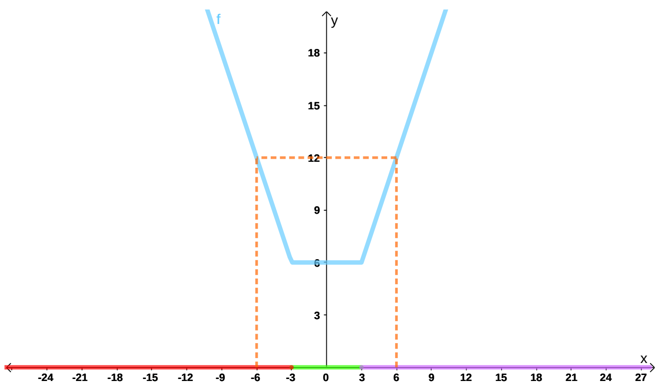


FIGURE 1.4 – Représentation graphique de : $f(x)=|x-3|+|x+3|$.

1.5 Généralités sur la partie entière d'un réel

Definition 1.5.1 Soit x un réel. Il existe un nombre relatif unique n vérifiant

$$n \leq x < n+1.$$

On appelle n **partie entière** de x et on note $E(x) = n$ ou $[x] = n$. En outre,

$$[x] \leq x \leq [x]+1.$$

R $[x]$ est le plus grand nombre relatif plus petit que x.

■ **Example 1.6**

1. $\left[\frac{3}{2}\right] = 1$ car
$$1 \leq \frac{3}{2} < 2.$$
2. $[\pi] = 3$, en fait
$$3 \leq \pi < 4.$$
Sauf que, $-4 \leq -\pi < -3$, donc $[-\pi] = -4$.

■

Afin de mieux comprendre la notion de partie entière d'un réel, l'exercice suivant est proposé.

Exercice d'entrainement 6 :

Allons démontrer que pour tout réel x, on a

$$[x+1] = [x]+1.$$

Pour ce faire, nous utilisons la définition des parties entières de $[x]$ et $[x+1]$

$$[x] \leq x \leq [x]+1 \tag{1.3}$$

$$[x+1] \leq x+1 \leq [x+1]+1 \tag{1.4}$$

De (1.3) et (1.4), on obtient

$$[x]+1 \leq x+1 \leq [x]+2 \Longrightarrow [x]+1 \leq [x+1]$$

et

$$[x+1]-1 \leq x \leq [x+1] \Longrightarrow [x+1]-1 \leq [x].$$

On conclut que $[x+1] = [x]+1$.

Questions de cours :

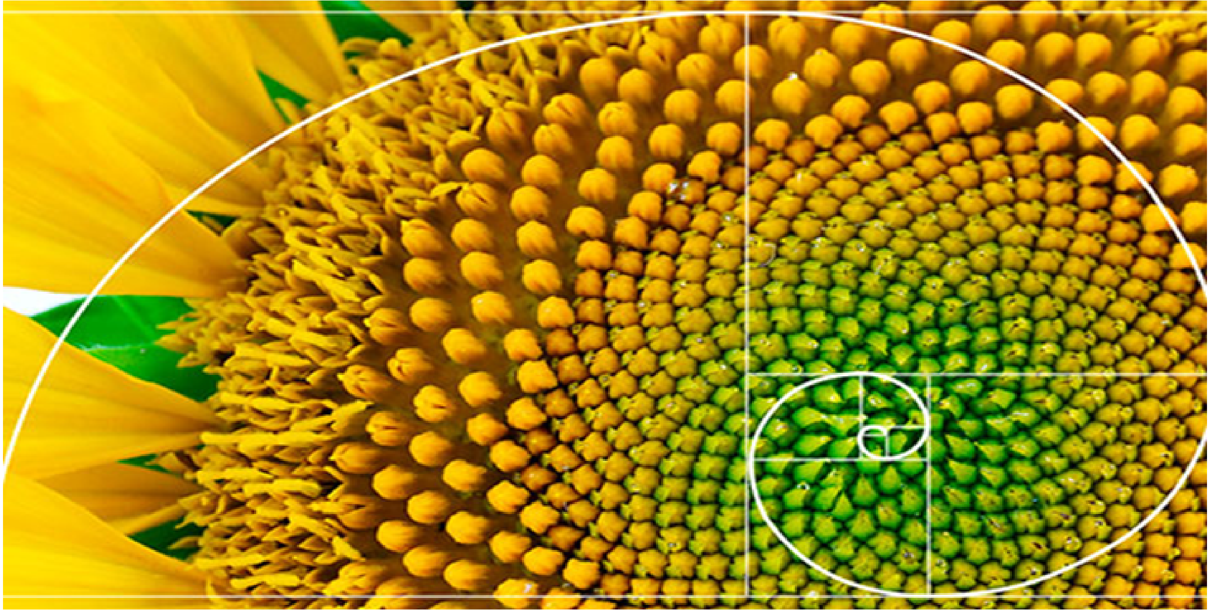
Regardons si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant les réponses.

1. La somme (respectivement le produit) de deux nombres rationnels est nécessairement un rationnel.

2. La somme (respectivement le produit) de deux nombres irrationnels est forcement un irrationnel.
3. La somme d'un nombre rationnel et d'un autre irrationnel est un irrationnel.
4. Si α et β sont deux irrationnels, alors α^β est un irrationnel.
5. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée, l'ensemble
$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 1\}$$
admet une borne supérieure sur $\mathbb{R}$.

Solution :

1. **Vraie**. En fait, soient $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{\lambda}{\mu} \in \mathbb{Q}$, alors
$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\alpha\mu + \lambda\beta}{\beta\mu} \in \mathbb{Q}.$$
$$\frac{\alpha}{\beta}\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\alpha\lambda}{\beta\mu} \in \mathbb{Q}.$$
2. **Fausse**. Soit le contre exemple $\sqrt{3}, -\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors que
$$\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 \in \mathbb{Q}.$$
$$\sqrt{3} \times \left(-\sqrt{3}\right) = -\sqrt{9} = -3 \in \mathbb{Q}.$$
3. **Vraie**. En fait, si r est un irrationnel, d'après une propriétés présentée dans ce cours, alors pour tout $a, b \in \mathbb{Q}^*$, $ar + b$ est un irrationnel. Donc, il suffit de prendre $a = 1$ pour obtenir le résultat.
4. **Fausse**. Un contre exemple pour $\alpha = e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\beta = \ln 3 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a
$$\alpha^\beta = e^{\ln 3} = 3 \in \mathbb{Q}.$$
5. **Fausse**. Si on considère la fonction $f(x) = \sin x$, alors
$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) = \sin x \leq 1.$$
Par conséquent,
$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 1\} = \mathbb{R}$$
qui n'admet pas une borne supérieure.



2. Suites sur $\mathbb{R}$

Dans ce chapitre, nous allons étudier les suites réelles et leurs propriétés. En fait, un ingénieur est sensé connaitre parfaitement les suites étant donné qu'elles sont largement utilisées dans l'analyse numérique, la modélisation et dans divers domaines. À la fin de ce chapitre, nous présenterons des exemples de suites utilisées dans la modélisation de quelques phénomènes biologiques.

2.1 Notions générales des suites réelles

Formellement, on peut définir une suite réelle comme une liste de nombres réels présentée dans un ordre bien défini :

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

a_0 est le terme de la suite qui correspond à $n = 0$, a_1 est le terme pour $n = 1$ et en général a_n est le nième terme. Nous ne traitons que des suites infinies, donc chaque terme a_n est forcement suivi par a_{n+1}.

Théoriquement, une suite est définie par une fonction sur l'ensemble $\mathbb{N}$ telle que pour chaque entier naturel n, elle associe une valeur réelle a_n (voir Fig 2.1, 2.2, 2.3).

Une suite est notée par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(a_n)_{n\geq 0}$ (si u_0 est bien définie). Pour la décrire, deux façons sont possibles :

1. **Terme général :** c'est à dire par la formule du nième terme. Notons que n ne doit pas forcément prendre 0 comme première valeur. Regardons les exemples suivants :
   (a) $(a_n)_{n\geq 0}$, avec $\quad a_n = \dfrac{n}{n+1}$,
   (b) $(b_n)_{n\geq 1}$, où $\quad b_n = \dfrac{1}{n}$,
   (c) $(c_n)_{n\geq 0}$, tel que $\quad c_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$,

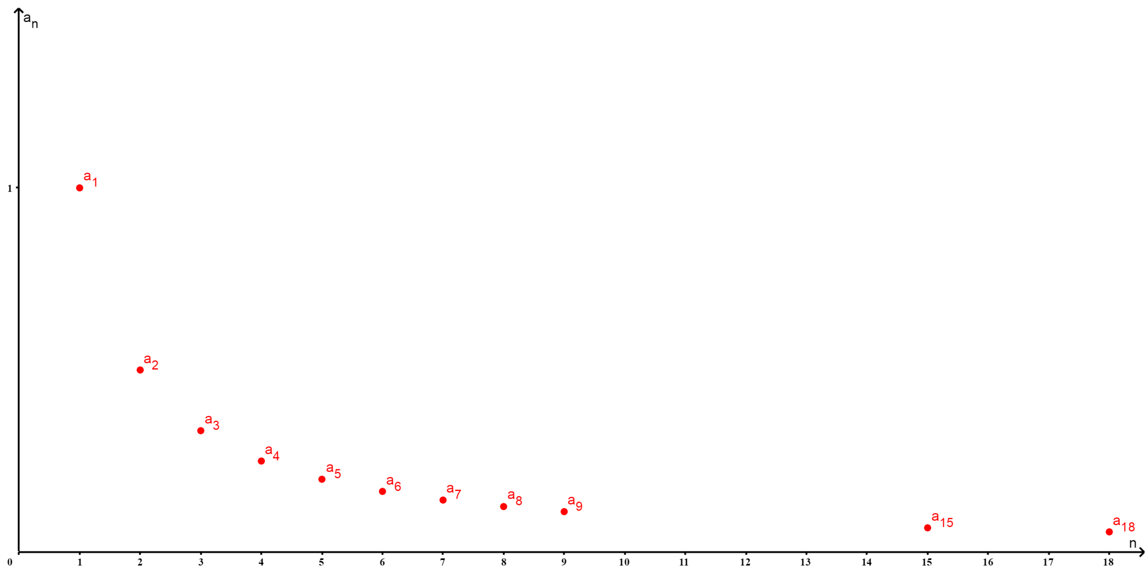


FIGURE 2.1 – $a_n = \dfrac{1}{n}$

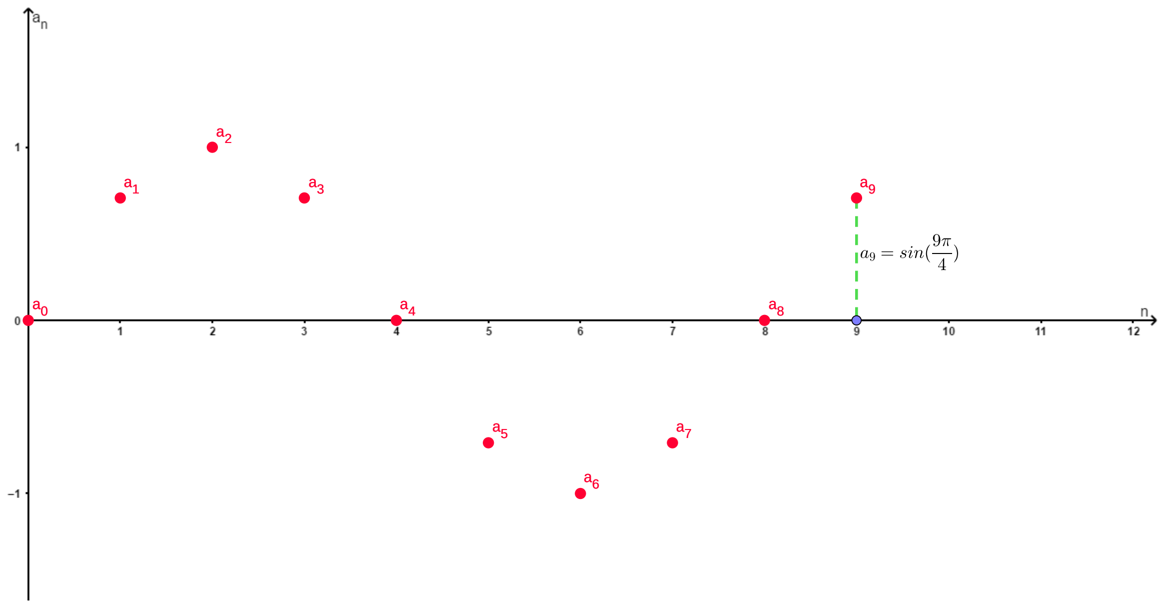


FIGURE 2.2 – $a_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$

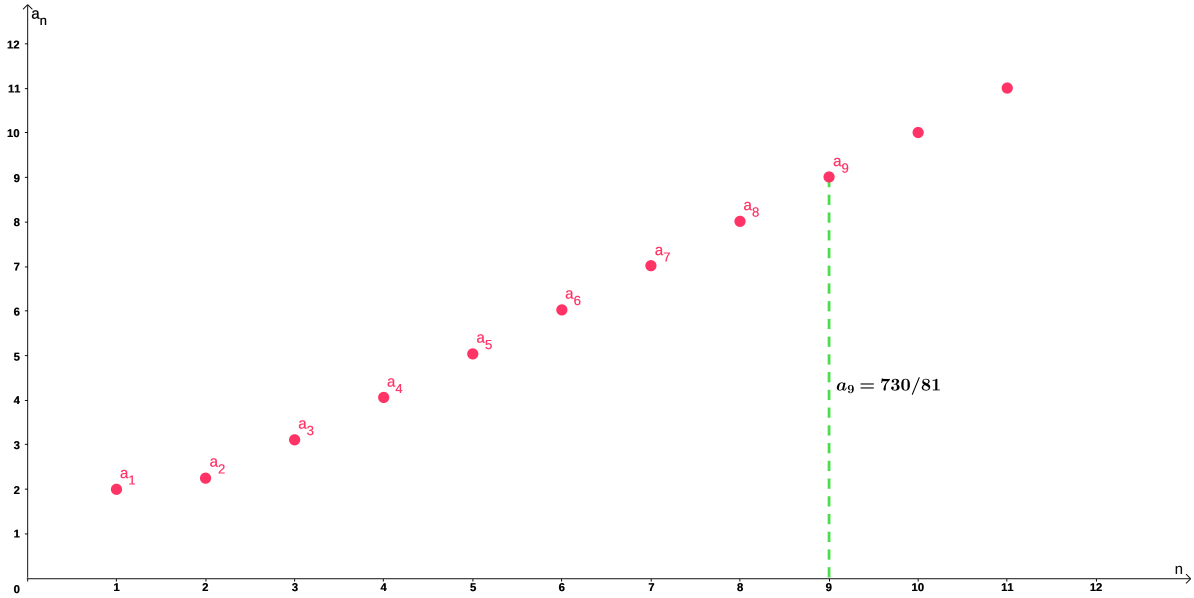


FIGURE 2.3 – $a_n = \dfrac{n^3+1}{n^2}$

(d) $(d_n)_{n\geq 4}$, avec $\qquad d_n = \dfrac{e^n}{\sqrt{n-3}}$.

2. **Par récurrence :** cette manière de définir une suite ne nécessite pas de connaitre la formule du terme générale a_n mais juste une relation de récurrence entre ses termes. Par exemple, soit la **suite de Fibonacci** qui est très connue définie comme suit

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

c'est à dire chaque terme (à partir du troisième) est la somme des deux termes qui le précèdent. Cette suite date du 13 ème siècle lorsque le mathématicien italien Fibonacci a étudié la croissance d'une population des lapins. Un autre exemple

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 3 \\ u_n = \sqrt{u_{n-1} + u_{n-2}}, \quad n \geq 3 \end{cases}.$$

R Nous remarquons dans la Figure 2.1 que plus n croit $a_n = \dfrac{1}{n}$ devient petit. D'autre part, dans la figure 2.3 que plus n croit $a_n = \dfrac{n^3+1}{n^2}$ devient grand. Dans ce contexte, nous allons donner les définitions des suites croissantes et décroissantes.

Definition 2.1.1 Une suite $(a_n)_n$ est dite **croissante** lorsque $a_n \leq a_{n+1}$ pour tout n, c'est à dire

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots.$$

Une suite $(a_n)_n$ est dite **décroissante** si $a_n \geq a_{n+1}$ pour tout n, c'est à dire

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots.$$

Une suite est dite **monotone** si elle est soit croissante ou bien décroissante.

■ **Example 2.1** Montrons que la suite $(a_n)_n$ telle que $a_n = \frac{3}{n+7}$ est décroissante. Étant donné que

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{3}{n+8} - \frac{3}{n+7} \\ &= \frac{-3}{(n+7)(n+8)} < 0 \text{ pour tout } n. \end{aligned}$$

■

■ **Example 2.2** Soit la suite $(a_n)_n$ avec $a_n = \frac{n}{n^2+1}$, montrons qu'elle est décroissante. Comme

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{(n+1)^2+1} - \frac{n}{n^2+1} \\ &= \frac{(n+1)(n^2+1) - n\left((n+1)^2+1\right)}{\left((n+1)^2+1\right)(n^2+1)} \\ &= \frac{-n^2-n+1}{\left((n+1)^2+1\right)(n^2+1)} < 0 \end{aligned}$$

vu que pour tout $n \geq 1$, on a $n^2+n > 1$. ■

2.2 Convergences des suites réelles

La figure 2.4 montre que les termes de la suite $(a_n)_n$ s'approchent de 1 lorsque n devient grand. En fait,

$$1 - a_n = \frac{1}{n+1}$$

peut être rendu aussi petit que l'on veut en choisissant n suffisamment grand, c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

D'une manière générale

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

signifie que a_n tend vers l lorsque n devient grand.

Definition 2.2.1 On dit qu'une suite $(a_n)_n$ admet une limite l, avec l est un nombre réel et on note

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

lorsque les termes a_n peuvent être rendus aussi proches de l que l'on veut en prenant n suffisamment grand.

Si la limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe on dit que la suite **converge** ou qu'elle est **convergente**.

Une suite quand elle n'est pas convergente, elle s'appelle **divergente**.

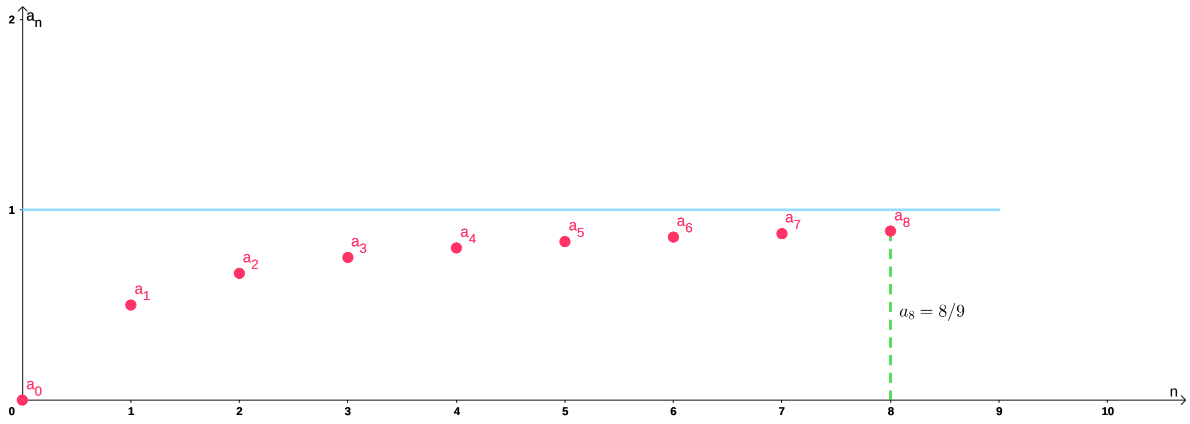


FIGURE 2.4 – $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

R Si une suite converge, alors certainement sa limite est **unique**. Donc une suite qui admet deux limites ou plus est divergente. Par exemple, la suite $a_n = (-1)^n$ possède -1 et 1 comme limites, elle est divergente.

2.2.1 Quelques exemples des suites convergentes

■ **Example 2.3** La suite définie par son terme général $a_n = \dfrac{5n^2}{2n^2+1}$ converge vers $l = \dfrac{5}{2}$ (voir Fig 2.5). Vu que,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{2n^2} = \frac{5}{2}.$$

■

■ **Example 2.4** La suite définie par son terme général $b_n = \dfrac{\ln n}{n} + 1$ converge vers $l = 1$ (voir Fig 2.5). Du moment que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln n}{n} + 1\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}\right) + 1 = 1.$$

■

■ **Example 2.5** Soit la suite dont le terme général est $c_n = e^{-n} + 1$, elle converge vers $l = 1$ (voir Fig 2.5). Comme

$$\lim_{n\to\infty} \left(e^{-n} + 1\right) = \left(\lim_{n\to\infty} e^{-n}\right) + 1 = 1.$$

■

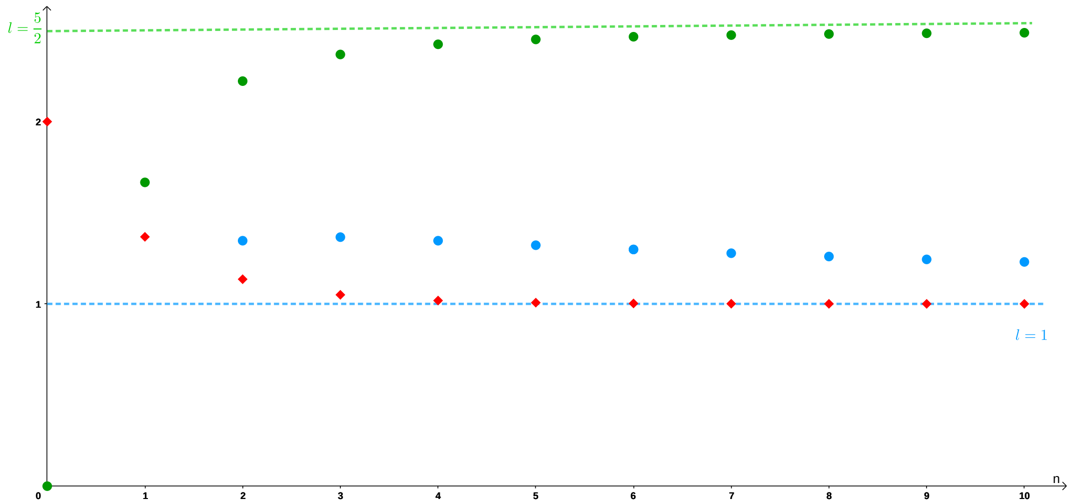


FIGURE 2.5 – $a_n = \frac{5n^2}{2n^2+1}$, $b_n = \frac{\ln n}{n} + 1$, $c_n = e^{-n} + 1$

2.2.2 Quelques exemples de suites divergentes

■ **Example 2.6** Soit la suite du terme général $u_n = \frac{n^2}{3n+1}$, elle diverge vers ∞ (voir Fig 2.6), car

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{n^2}{3n+1} = \infty.$$

■

■ **Example 2.7** Soit la suite dont le terme général est $v_n = 1 + (-1)^n$. Nous avons deux valeurs possibles des termes de cette suites :

$$v_n = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

donc cette suite ne s'approche d'aucun élément à l'infini (voir Fig 2.6). Par conséquent, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+(-1)^n)$ n'existe pas. Autrement dit, $\{v_n\}$ est divergente. ■

■ **Example 2.8** Soit la suite du terme général $w_n = n\cos(n\pi)$. $\cos(n\pi)$ oscillent et prend des valeurs dans l'intervalle $[-1,1]$ jusqu'à l'infini, donc elle n'admet pas une limite. Ensuite, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, ce qui donne $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \infty$, c'est à dire cette suite diverge vers ∞. Dans la fig 2.7, on peut voir que la fonction $f(x) = x\cos(x\pi)$ tend vers l'infini quand x est grand.
■

Dans les exemples précédents, le calcul de la limite était évident, mais ce n'est pas toujours le cas. Parfois, nous avons besoin de faire des estimations et appliquer la règle des gendarmes ou de Sandwich :

Proposition 2.2.1 Soient $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ des suites réelles, si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on avons

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = l,$$

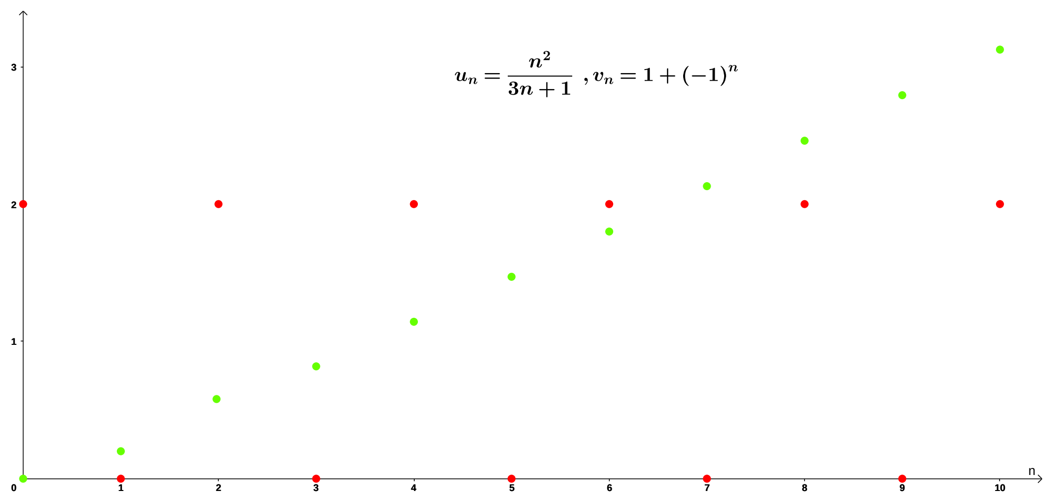


FIGURE 2.6 – Exemples de suites divergentes : $u_n = \dfrac{n^2}{3n+1}$ et $v_n = 1 + (-1)^n$

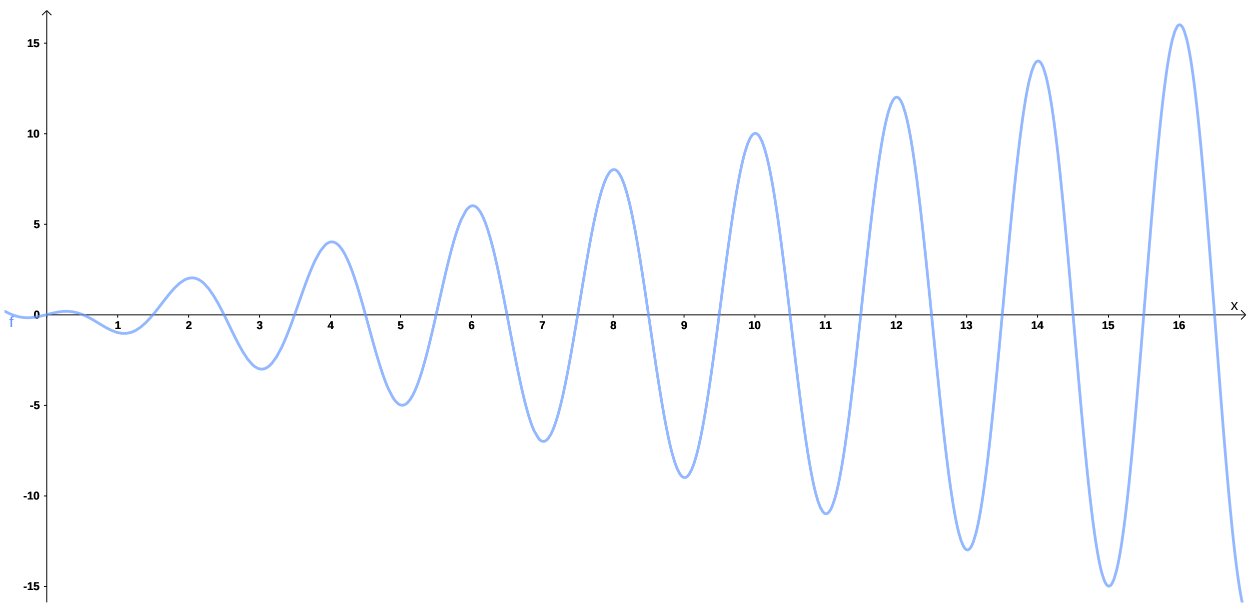


FIGURE 2.7 – Présentation graphique de $f(x) = x\cos(x\pi)$

alors certainement

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = l.$$

■ **Example 2.9** Allons regarder la convergence de $(u_n)_n$ tel que

$$u_n = \frac{[\sqrt{2}]+[2\sqrt{2}]+[3\sqrt{2}]+\cdots+[n\sqrt{2}]}{n^2}.$$

D'après la définition de partie entière on a

$$[\sqrt{2}]+[2\sqrt{2}]+[3\sqrt{2}]+\cdots+[n\sqrt{2}] \le \sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+\cdots+n\sqrt{2} = \sqrt{2}\frac{n(n+1)}{2}.$$

En revanche,

$$[\sqrt{2}]+[2\sqrt{2}]+[3\sqrt{2}]+\cdots+[n\sqrt{2}] \ge \sqrt{2}-1+2\sqrt{2}-1+3\sqrt{2}-1+\cdots+n\sqrt{2}-1 = \sqrt{2}\frac{n(n+1)}{2}-n.$$

Par conséquent,

$$\sqrt{2}\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{1}{n} \le u_n \le \sqrt{2}\frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

Enfin, en appliquant la règle des gendarmes on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

■

La définition que nous avons présenter sur la convergence n'est pas précise. Maintenant, nous présentons une définition plus théorique.

Definition 2.2.2 Soit $(a_n)_n$ une suite réelle, on dit que $(a_n)_n$ converge vers l et on note

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l$$

si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ associé à $\varepsilon > 0$ satisfaisant

$$\forall n \ge N(\varepsilon) : |a_n - l| < \varepsilon.$$

En symboles mathématiques la convergence est équivalente à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \ge N(\varepsilon) : |a_n - l| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Cette définition veut dire que $(a_n)_n$ est convergente vers l si on peut rendre la différence $|a_n - l|$ aussi petite que l'on veut pour n suffisamment grand.

■ **Example 2.10** Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. En effet, soit $\varepsilon > 0$, alors

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon},$$

donc il suffit de choisir $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, dans ce cas on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}, \forall n \ge N(\varepsilon) : |u_n - 0| < \varepsilon.$$

■

Maintenant, si on veut montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$, on utilise la définition suivante :

Definition 2.2.3 Soit $(a_n)_n$ une suite réelle, on dit que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$$

si pour tout réel $M > 0$, il existe un nombre correspondant $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N : |a_n| > M.$$

En symboles mathématiques la divergence vers l'infini est équivalente à

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |a_n| > M. \tag{2.2}$$

■ **Example 2.11** Démontrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$. En fait, soit $M > 0$, alors

$$|n^2| > M \Longleftrightarrow n > \sqrt{M},$$

donc il suffit de choisir $N = \left[\sqrt{M}\right] + 1$ ce qui implique que

$$\forall M > 0, \exists N = \left[\sqrt{M}\right] + 1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |n^2| > M.$$

■

2.2.3 Propriétés des suites convergentes

Dans le tableau suivant, nous présentons quelques lois des limites de suites convergentes. Soient $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ des suites convergentes et c une constante réelle.

Opération	*Limite*
Somme	$\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n + \beta_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n + \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$
Différence	$\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n - \beta_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n - \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$
Multiplication par une constante	$\lim\limits_{n\to\infty} (c\alpha_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$
Produit	$\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n \beta_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n\right)$
Quotient	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n}{\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n}$, si $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n \neq 0$
Puissance	$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n^p = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n\right)^p$, $a_n > 0$ et $p > 0$
Valeur absolue	$\lim\limits_{n\to\infty} \lvert\alpha_n\rvert = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$
f* continue en *l	$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n\right) = f(l)$

Tableau 1 : Lois des limites pour les suites convergentes

La dernière propriété assure que si on applique une fonction continue à une suite convergente, la suite qui résulte est aussi convergente.

■ **Example 2.12** Soit la suite $(a_n)_n$, avec

$$a_n = \left(\frac{\cos^2 n}{n^3} + 32\right)^{\frac{1}{5}}.$$

En utilisant la propriété de puissance (voir Tableau 2.2.3) pour

$$b_n = \frac{\cos^2 n}{n^3} + 32 > 0$$

et $p = \dfrac{1}{5} > 0$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos^2 n}{n^3} + 32\right)^{\frac{1}{5}} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos^2 n}{n^3} + 32\right)\right]^{\frac{1}{5}} = (32)^{1/5} = 2.$$

■

■ **Example 2.13** Calculons la limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+2}$ si elle existe.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n n}{n^3+2}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^3+2} = 0.$$

Par conséquent, en raison de la propriété de la valeur absolue (voir Tableau 2.2.3),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+2} = 0.$$

■

■ **Example 2.14** Soit la suite $(a_n)_n$ tel que

$$a_n = \tan\left(\frac{2n\pi}{12n+1}\right).$$

Notons,

$$b_n = \frac{2n\pi}{12n+1},$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\pi}{6}.$$

Comme la fonction $\tan x$ est continue au point $\dfrac{\pi}{6}$, on applique la propriété de continuité (Voir Tableau 2.2.3), on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\tan\left(\frac{2n\pi}{12n+1}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}.$$

■

R La somme de deux suites divergentes n'est pas forcément divergente, comme par exemple les suites $a_n = n$ et $b_n = 2 - n$ qui divergent or leur somme converge. Néanmoins, la somme de deux suites l'une convergente et l'autre divergente diverge. Ceci parait très logique et ne nécessite pas une démonstration.

2.2.4 Suites bornées sur $\mathbb{R}$

Les suites réelles bornées ont des propriétés spéciales que nous allons découvrir dans cette section.

Definition 2.2.4 Une suite $(a_n)_n$ est **bornée supérieurement** (majorée) s'il existe un nombre réel M tel que

$$a_n \leq M \quad \text{pour tout } n.$$

D'autre part, elle est dite **bornée inférieurement** (minorée) s'il existe un nombre réel m tel que

$$a_n \geq m \quad \text{pour tout } n.$$

Si elle est majorée et minorée, alors $(a_n)_n$ est bornée.

■ **Example 2.15** La suite du terme général $a_n = e^n$ est minorée mais pas majorée, car

$$e^n \geq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} e^n = +\infty.$$

Néanmoins, la suite du terme général $b_n = -e^n$ est majorée par -1 mais pas minorée. ■

■ **Example 2.16** Les suites définies par les termes $a_n = \sin n$ et $b_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ sont bornées, puisque

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1, \quad \text{pour tout n.}$$

■

Une suite quand elle est bornée, elle n'est pas nécessairement convergente, par exemple la suite du terme général $a_n = (-1)^n$ elle satisfait $-1 \leq a_n \leq 1$ mais elle est divergente. D'autre part, une suite monotone n'est pas nécessairement convergente comme $a_n = 2^n$ qui est croissante mais divergente. Néanmoins, une suite lorsque elle est à la fois croissante et majorée elle est forcement convergente ; on peut accepter ceci logiquement sans démonstration, par exemple dans Fig 2.3 la suite $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ est majorée et elle croît, donc ses termes vont automatiquement s'approcher d'un nombre réel fixe. De même, toute suite décroissante et minorée est convergente.

Theorem 2.2.2
— Une suite réelle lorsqu'elle est croissante et majorée est certainement convergente.
— En revanche, Une suite quand elle est décroissante et minorée est forcement convergente.

Exercice d'entrainement 1 :

Soit la suite dont le terme général est

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

1. Montrons que pour tout n

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \ln(n) + 1.$$

pour $n = 1$ on a

$$\ln(2) \leq 1 \leq \ln(1) + 1$$

donc c'est vraie. Supposons par récurrence que

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \ln(n) + 1$$

et vérifions que

$$\ln(n+2) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) + 1.$$

L'hypothèse de la récurrence donne

$$\ln(n+1) + \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \leq \ln(n) + 1 + \frac{1}{n+1}.$$

D'après les Fig 2.8 et Fig 2.9 on peut voir clairement que

$$f(x) \geq g(x)$$

et

$$h(x) \leq m(x)$$

pour tout x réel. D'où le résultat.

2. Montrons que $(a_n)_n$ est une suite décroissante et positive. Pour ce faire, calculons $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0$$

on peut voir facilement que la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln(x)$$

est négative (voir Fig 2.10). De plus, d'après la question précédente il vient

$$a_n \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq 0.$$

3. Conclure. Comme $(a_n)_n$ est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

Dans ce qui suit nous présentons la notion d'une suite de Cauchy. **Augustin Louis Cauchy (1789-1857)** est un mathématicien français, un académicien et professeur à l'école polytechnique de Paris. Ce mathématicien a vu les suites convergentes sur $\mathbb{R}$ d'une façon différente et intéressante :

Definition 2.2.5 Une suite réelle $(a_n)_n$ est dite de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N : |u_p - u_q| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Un théorème s'impose directement après cette définition qui dit qu'une suite convergente est nécessairement une suite de Cauchy et vice-versa.

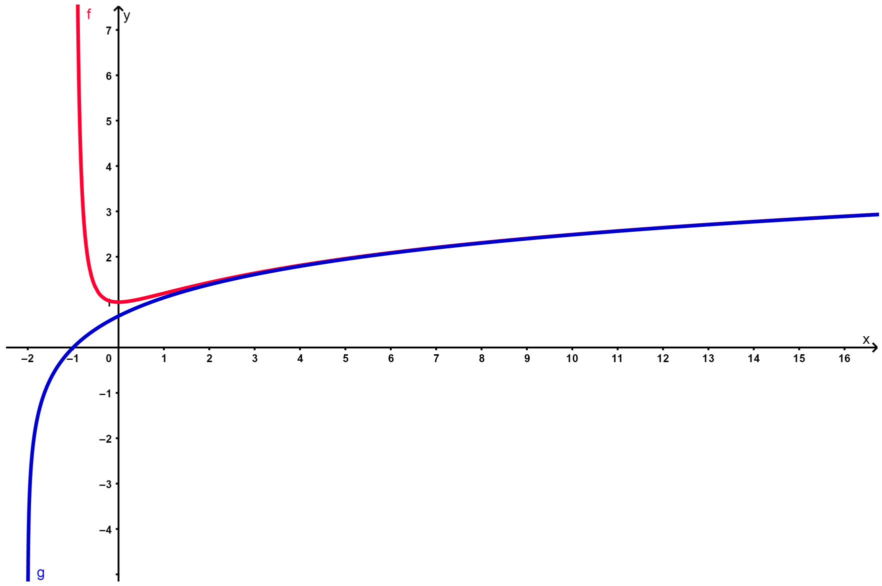


FIGURE 2.8 – Présentation graphique des fonctions $f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}$ et $g(x) = \ln(x+2)$

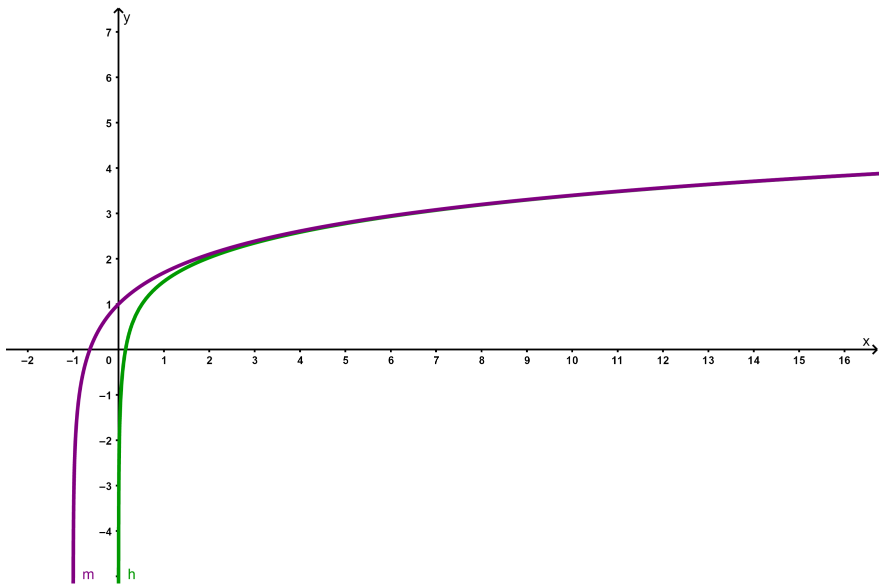


FIGURE 2.9 – Présentation graphique des fonctions $h(x) = \ln(x) + 1 + \frac{1}{x+1}$ et $m(x) = \ln(x+1) + 1$

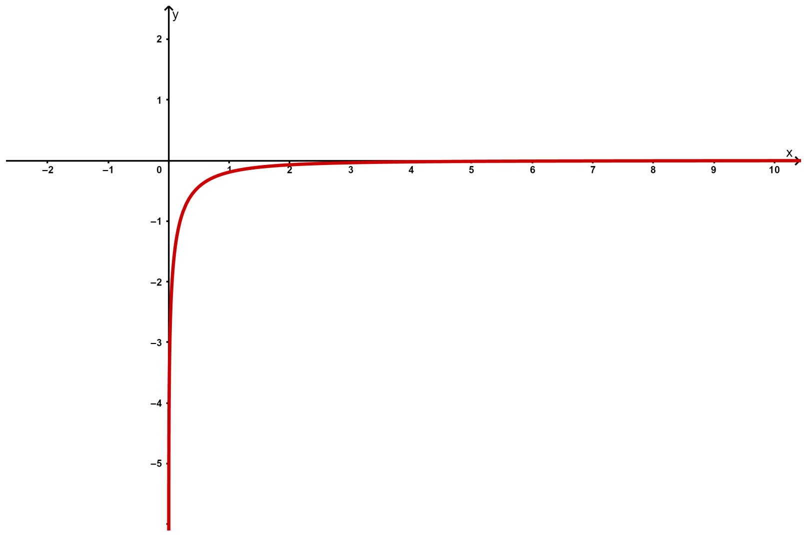


FIGURE 2.10 – Présentation graphique de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln(x)$

Theorem 2.2.3 Une suite $(a_n)_n$ réelle converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Généralement dans la pratique ce théorème est utilisé pour démontrer qu'une suite n'est pas convergente, alors tout simplement il suffit de démontrer qu'elle n'est pas de Cauchy.

■ **Example 2.17** Montrons que la suite suivante n'est pas convergente

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Montrons qu'elle n'est pas de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, pour $p = n$ et $q = 2n$ on a

$$\begin{aligned}
|a_p - a_q| &= \left|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Cela implique que si on choisit $\varepsilon = 1/3$, nous allons pas trouver $N \in \mathbb{N}$ pour lequel on a pour tout p et q plus grand que N : $|u_p - u_q| < 1/3$. Ce qui achève la démonstration. ■

2.2.5 Sous-suites

Soit $(a_n)_n$ une suite du terme général $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Si n est pair, alors $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, sinon si n est impair, on aura $a_n = \frac{-1}{\sqrt{n}}$. Plus précisément,

$$\begin{cases} a_{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}, \\[2ex] u_{2n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}. \end{cases}$$

Considérons deux applications $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, avec

$$\sigma(n) = 2n, \quad \rho(n) = 2n+1.$$

Ces deux applications sont strictement croissantes. En fait,

$$\begin{array}{rcl} \sigma(n+1) & = & 2(n+1) \\ & > & 2n = \sigma(n). \end{array}$$

De plus,

$$\begin{array}{rcl} \rho(n+1) & = & 2(n+1)+1 \\ & = & 2n+1+2 = \rho(n)+2 \\ & > & \rho(n). \end{array}$$

On note par $\alpha_n = u_{\sigma(n)}$ et $\beta_n = u_{\rho(n)}$, alors $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ sont appelées sous-suites de

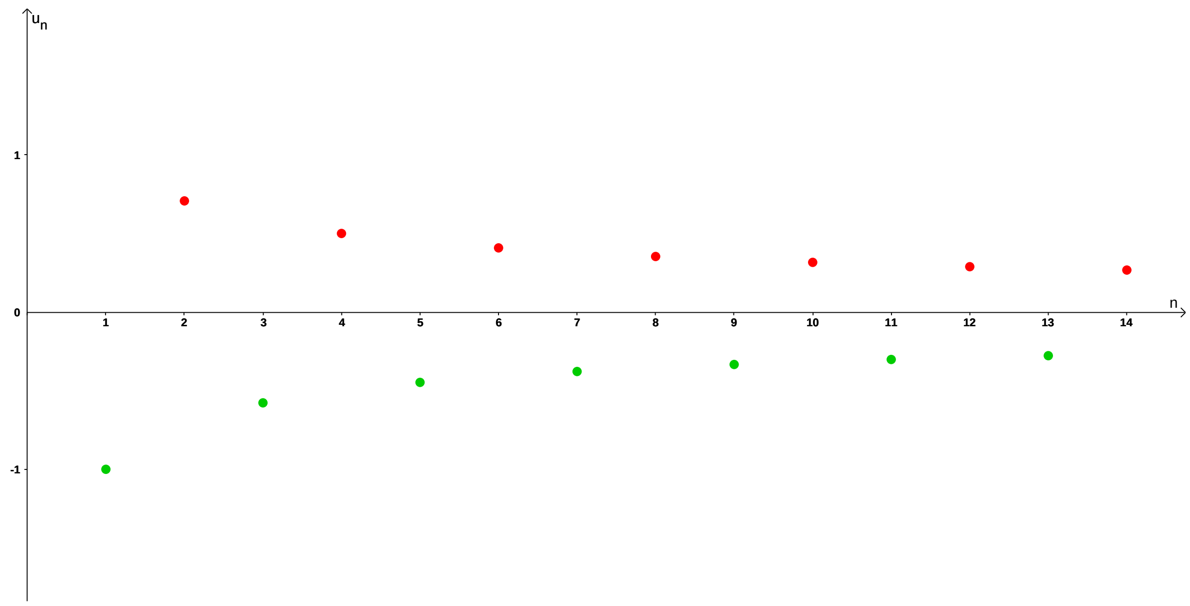


FIGURE 2.11 – Sous-Suites : $u_{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ et $u_{2n+1} = \dfrac{-1}{\sqrt{2n+1}}$

$(a_n)_n$.

Definition 2.2.6 Soit $(a_n)_n$ une suite et $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application **strictement croissante**. La suite du terme général $\alpha_n = a_{\sigma(n)}$ est dite sous-suite de $(a_n)_n$.

Soit la question suivante : une sous-suite d'une suite divergente pourrait être convergente ? La réponse est oui. Justement quand une suite est divergente, on regarde la possibilité d'existence de sous-suites convergentes telles que leurs limites s'appellent **valeurs d'adhérence**.

Par exemple, la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2} + \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ est divergente, car la limite n'existe pas. En effet, $\dfrac{1}{n^2}$ tend vers 0 et $\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ n'admet pas de limite. Maintenant, on va chercher les valeurs d'adhérence de cette suite, dans le cas où elles existent. Les sept premières valeurs de $(u_n)_n$ sont (voir le graphe dans Fig 2.12)

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = -1, \quad u_4 = 0, \quad u_5 = 1, \quad u_6 = 0, \quad u_7 = -1.$$

Donc, on remarque que pour les indices pairs $u_{2n} = \dfrac{1}{4n^2}$ et pour ceux qui sont impairs,

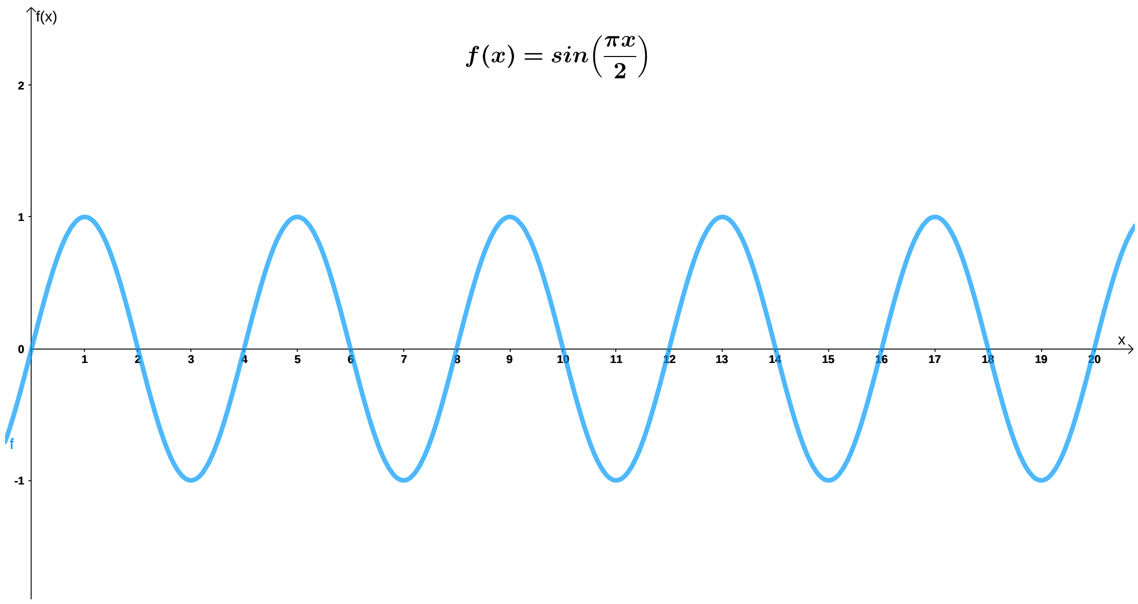


FIGURE 2.12 – Présentation graphique de $f(x) = \sin\left(\dfrac{x\pi}{2}\right)$

on a $u_{2n+1} = \dfrac{1}{(2n+1)^2} + (-1)^n$. Le cas des indices impairs est aussi divisé en deux cas possibles

$$u_{2n+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{(2n+1)^2} + 1 \text{ si } n = 2k, \\ \\ \dfrac{1}{(2n+1)^2} - 1 \text{ si } n = 2k+1. \end{cases}$$

En remplaçant n par $2k$ et $2k+1$, on obtient

$$u_{4k+1} = \frac{1}{(4k+1)^2} + 1, \quad u_{4k+3} = \frac{1}{(4k+3)^2} - 1.$$

Enfin, on considère les trois applications $\sigma_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sigma_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\sigma_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, telles que

$$\sigma_1(n) = 2n, \quad \sigma_2(n) = 4n+1, \quad \sigma_3(n) = 4n+3.$$

Enfin, les valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ sont

$$\{-1, 0, 1\}.$$

Dans la notion des sous-suites, il existe un résultat important présenté dans le théorème suivant.

Theorem 2.2.4 Soit $(a_n)_n$ une suite réelle. Soit $l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ si et seulement si toute suite extraite de $(a_n)_n$ converge vers l.

On sait que si p et q sont des propositions mathématiques, on a

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}).$$

D'après la théorème précédent, on peut déduire que si une suite admet au moins deux sous-suites convergentes vers deux limites différentes, alors cette suite est divergente.

■ **Example 2.18** Soit la suite $(a_n)_n$ tel que

$$a_n = \frac{(-1)^n 2n^3}{n^3+2n^2+1}.$$

On remarque que pour les n pairs $a_n = \dfrac{2n^3}{n^3+2n^2+1}$ sont positifs et ils sont représentés dans Fig 2.13 en couleur rouge. Pour les n impairs $a_n = -\dfrac{2n^3}{n^3+2n^2+1}$ sont négatifs et ils sont présentés en couleur verte dans Fig 2.13. Ainsi, considérons les sous-suites :

$$u_n = a_{2n} = \frac{2(2n)^3}{(2n)^3+2(2n)^2+1} = \frac{16n^3}{8n^3+8n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 2$$

et

$$v_n = a_{2n+1} = -\frac{2(2n+3)^3}{(2n+3)^3+2(2n+3)^2+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = -2.$$

Donc, nous avons deux sous suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ extraites de la suite $(a_n)_n$ qui convergent vers deux valeurs différentes. D'après le théorème précédent, la suite $(a_n)_n$ est divergente.
■

Maintenant, on va énoncer un théorème utile sur les sous-suites de **Bolzano-Weierstrass (1830)** qui dit que dans le cas d'une suite bornée, on peut toujours en extraire une sous-suite convergente.

Theorem 2.2.5 D'une suite de nombres réels, on peut toujours en extraire une sous-suite qui converge.

■ **Example 2.19** La suite du terme générale

$$a_n = \frac{n^2 \cos n}{n^2+1}$$

est divergente comme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

et $\lim_{n\to\infty} \cos \pi n$ n'existe pas. Graphiquement, on peut tracer la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 \cos \pi x}{x^2+1}$ pour apercevoir le comportement de la suite $(a_n)_n$, pour les n grands (voir Fig 2.14).

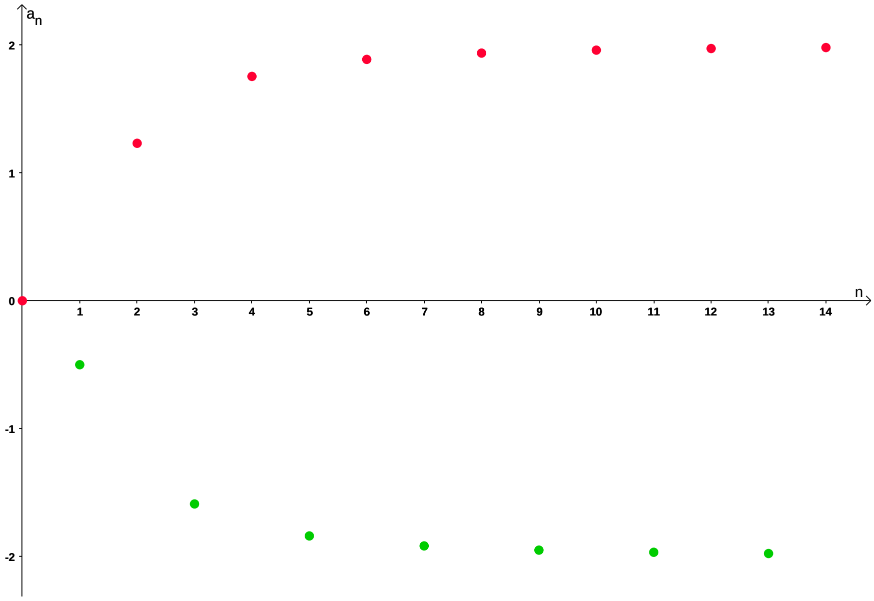


FIGURE 2.13 – Suite $a_n = \dfrac{(-1)^n 2n^3}{n^3+2n^2+1}$

On peut vérifier facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-1 \leq a_n \leq 1.$$

Donc, cette suite est bornée. Grâce au théorème de **Bolzano-Weierstrass**, on est sûr de l'existence d'une sous-suite convergente de $(a_n)_n$. Considérons par exemple l'application $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tel que $\rho(n) = 2n$ qui est strictement croissante. Par conséquent,

$$u_n = a_{\rho(n)} = \frac{(2n)^2 \cos(2\pi n)}{(2n)^2+1} = \frac{4n^2}{4n^2+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 1.$$

■

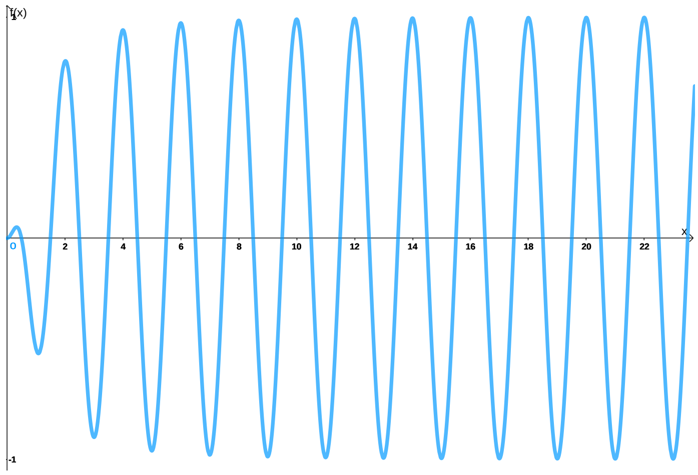


FIGURE 2.14 – Présentation graphique de $f(x) = \dfrac{x^2 \cos \pi x}{x^2+1}$

2.2.6 Suites adjacentes

Soient deux suites réelles $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$, on dit qu'elles sont adjacentes si les deux conditions suivantes sont satisfaites

- l'une des deux suites est croissante et l'autre est décroissante,
- la suite $a_n - b_n$ converge vers 0.

■ **Example 2.20** Soient les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$a_n = \frac{n}{3(n+3)}, \quad b_n = \frac{n}{3(n+3)} + \frac{1}{n}.$$

D'une part, on a

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n+4} - \frac{n}{n+3}\right) = \frac{1}{(n+3)(n+4)} > 0.$$

Ce qui implique que $(a_n)_n$ est croissante. D'autre part,

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \left(\frac{n+1}{3(n+4)} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{n}{3(n+3)} + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{(n+3)(n+4)} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{-6n+7}{n(n+1)(n+3)(n+4)} < 0. \end{aligned}$$

donc, $(b_n)_n$ est décroissante. Enfin,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0.$$

En conclusion, les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes. ■

Exercice d'entrainement 2 :

Soient les suites

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad v_n = e + \frac{1}{n!}.$$

1. Montrons que $(u_n)_n$ est croissante et que $(v_n)_n$ est décroissante. Du moment que

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} > 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(e + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(e + \frac{1}{n!}\right) \\ &= -\frac{n}{(n+1)!} < 0. \end{aligned}$$

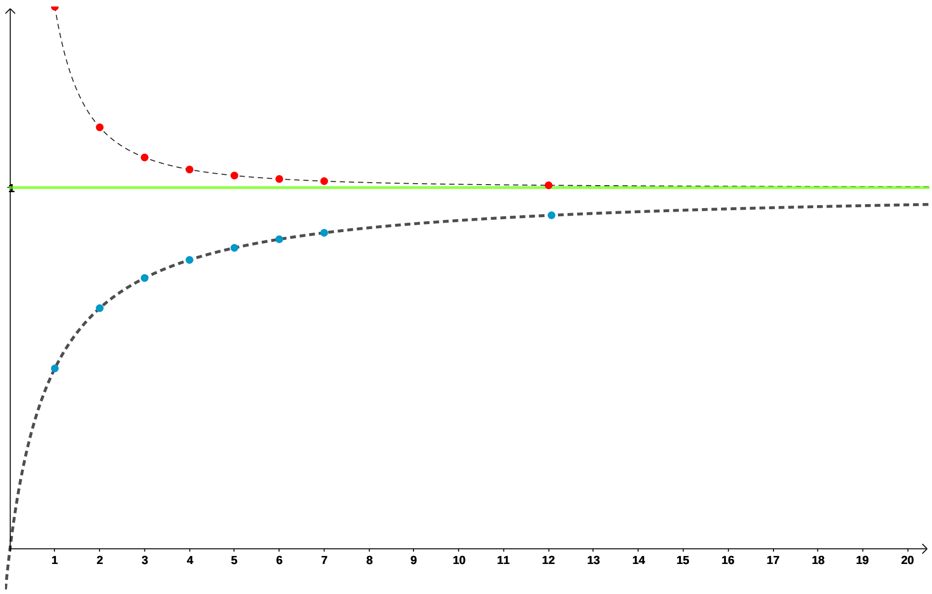


FIGURE 2.15 – Suites adjacentes $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$

2. Si on sait que
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e,$$
déterminons la limite de $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)$. On a
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n) &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}-e-\frac{1}{n!}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)-\lim_{n\to+\infty}\left(e+\frac{1}{n!}\right)\\ &= e-e=0.\end{aligned}$$
On en déduit que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

2.3 Suites récurrentes

Dans cette partie, on s'intéresse à l'étude des suites récurrentes de la forme

$$\begin{cases} u_{n+1}=f(u_n), \\ u_0 \text{ ou } u_1 \text{ est le premier terme} \end{cases} \tag{2.4}$$

où f est une fonction continue sur $D\subset\mathbb{R}$ et $u_0\in D$. Étant donné que l'étudiant préfère toujours la pratique, alors la meilleure façon de présenter les suites récurrentes est de le faire à travers des exemples, ici, nous avons choisi certains qui apparaissent dans la biologie.

■ **Example 2.21** Soit une population de bactéries qui se reproduisent suivant la suite récurrente :

$$\begin{cases} b_{n+1} = \dfrac{1}{4} b_n(1-b_n),\ n \in \mathbb{N} \\ \\ b_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{2.5}$$

b_n est la concentration des bactéries après n jours. Allons étudier cette suite.

1. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq 1$. Tout d'abord on a $b_0 \leq 1$ supposons que $b_n \leq 1$ et montrons que $b_{n+1} \leq 1$:
$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{4} b_n(1-b_n) \\ &= \frac{1}{4} b_n - \frac{1}{4} b_n^2 \\ &\leq \frac{1}{4} b_n \leq 1. \end{aligned}$$
2. Maintenant, vérifions que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \geq 0$. C'est vraie pour $n = 0$. Supposons que $b_n \geq 0$ et montrons $b_{n+1} \geq 0$. Comme $b_n \leq 1$, alors
$$b_{n+1} = \frac{1}{4} b_n(1-b_n) \geq 0.$$
3. Allons établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$|b_{n+1} - b_n| \leq \frac{3}{4} |b_n - b_{n-1}|.$$
En effet,
$$\begin{aligned} |b_{n+1} - b_n| &= \left| \frac{1}{4} b_n(1-b_n) - \frac{1}{4} b_{n-1}(1-b_{n-1}) \right| \\ &= \left| \frac{1}{4}(b_n - b_{n-1}) - \frac{1}{4}(b_n^2 - b_{n-1}^2) \right| \\ &= \left| \frac{1}{4}(b_n - b_{n-1}) - \frac{1}{4}(b_n - b_{n-1})(b_n + b_{n-1}) \right| \\ &\leq \frac{1}{4} |b_n - b_{n-1}| + \frac{1}{4} |b_n - b_{n-1}| |b_n + b_{n-1}| \\ &\leq \frac{1}{4} |b_n - b_{n-1}| + \frac{1}{4} \left(|b_n| + |b_{n-1}| \right) |b_n - b_{n-1}| \\ &\leq \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) |b_n - b_{n-1}|. \end{aligned}$$
D'où le résultat désiré.
4. A partir de ce qui précède, montrons que $(b_n)_n$ est une suite de Cauchy. On peut vérifier facilement grâce à la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|b_{n+1} - b_n| \leq \left(\frac{3}{4} \right)^n |b_1 - b_0|.$$

Soient $\varepsilon > 0$, $p = n+m$ et $q = n$ pour n et m des naturels arbitrairement fixés. Alors

$$\begin{aligned}
|b_p - b_q| &= |b_{n+m} - b_n| \\
&= |b_{n+m} - b_{n+m-1} + b_{n+m-1} - b_{n+m-2} + b_{n+m-2} - b_{n+m-3} + \cdots + b_{n+1} - b_n| \\
&\leq |b_{n+m} - b_{n+m-1}| + |b_{n+m-1} - b_{n+m-2}| + |b_{n+m-2} - b_{n+m-3}| + \cdots + |b_{n+1} - b_n| \\
&\leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+m-1} |b_1 - b_0| + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+m-2} |b_1 - b_0| + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n} |b_1 - b_0| \\
&\leq \left(\frac{3}{4}\right)^{2n-1} |b_1 - b_0| + \left(\frac{3}{4}\right)^{2n-2} |b_1 - b_0| + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n} |b_1 - b_0|, \text{ car } 3/4 < 1 \\
&\leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n} \left(1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^m\right) |b_1 - b_0| \\
&\leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n} \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{m+1}}{1 - \frac{3}{4}} \\
&\leq 8\left(\frac{3}{4}\right)^{n},
\end{aligned}$$

alors pour ε suffisamment petit il vient

$$\begin{aligned}
8\left(\frac{3}{4}\right)^{n} < \varepsilon &\iff \left(\frac{3}{4}\right)^{n} < \frac{\varepsilon}{8} \\
&\iff n \ln\left(\frac{3}{4}\right) < \ln\left(\frac{\varepsilon}{8}\right) \\
&\iff n > \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, il suffirait de prendre

$$N = \left[\frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}\right] + 1, \text{ car } \frac{3}{4} < 1,\ \frac{\varepsilon}{8} < 1.$$

Ce qui fallait démontrer.

5. Allons déterminer la limite de $(b_n)_n$. Puisque $(b_n)_n$ est une suite de Cauchy, alors forcement elle est convergente et elle admet une unique limite qu'on note ici η, donc

$$\lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4} b_n(1 - b_n) \iff \eta = \frac{1}{4}\eta(1-\eta)$$

Par conséquent, il existe deux possibilités soit $\eta = 0$ ou bien $\eta = -3$. Puisque $0 \leq b_n \leq 1$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

∎

■ **Example 2.22** Cet exemple représente la modélisation d'un problème en écologie. Plus précisément, on s'intéresse à modéliser l'aquaculture de saumon. La Norvège est le plus grand pays productif du saumon atlantique. Ce type de poisson a une phase en eau douce et une autre en eau de mer durant son cycle de vie. L'aquaculture se fait dans des bassins comme dans Fig 2.16. On souhaite élever des poissons dans un bassin. Sachant que leur

FIGURE 2.16 – **Aquaculture du saumons norvégien**

nombre initial est $p_0 = 100$, nous calculons l'évolution de la population des poissons chaque jour. Mathématiquement, on peut modéliser ceci en utilisant la suite récurrente :

$$\begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{bp_n}{a+p_n}, \\ p_0 = 100 \end{cases}$$

Où p_n représente la taille de la population des poissons après n jours. a et b sont des constantes strictement positives qui dépendent de l'environnement et les espèces de poissons. On suppose que $a < b$.

1. Soit la fonction $h(x) = \dfrac{bx}{a+x}$, alors son domaine de définition est $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Montrons qu'elle est croissante. La dérivée de h est donnée par
$$h'(x) = \frac{ab}{(x+a^2)} > 0 \quad \text{sur } D.$$
2. Étudions la monotonie de $(p_n)_n$. Puisque h est croissante la différence $p_1 - p_0$ détermine la nature de suite (croissante ou décroissante). En fait,
   — si $p_1 - p_0 \geq 0$, alors supposons par récurrence que $p_n - p_{n-1} \geq 0$ et montrons que $p_{n+1} - p_n \geq 0$. On a
   $$p_{n+1} - p_n = h(p_n) - h(p_{n-1}) \geq 0$$
   du moment que h est croissante et $p_n \geq p_{n-1}$.
   — si $p_1 - p_0 \leq 0$, alors supposons par récurrence que $p_n - p_{n-1} \leq 0$ et montrons que $p_{n+1} - p_n \leq 0$. On a
   $$p_{n+1} - p_n = h(p_n) - h(p_{n-1}) \leq 0$$
   car h est croissante et $p_n \leq p_{n-1}$.

Dans notre cas, on a

$$p_1 - p_0 = \frac{100b}{100+a} - 100 = \frac{100(b-a) - 10000}{100+a} = \frac{100}{100+a}(b-a-100).$$

Il en résulte deux cas :
— Si $b-a \geq 100$: $(p_n)_n$ est croissante, c'est à dire la production du poisson augmente.
— Sinon si $b-a < 100$: $(p_n)_n$ est décroissante i.e la production du poisson diminue.

3. Déterminons dans les deux cas précédents la limite de $(p_n)_n$. On résout l'équation $h(\eta) = \eta$:

$$h(\eta) = l \Longleftrightarrow \eta^2 - (b-a)\eta = 0.$$

Il existe deux solutions de cette équation : $\eta_1 = 0$ et $\eta_2 = b-a$. Cela implique que si $(p_n)_n$ converge, sa limite est nécessairement 0 ou bien $b-a$. Si $b-a \geq 100$, on peut montrer par récurrence que pour tout n, $p_n \leq b-a$. Par ailleurs, si $b-a < 100$, on peut montrer par récurrence que pour tout n, $p_n \geq 0$. On conclut que
— Si $b-a \geq 100$, alors $(p_n)_n$ est croissante majorée donc convergente et sa limite est

$$\lim_{n\to\infty} p_n = b-a.$$

— Si $(b-a \leq 100)$, alors $(p_n)_n$ est décroissante minorée donc convergente et sa limite est

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 0.$$

Comme travail personnel, afin de fixer plus les idées, l'étudiant est vivement invité de refaire l'exemple précédent pour $a \geq b$. ■

On termine le chapitre par un schéma explicatif voir la Fig 2.17.

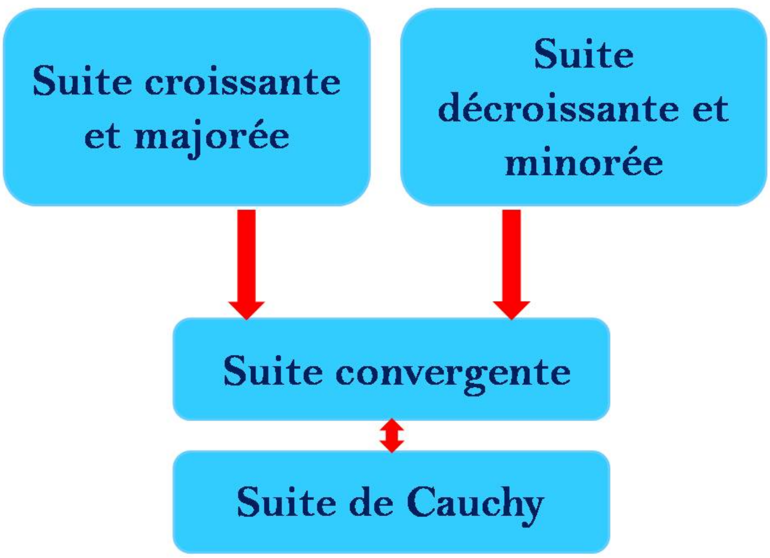
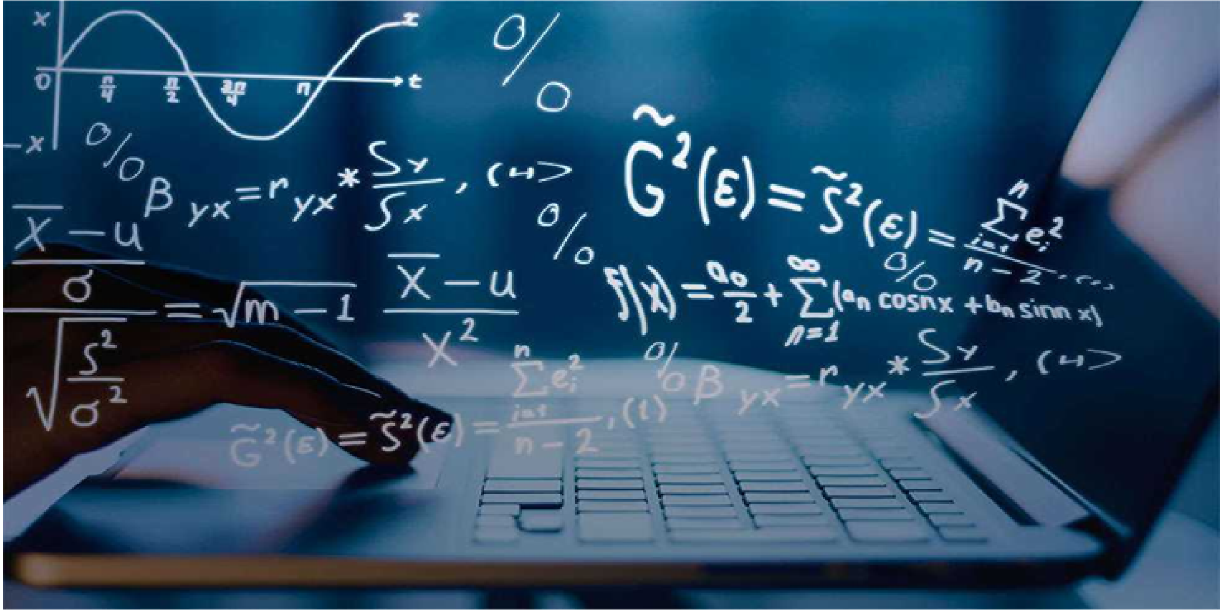


FIGURE 2.17 – **Suites réelles convergentes**



3. Fonctions d'une variable réelle

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions, leurs présentations graphiques, des façons de les transformer et de les composer. Nous abordons la notion de limite d'une fonction en un point ou à l'infini. Cette notion est employée pour regarder la continuité et la dérivabilité d'une fonction en un point.

3.1 Généralités

Une fonction réelle f est une règle qui associe à chaque élément x d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ **au plus** un élément, noté $f(x)$, d'un ensemble $F \subset \mathbb{R}$

$$f : E \to F.$$

On dit que $f(x)$ est l'**image** de x par la fonction f. L'ensemble des x appartenant à E pour lesquels il existe une image $f(x)$ est dit **domaine de définition** de f et on note D_f.

Une fonction peut être présentée par deux façons :

— **Numériquement :** en présentant un tableau de valeurs.

— **Algébriquement :** en la définissant par une formule explicite, par exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{2x^3}{x^2-9} \end{aligned}$$

le domaine de définition de f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)$ est bien définie, c'est à dire le dénominateur est non nul

$$x^2 - 9 \neq 0 \Longleftrightarrow (x \neq 3 \quad \text{et} \quad x \neq -3)$$

donc, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

Une fonction est visualisée par son graphique. Le graphe de f définie sur D_f est l'ensemble des couples :

$$\{(x, f(x)),\ x \in D_f\}.$$

Par exemple, Fig 3.1 représente le graphe de la fonction f définie ci-dessus.

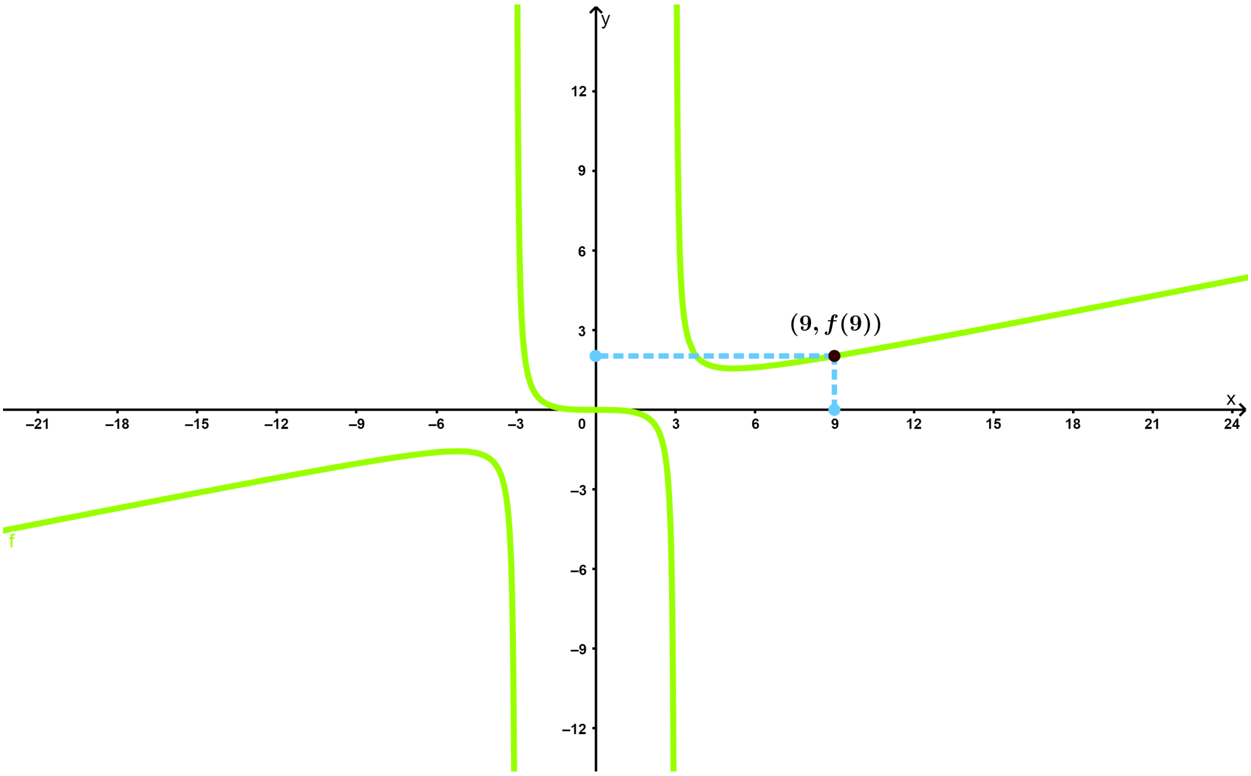


FIGURE 3.1 – Graphique de $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 - 9}$

Fonctions définies par morceaux

Les fonctions définies par morceaux sont celles qui sont définies par différentes formules selon des parties de son domaine de définition.

■ **Example 3.1** Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 8 - x^{\frac{1}{3}} & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \sqrt{x^2 + 1} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}.$$

■

La valeur absolue est aussi un exemple d'une fonction définie par morceaux, la partie entière aussi.

Fonctions paires, Fonctions impaires

Une fonction f, de domaine de définition D_f, satisfait

1. $\forall x \in D_f$, alors $-x \in D_f$ aussi,

2. $\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$.

s'appelle **paire**, son graphe est symétrique par rapport à l'axe OY (voir la fonction en couleur verte dans la Fig 3.2).

En revanche, une fonction f, de domaine de définition D_f, vérifiant

1. $\forall x \in D_f$, alors $-x \in D_f$ aussi,
2. $\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$.

est dite **impaire**, son graphe est symétrique par rapport à $(0,0)$ (voir la fonction en couleur rouge dans Fig 3.2).

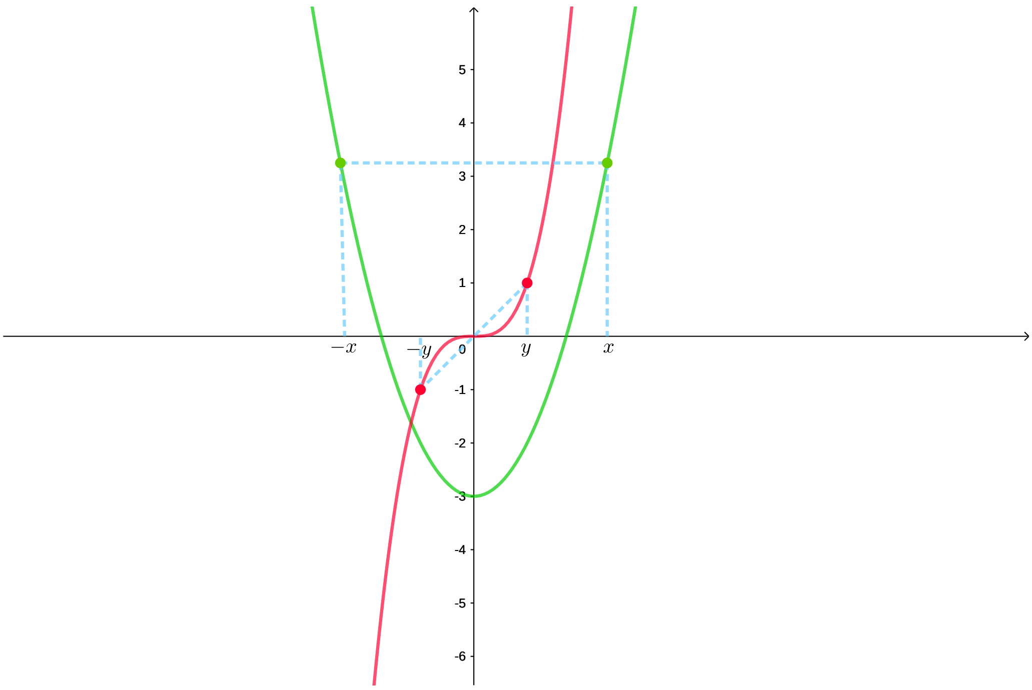


FIGURE 3.2 – Graphique d'une fonction paire et d'autre impaire

■ **Example 3.2** Soit $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x^4+1}$, elle est paire sur $\mathbb{R}$ car

$$f(-x) = \frac{e^{(-x)^2}}{(-x)^4+1} = \frac{x^2}{x^4+1} = f(x).$$

■

■ **Example 3.3** $g(x) = \dfrac{x^2\cos x}{sin^2 x+1}$, elle est paire sur $\mathbb{R}$ car

$$g(-x) = \frac{(-x)^2\cos(-x)}{sin^2(-x)+1} = \frac{x^2\cos x}{sin^2 x+1} = g(x).$$

■

■ **Example 3.4** Soit $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$, elle est impaire sur $\mathbb{R}$ car

$$h(-x) = \frac{(-x)}{\sqrt{(-x)^2+3}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = -h(x).$$

■

■ **Example 3.5** $m(x) = x|x|$ est impaire sur $\mathbb{R}$ car

$$m(-x) = (-x)|-x| = -x|x| = -m(x).$$

■

Néanmoins, certaines fonctions ne sont ni paires ni impaires, comme par exemple

$$i(x) = \frac{x+1}{x^2+1},$$

en fait

$$i(-x) = \frac{(-x)+1}{(-x)^2+1} = \frac{-x+1}{x^2+1}$$

qui est différente de $i(x)$ et de $-i(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Fonctions bornées

Une fonction f est dite **majorée** quand il existe un $M \in \mathbb{R}$ pour lequel f satisfait à

$$f(x) \leq M, \quad \text{pour tout } x \in D_f.$$

En revanche, la fonction f est dite **minorée** lorsqu'il existe un $m \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(x) \geq m, \quad \text{pour tout } x \in D_f.$$

Une fonction qui est à la fois majorée et minorée est dite **bornée**. Autrement dit, une fonction est bornée s'il existe un nombre réel $K > 0$ vérifiant

$$|f(x)| \leq K$$

pour chaque $x \in D_f$.

■ **Example 3.6** La fonction $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$ est bornée car

$$0 \leq \frac{2}{x^2+1} \leq 2, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

■

■ **Example 3.7** Les fonctions $g(x) = \sin x$ et $h(x) = \cos x$ sont bornées puisque

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \cos x \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

■

■ **Example 3.8** La fonction $x \mapsto \ln x$ n'est pas bornée, car quand x s'approche de 0, $\ln x$ tend vers $-\infty$, de plus pour x assez grand $\ln x$ tend vers l'infini ; ce qui implique qu'elle n'est ni majorée ni minorée. ■

Fonctions périodiques

Une fonction réelle f est dite périodique s'il existe un réel $T > 0$ pour lequel nous avons ces deux points

1. pour chaque $x \in \mathbb{R}$,
$$\big(x \in D_f \Rightarrow x+T \in D_f\big)$$
2. et pour tout $x \in D_f$,
$$f(x+T) = f(x).$$

Si T est le plus petit nombre vérifiant ces conditions, alors on dit que f est T-périodique.

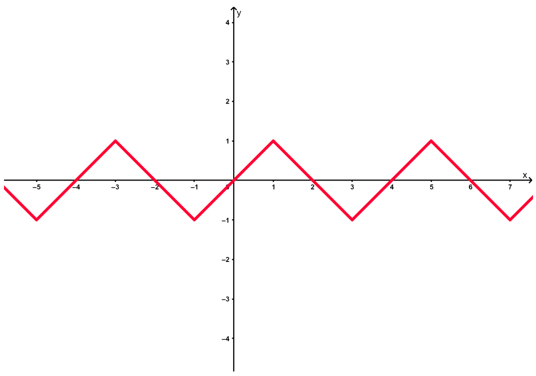
■ **Example 3.9** Regardons si la fonction
$$x \mapsto f(x) = \cos(3x+7)$$
est périodique. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$. Cherchons $T > 0$ pour lequel on a
$$\cos(3(x+T)+7) = \cos(3x+7),$$
en fait
$$\begin{aligned}
\cos(3(x+T)+7) = \cos(3x+7) &\iff \cos(3x+3T+7) = \cos(3x+7)\\
&\iff \cos(3x+7+3T) = \cos(3x+7)\\
&\iff 3x+7+3T = 3x+7+2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\\
&\implies 3T = 2k\pi \Rightarrow T = \frac{2k\pi}{3}.
\end{aligned}$$
La période d'une fonction est la plus petite valeur strictement positive. Donc, la période est $T = \dfrac{2\pi}{3}$. ■

■ **Example 3.10** On regarde si
$$x \mapsto g(x) = \sin^3\left(\frac{3\pi}{\sqrt{2}}x\right)$$
est une fonction périodique. Le domaine de définition de g est $\mathbb{R}$. Cherchons $T > 0$ pour lequel
$$\sin^3\left(\frac{3\pi}{\sqrt{2}}(x+T)\right) = \sin^3\left(\frac{3\pi}{\sqrt{2}}x\right),$$
en fait
$$\begin{aligned}
\sin^3\left(\frac{3\pi}{\sqrt{2}}(x+T)\right) = \sin^3\left(\frac{3\pi}{\sqrt{2}}x\right) &\iff \sin\left(\frac{3\pi}{\sqrt{2}}x+\frac{3\pi}{\sqrt{2}}T\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{\sqrt{2}}x\right)\\
&\iff \frac{3\pi}{\sqrt{2}}x+\frac{3\pi}{\sqrt{2}}T = \frac{3\pi}{\sqrt{2}}x+2k\pi\\
&\implies T = \frac{2\sqrt{2}k}{3}.
\end{aligned}$$
Ce qui implique que cette fonction est périodique de période $T = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. ■

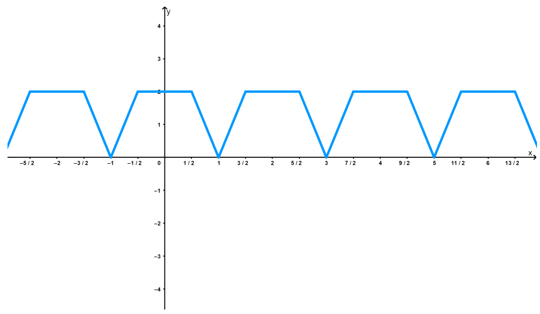
Exercice d'entrainement 1 :

Représentons graphiquement les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

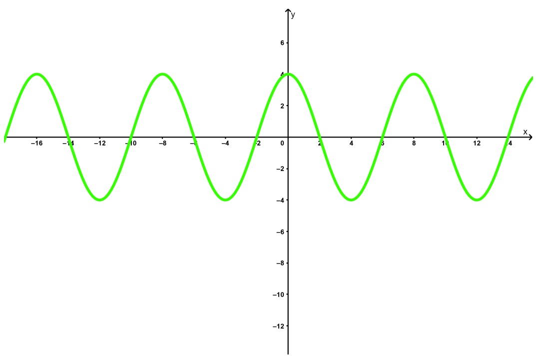
1. f est **périodique** de période $T = 4$. En plus, f est **impaire** avec
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ -x+2 & \text{si} \quad x \in]1,2[\end{cases}$$
2. g est **périodique** de période $T = 2$. En outre, g est **paire** avec
$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ -4x+4 & \text{si} \quad x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[\end{cases}$$
3. Une fonction h qui est paire de période $T = 8$ (il existe une infinité de fonctions comme ça).
4. m est **périodique** de période $T = 2$ avec $m(x) = \arccos x$ sur $[-1, 1[$.



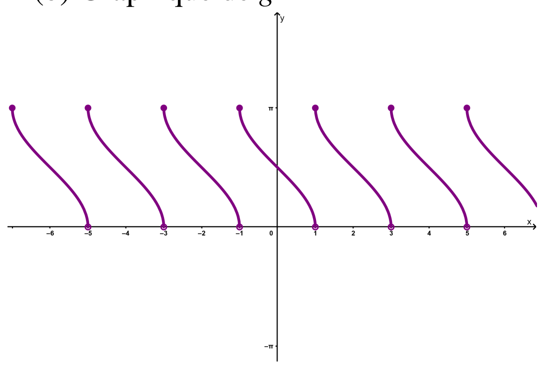
(a) Graphique de f



(b) Graphique de g



(c) Graphique de $x \mapsto 4\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ (une proposition)



(d) Graphique de m

FIGURE 3.3 – Représentation graphique des fonctions f, g, h et m

Fonctions croissantes et décroissantes

Une fonction f est dite **croissante (strictement croissante)** sur un intervalle I lorsqu'elle vérifie
$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)),$$

pour chaque $x_1 \leq x_2$ $(x_1 < x_2)$ dans I.

En revanche, une fonction f est dite **décroissante (strictement décroissante)** sur un intervalle I si elle satisfait à

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

toute fois que $x_1 \leq x_2$ $(x_1 < x_2)$ dans I.

Fig 3.4 illustre la croissance d'une fonction f sur l'intervalle $[a,b]$ et sa décroissance sur $[c,d]$.

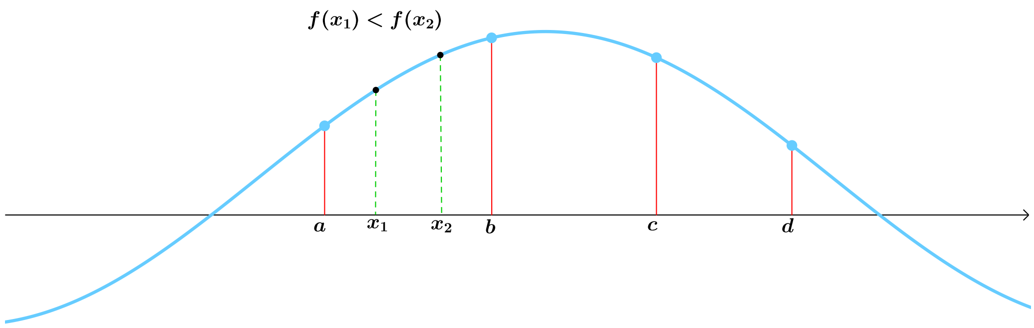
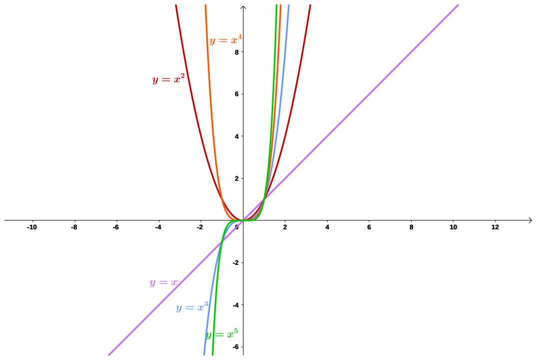


FIGURE 3.4 – Représentation de la croissance d'une fonction

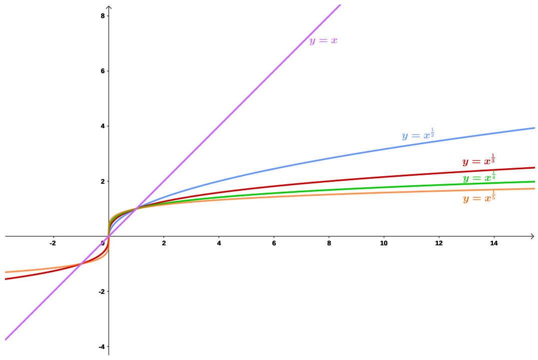
Catalogue de fonctions essentielles

Dans le tableau qui suit, un catalogue des fonctions essentielles est présenté.

Fonction	*Forme*
Linéaire	$f(x) = \alpha x + \beta$, α, $\beta \in \mathbb{R}$
Quadratique	$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$
Polynomiale	$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$, avec α_0, $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}$
Puissance	$f(x) = x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ (voir la figure 4 (a)-(b))
Rationnelle	$f(x) = \dfrac{R(x)}{S(x)}$, où R et S sont des polynômes
Algébrique	Sa formule ne comporte que les opérations $+, -, \times, \div$ et puissance sur des polynômes
Exponentielle	$f(x) = a^x$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ (voir la figure 5 (b))
Logarithme	$f(x) = \log_a x$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction réciproque de $x \mapsto a^x$ (voir la figure 5 (a))

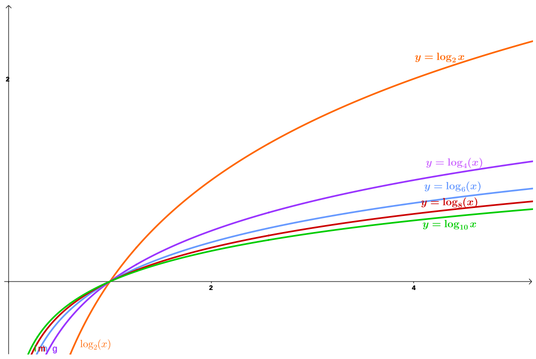


(a) Fonctions de la forme $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

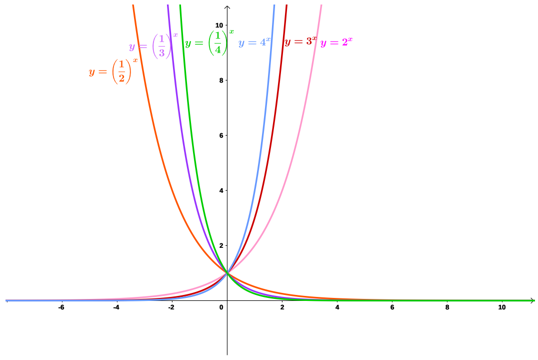


(b) Fonctions de la forme $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$

FIGURE 3.5 – Quelques fonctions puissances



(a) Fonctions de la forme $f(x) = \log_n x$, $n \in \mathbb{N}^*$



(b) Fonctions de la forme $f(x) = a^x$, $n \in \mathbb{R}_+^*$

FIGURE 3.6 – Quelques fonctions logarithmes et exponentielles

Composition de fonctions

On peut accoupler deux fonctions réelles g et h par l'addition, la soustraction, la multiplication et la division, pour former de nouvelles fonctions :

$$(g+h)(x) = g(x)+h(x), \quad (g-h)(x) = g(x)-h(x), \quad (gh)(x) = g(x)h(x), \quad \left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{g(x)}{h(x)}.$$

De plus, soit $\eta \in \mathbb{R}$, on peut définir la fonction

$$(\eta g)(x) = \eta g(x).$$

Il existe une autre façon d'accoupler deux fonctions g et h pour en obtenir une nouvelle. Il s'agit de calculer pour $x \in D_h$: $h(x)$, ensuite si $h(x) \in D_g$, on calcule $g(h(x))$. Cette opération s'appelle la composition de g et h.

Soient deux fonctions g et h la composée de g et h est la fonction notée $g \circ h$ définie par

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)).$$

■ **Example 3.11** Soient les fonctions

$$f(x) = \sin^3 |x|, \quad g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}.$$

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$. D'abord, $D_f = D_g = \mathbb{R}$. Soit, $x \in \mathbb{R}$, alors il vient

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= f\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) \\
&= \sin^3\left(\left|\frac{x^2}{x^2+1}\right|\right) \\
&= \sin^3\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right).
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$g(f(x)) = g(\sin|x|) = \frac{\sin^6|x|}{\sin^6|x|+1}.$$

On peut déduire qu'en général, $f \circ g \neq g \circ f$. ∎

3.2 Limite d'une fonction

Dans cette partie, nous allons apprendre comment calculer la limite d'une fonction dans différentes situations. Nous avons choisi de commencer par l'étude d'un exemple représentatif. Dans Fig 3.7, nous présentons le graphique de $f(x) = x^2 - x - 2$. On peut voir

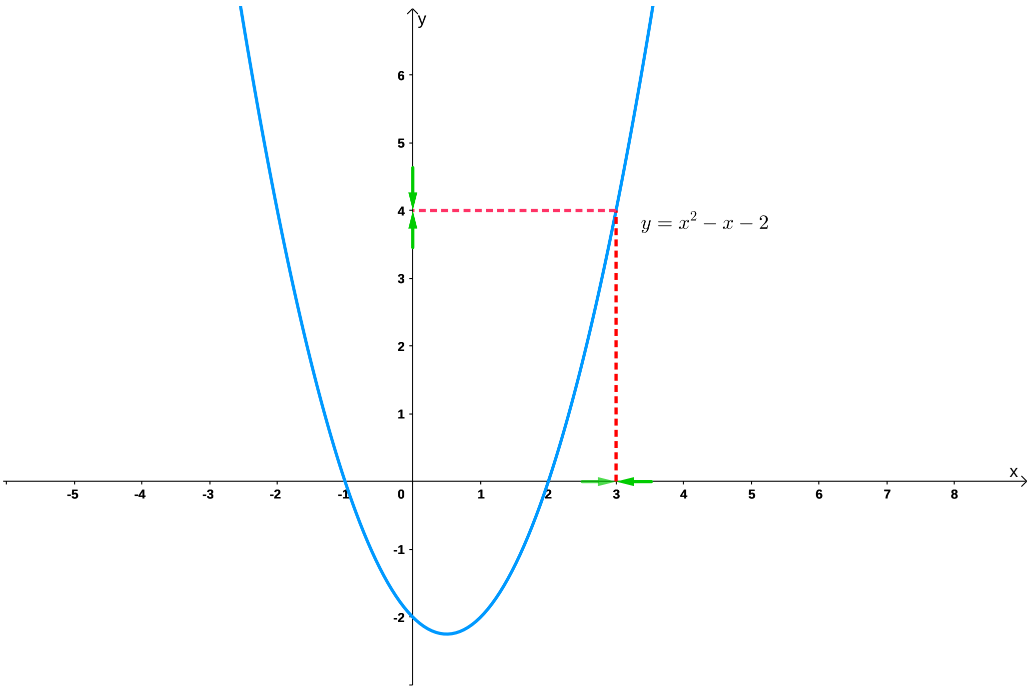


FIGURE 3.7 – Présentation qui montre l'idée de la limite de : $f(x) = x^2 - x - 2$ autour du point $x = 3$

clairement que si x s'approche de 3 (à gauche et à droite), les valeurs de $f(x)$ s'approchent de 4. Il parait qu'on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de 4 en choisissant x

suffisamment près de 3. En fait, soit $\varepsilon > 0$ un réel assez petit, déterminons un nombre $\eta(\varepsilon) > 0$ (dépendant de ε) pour lequel nous avons pour tout $x \in D_f$ tel que $|x-3| < \eta$:

$$|f(x)-4| < \varepsilon.$$

$$\begin{aligned}
|f(x)-4| < \varepsilon &\Leftrightarrow |x^2-x-6| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow -\varepsilon < x^2-x-6 < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-6 < \varepsilon \\ \quad \text{et} \\ -\varepsilon < x^2-x-6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-6-\varepsilon < 0 \\ \quad \text{et} \\ x^2-x-6+\varepsilon > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Pour déterminer x, il faudrait les racines de

$$x^2-x-6-\varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad x^2-x-6+\varepsilon = 0.$$

La première équation admet comme solutions

$$a = \frac{1-\sqrt{25+\varepsilon}}{2}, \quad b = \frac{1+\sqrt{25+\varepsilon}}{2}.$$

En outre, la deuxième équation admet deux solutions

$$a' = \frac{1-\sqrt{25-\varepsilon}}{2}, \quad b' = \frac{1+\sqrt{25-\varepsilon}}{2}.$$

Il est évident que $a < a' < 0 < b' < b$. Ce tableau montre le signe de $P = x^2-x-6-\varepsilon$ et

x	$-\infty$		a		a'		b'		b		$+\infty$
$x^2-x-6-\varepsilon$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2-x-6+\varepsilon$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	

$Q = x^2-x-6+\varepsilon$. On déduit que $x^2-x-6-\varepsilon < 0$ et $x^2-x-6+\varepsilon > 0$, si

$$a < x < a' \quad \text{ou} \quad b' < x < b \Longleftrightarrow a-3 < x-3 < a'-3 \quad \text{ou} \quad b'-3 < x-3 < b-3.$$

Ici, il suffit de déterminer un $\eta > 0$, on peut prendre l'intervalle

$$\frac{1+\sqrt{25-\varepsilon}}{2} - 3 < x-3 < \frac{1+\sqrt{25+\varepsilon}}{2} - 3.$$

C'est à dire
$$\frac{-5+\sqrt{25-\varepsilon}}{2} < x-3 < \frac{-5+\sqrt{25+\varepsilon}}{2}.$$
Donc, on peut choisir un intervalle inclus dans ce dernier
$$\frac{-5+\sqrt{25-\varepsilon}}{2} < x-3 < \frac{5-\sqrt{25-\varepsilon}}{2}.$$
Il suffit de prendre $\eta(\varepsilon) = \dfrac{5-\sqrt{25-\varepsilon}}{2} > 0$ pour avoir
$$|x-3| < \eta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)-4| < \varepsilon.$$

Après cet exemple, nous présentons la définition de la limite d'une fonction en un point.

Definition 3.2.1 Soit f une fonction dont le domaine de définition est D_f et soit $a \in D_f$ ou a soit un point d'extrémités de D_f. On dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers a est $L \in \mathbb{R}$ et on écrit
$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$
lorsque
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 : |x-a| < \eta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon.$$

■ **Example 3.12** Démontrons que
$$\lim_{x\to 4}(4x-5) = 11.$$
Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\eta(\varepsilon) > 0$ pour lequel
$$|x-4| < \eta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)-11| < \varepsilon.$$
En fait,
$$|f(x)-11| = |(4x-5)-11| = |4x-16| = 4|x-4| < \varepsilon.$$
Par conséquent, il suffirait de prendre $\eta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{4}$. ■

Maintenant, on regarde la limite d'une fonction quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Definition 3.2.2 Soit f une fonction dont le domaine de définition D_f contient un intervalle de la forme $]a,+\infty[$ ou $]-\infty,b[$, pour a, $b \in \mathbb{R}$. On dit que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$
lorsque
$$\forall \varepsilon > 0, \exists B(\varepsilon) > 0 : x > B(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon.$$
En outre, on dit que
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$
lorsque
$$\forall \varepsilon > 0, \exists B(\varepsilon) > 0 : x < -B(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon.$$

■ **Example 3.13** Démontrer que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on cherche $B(\varepsilon) > 0$ vérifiant

$$|x| > B(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2+1}\right| < \varepsilon.$$

Etant donné que,

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x^2+1}\right| < \varepsilon &\iff x^2+1 > \frac{1}{\varepsilon} \\ &\iff x^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \\ &\iff x > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}. \end{aligned}$$

Donc, il suffit de prendre $B(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$. ■

Maintenant, on passe à un cas où la limite en un point n'existe pas. La fonction de Heaviside H définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

Si x s'approche de 0 par la gauche, $H(x)$ est près de 0. Tandis que, si x s'approche de 0 par la droite, $H(x)$ est proche de 1 (voir Fig 3.8). Cela veut dire qu'il n'y'a pas une valeur unique vers laquelle $H(x)$ s'approche lorsque x tend vers 0. Ainsi, $\lim_{x\to 0} H(x)$ n'existe pas. Dans ce contexte, on définit la limite à droite et à gauche d'une fonction f en un point

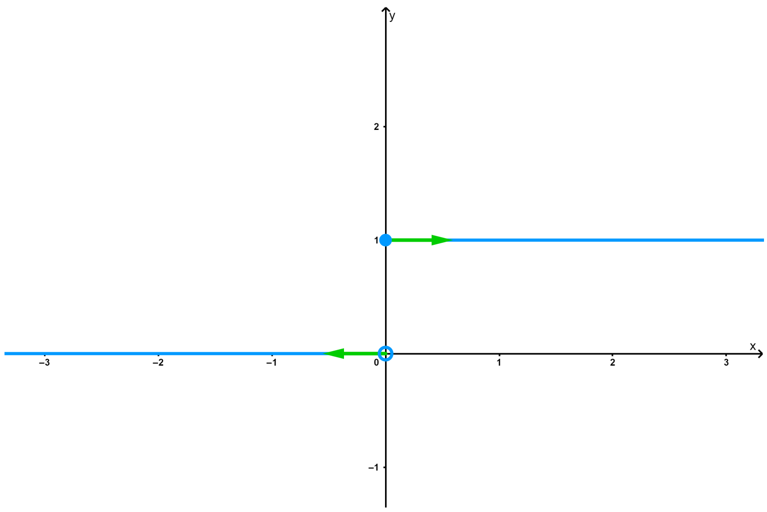


FIGURE 3.8 – La fonction de Heaviside

$a \in \mathbb{R}$. Lorsque x s'approche de a par la gauche (c'est à dire x tend vers a et $x < a$), $f(x)$ s'approche de L_1. En revanche, lorsque x est près de a par la droite (c'est à dire x tend vers a et $x > a$), on a $f(x)$ s'approche de L_2 et on note

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1, \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L_2.$$

Si $L_1 \neq L_2$ la limite n'existe pas au point a.

Definition 3.2.3 Soit f une fonction dont le domaine de définition est D_f et soit $a \in D_f$ ou a soit un point d'extrémités de D_f :

— $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0, \forall x \in D_f, x < a : |x - a| < \eta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon.$$

— $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0, \forall x \in D_f, x > a : |x - a| < \eta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon.$$

■ **Example 3.14** Soit la fonction h définie par

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{si} \quad x > 2 \\ -x + 1 & \text{si} \quad x \leq 2 \end{cases}.$$

Établir que $\lim_{x \to 2^+} h(x) = 2$ et $\lim_{x \to 2^-} h(x) = -1$ (voir Fig 3.9). Soit $\varepsilon > 0$, cherchons $\eta(\varepsilon)$

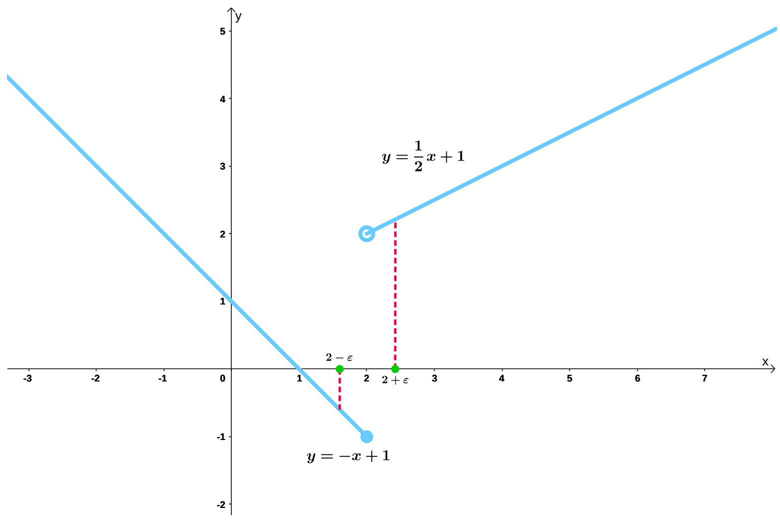


FIGURE 3.9 – Représentation graphique de la limite à gauche et à droite de f au point 2

pour lequel

$$\forall x \in D_h, x < 2 : |x - 2| < \eta(\varepsilon) \Rightarrow |h(x) - (-1)| < \varepsilon.$$

Comme $x < 2$, on a

$$|h(x) - (-1)| = |-x + 1 + 1| = |-x + 2| = |x - 2|.$$

On déduit qu'il suffit de prendre $\eta(\varepsilon) = \varepsilon$. Ce qui implique que $\lim_{x\to 2^-} h(x) = -1$.

Par ailleurs, déterminons $\eta'(\varepsilon)$ pour lequel

$$\forall x \in D_h, x > 2 : |x-2| < \eta'(\varepsilon) \Rightarrow |h(x) - (2)| < \varepsilon.$$

Puisque $x > 2$, alors

$$|h(x) - 2| = \left|\frac{1}{2}x + 1 - 2\right| = \left|\frac{1}{2}x - 1\right| = \frac{1}{2}|x-2|.$$

Ainsi, il suffit de prendre $\eta'(\varepsilon) = 2\varepsilon$. On déduit que $\lim_{x\to 2^+} h(x) = 2$. ■

Theorem 3.2.1 On dit que f admet une limite en a si et seulement si elle admet une limite à gauche et à droite en a égales.

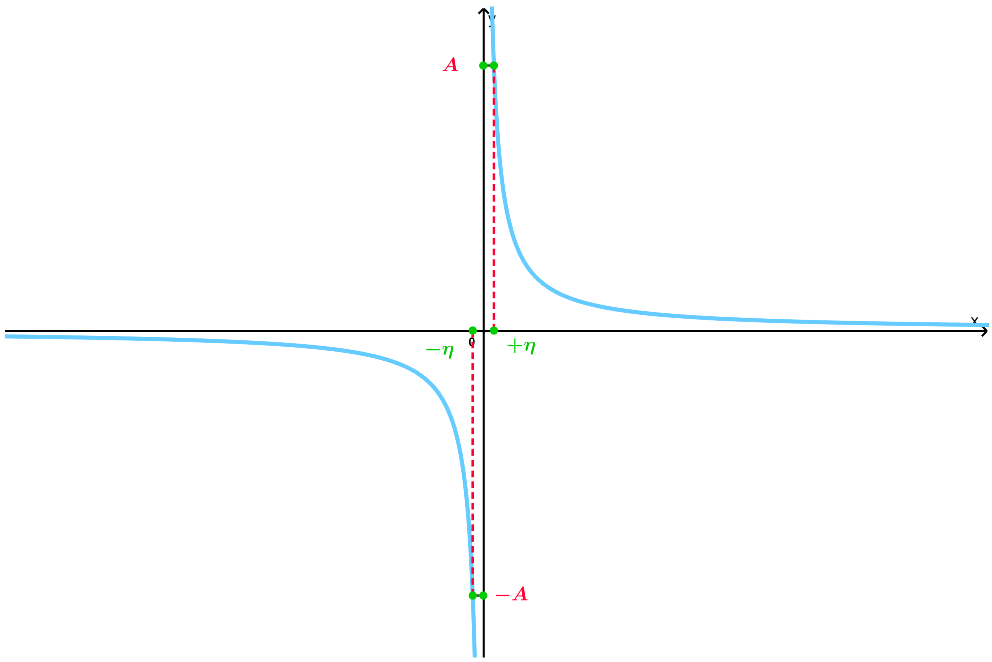


FIGURE 3.10 – Représentation graphique de la limite à gauche et à droite de $\frac{1}{x}$ au point 0

Maintenant, regardons le graphique de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ dont le domaine de définition est $\mathbb{R}^*$, dans Fig 3.10. On remarque que $\frac{1}{x}$ prend des grandes valeurs positives lorsque $x > 0$ s'approche de 0. En revanche, $\frac{1}{x}$ est proche de $-\infty$ lorsque $x < 0$ s'approchant de 0. Il parait qu'on peut rendre $\frac{1}{x}$ aussi grand que l'on veut en prenant x suffisamment petit. Mathématiquement, ceci revient à dire que la limite de $\frac{1}{x}$ tend vers l'infini lorsque x tend vers 0 et note

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Nous présentons ci-dessous la définition théorique de la limite infinie en un point finie.

Definition 3.2.4 Soit f une fonction dont le domaine de définition est D_f et soit $a \notin D_f$. On dit que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ lorsque

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f \,:\, |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)| > A.$$

■ **Example 3.15** Essayons d'appliquer cette définition pour démontrer théoriquement que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Tout d'abord, le domaine de définition de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est $D_f = \mathbb{R}^*$. Soit $A > 0$, déterminons $\eta > 0$ pour lequel on a

$$\forall x \in D_f \,:\, |x| < \eta \Rightarrow |f(x)| > A.$$

En effet,

$$|f(x)| > A \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| > A \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{A}.$$

Ainsi, il suffit de prendre $\eta = \dfrac{1}{A}$. ■

■ **Example 3.16** Démontrons que

$$\lim_{x\to 0} (\ln x) = \infty.$$

Le domaine de définition de la fonction $g(x) = \ln x$ est $D_g = \mathbb{R}_+^*$. Soit $A > 0$, déterminons $\eta > 0$ pour lequel on a

$$\forall x \in D_g \,:\, |x| < \eta \Rightarrow |g(x)| > A.$$

En fait,

$$\begin{aligned} |g(x)| > A &\Leftrightarrow |\ln x| > A \\ &\Leftrightarrow (\ln x < -A \text{ ou } \ln x > A) \\ &\Leftrightarrow \left(x < e^{-A} \text{ ou } x > e^{A}\right) \end{aligned}$$

Comme $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\left(-e^{-A} < x < e^{-A} \text{ ou } x > e^{A}\right) \Leftrightarrow \left(|x| < e^{-A} \text{ ou } x > e^{A}\right).$$

Alors, on peut choisir $\eta = e^{-A}$. ■

Le dernier cas concerne la limite infinie d'une fonction à l'infinie et on note

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Ci-dessous la définition théorique d'une telle limite.

Definition 3.2.5 Soit f une fonction dont le domaine de définition est D_f contenant un intervalle de la forme $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$. On dit que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$$

si

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f : x > B \Rightarrow |f(x)| > A.$$

En outre,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

si

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f : x < -B \Rightarrow |f(x)| > A.$$

Afin de fixer les idées, voici un exemple.

■ **Example 3.17** Allons démontrer la limite suivante

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty.$$

En effet, soit A assez grand alors

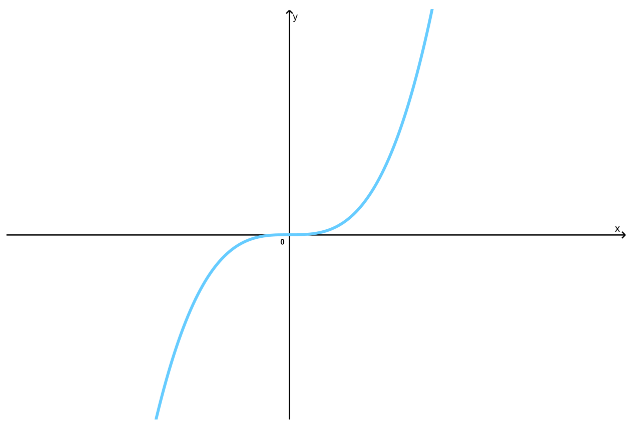


FIGURE 3.11 – Représentation graphique de $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned} |f(x)| > A \quad &\Leftrightarrow \quad \left|x^3\right| > A \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x^3 < -A \text{ ou } x^3 > A\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x < -A^{\frac{1}{3}} \text{ ou } x > A^{\frac{1}{3}}\right). \\ &\Leftrightarrow \quad |x| > A^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut choisir $B = A^{\frac{1}{3}}$. Ce qui achève la preuve. ■

On résume toutes les définitions des limites que nous avons vues dans cette partie. Soient $a, L, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$

Limite	***Définition***
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta(\varepsilon) > 0, \forall x \in D_f : \lvert x-a\rvert < \eta(\varepsilon) \Rightarrow \lvert f(x)-L\rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$	$\forall\varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in D_f : \lvert x\rvert > A \Rightarrow \lvert f(x)-L\rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L_1$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta(\varepsilon) > 0, \forall x \in D_f, x < a : \lvert x-a\rvert < \eta(\varepsilon) \Rightarrow \lvert f(x)-L_1\rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_2$	$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta(\varepsilon) > 0, \forall x \in D_f, x > a : \lvert x-a\rvert < \eta(\varepsilon) \Rightarrow \lvert f(x)-L_2\rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$	$\forall A > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in D_f : \lvert x-a\rvert < \eta \Rightarrow \lvert f(x)\rvert > A$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$	$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f : \lvert x\rvert > B \Rightarrow \lvert f(x)\rvert > A$

3.3 Opérations sur les limites

Il existe des règles sur les limites qui facilitent beaucoup le calcul, elles s'appellent ***lois algébriques des limites***. Pour la meilleure assimilation nous les présentons dans le tableau qui suit. Soient g et h des fonctions et $a \in \mathbb{R}$. Si les limites

$$\lim_{x\to a} g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} h(x)$$

existent, alors nous avons

Loi	***Limite***
Somme	$\lim\limits_{x\to a}(g(x)+h(x)) = \lim\limits_{x\to a} g(x) + \lim\limits_{x\to a} h(x)$
Différence	$\lim\limits_{x\to a}(g(x)-h(x)) = \lim\limits_{x\to a} g(x) - \lim\limits_{x\to a} h(x)$
Produit	$\lim\limits_{x\to a}(g(x)\cdot h(x)) = \left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to a} h(x)\right)$
Quotient	$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{g(x)}{h(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} g(x)}{\lim\limits_{x\to a} h(x)}$, si $\lim\limits_{x\to a} h(x) \neq 0$
Multiplication par une constante	$\lim\limits_{x\to a}(cg(x)) = c\lim\limits_{x\to a} g(x)$, avec c est une constante
Puissance	$\lim\limits_{x\to a}(g(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to a} h(x)\right)^n$, avec $n \in \mathbb{N}$
Racine	$\lim\limits_{x\to a}(g(x))^{\frac{1}{n}} = \left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)^{\frac{1}{n}}$, avec $n \in \mathbb{N}$. Si n est pair, $\lim\limits_{x\to a} g(x) \geq 0$

Lois algébriques des limites

On va terminer la partie des limites de fonctions par la présentation des deux théorèmes ci-dessous qui donnent deux autres propriétés des limites, en plus de ce que nous avons cité au tableau précédent.

Theorem 3.3.1 Soient g et h deux fonctions et $a \in \mathbb{R}$. Si $g(x) \leq h(x)$ pour $x \in [a-\eta, a+\eta]$, avec $x \neq a$ et $\eta > 0$ (c'est à dire dans un voisinage de a) et si les limites

$$\lim_{x\to a} g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} h(x)$$

existent, alors forcement on a

$$\lim_{x\to a} g(x) \leq \lim_{x\to a} h(x).$$

La règle des gendarmes qui a déjà été présentée dans le chapitre des suites, resterait toujours très utile pour le calcul des limites de fonctions.

Theorem 3.3.2 Soient f, g et h trois fonctions réelles. Si

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

pour $x \in [a-\eta, a+\eta]$ et $x \neq a$, avec $\eta > 0$ (c'est à dire dans un voisinage de a) et si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

alors

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

■ **Example 3.18** En appliquant la règle des gendarmes, montrons que

$$\lim_{x\to 0} (e^x - 1)^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0.$$

On remarque qu'on ne peut pas utiliser la règle de limite du produit, car la limite suivante

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

n'existe pas, donc on fait appel à la règle des gendarmes. En fait, pour tout $x \neq 0$ on a

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) \leq 1.$$

Or, l'inégalité précédente reste vraie lorsqu'elle est multipliée par une quantité positive comme suit

$$-(e^x-1)^2 \leq (e^x-1)^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq (e^x-1)^2.$$

De plus,

$$\lim_{x\to 0} (e^x-1)^2 = 0.$$

Ainsi, grâce à la règle des gendarmes, on aboutit au résultat demandé. ■

Theorem 3.3.3 Le produit d'une fonction qui tend vers 0 par une fonction bornée est une fonction qui tend vers 0.

Un exercice pourrait être très efficace pour tester les connaissance acquises dans cette partie.

Exercice d'entrainement 2 :

En utilisant les définitions théoriques, établissons les limites :

1. $\lim\limits_{x \to 1}(x^2+3) = 4$,
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{\ln(x^2)} = 0$,
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^3) = \infty$,

Solution :

1. Utilisons la définition de la limite finie en un point fini :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0, \forall x \in D_f : |x-1| < \eta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)-4| < \varepsilon.$$

On a

$$\begin{aligned}
|x^2+3-4| = |x^2-1| < \varepsilon &\iff -\varepsilon < x^2-1 < \varepsilon \\
&\iff 1-\varepsilon < x^2 < 1+\varepsilon \\
&\iff \sqrt{1-\varepsilon} < x < \sqrt{1+\varepsilon} \\
&\iff \sqrt{1-\varepsilon}-1 < x-1 < \sqrt{\varepsilon+1}-1 \\
&\Longleftarrow \sqrt{1-\varepsilon}-1 < x-1 < 1-\sqrt{1-\varepsilon} < \sqrt{\varepsilon+1}-1 \\
&\iff |x-1| < 1-\sqrt{1-\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Ainsi, il suffit de choisir $\eta(\varepsilon) = 1-\sqrt{1-\varepsilon}$, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit.

2. Utilisons la définition de la limite finie à l'infini :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0, \forall x \in D_f : |x| > \eta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon.$$

On a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\ln(x^2)}\right| < \varepsilon &\iff \ln(x^2) > \frac{1}{\varepsilon} \\
&\iff x^2 > e^{\frac{1}{\varepsilon}} \\
&\iff |x| > e^{\frac{1}{2\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Alors, pour un choix de $\eta(\varepsilon) = e^{\frac{1}{2\varepsilon}}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, la démonstration s'achève toute seule.

3. Utiliser la définition

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f : |x| > B \Rightarrow |f(x)| > A.$$

On a

$$\begin{aligned}
|\ln(x^3)| > A &\iff x^3 > e^A \\
&\iff |x| > e^{\frac{A}{3}}.
\end{aligned}$$

Donc, il suffit de choisir $B = e^{\frac{A}{3}}$, pour tout $A > 0$ suffisamment grand.

3.4 Étude de la continuité des fonctions

Au 17 ème siècle la continuité d'une fonction n'a pas été définie comme aujourd'hui. En fait, le mathématicien suisse **Euler (1707-1783)** avait décrit la fonction continue comme étant une fonction qui n'est pas définie par morceaux. La définition utilisée aujourd'hui est donnée la première fois par **Barnard Bolzano (1781-1848)**.

Dans la section précédente, nous avons vu que dans certains cas on a

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Une telle fonction est dit continue au point a (voir Fig 3.12).

Definition 3.4.1 Pour qu'une fonction f soit **continue** au point a il faut que les trois points suivants soient vérifiés :

1. $a \in D_f$,
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe,
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si l'une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, on dit que f est **discontinue** en a.

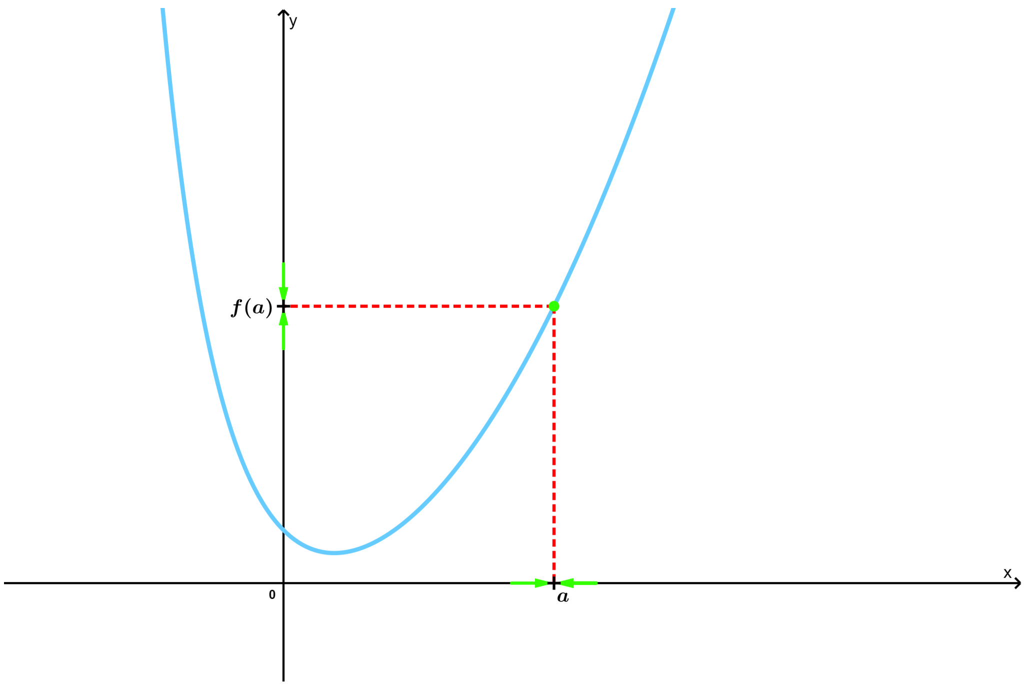


FIGURE 3.12 – Représentation graphique de la continuité de f au point a

Théoriquement, la définition de continuité d'une fonction en un point a est basée sur le fait qu'on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on souhaite de $f(a)$ en prenant x d'une manière suffisante proche de a. Voici l'interprétation mathématique de cette définition :

Definition 3.4.2 Soit f une fonction définie sur D_f et soit $a \in D_f$. On dit que f est continue au point a dans l'unique cas où f satisfait à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f \,:\, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

■ **Example 3.19** Montrons que $x \mapsto |x|$ est continue au point 2. En fait, on utilise les propriétés de la valeur absolue il vient

$$||x| - |2|| \leq |x-2| < \varepsilon$$

donc il suffit de choisir $\eta = \varepsilon$. ■

Le théorème ci-dessous concerne la continuité d'une fonction sur un intervalle.

Theorem 3.4.1 Une fonction réelle f est continue sur un intervalle donné si elle l'est en chaque point de cet intervalle.

■ **Example 3.20** Toutes les fonctions suivantes sont continues sur leurs domaines de définition :

polynomiales	rationnelles
racines	trigonométriques
exponentielles	logarithmes

les fonctions trigonométriques sont celles que le radian sert d'unité de mesure. Par exemple, les fonctions $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \tan x \ldots$ ■

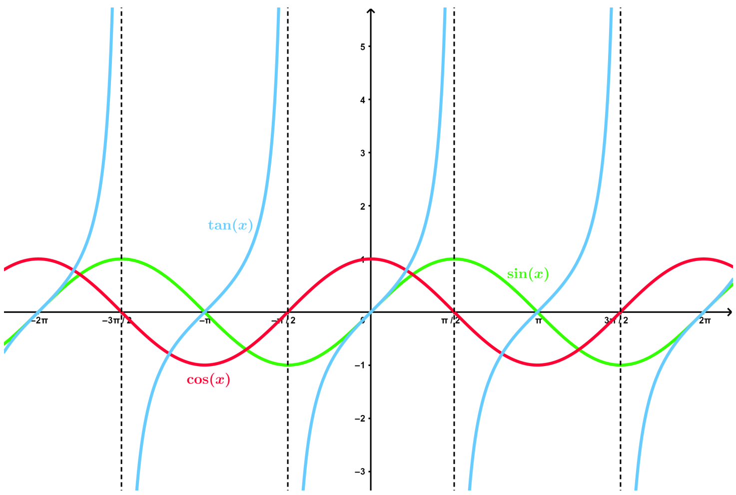


FIGURE 3.13 – Représentation graphique de quelques fonctions trigonométriques

Deux théorèmes très utiles qui donnent la continuité de certaines fonctions complexes, il suffit qu'elles soient composées de fonctions élémentaires continues.

Theorem 3.4.2 Soient g et h des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et c une constante réelle, alors les fonctions suivantes sont continues sur I :

1) $g+h$ 2) $g-h$ 3) cg

4) gh 5) $\dfrac{g}{h}$, pour tout $x \in I$, avec $h(x) \neq 0$

Theorem 3.4.3 Si h est continue en a et g est continue en $h(a)$, alors forcément $g \circ h$ est continue en a, de plus on a

$$\lim_{x \to a} g(h(x)) = g(h(a)).$$

■ **Example 3.21** La fonction $f(x) = \ln(2 + \sin x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. En fait, $\sin x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, car elle est trigonométrique, en outre

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 + \sin x \leq 3,$$

ce qui implique que, $\ln(2 + \sin x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On peut voir f comme $f(x) = g(h(x))$, avec

$$g(x) = \ln x, \quad h(x) = \sin x + 2.$$

On conclut que f est continue étant donné qu'elle est la composée de g et h telles que h et g sont continues. ■

Maintenant, allons découvrir la discontinuité en un point.

■ **Example 3.22** Soit la fonction f qui a pour expression

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x < 0 \\ e^x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

il est clair que les points où f peut avoir des discontinuités ce sont $x = 0$ et $x = 1$. En fait, on a

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x \to 0^+} e^0 = 1$$

donc f est discontinue en $x = 0$. Par ailleurs,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = e \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$$

on en déduit la discontinuité de f en $x = 1$. ■

Dans ce contexte, on note que les fonctions définies par morceaux ne sont pas nécessairement discontinues mais elles peuvent être continues, comme par exemple la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} x^5 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^{\frac{1}{5}} & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

(A le vérifier à titre d'exercice).

Ici, nous présentons les définitions de la continuité à gauche et à droite d'un point.

Definition 3.4.3 Soit f une fonction définie sur D_f et soit $a \in D_f$. On dit que f est continue au point a à droite dans l'unique cas où f satisfait à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f \,:\, 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

En revanche, f est continue au point a à gauche si et seulement si f vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f \,:\, 0 < a - x < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Enfin, f est continue en a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a.

3.4.1 Prolongement par continuité

Certaines fonctions réelles ne sont pas définies en des points mais admettent des limites en ceux-ci. Cela parait étrange mais ça existe des cas pareils. Par exemple, la fonction

$$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

qui est définie sur $\mathbb{R}^*$, or sa limite en zéro existe. Puisque, au voisinage de 0

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1.$$

Donc, si $x > 0$

$$-x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x. \tag{3.1}$$

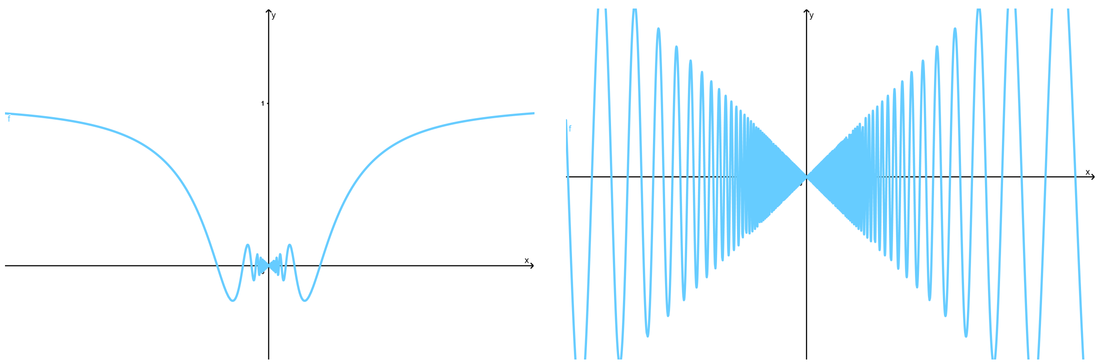
Sinon si $x < 0$, on a

$$x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq -x. \tag{3.2}$$

Des (3.1) et (3.2) en appliquant la règle des gendarmes, on obtient

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

Fig 3.14 (a) montre une présentation graphique de f. Dans Fig 3.14 (b), on peut voir



(a) Graphe sur $\mathbb{R}$ (b) Un zoom au voisinage de zéro

FIGURE 3.14 – Représentation graphique de la fonction $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

qu'au voisinage de 0 la fonction tend vers 0. Dans ce cas, on dit que f est prolongeable par continuité au point $x = 0$.

Definition 3.4.4 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit de plus f une fonction continue et bien définie sur $I \setminus \{x_0\}$. Si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

existe, alors on dit que f est **prolongeable par continuité** en x_0. On définit son prolongement sur I comme étant une fonction $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq x_0 \\ l & \text{si} \quad x = x_0 \end{cases}$$

■ **Example 3.23** Soit la fonction

$$g(x) = e^{-\frac{3}{(4-x^2)^2}}$$

Son domaine de définition est $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Calculons les limites de g aux points $x = -2$ et $x = 2$. On peut facilement obtenir

$$\lim_{x \to 2} e^{-\frac{3}{(4-x^2)^2}} = \lim_{x \to -2} e^{-\frac{3}{(4-x^2)^2}} = 0.$$

Donc, g est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ et son prolongement est

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{3}{(4-x^2)^2}} & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \\ 0 & \text{si} \quad x = 2 \\ 0 & \text{si} \quad x = -2 \end{cases}$$

■

3.4.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Une fonction quand elle est continue sur un intervalle fermé borné de la forme $[a, b]$, avec a, $b \in \mathbb{R}$, elle possède des propriétés particulières et intéressantes sur cet intervalle. Le théorème qui suit est un résultat très évident et simple à comprendre.

Theorem 3.4.4 Supposons que f soit une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Alors, la fonction f est nécessairement bornée sur $[a, b]$.

Ce théorème est tellement logique qu'il nécessite pas la présentation d'une démonstration.

Par ailleurs, il existe une autre propriété importante des fonctions continues sur un intervalle fermé borné c'est le théorème des valeurs intermédiaires.

L'idée de ce théorème est que lorsqu'une fonction f est continue sur un intervalle $[a, b]$ elle passe nécessairement par toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$. On énonce le théorème.

Theorem 3.4.5 Supposons que f soit continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ et soit M un nombre strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$:

$$f(a) < M < f(b)$$

ou

$$f(b) < M < f(a).$$

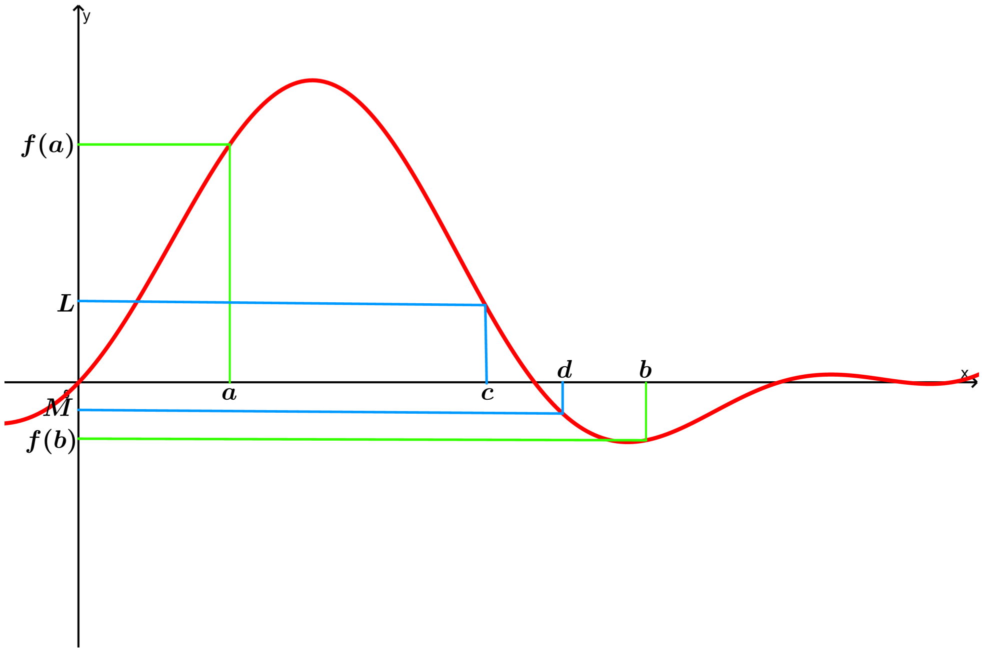


FIGURE 3.15 – **Illustration graphique du théorème des valeurs intermédiaires**

Ainsi, il existe $c \in]a,b[$ pour lequel $f(c) = M$.

Fig 3.15 illustre le théorème des valeurs intermédiaires. En fait, on remarque que M et L sont comprise strictement entre $f(a)$ et $f(b)$, comme f est **continue** sur $[a,b]$, il y'a forcement une intersection de f avec toutes les droite $y = M$, où M est strictement comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

Le théorème des valeurs intermédiaires a des applications très intéressantes. Grâce à ce théorème on peut montrer l'existence de solutions des équations de la forme $f(x) = 0$, où f est une fonction continue. Dans l'exemple suivant on peut voir ceci.

■ **Example 3.24** Montrer qu'il existe une solution de l'équation

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

comprise entre 1 et 2. Pour ce faire, considérons la fonction

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2,$$

on calcule $f(1)$ et $f(2)$. En fait,

$$f(1) = -1 < 0 \text{ et } f(2) = 12 > 0.$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, du moment que f est continue sur $[1,2]$ et que 0 est une valeur intermédiaire de f, alors il existe un $c \in]1,2[$ tel que $f(c) = 0$.
■

Exercice d'entrainement 3 :

Faisons appel au théorème des valeurs intermédiaires et montrons que l'équation

$$x \sin x + \cos x - x^2 = 0$$

admet une solution positive et une autre négative. On considère la fonction

$$f(x) = x\sin x + \cos x - x^2$$

qui est continue et définie sur $\mathbb{R}$. De plus, on a,

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 > 0, \\ f(\pi) &= -1 - \pi^2 < 0, \\ f(-\pi) &= 1 - \pi^2 < 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe $a \in]0,\pi[$ tel que $f(a) = 0$ et $b \in]-\pi, 0[$ tel que $f(b) = 0$. D'où le résultat.

Nous terminons cette partie par la notion de continuité uniforme sur un intervalle.

3.4.3 Continuité uniforme

Jusqu'à présent nous avons vu la continuité ponctuelle d'une fonction sur un intervalle I. Plus précisément, la continuité en chaque point $a \in I$. On rappelle que la continuité d'une fonction f sur un intervalle I est équivalente à

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f \,:\, |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Dans cette définition, le nombre η dépend de ε et il peut dépendre aussi de a. Dans le cas où le nombre η est indépendant de a la continuité devient **uniforme** sur I.

Definition 3.4.5 Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est **uniformément continue** sur I dans le cas où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I \,:\, |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

■ **Example 3.25** Montrons que la fonction $f(x) = x^3$ est uniformément continue sur $[0,2]$. Soit $\varepsilon > 0$ et $x, y \in [0,2]$, on a

$$\begin{aligned} |x^3 - y^3| &= |(x-y)(x^2+xy+y^2)| \\ &= |x-y||x^2+xy+y^2| \\ &= (x^2+xy+y^2)|x-y| \\ &\leq (2^2+(2)(2)+2^2)|x-y|. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$|x^3 - y^3| \leq 12|x-y| < \varepsilon \Rightarrow |x-y| < \frac{\varepsilon}{12}.$$

Il suffirait de prendre $\eta = \dfrac{\varepsilon}{12}$ qui ne dépend pas de x ni y. ■

■ **Example 3.26** En revanche, la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, cela veut dire en langage des quantificateurs :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x, y \in \mathbb{R} \,:\, |x-y| < \eta \text{ et } |x^2 - y^2| > \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon < 1$ très petit, $x \in \mathbb{R}$ et $y = x + \frac{\eta}{2}$ il vient que

$$|x-y| = \left|\frac{\eta}{2}\right| < \eta$$

et

$$|x^2-y^2| = \left|x^2 - \left(x+\frac{1}{2\eta}\right)^2\right| = \left|\eta x+\eta^2\right|.$$

Si on choisit $x = \frac{1}{\eta}$, il découle

$$|x^2-y^2| = |1+\eta^2| > \varepsilon,$$

d'où la conclusion. ∎

Un autre exemple est proposé.

∎ **Example 3.27** La fonction $g(x) = |x|$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet, une propriété de la valeur absolue assure que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$||x|-|y|| \leq |x-y|,$$

donc il suffit de choisir $\eta = \varepsilon$ qui ne dépend pas de x ni y. ∎

On termine cette partie de continuité par le théorème de Heine démontré par **Eduard Heine** en 1872 qui est très utile.

Theorem 3.4.6 Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ est continue uniformément sur $[a,b]$.

Généralement démontrer la continuité uniforme sur I est une chose compliquée, sauf que le théorème de Heine l'obtient directement quand il s'agit d'un intervalle fermé borné.

3.5 Fonctions dérivables

Dans Fig 3.16, la droite en couleur rouge s'appelle la **tangente** de la fonction f au point $(x_0, f(x_0))$. C'est la droite qui passe par le point $(x_0, f(x_0))$ et de pente m définie par

$$m = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

si cette limite existe, mais si elle n'existe pas la droite tangente n'existe pas non plus.

On appelle m la **dérivée** de f au point $x = x_0$ et on dit, dans ce cas, que f est **dérivable** au point x_0, on note la dérivée de f au point $x = x_0$ par $f'(x_0)$.

Definition 3.5.1 Soit f une fonction réelle et soit un intervalle $I \subset D_f$. On dit que f est dérivable sur I si elle l'est en chaque $x \in I$, plus précisément, si la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{3.3}$$

existe pour tout $x \in I$, on la note par $f'(x)$.

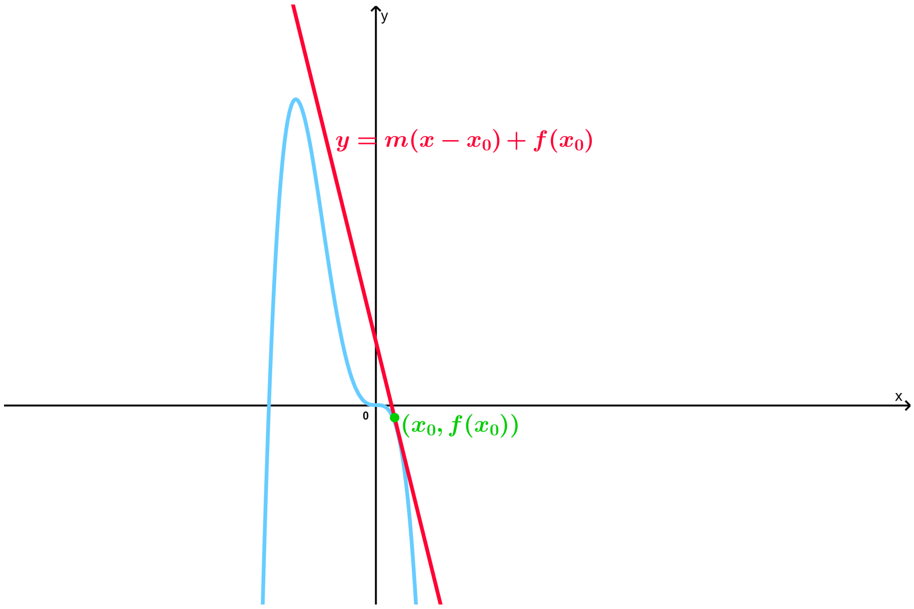


FIGURE 3.16 – Illustration graphique de la droite tangente de f au point $(x_0, f(x_0))$

Maintenant, si à tout nombre $x \in D_f$ pour lequel la limite (3.3) existe, nous associons le nombre $f'(x)$, de ce fait pouvons considérer f' comme une nouvelle fonction appelée **dérivée** de f.

■ **Example 3.28** Calculons la dérivée de la fonction $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x+h) \\ &= 2x. \end{aligned}$$

■

On peut constater que cette méthode de calculer $f'(x)$ ne marche pas lorsque qu'il s'agit d'une fonction de forme plus compliquée. C'est pourquoi il est nécessaire d'apprendre des techniques de calcul plus pratiques. Dans la section qui suit, nous allons voir des règles pour calculer $f'(x)$.

3.5.1 Règles de dérivation

Ici, nous allons présenter des règles de dérivation qui nous permettent de calculer les dérivées des fonctions polynomiales, rationnelles, exponentielles et logarithmiques. En outre, les dérivées des fonctions trigonométriques et leurs réciproques seront représentées.

Les tableaux suivants résument ces règles.

Fonction	*Dérivée*
$f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^a, \quad a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = ax^{a-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = a^x, \quad a > 0$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \log_a x, \quad a > 0$	$f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$

Catalogue des dérivées de fonctions essentielles

Loi	*Dérivée*
Somme	$(g+h)' = g' + h'$
Différence	$(g-h)' = g' - h'$
Produit	$(gh)' = g'h + h'g$
Quotient	$\left(\dfrac{g}{h}\right)' = \dfrac{hg' - h'g}{h^2}$
Multiplication par une constante	$(cg)' = cg'$, avec c est une constante
Composition	$(g \circ h)'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))$

La règle de dérivation des fonctions composées nous permet de déduire d'autres règles qui facilitent encore plus le calcul, elles sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Fonction	*Dérivation*
Puissance	$[(h(x))^a]' = ah'(x) \cdot (h(x))^{a-1}$
Logarithme	$[\ln(h(x))]' = \dfrac{h'(x)}{h(x)}$
exponentielle	$(e^{h(x)})' = h'(x) \cdot e^{h(x)}$
Sinus	$[\sin(h(x))]' = h'(x) \cdot \cos(h(x))$
Cosinus	$[\cos(h(x))]' = -h'(x) \cdot \sin(h(x))$

Nous proposons ci-dessous un exemple.

■ **Example 3.29** Calculons la dérivée de

$$x \mapsto e^{\cos^3(x^3+x^2-5)}.$$

Cette fonction est de la forme $e^{f(x)}$, avec $f(x) = \cos^3(x^3 + x^2 - 5)$. En outre,

$$f(x) = \cos^3(x^3 + x^2 - 5) = (g(x))^3,$$

où

$$g(x) = \cos(x^3 + x^2 - 5)$$

qui elle aussi est de la forme

$$g(x) = \cos(h(x)),$$

avec $h(x) = x^3 + x^2 - 5$. Ce qui implique que la dérivée prend la forme :

$$\begin{aligned} f'(x)e^{f(x)} &= 3g'(x)(g(x))^2 e^{f(x)} \\ &= -3h'(x)\sin(h(x))(g(x))^2 e^{f(x)} \\ &= -3(3x^2+2x)\sin(x^3+x^2-5)\cos^2(x^3+x^2-5)e^{\cos^3(x^3+x^2-5)}. \end{aligned}$$

■

On peut démontrer certaines limites connues en utilisant la définition de dérivée. Par exemple, pour démontrer que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on peut la réécrire comme suit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$$

étant donné que $(\sin x)' = \cos x$, alors il vient

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos 0 = 1.$$

D'ailleurs, on peut utiliser le même raisonnement pour démontrer que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

(l'étudiant est invité à le faire à titre d'exercice).

3.5.2 Dérivée d'ordre supérieur et formule de Leibniz

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors sa dérivée est une fonction notée f'. Maintenant, si f' est aussi dérivable sur I, sa dérivée s'appelle **dérivée seconde** de f, on la note par f''.

D'une manière générale, la dérivée n ème ou la dérivée d'**ordre** n, notée $f^{(n)}$, est la fonction obtenue après avoir effectué n dérivation successives, bien sûr à condition que la dérivation est possible.

Par exemple, calculons la dérivée d'ordre n de la fonction $x \mapsto \sin x$. En fait,

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)''' = (-\sin x)' = -\cos x.$$

On en déduit,

$$(\sin x)^{(4)} = \sin x, \quad (\sin x)^{(5)} = -\cos x \cdots$$

Nous généralisons le résultat, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(\sin x)^{(3n-2)} = \cos x,$$

$$(\sin x)^{(3n-1)} = -\sin x,$$

$$(\sin x)^{(3n)} = -\cos x.$$

La proposition qui suit présente la **formule de Leibniz** qui permet de calculer la n ème dérivée d'un produit de deux fonctions. Celle-ci est présentée dans la proposition suivante.

Proposition 3.5.1 Soient f et g des fonctions qu'on peut dériver n fois et on dit qu'elles sont n fois dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Ainsi, la fonction fg est aussi n fois dérivable et sa dérivée est donnée par la formule de Leibniz suivante

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathscr{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \mathscr{C}_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}, \tag{3.4}$$

avec

$$\mathscr{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

et par convention $f^{(0)} = f$.

■ **Example 3.30** Soit la fonction $h(x) = x^n e^x$ pour n un entier naturel. Appliquons la formule de Leibniz :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathscr{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

avec $f(x) = x^n$ et $g(x) = e^x$. Donc,

$$\begin{aligned} h^{(n)}(x) &= e^x x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{x^k k!(n-k)!} n(n-1)\cdots(n-k+1) \\ &= e^x x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k+1)^2(n-k+2)^2\cdots(n-1)^2 n^2}{x^k k!}. \end{aligned}$$

■

Voici un exercice d'entrainement pour tester les connaissances.

Exercice d'entrainement 4 :

1. Soit f une fonction dérivable en a où $a > 0$, exprimer la limite suivante

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{\ln x - \ln a}$$

en fonction de $f'(a)$. En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{\ln x - \ln a} &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \frac{x - a}{\ln x - \ln a} \\ &= \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \left(\lim_{x \to a} \frac{x - a}{\ln x - \ln a} \right) \\ &= \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \left(\lim_{x \to a} \frac{x - a}{\ln x - \ln a} \right) \\ &= \frac{f'(a)}{a}. \end{aligned}$$

2. Étudions la dérivée de g une fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} \sin x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour $x \neq 0$, un calcul direct nous emmène à

$$g'(x) = \cos x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\sin x}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Au point 0 la dérivée n'existe pas. En effet,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \end{aligned}$$

qui n'admet pas de limite étant donné que

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'existe pas comme cette fonction oscille au voisinage de zéro.

3. Exprimer la limite suivante

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}$$

comme dérivée, ensuite calculer sa valeur. Allons y

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x - \frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{4}} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

4. Démontrer que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$, pour tout $x > 0$. On pose $a = \frac{1}{n}$, par conséquent

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{a\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{a}} \\ &= \lim_{a\to 0}\exp\left(\frac{1}{a}\ln(1+ax)\right) \\ &= \lim_{a\to 0}\exp\left(\frac{x\ln(1+ax)}{ax}\right) \\ &= \exp\left(x\lim_{a\to 0}\left(\frac{\ln(1+ax)}{ax}\right)\right) = e^x. \end{aligned}$$

Maintenant, on va mettre la lumière sur de nouvelles fonctions qui sont les inverses des fonctions trigonométriques.

On rappelle un résultat en algèbre qui dit que si $f : E \to F$ est une application bijective, alors elle est inversible et son inverse $f^{-1} : F \to E$ telle que

$$(f^{-1}\circ f)(x) = x, \ \forall x \in E$$

et

$$(f\circ f^{-1})(y) = y, \ \forall y \in F.$$

On rappelle aussi que si une fonction est continue et strictement monotone sur un intervalle I, elle est inversible sur cet intervalle.

3.5.3 Inverses des fonctions trigonométriques

Dans Fig 3.17-(a), on peut voir que la restriction de $\sin x$ suivante

$$\begin{array}{rcl} \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

est continue et strictement monotone, donc **bijective**. La fonction réciproque de cette restriction est appelée fonction **arcsinus** et notée arcsin ou $\sin^{-1}$:

$$\begin{array}{rcl} \arcsin : [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto & \arcsin x \end{array}$$

vérifiant

$$\forall x \in [-1,1] : \arcsin x = y \Longleftrightarrow \sin y = x, \text{ avec } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(Voir Fig 3.17 -(b)). Plus précisément, pour un $x \in [-1,1]$, $\arcsin x$ représente l'angle $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ pour lequel $\sin y = x$. Par exemple,

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

et

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

D'autre part, la restriction de $\cos x$

$$\begin{array}{rcl} \cos : [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

est bijective, sa fonction inverse est appelée **arc cosinus** et notée arccos :

$$\begin{array}{rcl} \arccos : [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longmapsto & \arccos x \end{array}$$

(voir Fig 3.17 -(c) et (d)). De la même manière que pour arcsin, on a

$$\forall x \in [-1,1] : \arccos x = y \Leftrightarrow \cos y = x, \text{ avec } y \in [0,\pi].$$

Par exemple, $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Enfin, la restriction de $x \mapsto \tan x$ suivante

$$\begin{array}{rcl} \tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

est bijective et sa fonction inverse est appelée **arc tangente** et elle est notée par arctan (voir Fig 3.17-(e) et (f)). De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} : \arctan x = y \Leftrightarrow \tan y = x, \text{ avec } y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Par exemple, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

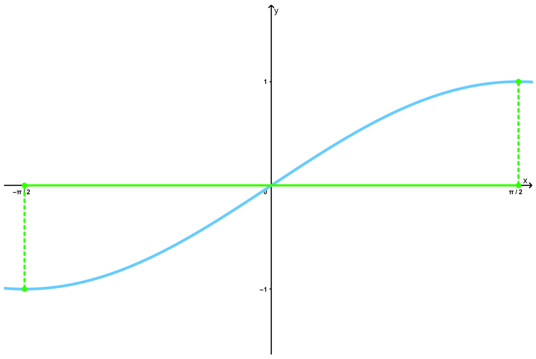
Les fonctions arcsin, arccos et arctan admettent des dérivées définies par les expressions suivantes

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in]-1,1[,$$

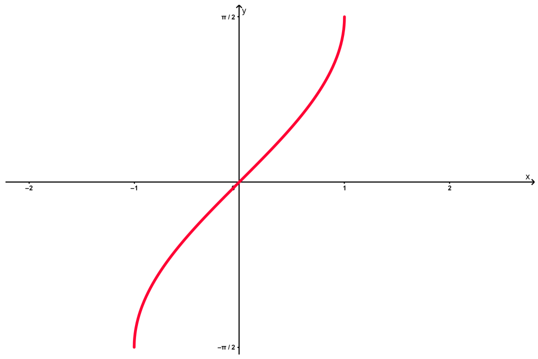
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in]-1,1[,$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

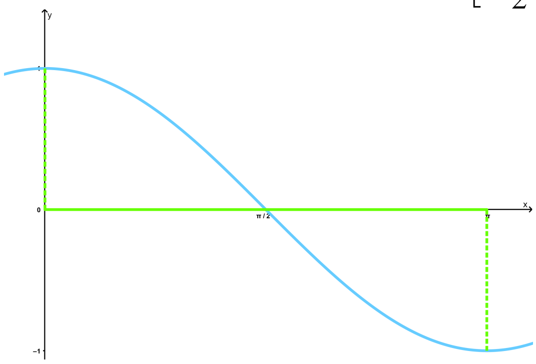
En règle générale, si une fonction f est bijective et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors



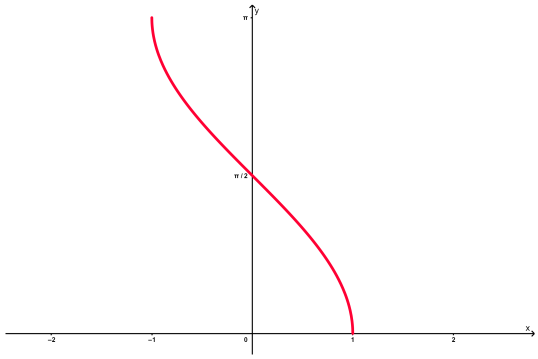
(a) Graphique de $x \mapsto \sin x$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



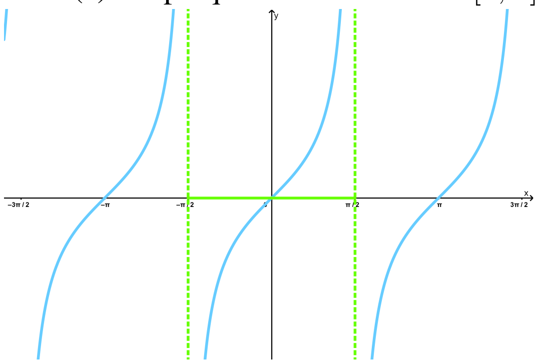
(b) Graphique de $x \mapsto \arcsin x$ sur $[-1,1]$



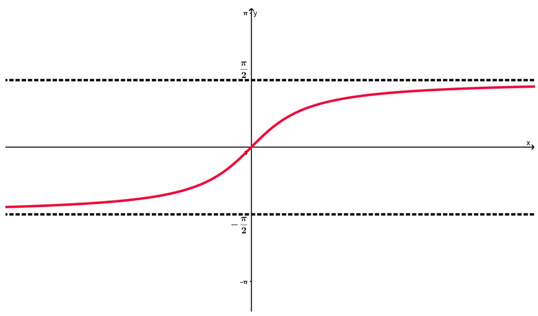
(c) Graphique de $x \mapsto \cos x$ sur $[0,\pi]$



(d) Graphique de $x \mapsto \arccos x$ sur $[-1,1]$



(e) Graphique de $x \mapsto \tan x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$



(f) Graphique de $x \mapsto \arctan x$ sur $]-\infty,+\infty[$

FIGURE 3.17 – Représentation graphique des fonctions trigonométrique et leurs inverses

sa fonction réciproque est dérivable et sa dérivée est donnée par cette expression

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

pour tout $x \in I$, avec $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$.

■ **Example 3.31** En utilisant la règle de dérivation des fonctions composées et de fonction arc sinus déterminons la dérivée de

$$f(x) = \arctan\big(\ln(x^2+1)\big).$$

Clairement $f(x) = g(h(x))$, avec

$$h(x) = \ln(x^2+1)$$

et

$$g(x) = \arctan x.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(x)g'(h(x)) \\ &= \big(\ln(x^2+1)\big)' \cdot \frac{1}{1+(\ln(x^2+1))^2} \\ &= \frac{2x}{(x^2+1)\,[1+(\ln(x^2+1))^2]}. \end{aligned}$$

■

■ **Example 3.32** Calculons par deux méthodes la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$. Tout d'abord, en utilisant la dérivation des fonctions composées on obtient

$$(\sqrt{x^2+1})' = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

D'autre part, on peut voir la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ comme la réciproque de $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0,\infty)$ (voir Fig 3.18). Ainsi, il s'agit de calculer la dérivée de $f^{-1}(g(x))$, avec $g(x) = x^2+1$. Par conséquent,

$$\big(f^{-1}(g(x))\big)' = g'(x)(f^{-1})'(g(x))$$

et

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

d'où

$$(f^{-1})'(g(x)) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.$$

Finalement,

$$(\sqrt{x^2+1})' = g'(x)(f^{-1})'(g(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

■

Un autre type de fonctions qui apparaissent largement dans la pratique sont les fonctions hyperboliques.

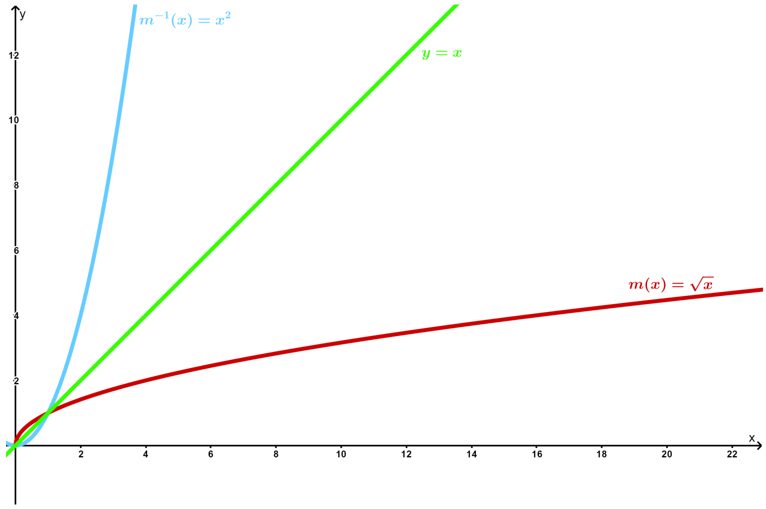


FIGURE 3.18 – Illustration graphique de $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^2$

3.5.4 Fonctions hyperboliques et leurs inverses

Le sinus hyperbolique (sinh), le cosinus hyperbolique (cosh) et la tangente hyperbolique (tanh) sont définies par les expressions suivantes

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Les représentations graphiques de ces fonctions sont données dans Fig 3.19.

La fonction sinus hyperbolique est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc bijective. Ainsi, elle admet une fonction inverse notée $\arg\sinh$ ou

$$\sinh^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

donnée par l'expression

$$\arg\sinh(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

En outre, sa dérivée est définie comme suit

$$(\arg\sinh(x))' = \left(\ln(x + \sqrt{1 + x^2})\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

La fonction cosinus hyperbolique est continue strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc bijective. Elle admet une fonction inverse notée $\arg\cosh$ ou

$$\cosh^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$$

donnée par l'expression

$$\arg\cosh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

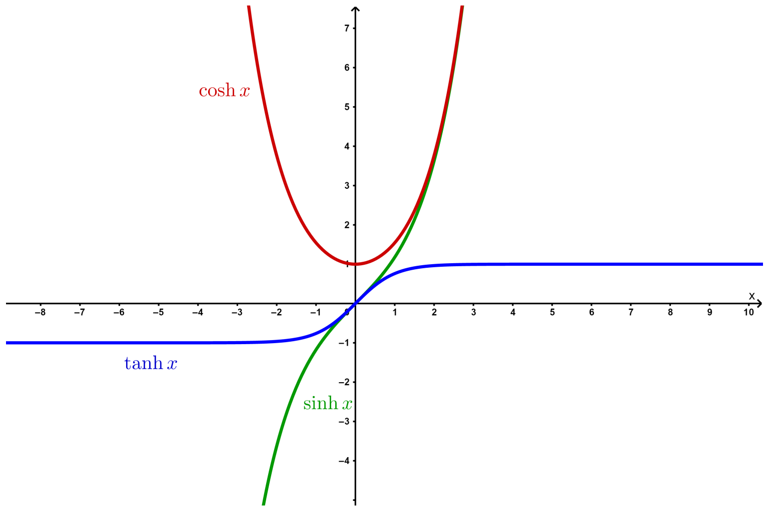


FIGURE 3.19 – Représentions graphiques de sinh$x$, cosh$x$ et tanh$x$

Ensuite, sa dérivée est définie par

$$(\arg\cosh(x))' = \left(\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Finalement, la fonction tangente hyperbolique est continue strictement croissante sur $]-1,1[$, donc forcément bijective. Elle admet une fonction inverse notée $\arg\tanh$ ou

$$\tanh^{-1} :]-1,1[\longrightarrow]-1,1[$$

donnée par l'expression

$$\arg\tanh(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Sa dérivée est comme suit

$$(\arg\tanh(x))' = \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Questions de cours

Regarder si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant les réponses.

1. La droite $x=-1$ coupe le graphe d'une fonction au plus une fois.
2. Toute fonction périodique est soit paire ou impaire.
3. Si une fonction est périodique et continue sur $\mathbb{R}$, alors elle est bornée.
4. Toute fonction réelle est croissante ou décroissante sur $\mathbb{R}$.
5. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x}{x-2} - \lim\limits_{x\to 2}\frac{4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2x}{x-2}-\frac{4}{x-2}\right)$.
6. Du moment que f et g sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, alors automatiquement
$$\lim_{x\to 2}(f(x)g(x)) = f(2)g(2).$$
7. Si f est continue en a, alors elle est dérivable en a a.

Solution :

1. **Vraie**. Car si $x = 1$ coupe le graphique en deux points cela veut dire que $x = 1$ admet deux images par la fonction f ce qui contredit la définition d'une fonction.
2. **Fausse**. On considère par exemple la fonction
$$f(x) = \sin x + 1$$
qui est périodique, mais elle n'est ni paire ni impaire, puisque
$$f(-x) = \sin(-x) + 1 = -\sin x + 1.$$
3. **Vraie**. Car si f est continue et périodique de période T, en plus elle est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier, alors sur $[0,T]$ elle est nécessairement bornée, c'est à dire il existe $M > 0$ tel que
$$\forall x \in [0,T] \ : \ |f(x)| \leq M.$$
De plus, tout $x \in \mathbb{R}$ on peut l'écrire comme $x = y + mT$, avec $y \in [0,T]$ et $m \in \mathbb{Z}$. Étant donné que f est périodique, alors
$$|f(x)| = |f(y+mT)| = |f(y)| \leq M.$$
4. **Fausse**. Comme contre exemple, nous proposons la fonction
$$x \mapsto \frac{1}{x^4+1}$$
qui est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $]0, \infty[$.
5. **Fausse**. En fait, la limite de la différence est égale à la différence des limites, dans le cas où ces limites sont finies ce qui n'est pas le cas ici.
6. **Vraie**. Car si f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, alors fg est aussi continue sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que, la limite de fg en $x = 2$ est égale à $(fg)(2) = f(2)g(2)$.
7. **Fausse**. Par exemple, la fonction de valeur absolue
$$x \mapsto |x|$$
qui est continue en 0, sauf qu'elle n'est pas dérivable en 0.

4. Des applications de la dérivée

Dans le chapitre précédent, nous avons appris les règles de dérivation de tous les types de fonctions. Ainsi, nous sommes en mesure d'étudier des applications de la dérivée.

Le calcul de la dérivée est largement utilisé dans les problèmes d'optimisation. En fait, l'optimisation est une branche mathématique qui consiste à trouver la meilleure façon, autrement dit la façon optimale, de faire quelque chose. A titre d'exemples, nous proposons ces deux problèmes :

Problème 1 Dans un usine, pour fabriquer des boites de conserve on a besoin de savoir quelles sont les dimensions optimales d'une boite qui minimise son coût de fabrication. Plus précisément, on doit choisir les meilleurs dimensions d'une boite à conserve afin de minimiser son coût.

Problème 2 Le prix de sucre blanc aux états unis entre 1993 et 2003 est donné par une fonction de la forme :

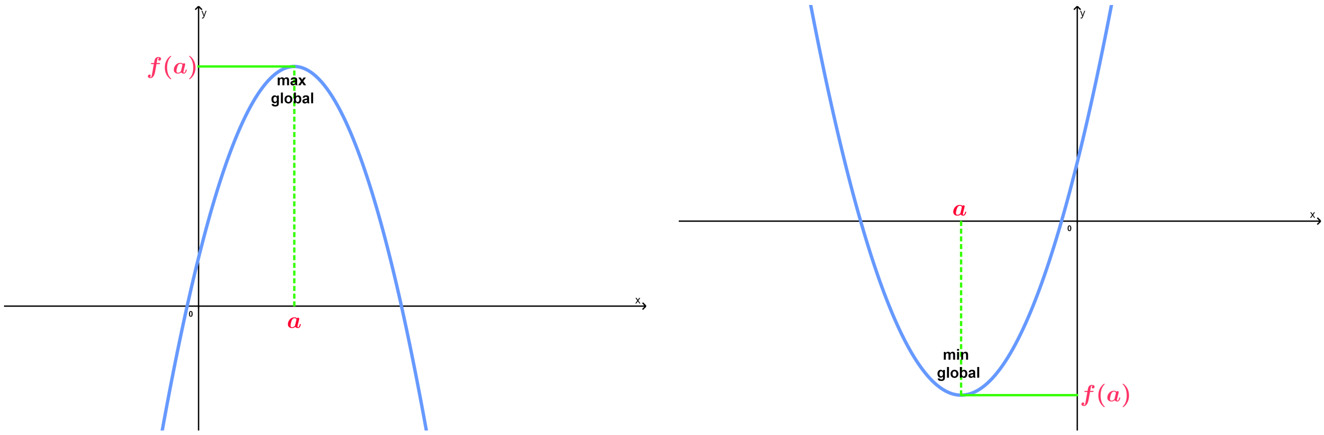
$$S(t) = -at^5 + bt^4 - ct^3 + dt^2 - ft + g,$$

où a, b, c, d, f, g sont des nombres réels strictement positifs fixés et t représente le temps en année. En quelle année le sucre est moins cher ? et quand est ce qu'il soit le plus cher ?

Pour résoudre ces problèmes on peut les ramener à la détermination des valeurs maximales ou minimales d'une fonction. Au cours de ce chapitre, nous allons appliquer la dérivée pour connaitre le maximum et le minimum d'une fonction.

4.1 Valeurs maximales, valeurs minimales et théorème de Rolle

Nous commençons par définir c'est quoi un maximum et un minimum d'une fonction sur un intervalle I.



(a) Maximum global de f sur D (b) Minimum global de f sur D

FIGURE 4.1 – **Maximum et minimum global d'une fonction sur son domaine de définition**

Definition 4.1.1 Soit f une fonction définie sur D, soit $a \in D$, on dit que $f(a)$ est le :

1. **maximum** de f sur D, si pour chaque $x \in D$, nous avons $f(x) \leq f(a)$, on note
$$f(a) = \max_{x \in I} f(x),$$
2. **minimum** de f sur D, si pour chaque $x \in D$, nous aurons $f(x) \geq f(a)$ et on note
$$f(a) = \min_{x \in I} f(x).$$

Dans Fig 4.1-(a), $f(a)$ est le maximum de f sur son domaine de définition, c'est à dire la plus grande valeur que f atteint. De façon similaire, Fig 4.1-(b) montre le minimum de f qui est la plus petite valeur que f atteint.

R Une autre appellation du maximum est **maximum global**. De même, le minimum s'appelle aussi **minimum global**.

Cependant, on parle d'un minimum local lorsque ce minimum le soit seulement dans un voisinage d'un point, de même un maximum local est celui qui est la plus grande valeur d'une fonction au voisinage d'un point.

Fig 4.2 illustre ceci, la fonction atteint des minimums locaux aux points a, c, e et g et des maximums locaux aux points b, d, f et h. Mathématiquement, les définitions de minimum local et de maximum local sont données comme suit.

Definition 4.1.2 Soit f une fonction définie sur D, soit $a \in D$, on dit que $f(a)$ est un :

1. **maximum local** de f sur D, s'il existe $\delta > 0$ pour lequel chaque $x \in D$ vérifie
$$|x-a| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(a),$$
2. **minimum local** de f sur D, s'il existe $\delta > 0$ pour lequel chaque $x \in D$ satisfait à
$$|x-a| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(a).$$

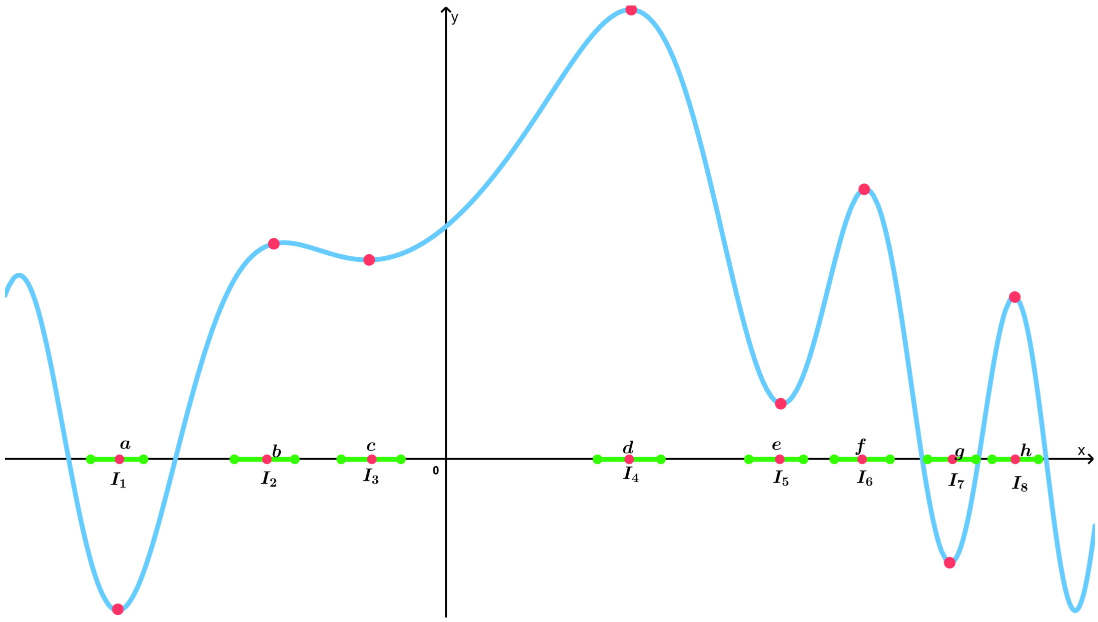


FIGURE 4.2 – **Minimums, maximums locaux**

Dans Fig 4.2, on peut voir certains minimums locaux de f aux points $x = a$, $x = c$, $x = e$ et $x = g$, et certains maximums locaux aux points $x = b$, $x = d$, $x = f$ et $x = h$.

On remarque que les tangentes de f aux points a, b et c sont parallèles à l'axe des x. Rappelons que la pente d'une tangente en un point est donnée par la dérivée en ce point et comme les tangentes aux points a, b et c sont horizontales, alors la dérivée en ces points est nulle. Le théorème de Fermat confirme ceci.

Theorem 4.1.1 Si f admet un maximum ou un minimum local en a, et de plus elle est **dérivable** en a, alors forcément $f'(a) = 0$.

Le théorème de Fermat est une implication, donc si $f'(a) = 0$ on ne peut pas dire que f atteint un minimum ou maximum local en a.

Par exemple, la fonction $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$, or $f(0)$ n'est ni minimum local ni maximum local de f (voir Fig 4.4-(a)).

D'autre part, une fonction peut admettre un maximum ou un maximum local en un point sans qu'elle soit dérivable en ce point. Comme par exemple, $f(x) = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0 mais atteint un minimum en 0 (voir Fig 4.4-(b)).

Maintenant, considérons une fonction **continue** sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ et supposons qu'elle soit **dérivable** sur $]a,b[$, si $f(a) = f(b)$, alors logiquement on a ces possibilités :

— f est constante sur $[a,b]$
— ou bien f remonte après descend, autrement dit elle admet un maximum sur $[a,b]$
— sinon f descend ensuite remontre, c'est à dire elle admet un minimum sur $[a,b]$,
— enfin, f remonte et descend plusieurs fois, donc elle admet plus qu'un minimum et maximum locaux.

Dans les cas précédents, la fonction f peut être constante ou bien elle admet au mois un minimum ou un maximum local. De plus, puisque f est supposée **dérivable** sur $]a,b[$ et en raison du théorème de Fermat certainement il existe $c \in]a,b[$ vérifiant $f'(c) = 0$. Ainsi,

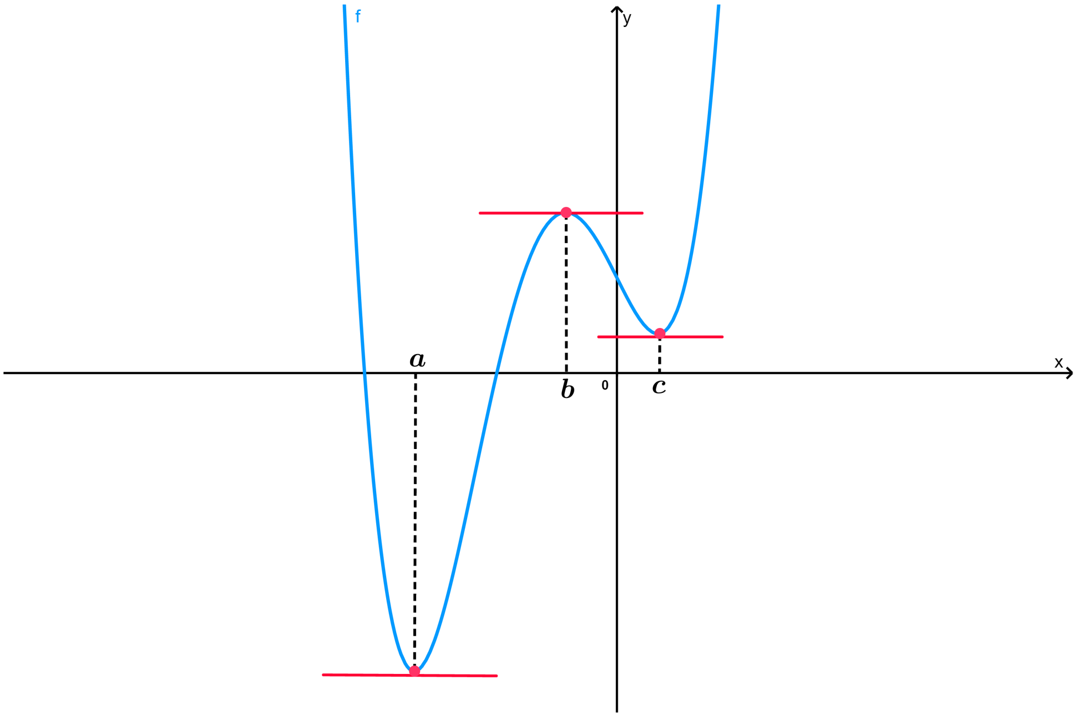
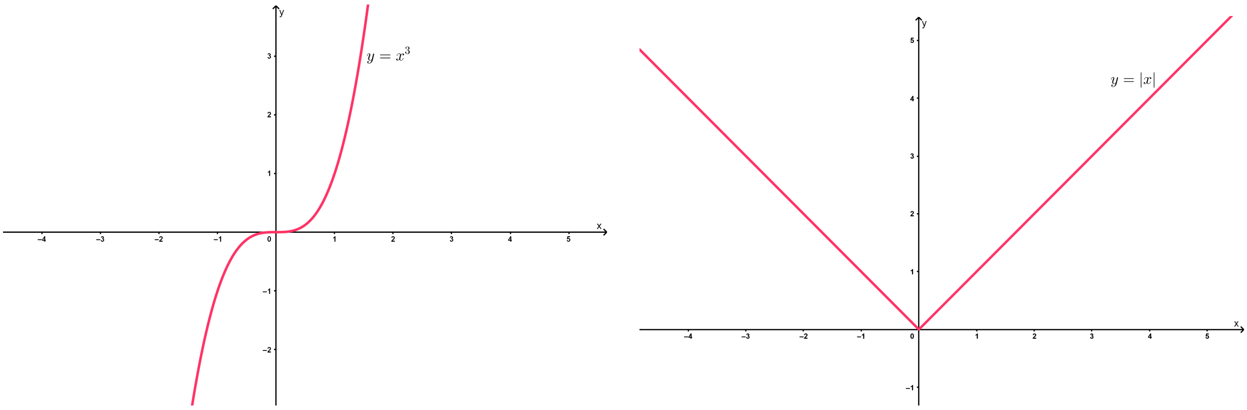


FIGURE 4.3 – **Illustration du théorème de Fermat**



(a) $f'(0) = 0$ mais, f n'admet ni maximum ni minimum en 0

(b) $f(0)$ est un minimum de f, mais $f'(0)$ n'existe pas

FIGURE 4.4 – **Quelques cas où les conditions d'application du théorème de Fermat ne sont pas vérifiées**

nous énonçons le théorème de Rolle.

Theorem 4.1.2 Soit f une fonction **continue** sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ de plus elle est **dérivable** sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors assurément il existe $c \in]a,b[$ satisfaisant à $f'(c) = 0$.

■ **Example 4.1** Montrons que la dérivée de

$$P(x) = 5x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x + 1$$

s'annule au moins une fois sur $]0,1[$. En fait, $P(0) = P(1) = 1$, donc d'après le théorème de Rolle il existe au moins $c \in]0,1[$ tel que $P'(c) = 0$. ∎

∎ **Example 4.2** Soit la fonction

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin^2 x}.$$

Montrons que pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe un $c \in]a, a+2\pi[$ pour lequel $f'(c) = 0$. En effet, pour chaque $a \in \mathbb{R}$ nous avons

$$f(a+2\pi) = \frac{\sin(a+2\pi) + \cos(a+2\pi)}{1 + \sin^2(a+2\pi)} = \frac{\sin a + \cos a}{1 + \sin^2 a}.$$

Ainsi, grâce au théorème de Rolle il existe un $c \in]a, a+2\pi[$ pour lequel $f'(c) = 0$. ∎

4.2 Présentation du théorème des accroissements finis

Allons considérer une fonction f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Donc, la fonction G définie par l'expression

$$G(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

est elle même continue sur $[a,b]$ et en plus dérivable sur $]a,b[$. Par ailleurs,

$$G(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a)$$

et

$$G(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

En raison du théorème de Rolle, il existe un $c \in]a,b[$ pour lequel $G'(c) = 0$, ce équivalent à

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ce raisonnement est une démonstration du théorème des accroissements finis.

Le théorème des accroissement finis a été énoncé la première fois par **Joseph-Louis Lagrange** (1736-1813), né en Italie. Il est un mathématicien, mécanicien et astronome. Il a contribué énormément à la théorie des nombres, au calcul de variations et en mécanique des fluides il a introduit le concept du potentiel de vitesse en 1781.

Theorem 4.2.1 Supposons qu'une fonction f soit **continue** sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ et de plus elle est **dérivable** sur $]a,b[$. Par conséquent, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{b - a}.$$

La droite qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est définie par l'équation

$$y = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}x + \frac{f(b)a - f(a)b}{a - b}.$$

donc sa pente est

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Ainsi, le théorème des accroissements finis s'explique par le fait qu'il existe un $c \in]a, b[$ pour lequel la tangente de f au point $(c, f(c))$ a la même pente que la droite qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ (voir Fig 4.5). Dans ce qui suit, nous traitons deux

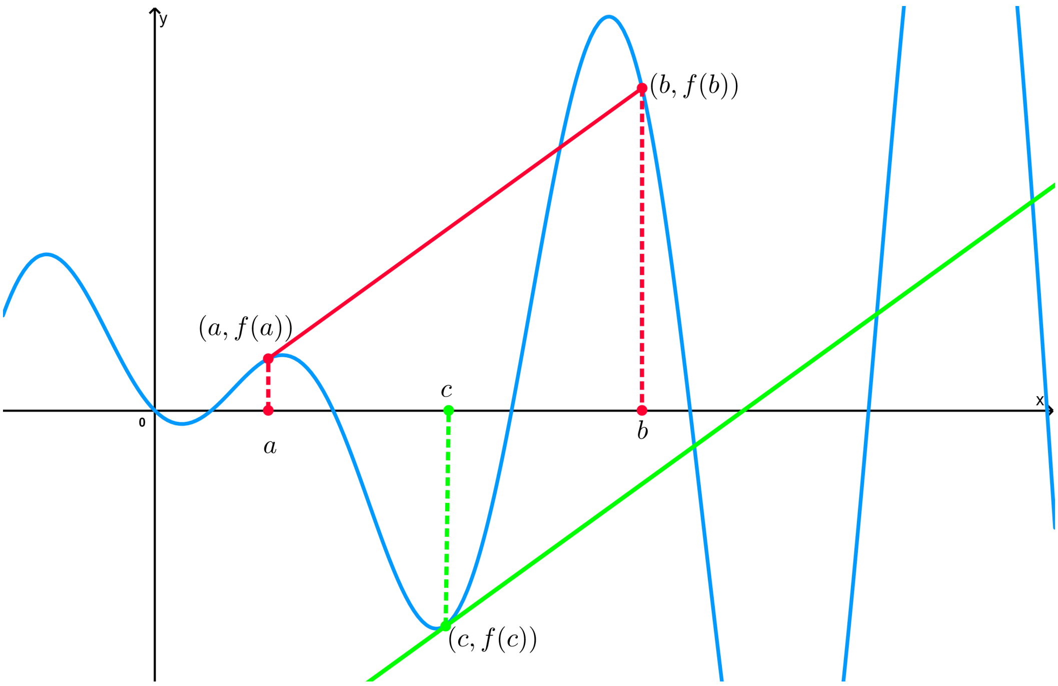


FIGURE 4.5 – **Illustration du théorème des accroissements finis**

exemples qui sont des applications du théorème des accroissements finis.

■ **Example 4.3** En faisant appel au théorème des accroissements finis, montrons que pour tout $t > 0$:

$$\arctan t > \frac{t}{t^2 + 1}.$$

Considérons la fonction $f(x) = \arctan x$ qui est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur chaque intervalle de la forme $[0, t]$, avec $t > 0$. Le théorème des accroissements finis implique qu'il existe $c \in]0, t[$ satisfait à

$$f'(c) = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0}$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{1 + c^2} = \frac{\arctan t - \arctan 0}{t - 0} = \frac{\arctan t}{t}.$$

De plus, $0 < c < t$ donne
$$1 < c^2 + 1 < t^2 + 1$$
d'où
$$\frac{1}{1+t^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1.$$
Étant donné que
$$\frac{\arctan t}{t} = \frac{1}{1+c^2}.$$
On obtient
$$\frac{1}{1+t^2} < \frac{\arctan t}{t} < 1$$
c'est à dire
$$\arctan t > \frac{t}{1+t^2}.$$
D'où le résultat voulu. ■

■ **Example 4.4** En utilisant le théorème des accroissements finis, établissons que pour chaque $x > 0$:
$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$
En effet, soit la fonction $f(x) = \ln x$ qui est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, en particulier sur chaque intervalle de la forme $[x, x+1]$, avec $x > 0$. Le théorème des accroissements finis implique qu'il existe $c \in]x, x+1[$ satisfaisant à
$$f'(c) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} \Rightarrow \frac{1}{c} = \ln(x+1) - \ln(x).$$
Par ailleurs, vu que $x < c < x+1$ il vient
$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}.$$
Comme
$$\ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c},$$
on déduit que pour tout $x > 0$
$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$
■

Parmi les applications très intéressantes du théorème des accroissements finis est l'étude de la croissance ou décroissance d'une fonction sur un intervalle.

Theorem 4.2.2 Supposons qu'une fonction f soit **dérivable** sur un intervalle I. Alors :
— si $f'(x) > 0$ pour chaque $x \in I$, f est strictement croissante sur I,
— en revanche si $f'(x) < 0$ pour chaque $x \in I$, f est strictement décroissante sur I.

Démonstration. Soient $x_1, x_2 \in I$ tel que $x_1 < x_2$. En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[x_1, x_2]$, il existe certainement un $c \in]x_1, x_2[$ pour lequel on a

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Comme $x_2 - x_1 > 0$, alors si $f'(x) > 0$ sur I, on déduit que

$$f(x_2) - f(x_1) > 0,$$

d'où la croissance de f sur I. En revanche, si $f'(x) < 0$ sur I, on obtient

$$f(x_2) - f(x_1) < 0,$$

ce qui implique la décroissance de f sur I. ■

■ **Example 4.5** Démontrons que $\tan x > x$ pour tout $x \in]0, \pi/2[$. On peut considérer la fonction

$$f(x) = \tan x - x.$$

La dérivée de f est donnée par

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \\ &= \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

qui est strictement positive sur $x \in]0, \pi/2[$. Ainsi, $f(x) > f(0)$ donne

$$\tan x - x > \tan 0 - 0 = 0.$$

D'où le résultat. ■

■ **Example 4.6** Établissons par récurrence que pour chaque $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Considérons la fonction

$$f_n(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \cdots - \frac{x^n}{n!}.$$

Donc, il suffit d'établir que $f_n(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. Étant donné que pour $n = 0$, on a

$$f_0(x) = e^x - 1,$$

d'où $f_0'(x) = e^x > 0$, pour tout $x \geq 0$. Supposons par récurrence que $f_n(x) \geq 0$ et montrons que $f_{n+1}(x) \geq 0$.

$$f_{n+1}(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \cdots - \frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La dérivée de f_{n+1} s'obtient comme suit

$$\begin{aligned}
f'_{n+1}(x) &= e^x - 1 - 2\frac{x}{2!} - 3\frac{x^2}{3!} - \cdots - n\frac{x^{n-1}}{n!} - (n+1)\frac{x^n}{(n+1)!} \\
&= e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \cdots - \frac{x^n}{n!} \\
&= f_n(x) \geq 0.
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

4.3 Représentation de la règle de l'hôpital

Lorsqu'une limite

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

admet une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. Si α et β sont des fonctions dérivables au voisinage de a, alors

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$$

ce qui pourrait enlever la forme indéterminée. Cette technique s'obtient à partir de la règle de l'hôpital :

Theorem 4.3.1 Soient f et g deux fonctions dérivables avec $g'(x) \neq 0$ au voisinage de a (sauf peut être en a). Si la limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

est une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, alors si la limite $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ **existe ou** elle est **infinie**, on a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

La règle de l'hôpitale reste vraie si au lieu de $x \to a$ nous avons $x \to a^+$ ou $x \to a^-$. Aussi, elle vraie dans le cas où $x \to \infty$, il suffit que les conditions nécessaires soient vérifiées. Par exemple pour la limite connue $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ on a dans Fig 4.6.

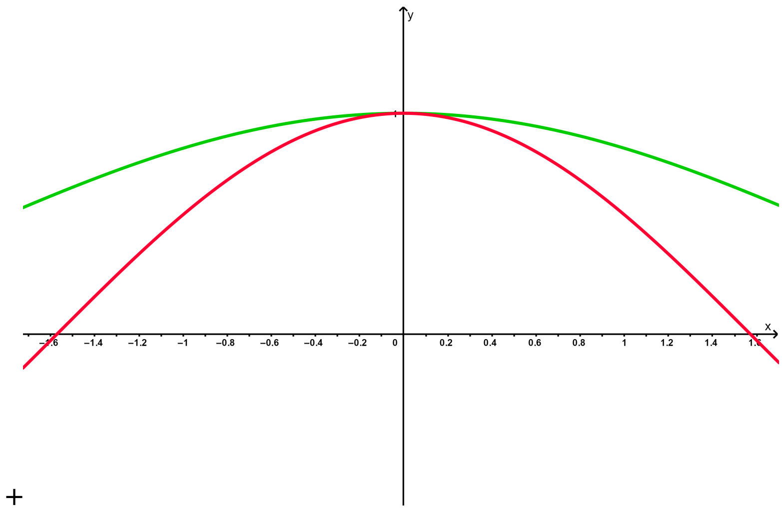


FIGURE 4.6 – **Illustration règle de l'hôpital**

5. Développement limité

Les fonctions polynômiales sont les plus faciles à manipuler et à étudier. Dans la physique, on cherche à approximer une fonction par un polynôme au voisinage d'un point qui nous intéresse. Cette opération s'appelle développement limité d'une fonction au voisinage d'un point qui consiste à écrire la fonction en question sous la forme de la somme d'un polynôme et d'un reste négligeable au voisinage du point considéré. Ce chapitre est consacré à l'étude de développement limité des fonctions avec quelques applications à la fin.

5.1 Formule de Taylor-Young

La formule de Taylor-Young permet d'écrire une fonction au voisinage d'un point sous la forme d'une somme d'un polynôme et d'un reste. Mais avant toute chose nous présentons la définition d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ qui est nécessaire au cours de ce chapitre.

Definition 5.1.1 Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle $f : I \to \mathbb{R}$:
- Lorsque f est continue, on dit qu'elle est de classe $\mathscr{C}^0$.
- Si f et f' sont continues sur I, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$.
- Si f est continue, en outre si f' et f'' existent et elles sont continues sur I, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$.
- En général, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ si elle est n fois dérivable et la n ème dérivée $f^{(n)}$ est continue sur I.
- A la fin, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ lorsqu'elle est infiniment dérivable.

Énonçons le théorème Taylor-Young suivant :

Theorem 5.1.1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et soit $a \in I$. Ainsi pour chaque $x \in I$ nous avons

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x). \tag{5.1}$$

c'est à dire

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{T_n(x)} + \underbrace{(x-a)^n\varepsilon(x)}_{R_n(x)},$$

avec $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a.

$T_n(x)$ s'appelle la partie **polynomiale** ou **régulière** de Taylor. $R_n(x)$ est le **reste** de Taylor. On appelle (5.1) la formule de Taylor-Young de f à l'ordre n au point a.

■ **Example 5.1** Soient $f(x) = \ln(1+x)$ et $I =]-1, +\infty[$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I. Déterminons la formule de Taylor-Young de f à l'ordre n au point $x = 0$. Vu que,

$$f(0) = \ln(1) = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \Longrightarrow f'(0) = 1 = 0!,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Longrightarrow f''(0) = -1 = -1!,$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Longrightarrow f^{(3)}(0) = 2 = 2!,$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} \Longrightarrow f^{(4)}(0) = -6 = -3!,$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5} \Longrightarrow f^{(3)}(0) = 24 = 4!.$$

En généralisant ceci, on obtient

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{(1+x)^n} \Longrightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Par conséquent, la formule de Taylor est donnée par

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{(x-0)^k}{k!} + (x-0)^n\varepsilon(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + x^n\varepsilon(x) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x), \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 0$. ■

5.2 Formule de Taylor-Lagrange

Le reste de cette formule est différent à celui de la formule de Taylor-Young. Ci-dessous le théorème de Taylor-Lagrange

Theorem 5.2.1 Considérons une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et soit $a, x \in I$. Ainsi, il existe forcément un $c \in I$ entre a et x vérifiant

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{5.2}$$

c'est à dire

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{R_n(x)}.$$

■ **Example 5.2** Soit la fonction $f(x) = \sin x$, elle est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Allons déterminer le développement de Taylor-Lagrange de f au point 0, alors

$$f(0) = \sin(0) = 0,$$

$$f'(x) = \cos x \Longrightarrow f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x \Longrightarrow f''(0) = 0,$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x \Longrightarrow f^{(3)}(0) = -1,$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \Longrightarrow f^{(4)}(0) = 1,$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x \Longrightarrow f^{(5)}(0) = 1,$$

$$f^{(6)}(x) = -\sin x \Longrightarrow f^{(6)}(0) = 0.$$

On remarque que

$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x \Longrightarrow f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k,$$

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x \Longrightarrow f^{(2k)}(0) = 0.$$

Il en résulte que si $n = 2m$, alors

$$\sin x = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{(-1)^m \cos c}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

sinon si $n = 2m+1$, on a

$$\sin x = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{(-1)^{m+1} \sin c}{(2m+2)!} x^{2m+2},$$

avec c est un réel compris entre 0 et x. ■

■ **Example 5.3** Allons refaire l'exemple de logarithme pour la formule de Lagrange. La partie polynomiale reste la même mais le reste change.

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= \frac{n!(-1)^n x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}(n+1)!} \\ &= \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}(n+1)}. \end{aligned}$$

■

R La formule de Taylor-Young et celle de Taylor-Lagrange ont la même partie polynomiale, mais les restes sont différents. En fait, la formule de Taylor-Young ne donne pas une information sur le reste à part qu'il tend vers 0 quand x tend vers a, or la formule Taylor-Lagrange offre un encadrement du reste. Par ailleurs, la formule de Taylor-Young exige que f soit de classe $\mathscr{C}^n$ quand il s'agit d'un développement d'ordre n, mais celle de Taylor-Lagrange nécessite que f soit de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.

Maintenant soient $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$ et $T_4(x)$ les polynômes de Taylor associés à la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ au voisinage de 0 :

$$T_1(x) = x,$$

$$T_2(x) = x - \frac{x^2}{2},$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3},$$

$$T_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

Dans Fig 5.1, on remarque qu'au voisinage de 0 plus n est grand plus le polynôme de Taylor s'approche de f. Cela veut dire que l'ordre élevé de polynôme de Taylor donne une meilleure approximation de f au voisinage du point considéré.

5.3 Développement limité au voisinage d'un point

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Definition 5.3.1 Soit $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité (**DL**) au point a à l'ordre n dans le cas où il existe $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n$ et une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui pour chaque $x \in I$ satisfait à

$$f(x) = \underbrace{c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n}_{T_n(x)} + \underbrace{(x-a)^n \varepsilon(x)}_{R_n(x)},$$

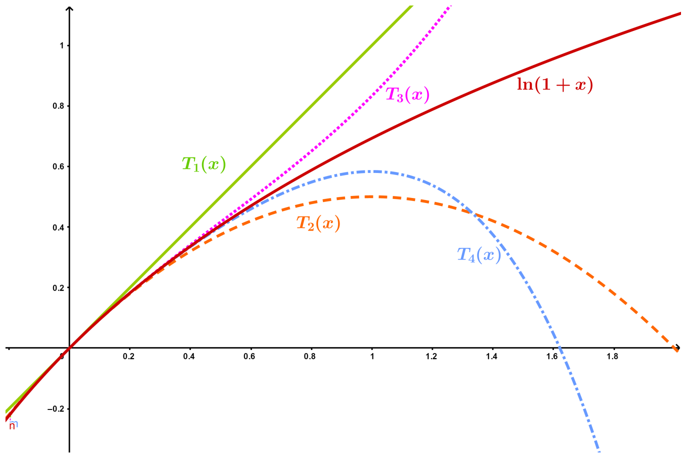


FIGURE 5.1 – Graphique de $f(x) = \ln(1+x)$ au voisinage de 0 et les quatre premiers polynômes de Taylor

avec $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow 0$.

Les formules de Taylor nous permettent d'obtenir un **DL** en posant $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Du moment que f soit de classe $\mathscr{C}^{\mathbf{n}}$ sur I, alors le **DL** qui vient de la formule de Taylor-Young est donné par

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

R Si $a = 0$ la formule de Taylor s'appelle développement de Maclaurin.

Example 5.4 Déterminons *DL* de $f(x) = \cos x$ au voisinage de $\pi/2$ à l'ordre $n = 5$. En effet,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$f'(x) = -\sin x \Longrightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

$$f''(x) = -\cos x \Longrightarrow f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$f^{(3)}(x) = \sin x \Longrightarrow f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x \Longrightarrow f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$f^{(5)}(x) = -\sin x \Longrightarrow f^{(5)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Ainsi, le **DL** de f au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$ à l'ordre 5 est comme suit

$$\cos x = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5 \varepsilon(x),$$

avec $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$. ■

5.3.1 DL des fonctions usuelles au voisinage de 0

Ci-dessous un catalogue de **DL** au voisinage de 0 des fonctions les plus utilisées.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\sinh x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

5.3.2 Unicité d'un DL

Dans cette partie, nous allons démontrer que si une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, admet un **DL** au voisinage d'un point $a \in I$, alors nécessairement ce **DL** est unique. Supposons par l'absurde que f admet deux **DL** au point a donnés par les formules suivantes

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_1(x),$$

$$f(x) = d_0 + d_1(x-a) + d_2(x-a)^2 + \cdots + d_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon_2(x),$$

avec c_i et d_i sont des réels pour $i = 0,\ldots,n$ et

$$\varepsilon_1(x) \longrightarrow 0, \quad \varepsilon_2(x) \longrightarrow 0$$

lorsque $x \longrightarrow a$. Ce qui implique que

$$(c_0-d_0)+(c_1-d_1)(x-a)+\cdots+(c_n-d_n)(x-a)^n+(x-a)^n(\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x))=0. \quad (5.3)$$

On remplace $x=a$ dans (5.3), on obtient $c_0=d_0$. Après avoir diviser l'égalité (5.3) par $(x-a)$, on obtient

$$(c_1-d_1)+(c_2-d_2)(x-a)+\cdots+(c_n-d_n)(x-a)^{n-1}+(x-a)^{n-1}(\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x))=0.$$

En prenant $x=a$ dans l'équation précédente, on déduit que $c_1=d_1$. D'une façon similaire on obtient

$$c_2=d_2,\ c_3=d_3,\ldots,\ c_{n-1}=d_{n-1}.$$

Enfin,

$$(c_n-d_n)+(\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x))=0$$

pour tout $x\in I$. Par passage à la limite quand $x\longrightarrow a$, on obtient $c_n=d_n$. Ainsi,

$$\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x)=0,\ \forall x\in I$$

ceci implique que $\varepsilon_1=\varepsilon_2$. Ce qui achève notre démonstration.

5.3.3 Les principales propriétés du développement limité

Dans cette section, on va présenter les propriétés nécessaires à connaitre pour le **DL** au voisinage de 0.

Somme et produit

Soient les fonctions $m: I\longrightarrow\mathbb{R}$ et $l: I\longrightarrow\mathbb{R}$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ qui ont des **DL** au point 0 d'ordre n donnés par

$$m(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_nx^n+x^n\varepsilon_1(x),$$

$$l(x)=\beta_0+\beta_1x+\beta_2x^2+\cdots+\beta_nx^n+x^n\varepsilon_2(x),$$

avec $\varepsilon_1(x)\longrightarrow 0$, $\varepsilon_2(x)\longrightarrow 0$ quand $x\longrightarrow 0$. Alors, la fonction $m+l$ possède un **DL** au point 0 d'ordre n donné par l'expression :

$$(m+l)(x)=(\alpha_0+\beta_0)+(\alpha_1+\beta_1)x+(\alpha_2+\beta_2)x^2+\cdots+(\alpha_n+\beta_n)x^n+x^n\underbrace{(\varepsilon_1(x)+\varepsilon_2(x))}_{\varepsilon(x)}$$

et il est clair que $\varepsilon(x)\longrightarrow 0$ quand $x\longrightarrow 0$.

D'autre part, la fonction $m\times l$ possède un **DL** à l'ordre n au voisinage de 0 donné par

$$(m\times l)=T_n(x)+x^n\varepsilon(x)$$

où

$$T_n(x)=(\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_nx^n)(\beta_0+\beta_1x+\beta_2x^2+\cdots+\beta_nx^n)$$

ceci en prenant uniquement les coefficients des monômes de degré $\leq n$, le reste des termes on l'introduit dans le reste $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0.

■ **Example 5.5** Déterminons le **DL** de la fonction $f(x) = e^x \sin x$ à l'ordre 5 au point 0. On commence par écrire le **DL** des fonctions e^x et $\sin x$ à l'ordre 5 au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon_1(x)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon_2(x)$$

où $\varepsilon_1(x) \longrightarrow 0,\ \varepsilon_2(x) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 0$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}
e^x \sin x &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) + x^5\varepsilon_3(x) \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + x^5\varepsilon_4(x) \\
&= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{24} + x^5\varepsilon_4(x),
\end{aligned}$$

avec $\varepsilon_4(x) \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow 0$. ■

■ **Example 5.6** Déterminons le **DL** de $g(x) = (1+\ln(1+x))^3$ à l'ordre 4 au voisinage de 0. Avant toute chose on sait que

$$1 + \ln(1+x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon_1(x).$$

En outre,

$$\begin{aligned}
(1+\ln(1+x))^2 &= (1+\ln(1+x))(1+\ln(1+x)) \\
&= \left(1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\left(1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + x^4\varepsilon_2(x) \\
&= 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \\
&\quad + \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon_3(x) \\
&= 1 + 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{5x^4}{12} + x^4\varepsilon_3(x).
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\begin{aligned}
(1+\ln(1+x))^3 &= (1+\ln(1+x))(1+\ln(1+x))^2 \\
&= \left(1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\left(1 + 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{5x^4}{12}\right) + x^4\varepsilon_4(x) \\
&= 1 + 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{5x^4}{12} + x + 2x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^4}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon_5(x) \\
&= 1 + 3x + \frac{3x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2} + x^4\varepsilon_5(x).
\end{aligned}$$

■

Composition

Soient les fonctions m et l qui ont des **DL** au point 0 d'ordre n donnés par

$$m(x) = \underbrace{\alpha_0 + \beta_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n}_{C(x)} + x^n \varepsilon_1(x),$$

$$l(x) = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_n x^n}_{D(x)} + x^n \varepsilon_2(x),$$

avec $\varepsilon_1(x) \longrightarrow 0$, $\varepsilon_2(x) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 0$. Si $l(0) = 0$ c'est à dire $\beta_0 = 0$, alors $m \circ l$ possède un **DL** au point 0 à l'ordre n comme suit

$$(m \circ l)(x) = T_n(x) + x^n \varepsilon(x)$$

où $T_n(x) = C(D(x))$ en prenant uniquement les coefficients des monômes de degré $\leq n$, le reste des termes on les met dans le reste $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0.

R La condition $l(0) = 0$ est nécessaire, car quand $x \longrightarrow 0$ si $l(0) \neq 0$, alors on peut pas parler du **DL** au voisinage de 0 de $m(l(x))$.

Regardons l'exemple suivant :

■ **Example 5.7** Déterminons le **DL** de la fonction $h(x) = \sqrt{1 + \sinh(x)}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3 si c'est possible. Du moment que $\sinh(0) = 0$, donc la composition est faisable et on a

$$\sinh x = \underbrace{x + \frac{x^3}{3!}}_{u} + x^3 \varepsilon_1(x). \quad \varepsilon_1(x) \longrightarrow 0,\ x \longrightarrow 0.$$

Ensuite,

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + x^3 \varepsilon_2(x). \quad \varepsilon_1(x) \longrightarrow 0,\ x \longrightarrow 0.$$

On calcule u^2 et u^3 :

$$u^2 = \left(x + \frac{x^3}{3!}\right)^2 = x^2 + x^3 \varepsilon_3(x)$$

et

$$u^3 = uu^2 = \left(x + \frac{x^3}{3!}\right) x^2 = x^3 + \varepsilon_4(x).$$

On déduit que

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\sinh(x)} &= 1 + \frac{\left(x + \frac{x^3}{3!}\right)}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3 \varepsilon(x) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{7x^3}{48} + x^3 \varepsilon(x), \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow 0$. ■

Quotient

Soient m et l deux fonctions dont les **DL** au voisinage de 0 à l'ordre n sont donnés par les expressions suivantes :

$$m(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x),$$

$$l(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x),$$

où P et Q sont les parties polynomiales des **DL** de m et l, respectivement. Ainsi, la fonction $\frac{m(x)}{l(x)}$ possède un **DL** au voisinage de 0 à l'ordre n défini par

$$\frac{m(x)}{l(x)} = R(x) + x^n \varepsilon(x),$$

sachant que le polynôme $R(x)$ s'obtient en effectuant la division de P par Q suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre n.

■ **Example 5.8** Faisons le **DL** de $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 5.

$$\begin{array}{lll|l}
x & -\frac{x^3}{6} & +\frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \cline{4-4}
-x & +\frac{x^3}{2} & -\frac{x^5}{24} & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \\ \cline{1-3}
 & +\frac{x^3}{3} & -\frac{x^5}{30} & \\
 & -\frac{x^3}{3} & +\frac{x^5}{6} & \\ \cline{1-3}
 & & +\frac{2x^5}{15} & \\
 & & -\frac{2x^5}{15} & \\ \cline{1-3}
 & & 0 + x^5\varepsilon(x). &
\end{array}$$

Vu que c'est un **DL** à l'ordre 5, alors on néglige tous les termes qui ont des degrés ≥ 6 et on les met dans le reste. Donc

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15} + x^5 \varepsilon(x).$$

■

■ **Example 5.9** Déterminons le **DL** de la fonction $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 5.

$$
\begin{array}{rrr|l}
x & +\dfrac{x^3}{6} & +\dfrac{x^5}{120} & 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24} \\ \cline{4-4}
-x & -\dfrac{x^3}{2} & -\dfrac{x^5}{24} & x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15} \\ \cline{1-3}
 & -\dfrac{x^3}{3} & -\dfrac{x^5}{30} & \\
 & +\dfrac{x^3}{3} & +\dfrac{x^5}{6} & \\ \cline{1-3}
 & & \dfrac{2x^5}{15} & \\
 & & -\dfrac{2x^5}{15} & \\ \cline{1-3}
 & & 0+x^5\varepsilon(x). &
\end{array}
$$

Du moment que c'est un **DL** d'ordre 5 on va négliger tous les termes qui ont des degrés ≥ 6 et on les introduit dans le reste. Par conséquent,

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon(x).$$

■

R Toutes les propriétés que nous avons vu dans cette partie on peut les appliquer pour un **DL** au voisinage d'un point a quelconque, il suffit de faire le changement de variables $y = x - a$.

5.4 Applications du DL

On commence cette partie par une citation d'Albert Einstein symbole d'intelligence, de savoir et de génie, est un physicien d'origine allemande qui a marqué le 20ème siècle. La citation est la suivante :
La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. Ici, nous avons réuni théorie et pratique : Rien ne fonctionne... et personne ne sait pourquoi !
Dans la suite, nous présentons des applications intéressantes de **DL**.

5.4.1 Calcul des limites au voisinage d'un point

Le **DL** au voisinage d'un point est très efficace pour le calcul d'une limite dans ce point, dans le cas où nous avons une forme indéterminée. En fait, si f admet un **DL** au voisinage de a donné par

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x),$$

avec $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow a$. Alors,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha_0.$$

■ **Example 5.10** Calculons
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\tan x - \tanh x}.$$
Nous avons une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On fait un **DL** de numérateur et de dénominateur au voisinage de 0 à l'ordre 3 comme suit
$$\sin x - x\cos x = \left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon_1(x)\right)-x\left(1-\frac{x^2}{2!}+x^3\varepsilon_2(x)\right)$$
$$\tan x - \tanh x = \left(x+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_3(x)\right)-\left(x-\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_4(x)\right),$$
avec $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2(x)$, $\varepsilon_3(x)$ et $\varepsilon_4(x)$ vont tendre vers 0 chaque fois que x s'approche de 0. Par conséquent,
$$\frac{\sin x - x\cos x}{\tan x - \tanh x}=\frac{\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_5(x)}{\frac{2x^3}{3}+x^3\varepsilon_6(x)}=\frac{\frac{1}{3}+\varepsilon_5(x)}{\frac{2}{3}+\varepsilon_6(x)}.$$
On conclut que
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\tan x - \tanh x}=\frac{1}{2}.$$
■

R Il n'existe pas une règle générale pour choisir l'ordre du **DL** quand il s'agit de calcul d'une limite. Ceci dépend d'une limite à une autre et l'étudiant est invité à faire beaucoup d'exercice afin de maitriser toutes les situations possibles.

■ **Example 5.11** Calculons la limite suivante en utilisant le **DL** :
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}.$$
On fait un *DL* à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $e^{x^2}-\cos x$:
$$\begin{aligned} e^{x^2}-\cos x &= \left(1+x^2+\frac{x^4}{2}+x^4\varepsilon_1(x)\right)-\left(1+-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon_2(x)\right)\\ &= \frac{3x^2}{2}+\frac{11x^4}{24}+x^4\varepsilon_3(x). \end{aligned}$$
On en déduit que
$$\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\frac{3}{2}+\frac{11x^2}{24}+x^2\varepsilon_3(x),$$
ce qui entraîne
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\frac{3}{2}.$$
■

5.4.2 Calcul des limites au voisinage de l'infini

On commence ce paragraphe par définir c'est quoi le **DL** d'une fonction au voisinage de l'infinie. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ définie sur un intervalle de la forme $I =]x_0, +\infty[$. On dit que f possède un **DL** à l'ordre n en $+\infty$ dans le cas où ça existe des réels α_0, α_1, α_2, ...,α_n pour lesquels

$$f(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right),$$

avec $\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

En faisant un changement de variable $y = 1/x$, alors lorsque $x \longrightarrow +\infty$ on aura $y \longrightarrow 0$. Donc, la fonction $f(x) = g(y)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de 0 et g a un **DL** au voisinage de 0 à l'ordre n

$$g(y) = \alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \cdots + \alpha_n y^n + y^n \varepsilon(y),$$

où $\varepsilon(y) \longrightarrow 0$ quand $y \longrightarrow 0$.

■ **Example 5.12** Faisons le **DL** à l'infini de la fonction $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ à l'ordre n. On pose $y = \frac{1}{x}$. Par définition

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{y^n}{n!} + y^n \varepsilon(y),$$

avec $\varepsilon(y) \longrightarrow 0$ lorsque $y \longrightarrow 0$. D'où

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right),$$

avec $\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$. ■

Dans l'exercice suivant nous utilisons le **DL** à l'infini pour calculer une limite.

Exercice d'entrainement 1 :

Calculons la limite suivante

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Tout d'abord on pose

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x \ln\left[1 + \frac{1}{x}\right]\right).$$

On fait le changement de variable $y = 1/x$, alors $x = 1/y$ et $y \longrightarrow 0^+$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$. Donc,

$$f(x) = \exp\left(x \ln\left[1 + \frac{1}{x}\right]\right) = \exp\left(\frac{\ln[1+y]}{y}\right).$$

De plus,

$$\ln[1+y] = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + y^3\varepsilon_1(y),$$

il vient

$$\frac{\ln[1+y]}{y} = 1 - \frac{y}{2} + \frac{y^2}{3} + y^2\varepsilon_1(y).$$

Il en résulte que

$$\exp\left(\frac{\ln[1+y]}{y}\right) = \exp\left(1 - \frac{y}{2} + \frac{y^2}{3} + y^2\varepsilon_1(y)\right) \Longrightarrow \lim_{y\to 0}\exp\left(\frac{\ln[1+y]}{y}\right) = e.$$

En conclusion,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

5.4.3 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui possède un **DL** au point a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^k\varepsilon(x),$$

avec $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow a$. $f^{(k)}(a) \neq 0$ tel que $k \in \{2, 3, \ldots\}$ est le premier entier naturel à partir de 2 pour lequel $f^{(k)}(a) \neq 0$. L'équation de la droite tangente de f au point a s'écrit

$$y = f'(a)(x-a) + f(a),$$

c'est à dire la position de f par rapport à sa tangente en a est obtenue par

$$f(x) - y = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^k\varepsilon(x)$$

le signe de $f(x)-y$ découle du signe de $f^{(k)}(a)(x-a)^k$:

- lorsque $f(x)-y>0$, ainsi le graphe de f est au dessus de la tangente.
- En revanche, quand $f(x)-y<0$, alors le graphe de f est au dessous de la tangente.
- Sinon si $(x-a)^k$ change de signe lorsque $x<a$ à $x>a$, on dit que a est un point d'inflexion.

■ **Example 5.13** Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x(1+\cos x) - 3\tan x}{2x - \sin x - 2\tan x}.$$

Déterminons la position de f par rapport à sa tangente en 0. On a

$$\begin{aligned}\frac{x(1+\cos x) - 3\tan x}{2x - \sin x - 2\tan x} &= \frac{x\left(1+1-\frac{x^2}{2!}+x^2\varepsilon_1(x)\right) - 3\left(x+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_2(x)\right)}{2x - \left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon_3(x)\right) - 2\left(x+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_4(x)\right)}\\ &= \frac{-x-\frac{3x^3}{2}+x^3\varepsilon_5(x)}{-x-\frac{x^3}{2}+x^3\varepsilon_6(x)},\end{aligned}$$

après division suivant les puissances croissantes de numérateur par le dénominateur, nous obtenons

$$f(x) = 1 + x^2 + x^2\varepsilon(x) \Longrightarrow f(x) - y = x^2 + x^2\varepsilon(x),$$

c'est à dire le graphe de f est au dessus de la tangente (voir Fig 5.2). ■

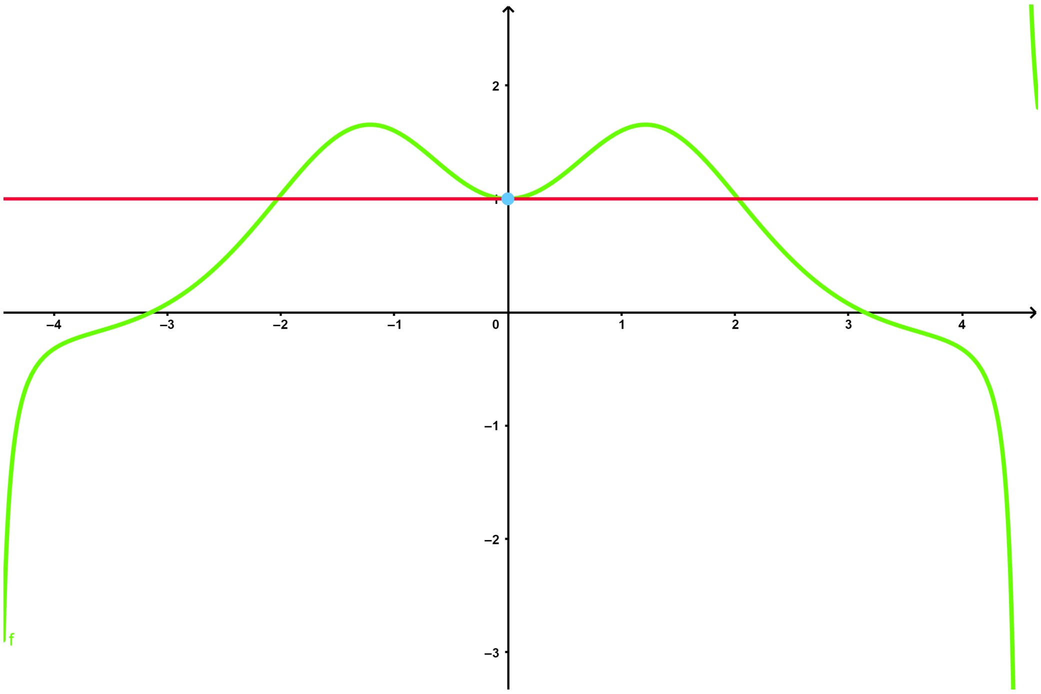


FIGURE 5.2 – Graphique de $f(x) = \dfrac{x(1+\cos x) - 3\tan x}{2x - \sin x - 2\tan x}$ et sa position par rapport à la tangente au point 0

5.4.4 Position du graphe d'une fonction par rapport à une asymptote

On commence cette partie par définir c'est quoi une asymptote oblique d'une fonction f.

Definition 5.4.1 Considérons une fonction f définie sur un intervalle de la forme $]x_0, +\infty[$ ou $]-\infty, x_0[$. On dit qu'une droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** de f lorsque

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

En outre, si $y = ax + b$ est une asymptote oblique de f, alors on a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a,$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b.$$

La méthode pour déterminer la position de f par rapport à son asymptote oblique est basée sur le **DL** de $\frac{f(x)}{x}$ au voisinage de ∞. En fait,

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_k}{x^k} + \frac{1}{x^k}\varepsilon(1/x),$$

pour $k \geq 2$ tel que $a_k \neq 0$. Dans ce cas,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a_0,$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - a_0 x) = a_1,$$

donc l'asymptote oblique est d'équation $y = a_0 x + a_1$ et la position de f par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $\frac{a_k}{x^k}$.

■ **Example 5.14** Soit la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2-1}$. On a

$$\frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2-1} = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}.$$

On pose $y = 1/x$, alors lorsque $y \longrightarrow 0^+$, $x \longrightarrow +\infty$. C'est à dire,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= e^y\sqrt{1-y^2} \\
&= \left(1+y+\frac{y^2}{2}+y^2\varepsilon_1(y)\right)\left(1-\frac{y^2}{2}+y^2\varepsilon_2(y)\right) \\
&= 1+y-\frac{y^3}{3}+y^3\varepsilon(y) \\
&= 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x^3}\varepsilon(1/x).
\end{aligned}$$

Donc, $a_0 = 1$ et $a_1 = 1$, c'est à dire l'équation de l'asymptote oblique est $y = x+1$ et la position du graphe de f par rapport à cette asymptote est obtenue par le signe de $-\frac{1}{3x^3}$ qui est négatif au voisinage de $+\infty$. On conclut que le graphe de f est au dessous de $y = x+1$ à $+\infty$ (voir Fig 5.3). ■

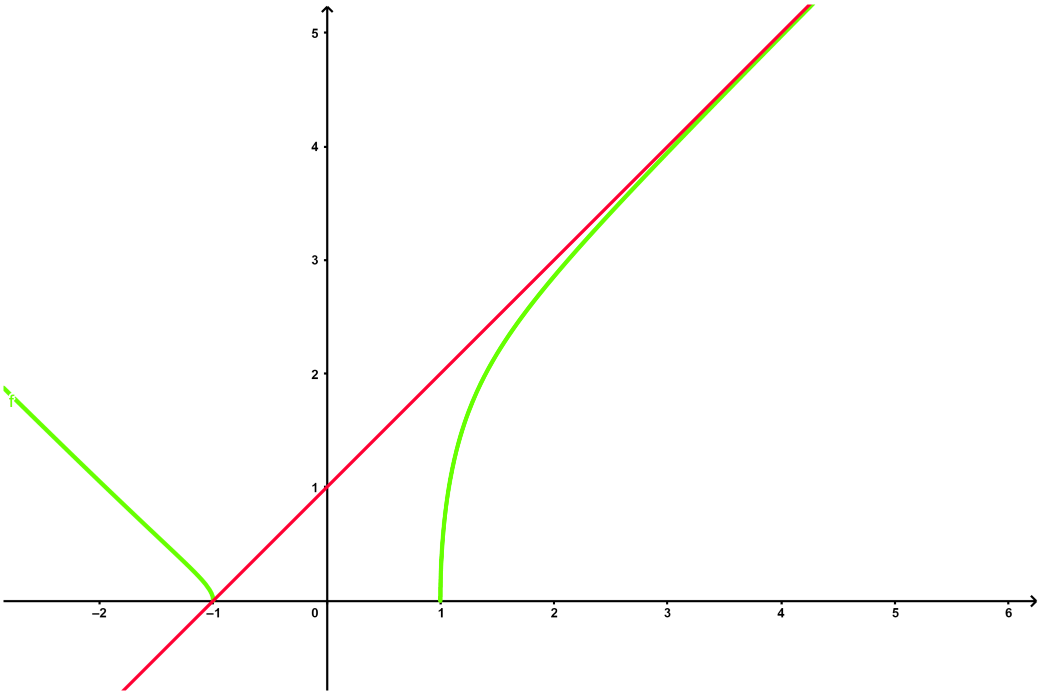
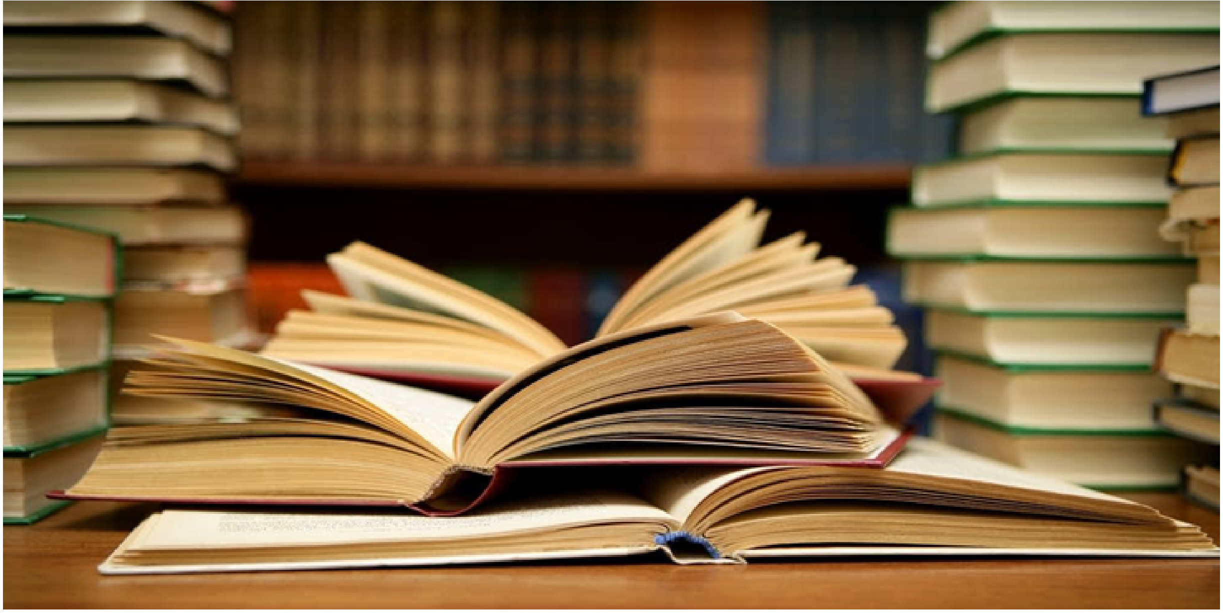


FIGURE 5.3 – Graphique de $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2-1}$ et sa position par rapport à la tangente au point 0



6. Bibliographie

L'auteur a utilisé les références citées ci-dessous.

Cours

Pascal Lainé, Nombres réels.
Jean-Louis Rouget, Valeurs absolues. Partie entière. Inégalités.
http ://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00010.pdf
http ://exo7.emath.fr/cours/chdl.pdf
Bernard Ycart, Développements limités. Université Joseph Fourier, Grenoble.

Livres

Gilles Costantini, Analyse : cours exercices corrigés, , de boeck, Bruxelles.
Messirdi Bekkai, **Messirdi Sofiane**, **Messirdi Sanaa** : Mathématiques Supérieures : Analyse 1 - Cours et exercices corrigés. Éditions Pages Bleues Internationales, 2020. ISBN 978-9947-34-186-5.
Stewart, Analyse : concepts et contextes : Fonction d'une seule variable, de boeck, Bruxelles.

Liens

https ://www.tweedcoasttutoring.com.au/understanding-maths-works-important-process/
https ://www.pourlascience.fr/sd/logique/la-suite-de-fibonacci-et-ses-suites-9757.php
https ://portal.fgv.br/en/news/experts-assess-prospects-and-challenges-future-fgvs-school-applied-mathematics
https ://pt.slideshare.net/imigrantpunk/conceptos-bsicos-biologa

https ://www.thecurrent.org/feature/2013/02/20/
https ://www.shutterstock.com/fr/video/clip-21567829-4k-teacher-writing-math-formulas-on-blackboard
https ://www.frenchweb.fr/derives-du-management-les-managers-manquent-ils-de-courage/339875