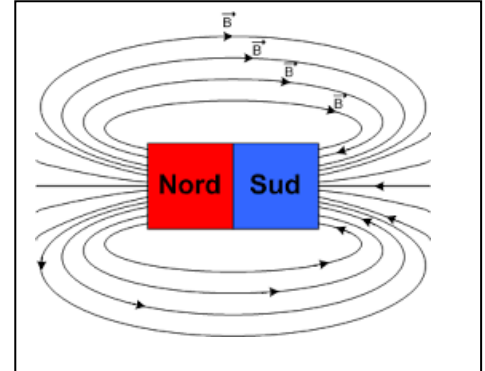
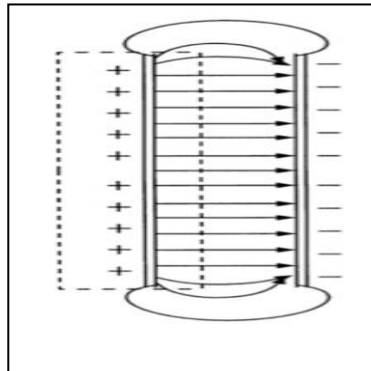
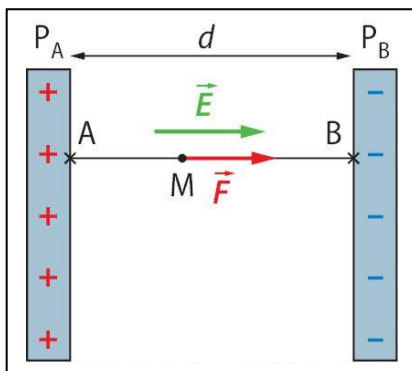




**Electrostatique et Magnétostatique pour les classes
préparatoires**
Cours et exercices résolus



Elaboré par :

Dr. Fatiha SAIDI

PREFACE

Ce polycopié de cours et exercices résolus d'électrostatique et magnétostatique est destiné aux étudiants de la première année des classes préparatoires ainsi qu'aux étudiants qui préparent, dans le cadre de la réforme LMD, une licence dans les domaines des « Sciences de la Matière » et des « Sciences et une licence dans les domaines des « Sciences de la Matière » et des « Sciences et Technologies ».

Conformément au programme en vigueur, le cours est articulé en quatre chapitres visant l'étude de l'électrostatique, l'électrocinétique des régimes continus et la magnétostatique. L'électrostatique est étudiée dans les deux premiers chapitres. Les phénomènes électrostatiques sont introduits à partir de la loi de Coulomb et du principe de superposition. Le théorème de Gauss est démontré en calculant la divergence du champ électrostatique défini à partir de la loi de Coulomb.

Le troisième et le quatrième chapitre, portent sur l'électrocinétique des courants continus et la magnétostatique. L'établissement des équations de la théorie électromagnétique, a été obtenu dans le cas particulier des états stationnaires.

Il est important de noter que l'analyse des phénomènes dépendant du temps fera l'objet du module Physique 3 : Electromagnétisme.

Pour se mettre en situation d'épreuves, de nombreux exercices résolus sont proposés à la fin de chaque chapitre. Je dois souligner que ce document ne remplace en aucun cas le cours et TD en présentiel. Nous aborderons l'ensemble des notions qui apparaissent dans le polycopié avec les démonstrations nécessaires et aussi avec des expériences qui montrent les phénomènes étudiés. Il est conseillé aux étudiants de refaire les calculs du polycopié et de résoudre, au moins partiellement les exercices proposés.

Comme pour tous les exercices auto-correctifs, les solutions profitent plus aux étudiants qui fournissent l'effort nécessaire pour réfléchir et essayer de résoudre les exercices proposés.

Je souhaite que ce recueil de cours et d'exercices résolus d'électrostatique et magnétostatique puisse aider de manière efficace la majorité d'étudiants.

Table des matières

Chapitre I: Champ et potentiel électrostatique

| | |
|--|----|
| I. Charge électrique..... | 01 |
| I.1 Définition et propriétés | 01 |
| I.2 Description de la charge électrique à l'échelle macroscopique..... | 02 |
| I.3 Les distributions continues de charge..... | 02 |
| I.3.1 Densité volumique de charges | 02 |
| I.3.2 Densité surfacique de charges | 03 |
| I.3.3 Densité linéique de charges | 03 |
| I.4 Champ électrostatique | 04 |
| I.4.1 Loi de Coulomb ou principe fondamental de l'électrostatique | 04 |
| I.4.1.1 Enoncé de la loi de coulomb..... | 04 |
| I.4.1.2 Validité de la loi de Coulomb | 05 |
| I.4.2 Champ créé par une charge ponctuelle | 05 |
| I.4.3 Champ créé par une distribution de charges ponctuelles: Théorème de superposition | 06 |
| I.4.4 Champ créé par une distribution "continue" de charges | 06 |
| I.4.5 Topographie d'un champ électrique | 11 |
| I.5 Invariances et symétries | 13 |
| I.5.1 Invariances des distributions de charges | 13 |
| I.5.1.1 Invariances par translation..... | 13 |
| I.5.1.2 Invariances par rotation | 13 |
| I.5.1.3 Exemple d'invariances | 13 |
| I.5.2 Symétries et antisymétries planes | 13 |
| I.5.3 Conséquences pour le champ électrostatique | 14 |
| I.6 Notion de potentiel électrostatique | 16 |
| I.6.1 Introduction..... | 16 |
| I.6.2 Circulation du champ électrostatique : Le potentiel électrostatique | 16 |
| I.6.2.1 Potentiel électrostatique | 16 |
| I.6.2.2 Relation entre champ et potentiel électrostatique..... | 18 |
| I.6.2.3 Propriétés | 19 |
| I.6.3 Potentiel électrostatique crée par une distribution de charges continues..... | 19 |

| | | |
|-----------|--|----|
| I.6.4 | Topographie du potentiel électrostatique | 20 |
| I.6.4.1 | Surfaces équipotentiels d'une distribution | 20 |
| I.6.4.2 | Lignes de champ et surfaces équipotentiels | 20 |
| I.6.4.3 | Propriétés de symétrie | 21 |
| I.7 | Energie potentielle d'une charge placé dans un champ..... | 21 |
| I.7.1 | Charge dans un champ électrostatique "extérieur" | 21 |
| I.7.2 | Système de charges en interaction | 22 |
| I.7.2.1 | Cas de deux charges | 22 |
| I.7.2.2 | Cas de n charges | 22 |
| I.8 | Théorème de Gauss | 22 |
| I.8.1 | Introduction | 22 |
| I.8.2 | Flux du champ d'une charge | 23 |
| I.8.2.1 | Vecteur élément de surface | 23 |
| I.8.2.2 | Flux du champ électrostatique | 23 |
| I.8.2.2.1 | Définition | 23 |
| I.8.2.2.2 | Flux crée par une charge ponctuelle | 23 |
| I.8.3 | Théorème de Gauss | 27 |
| I.8.3.1 | Validité du théorème de Gauss | 27 |
| I.8.3.2 | Calcul du champ électrostatique à l'aide du théorème de Gauss..... | 27 |
| I.9 | Le dipôle électrostatique | 31 |
| I.9.1 | Définition | 31 |
| I.9.2 | Moment dipolaires électriques | 31 |
| I.9.3 | potentiel électrostatique créé par un dipôle | 31 |
| I.9.4 | Champ électrostatique créé par un dipôle | 33 |
| I.9.4.1 | Composantes du champ en coordonnées polaires | 33 |
| I.9.4.2 | Composantes du champ en coordonnées cartésiennes | 33 |
| I.9.5 | Force et couple exercés par un champ électrique sur un dipôle..... | 34 |
| I.9.6 | Energie potentielle d'interaction du dipôle..... | 35 |

Chapitre II: Conducteurs en équilibre électrostatique

| | | |
|--------|---------------------------------|----|
| II.1 | Conducteur et équilibre..... | 58 |
| II.1.1 | Conducteur | 58 |
| II.1.2 | Equilibre électrostatique | 58 |

| | | |
|----------|---|----|
| II.2 | Caractéristiques du conducteur en équilibre | 58 |
| II.2.1 | Le champ électrostatique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre | 58 |
| II.2.2 | Répartition des charges | 59 |
| II.2.3 | Potentiel électrique | 59 |
| II.2.4 | Lignes de champ | 59 |
| II.3 | Champ au voisinage d'un conducteur : Théorème de Coulomb..... | 60 |
| II.4 | Pression électrostatique | 61 |
| II.5 | Pouvoir des pointes | 63 |
| II.6 | Cavité vide dans un conducteur : Conducteur creux | 64 |
| II.7 | Capacité d'un conducteur isolé | 65 |
| II.8 | Phénomènes d'influence..... | 66 |
| II.8.1 | Théorème des éléments correspondants..... | 66 |
| II.8.2 | Influence partielle..... | 67 |
| II.8.3 | Influence totale..... | 68 |
| II.9 | Les condensateurs..... | 69 |
| II.9.1 | Définition d'un condensateur..... | 69 |
| II.9.2 | Capacité d'un condensateur..... | 69 |
| II.9.2.1 | Capacité de quelques condensateurs simples..... | 72 |
| II.9.3 | Associations de condensateurs..... | 72 |
| II.9.3.1 | Condensateur en série..... | 72 |
| II.9.3.2 | Condensateur en parallèle..... | 72 |
| II.9.4 | Énergie électrostatique emmagasinée dans un condensateur..... | 73 |

Chapitre III: Courant électrique

| | | |
|-----------|--|----|
| III.1 | Courants électriques..... | 87 |
| III.1.1 | Origine du courant électrique..... | 87 |
| III.1.2 | Sens conventionnel du courant..... | 87 |
| III.1.3. | Intensité du courant..... | 88 |
| III.1.4 | Vecteur densité de courant..... | 88 |
| III.2 | Loi d'Ohm | 90 |
| III.2.1 | Loi d'Ohm à l'échelle macroscopique..... | 90 |
| III.2.2 | Forme locale de la loi d'Ohm..... | 90 |
| III.2.2.1 | Conductivité électrique..... | 90 |

| | |
|--|----|
| III.2.2.2 Résistivité électrique..... | 92 |
| III.3 Association de résistances..... | 92 |
| III.3.1 Résistances en série..... | 92 |
| III.3.2 Résistances en parallèle | 92 |
| III.4 L'effet Joule..... | 93 |
| III.5 Rôle du générateur : force électromotrice..... | 94 |
| III.5.1 Générateur en circuit ouvert | 95 |
| III.5.2 Générateur en circuit fermé | 95 |
| III.5.3 Tronçon de circuit comportant un générateur..... | 95 |
| III.5.4 Cas d'un récepteur..... | 96 |
| III.6 Les lois de Kirchhoff..... | 96 |

Chapitre IV: Magnétostatique

| | |
|--|-----|
| IV.1 Introduction..... | 104 |
| IV. 1.1 Propriétés des aimants..... | 104 |
| IV.1.2 Champ magnétique..... | 104 |
| IV.1.3 La force magnétique..... | 105 |
| IV.1.3.1 Force de Lorentz | 105 |
| IV.1.3.2 Force de Laplace..... | 107 |
| IV.2 Expressions du champ magnétique..... | 108 |
| IV.2.1 Champ magnétique créé par une charge en mouvement..... | 108 |
| IV.2.2 Champ magnétique créé par un ensemble de charges en mouvement..... | 109 |
| IV.2.3 Champ créé par un circuit électrique (formule de Biot et Savart)..... | 109 |
| IV.3 Lois fondamentales de la magnétostatique | 110 |
| IV.3.1 Flux du champ magnétique | 110 |
| IV.3.1.1 Conservation du flux magnétique..... | 110 |
| IV.4 Circulation du champ magnétique..... | 111 |
| IV.4.1 Circulation du champ autour d'un fil infini..... | 111 |
| IV.5 Théorème d'Ampère..... | 112 |
| IV.6 Induction électromagnétique..... | 113 |
| IV.6.1 Introduction | 113 |
| IV.6.2 Expériences fondamentales | 113 |
| IV.6.3 Loi de Lenz et de Faraday | 113 |

Chapitre I

CHAMP ET POTENTIEL ELECTROSTATIQUES

L'électromagnétisme consiste en l'étude des phénomènes qui font intervenir des charges en mouvement (courants électriques, antenne radio, conductimétrie, courants de Foucault,...). On se restreint, pour l'instant, aux phénomènes indépendants du temps ce qui permet de séparer l'étude des effets magnétiques et électriques. Ce chapitre aborde l'électrostatique qui est une branche de la physique qui étudie les phénomènes (champ et potentiel électrostatiques) créés par des charges électriques statiques pour l'observateur. Les forces électrostatiques sont décrites par la loi de Coulomb qui présente une certaine analogie avec l'interaction gravitationnelle.

I. Charge électrique

I.1 Définition et propriétés

Dans tout phénomène physique intervient un « objet » dont la structure confère certaines propriétés à l'espace qui l'entoure. Dans le cas de la gravitation, l'objet est constitué par une masse. En électrostatique, l'objet est une charge, mesurée en coulomb (C) dans le système international.

Il existe deux types de charge électrique ; les charges de même nature se repoussent tandis que celles qui sont de nature différente s'attirent. Les unes sont dites « positives » et sont mesurées par un nombre positif, les autres sont dites « négatives » et sont mesurées par un nombre négatif. Toute charge est multiple de la *charge élémentaire* :

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Les atomes sont constitués de particules chargées, à savoir :

– *les électrons* : (e^-) responsables de la conduction électrique dans les métaux

$$\text{charge : } q_e = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\text{masse : } m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

– *les protons* : (H^+)

$$\text{charge : } q_p = e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\text{masse : } m_p = 1,67 \cdot 10^{-24} \text{ kg}$$

ainsi que les ions et les porteurs de charge dans les semi-conducteurs qui peuvent être des électrons ou des « trous » (absence d'électrons).

On distingue :

- **Les charges ponctuelles** : supposées sans dimension, ce qui est analogue à l'hypothèse du point matériel en mécanique.

I.2 Description de la charge électrique à l'échelle macroscopique

Attribuer une charge électrique à chaque atome (ou ion) alors que l'on s'intéresse à une quantité de matière d'ordre macroscopique, revient à envisager une fonction de répartition de la charge électrique qui est nulle pratiquement en tout point de l'espace, sauf en un nombre fini (néanmoins extrêmement important) de points, pour lesquels elle est multiple de e .

Cette fonction présente donc un nombre considérable de discontinuités. Le problème est exactement le même concernant la description de la masse vue en thermodynamique : celle-ci est répartie de façon discrète au niveau microscopique, mais nous avons l'impression d'une répartition continue (ou en tout cas présentant un nombre limité de discontinuités) au niveau macroscopique. Il est donc impossible à la traiter tel quel mathématiquement.

Si on considère un volume V contenant une charge totale q , on ne peut se contenter de dire qu'il contient une charge q/V par unité de volume : la charge n'est pas nécessairement répartie uniformément.

I.3 Les distributions continues de charge

I.3.1 Densité volumique de charges

L'approximation des milieux continus permet de définir une densité volumique de charge ou charge volumique

$$\rho = dq / dV \quad (\text{I.1})$$

ρ (M) est la densité volumique de charge au voisinage de M , exprimée en $C.m^{-3}$.

Et $dq = \sum qi$ est la charge contenue dans le volume V autour du point M petit à l'échelle macroscopique et grand à l'échelle microscopique

$$dq = \rho dV \quad (\text{I.2})$$

Pour un volume V , la charge totale s'obtient à partir de l'intégrale de volume :

$$Q = \iiint \rho dV \quad (\text{I.3})$$

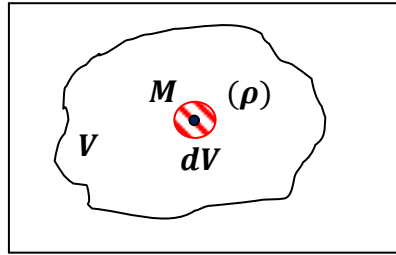


Figure I.1

I.3.2 Densité surfacique de charges

Si une des 3 dimensions est négligeable par rapport aux deux autres, on peut définir une densité surfacique de charge ou charge surfacique

$$dq = \sigma dS \quad (\text{I.4})$$

$\sigma(M)$ est la densité surfacique de charge au point M, exprimée en C.m⁻².

Dans ce cas, la charge totale d'une surface (S) s'obtient par s'obtient à partir de l'intégrale de surface :

$$Q = \iint \sigma dS \quad (\text{I.5})$$

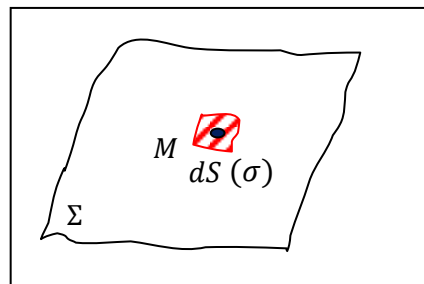


Figure I.2

I.3.3 Densité linéique de charges

Si la charge est concentrée sur un système filiforme, on définit une densité linéique de charges $\lambda(M)$, à partir de la charge dq porté par un élément dl du fil, entourant le point M :

$$dq = \lambda dl \quad (\text{I.6})$$

avec λ densité linéique de charge, exprimée en C.m⁻¹.

La charge totale du fil est donnée par l'intégrale curviligne :

$$Q = \int \lambda dl \quad (\text{I.7})$$

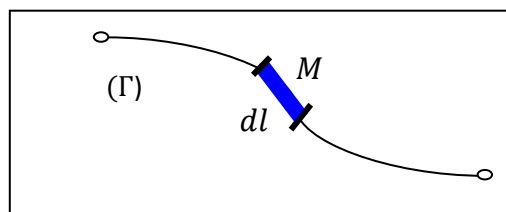


Figure I.3

I.4 Champ électrostatique

I.4.1 Loi de Coulomb ou principe fondamental de l'électrostatique

I.4.1.1 Enoncé de la loi de coulomb

Soit deux charges q_1 et q_2 placées en M_1 et M_2 et distantes de r . Ces charges peuvent être positives ou négatives. La force électrostatique est dirigée suivant la droite qui joint les charges (figure I.4). Elle est attractive si les charges sont de signes contraires (figure I.4.a), répulsive lorsque les charges sont de même signe (figure I.4.b).

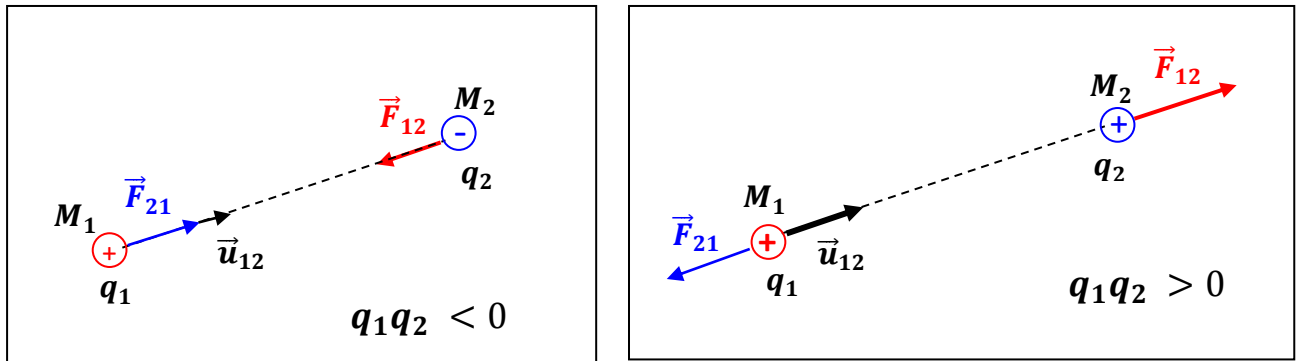


Figure I.4

La loi de Coulomb permet de déterminer la force \vec{F}_{12} exercée par q_1 sur q_2 , ou encore la force \vec{F}_{21} exercée par q_2 sur q_1 , ces deux forces étant égales et opposées, conformément au principe de l'action et la réaction.

La force \vec{F}_{12} exercée par q_1 sur la charge q_2 s'écrit :

$$\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12} \quad (\text{I.8})$$

où r est la distance entre q_1 et q_2 et \vec{u}_{12} le vecteur unitaire défini par :

$$\vec{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{r}$$

Conformément au principe de l'action et de la réaction, la force \vec{F}_{21} exercée par q_2 sur la charge q_1 est égale et opposée à \vec{F}_{12} :

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

La constante de proportionnalité est liée aux unités choisies pour exprimer la force, la longueur et la charge. Dans le système d'unités international (S.I.), sous sa forme rationalisée, K s'écrit :

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ SI}(Vm/C)$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide et a pour valeur :

$$\epsilon_0 = 8,85410^{-12} \text{ F m}^{-1}$$

Avec : **F c'est le Farad**

I.4.1.2 Validité de la loi de Coulomb

- La loi de Coulomb est valable pour des charges au **repos** ou à la limite en mouvement relatif **lent**. Elle est aussi valable **dans le vide** et approximativement **dans l'air**.
- La loi de Coulomb reste valable pour les très grandes distances dans le domaine microscopique : jusqu'à 10^{-15} m, ordre de grandeur des dimensions du noyau atomique. Cette loi n'est **pas valable** pour des distances inférieures à 10^{-15} m (dimension du noyau atomique). Dans ce dernier cas, il sera nécessaire d'utiliser la mécanique quantique pour l'étude du comportement des particules sous l'effet des forces coulombiennes.
- Dans d'autres **milieux linéaires** homogènes et isotropes (l.h.i.), l'interaction électrostatique est bien décrite par la loi de Coulomb à condition de remplacer ϵ_0 par une constante ϵ différente qui tient compte de l'influence du milieu (ses caractéristiques électriques). ϵ s'appelle la permittivité diélectrique du milieu et l'on pose dans ce cas $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ où ϵ_r est la permittivité diélectrique relative du milieu (quantité sans dimension).

I.4.2 Champ créé par une charge ponctuelle

Dans la situation précédente, nous allons considérer dans un premier temps que la charge q_2 subit "l'influence" de la charge q_1 , qu'elle "teste" une grandeur dont q_1 est la source, cette grandeur définie en tout point de l'espace, sera appelée "**champ électrostatique**" créé par la charge ponctuelle q_1 et s'écrira:

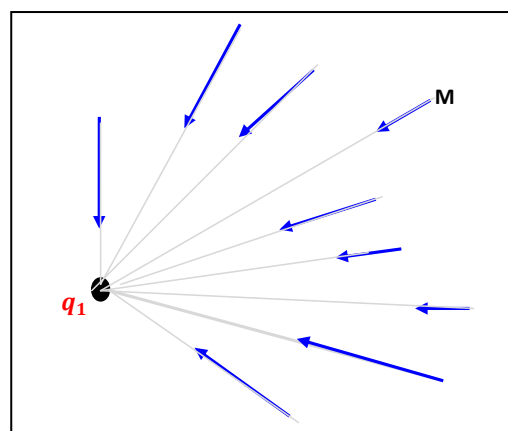


Figure I.5

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{q} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^3} \quad (\text{I.9})$$

I.4.3 Champ créé par une distribution de charges ponctuelles: "Théorème de superposition"

Soit une distribution de n charges ponctuelles q_i placées aux points M_i . Un charge ponctuelle q' subit de la part de la distribution une force électrique égale à la somme des forces dues à chacune des composantes de la distribution, soit :

$$\vec{F} = q' \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(M) \quad (\text{I.10})$$

Le champ électrostatique $E(M)$ qui résulte de F est la somme vectorielle des champs $E_i(M)$ créés par les charges q_i :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(M) \quad (\text{I.11})$$

où $E_i(M)$ est le champ créé en M par la charge q_i ponctuelle placée en P_i

$$\vec{E}_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_i M}}{\|\overrightarrow{P_i M}\|^3} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} \quad (\text{I.12})$$

On observe donc que le champ résultant de la distribution est la somme des champs créés par chacune de ces composantes. Ce résultat constitue "le théorème de superposition" pour le champ électrique. Nous admettrons qu'il se généralise à une distribution quelconque de charges.

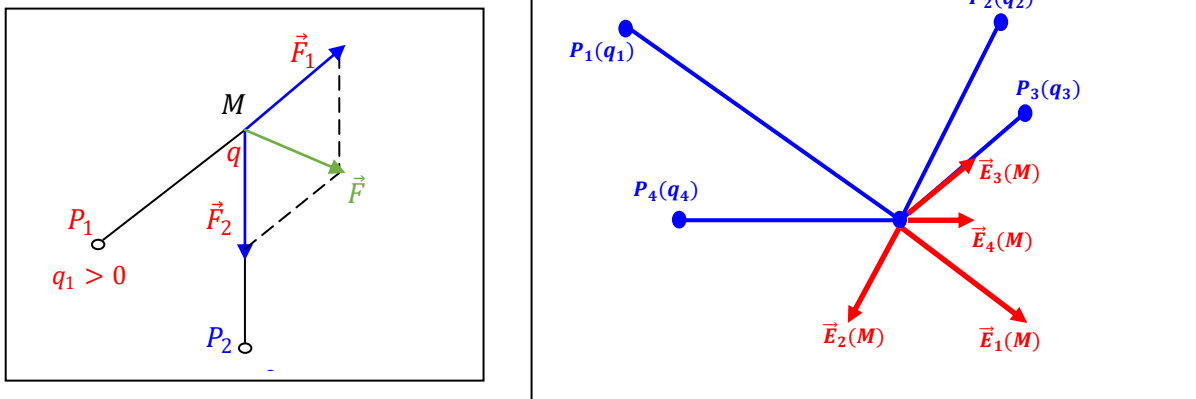


Figure I.6

I.4.4 Champ créé par une distribution "continue" de charges

Une distribution continue de charge est en fait : soit un volume charge V , soit une surface chargée S , soit une courbe chargée C .

Chaque élément infinitésimal de la distribution (note dV ou dS ou dl) centre au point P (cause) porte une charge infinitésimale dq et crée un champ infinitésimal en M (effet) :

$$\vec{dE}(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} \quad (\text{I.13})$$

Selon le type de distribution, on peut définir une densité volumique ($C.m^{-3}$), surfacique ($C.m^{-2}$) ou linéique ($C.m^{-1}$) de charges électriques en divisant la charge infinitésimale de l'élément infinitésimal par sa mesure (volume, surface ou longueur) :

- Densité volumique de charge : $dq = \rho(P) \times dV$
- Densité surfacique de charge : $dq = \sigma(P) \times dS$
- Densité linéique de charge : $dq = \lambda(P) \times dl$

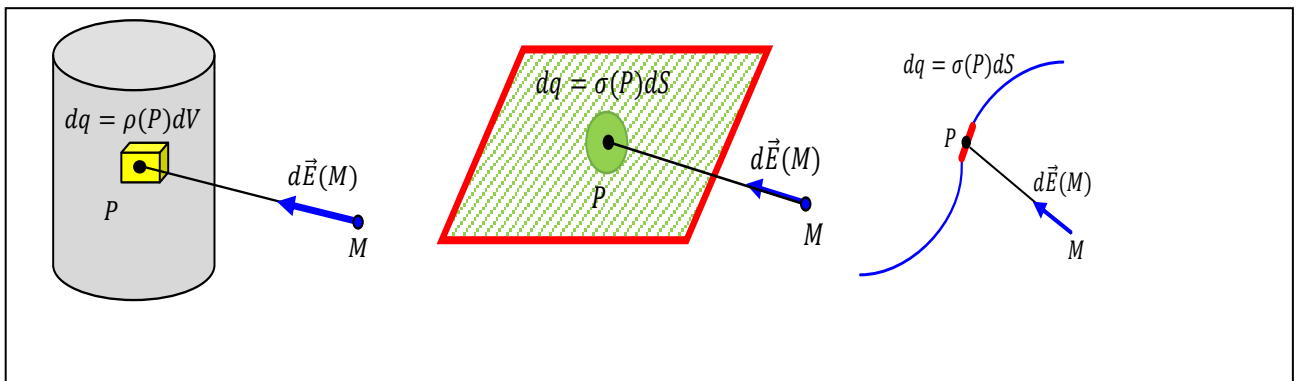


Figure I.7

| Distribution | Uniformément chargée | Non uniformément chargée |
|--------------|------------------------|------------------------------|
| Volumique | $Q = \rho \times V$ | $Q = \iiint_V \rho \times V$ |
| Surfacique | $Q = \sigma \times S$ | $Q = \iint_S \sigma dS$ |
| Linéique | $Q = \lambda \times l$ | $Q = \int_C \lambda dl$ |

Tableau I.1: Charge totale d'une distribution continue

La distribution est dite uniformément chargée si sa densité de charge est uniforme.

Le champ total créé par la distribution est obtenu en intégrant le champ infinitésimal : soit dans le volume , soit sur la surface S , soit le long de la courbe C .

| Distribution | Uniformément chargée | Non uniformément chargée |
|--------------|---|--|
| Volumique | $\vec{E}(M) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dV$ | $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(P) \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dV$ |
| Surfacique | $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dS$ | $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \sigma(P) \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dS$ |
| Linéique | $\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dl$ | $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \lambda(P) \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2} dl$ |

Tableau I.2: Champ créé par une distribution continue

Quelques propriétés :

- Le champ est continu dans le vide ou dans une distribution volumique de charges.
- Le champ est discontinu à la traversée d'une surface chargée (en fait, seule la composante normale est discontinue).
- Le champ diverge à l'approche d'une distribution linéique de charges ou d'une charge ponctuelle.

Exercice d'application 01: "Fil infiniment long avec distribution linéaire"

- On considère le filament comme un cylindre dont le rayon de surface $r \ll L$, où $L \rightarrow \infty$. On place le filament sur un l'axe OY et on calcule le champ produit par un élément de longueur dy . Au point P situé sur l'axe (OX) , l'élément dy est distant de r du point P . le champ élémentaire dE est porté par AP qui est représenté par $r \cdot dE$ se décompose en deux composantes dE_x et dE_y .

- Comme le problème est symétrique, on s'aperçoit alors que les composantes des champs parallèles au fil s'annulent deux a deux. La direction du champ électrique résultant est dirigée selon OP direction normale au fil.

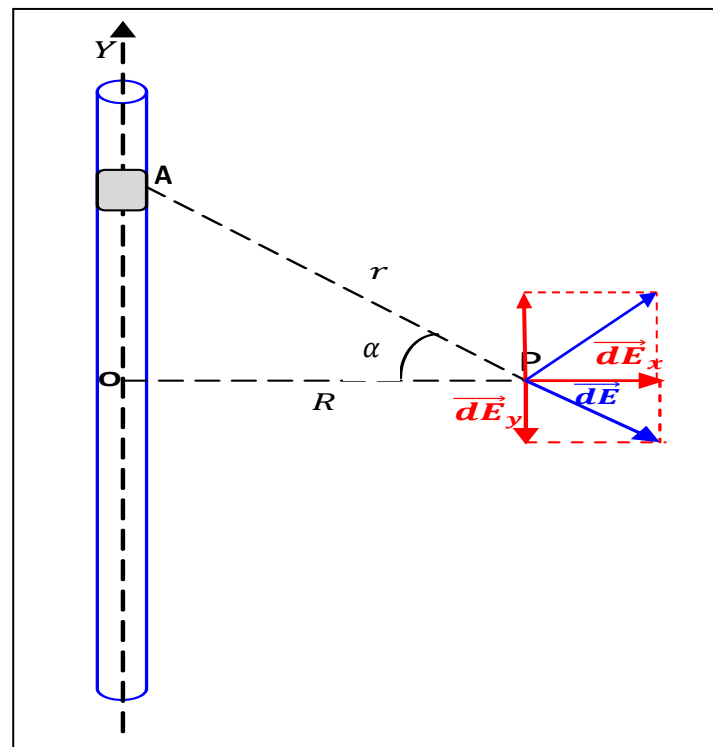


Figure I.8

$$E_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dE_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dE \cos \alpha \, d\alpha$$

➤ Le champ élémentaire créé en P est donnée par:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

On a $dq = \lambda \, dl$ avec $dl = dy$ donc $dq = \lambda \, dy$

➤ Exprimons r en fonction de α

$$y = R \tan \alpha \quad \rightarrow \quad dy = R (\tan \alpha)' = R \frac{d\alpha}{(\cos \alpha)^2}$$

avec

$$r = \frac{R}{\cos \alpha}$$

ce qui donne

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R}{\cos^2 \alpha} \frac{\cos^2 \alpha \cos \alpha \, d\alpha}{R^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \sin \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Le champ est alors

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \vec{u}_x$$

➤ **Le calcul du potentiel électrique:**

On pose $R = x$, par conséquent :

$$E = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}$$

d'où

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{dx}{x} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln x + C$$

➤ **calcul de la constante C:**

$$V(1) = 0 \quad \rightarrow \quad C = 0$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln x$$

Exercice d'application 02:

Soit une boucle circulaire de centre O, de rayon R, uniformément chargée avec une densité linéique λ .

- 1) Calculer le champ \vec{E} créé par cette distribution
- 2) Déduire le potentiel V

Solution:

1) Le champ électrostatique :

- **symétrie + invariance**
sur Oz : $r = 0$ et invariance par rotation
- **expression du champ créé par une charge dq :**

$$\vec{dE} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

avec

$$dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$$

d'où

$$\vec{dE} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

c) composante utile

$$dE_z = \vec{dE} \cdot \vec{k} = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos(\alpha)}{r^2}$$

Si on intègre sur le cercle on a $r = \text{constante}$ et est aussi α constante; le champ est obtenu par intégration sur le contour C de la boucle:

$$E_z = \oint_C \vec{dE} \cdot \vec{k} = \oint_C \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos(\alpha)}{r^2} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos(\alpha)}{r^2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{\cos(\alpha)}{r^2}$$

qu'on peut écrire en fonction de :

$$\cos(\alpha) = \frac{z}{r} \quad \text{et} \quad r = \sqrt{z^2 + R^2}$$

L'expression finale de champ:

$$E_z = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

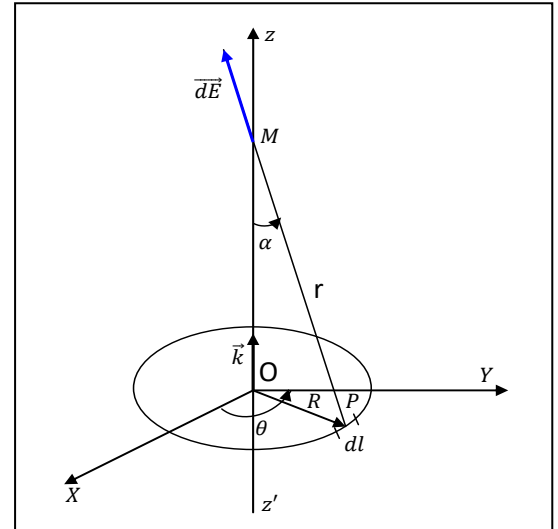


Figure I.9

2) Le potentiel électrostatique:

Le potentiel créé en un point $M(0,0,Z)$ par un élément dq est donnée par:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{PM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{PM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{PM}$$

avec

$$PM = r = \sqrt{z^2 + R^2}$$

Le potentiel est obtenu par intégration sur le contour C de la boucle:

$$V = \oint_C dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

Ce qui donne

$$V = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

I.4.5 Topographie d'un champ électrique

a) Lignes de champ

Pour avoir une idée sur l'allure du champ \vec{E} , on trace les **lignes de champ**, c'est à dire les courbes tangentes en chaque point au vecteur \vec{E} défini en ce point. Ces courbes sont orientées par **convention** dans le sens du vecteur \vec{E} (figure I.10).

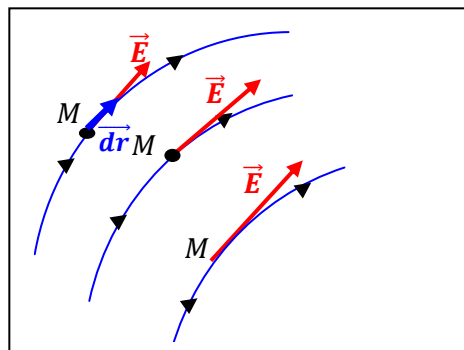


Figure I.10

Soit M un point d'une ligne de champ et \vec{dr} le vecteur déplacement élémentaire sur une ligne de champ (Figure I-10).

Puisque \vec{E} et \vec{dr} sont colinéaires, on a :

$$\vec{dr} \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{I-14})$$

Cette relation permet d'obtenir les équations des lignes de champ. Dans le système de coordonnées **cartésiennes**, posons: $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$ et $\vec{dr} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$

La relation (I-14) conduit à :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

❖ **Exemple de lignes de champ**

Soit une charge ponctuelle en O. les lignes du champ créé par la charge ponctuelle sont des demi-droites concourantes en O, divergentes si $q > 0$ (figure I-11-a) et convergentes si $q < 0$ (figure I-11-b).

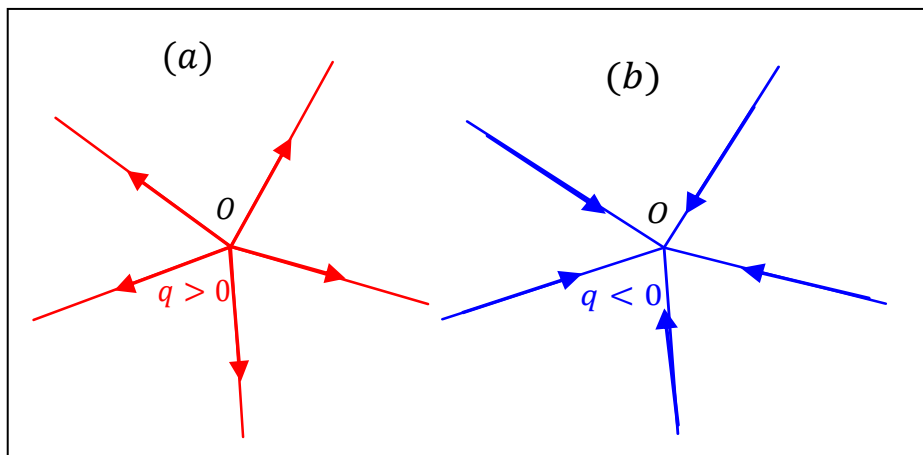


Figure I.11

b) Tube de champ

L'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur une courbe fermée ou un contour fermé (C) engendre une surface appelée tube de champ (Figure I-12).

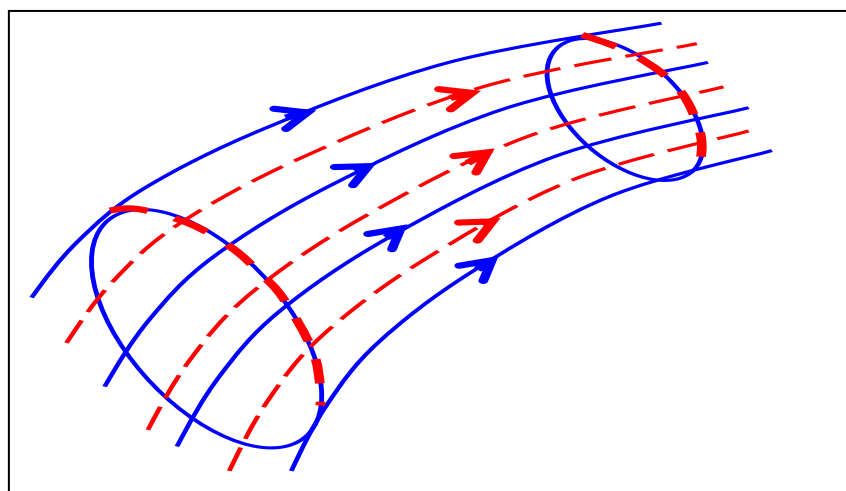


Figure I.12

I.5 Invariances et symétries

I.5.1 Invariances des distributions de charges

I.5.1.1 Invariances par translation

Une distribution, illimitée dans la direction de l'axe Δ , est invariante par translation suivant Δ si, pour tout point M et son translaté M' , sa densité de charge vérifie

$$\rho(M) = \rho(M')$$

exemple : distribution invariante par translation suivant Oz , comme un fil de section rectangulaire infini d'axe Oz , les grandeurs physiques **ne dépendent pas de la variable décrivant axe de translation**.

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r, \theta)$$

I.5.1.2 Invariances par rotation

Une distribution, est invariante par rotation autour d'un axe Δ si, pour tout point M et M' obtenu après rotation, sa densité de charge vérifie

$$\rho(M) = \rho(M').$$

exemple : distribution invariante par rotation autour d'un axe Oz **ne doivent pas dépendre de θ** car le système est invariant lors de la rotation :

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r, z)$$

I.5.1.3 Exemple d'invariances

- **Symétrie cylindrique**

Une distribution à symétrie cylindrique est telle que

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r)$$

(invariance par rotation autour de Oz et invariance par translation suivant Oz , comme pour un fil cylindrique infini d'axe Oz)

- **Symétrie sphérique:**

Une distribution à symétrie sphérique est telle que

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \rho(r)$$

(invariance par rotation autour de \vec{e}_φ et invariance par rotation autour de Oz)

I.5.2 Symétries et antisymétries planes

- **Plan de symétrie:**

Une distribution est symétrique par rapport à un plan Π si, pour tout point M , il existe un symétrique M' , et si sa densité de charge vérifie

$$\rho(M) = \rho(M')$$

- **Plan d'antisymétrie:**

Une distribution est antisymétrique par rapport à un plan Π^* si, pour tout point M, il y'a un point symétrique M', et si sa densité de charge vérifie

$$\rho(M) = -\rho(M')$$

I.5.3 Conséquences pour le champ électrostatique

- ✓ **Symétries**

D'après le principe de Curie, lorsque les causes d'un phénomène possèdent des éléments de symétrie, ces éléments de symétrie se retrouvent dans les effets.

- Lorsqu'une distribution de charges présente un plan de symétrie Π , \vec{E} est transformé en son symétrique par rapport au plan Π .

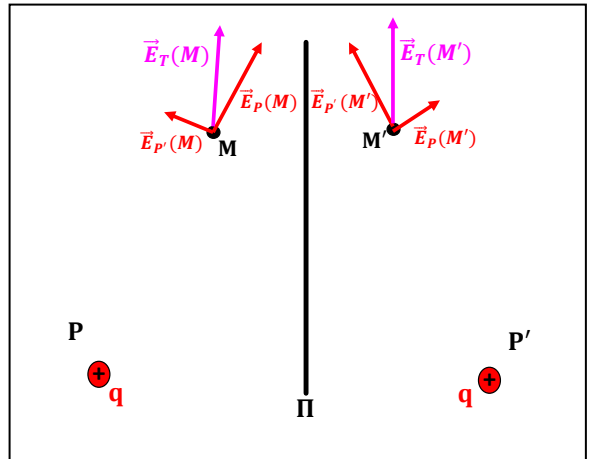


Figure I.13

$$\vec{E}(P_2) = \text{sym} \vec{E}(P_1)$$

On remarque que les composantes du champ parallèles au plan de symétrie $\vec{E}_{//}$ sont conservées alors que celles perpendiculaires au plan \vec{E}_{\perp} sont inversées :

$$\vec{E}_{//}(M') = \vec{E}_{//}(M) \text{ et } \vec{E}_{\perp}(M') = -\vec{E}_{\perp}(M)$$

- ✓ **cas particulier**

En particulier, en un point du plan de symétrie ($M = M'$) on a (figure I.14):

$$\vec{E}_{\perp}(M) = \mathbf{0}$$

$$d'où : \vec{E}(M) = \vec{E}_{//}(M) + \vec{E}_{\perp}(M) = \vec{E}_{//}(M)$$

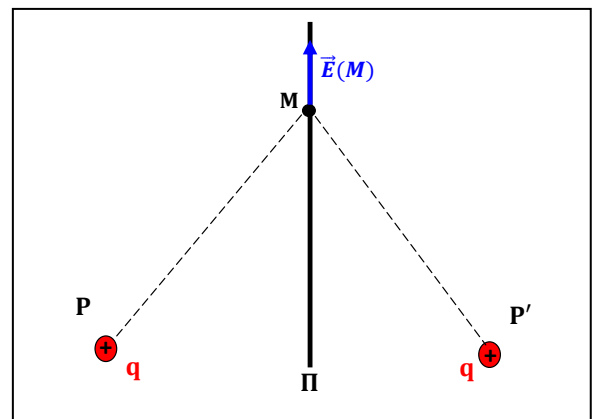


Figure I.14

Conséquence

Le champ électrique est **contenu** dans le plan de symétrie paire. D'une façon générale tout **vecteur polaire** est contenu dans le plan de **symétrie paire** (figure I.14).

$$\vec{E}(M \in \Pi) // \Pi$$

✓ **antisymétrie**

D'autre part, lorsqu'une distribution de charges présente un plan d'antisymétrie Π^* est transformé en son antisymétrique par rapport au plan Π^* .

On dit que le champ électrique est un vecteur polaire ou vecteur vrai, c'est-à-dire qu'il présente les mêmes éléments de symétrie que la distribution qui le crée.

$$\vec{E}(P_2) = -\text{sym} \vec{E}(P_1)$$

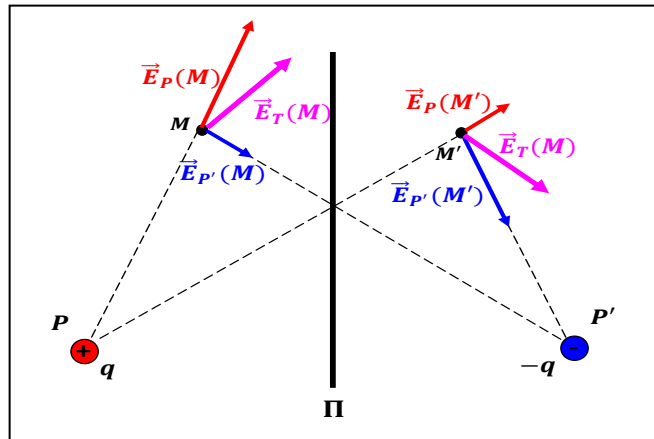


Figure I.16

A l'inverse du cas précédent, on remarque sur la figure I.16 que les composantes du champ parallèles au plan de symétrie impair Π' sont opposées alors que celles perpendiculaires au plan sont conservées :

$$\vec{E}_{//}(M') = -\vec{E}_{//}(M) \text{ et } \vec{E}_{\perp}(M') = \vec{E}_{\perp}(M)$$

✓ **cas particulier**

Si M appartient au plan de symétrie impair ($M = M'$), on aura (figure I.17) :

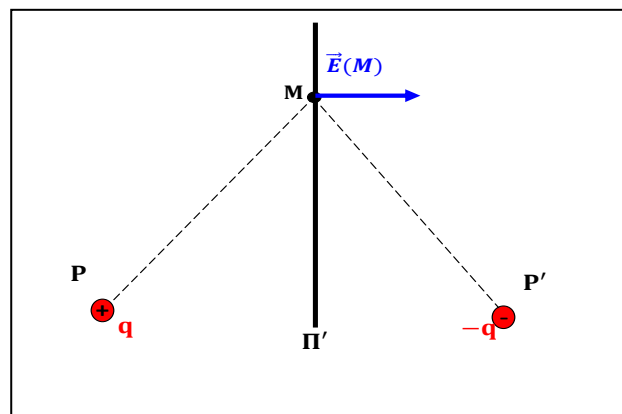


Figure I.17

On a donc , $\vec{E}_{//}(M) = \mathbf{0}$ d'où : $\vec{E}(M) = \vec{E}_{//}(M) + \vec{E}_{\perp}(M) = \vec{E}_{\perp}(M)$

Conséquence

Tout **vecteur polaire** est **perpendiculaire** à un plan de **symétrie impair**.

$$\vec{E}(M \in \Pi^*) \perp \Pi^*$$

I.6 Notion de potentiel électrostatique

I.6.1 Introduction

Le **potentiel** électrostatique $V(M)$ associé au champ **électrostatique** $\vec{E}(M)$ est une fonction **scalaire** contrairement à \vec{E} . Nous verrons, dans beaucoup de cas, que le potentiel sera un intermédiaire commode dans le calcul du champ **vectorel** $\vec{E}(M)$. Le potentiel se rattache physiquement à la notion d'énergie potentielle, d'où son appellation.

I.6.2 Circulation du champ électrostatique : Le potentiel

I.6.2.1 Potentiel électrostatique

a) Cas d'une seule charge ponctuelle

Considérons une charge ponctuelle $q (>0)$ fixée en P et un point M de l'espace (figure I.18) :

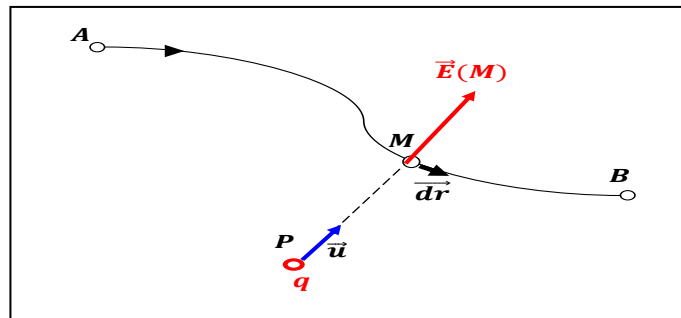


Figure I.18

La charge ponctuelle q fixée en P crée en tout point M de l'espace un champ électrostatique donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{r^2} \quad (\text{I.15})$$

avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|}$ est le vecteur unitaire dirigé de P vers M .

La circulation élémentaire dC du champ E correspondant à un déplacement élémentaire dr du point M sur la courbe AB est :

$$dC = \vec{E} \cdot \vec{dr} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u} \cdot \vec{dr}$$

on a : $\vec{dr} \cdot \vec{u} = dr$

La circulation élémentaire dC s'écrit alors :

$$dC = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = -\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}\right)$$

Posons alors,

$$dC = \vec{E} \cdot \vec{dr} = -dV(r) \quad (\text{I. 16})$$

V est le potentiel électrostatique $V(M)$ créée par la charge q fixée en M :

$$V(M) = V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + cste \quad (\text{I. 17})$$

Nous venons de définir un nouveau champ, le **potentiel électrostatique** ; c'est un champ **scalaire** défini à une constante près. On **choisit** en général la valeur de la constante de telle sorte que le potentiel soit nul lorsque le point M est infiniment éloigné de la charge :

$V(r \rightarrow \infty) = 0$. Dans ce cas, la constante est nulle et le potentiel s'écrit :

$$V(M) = V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

b) Cas d'une distribution de n charges ponctuelles

Soient n charges ponctuelles $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$ fixés aux points $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$.

Soit M un point de l'espace.

Calculons la circulation élémentaire dC_i du champ E_i créée par **la charge** q_i seule :

$$dC_i = \vec{E}_i \cdot \vec{dr} = -dV_i(r)$$

avec

$$\vec{E}_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_i M}}{\|\overrightarrow{P_i M}\|^3} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2}$$

Ainsi, le potentiel électrostatique $V_i(M)$ dû à la charge q_i .

$$V_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i}$$

avec $r_i = \|\overrightarrow{P_i M}\|$

Le potentiel $V(M)$ dû à l'ensemble des n charges est la somme des potentiels en application du **principe de superposition** :

$$V(M) = \sum_{i=1}^n V_i(M) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i} \quad (\text{I. 18})$$

Dans cette relation, nous avons **choisi** la constante nulle pour **chaque** potentiel V_i créée par la charge q_i ; ceci n'est pas valable que si les charges q_i sont réparties dans un **volume fini**.

I.6.2.2 Relation entre champ et potentiel électrostatiques

Le potentiel électrostatique a été défini à partir de la circulation élémentaire du champ

\vec{E} :

$$dC = \vec{E} \cdot \vec{dr} = -dV$$

ainsi pour, M_1 et M_2 voisins , on a :

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dr}$$

pour relier \vec{E} à V d'une manière **intrinsèque** et **locale**, nous allons définir un nouvel operateur appelé "**GRADIENT**" (noté \overrightarrow{grad}) tel que:

$$dV = \overrightarrow{grad} V \cdot \vec{dr}$$

par identification on obtient:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V$$

(I.19)

Opérateur gradient:

✓ **Coordonnées cartésiennes:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{dr} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \\ \partial V = \frac{\partial V}{\partial x} \partial x + \frac{\partial V}{\partial y} \partial y + \frac{\partial V}{\partial z} \partial z \end{array} \right. \Rightarrow \overrightarrow{grad} V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

✓ **Coordonnées cylindriques:**

$$\vec{dr} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{grad} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

En résumé:

✓ Le **champ** électrostatique E **dérive** du potentiel scalaire V . Par l'intermédiaire de cette relation locale, qui lie le champ électrostatique \vec{E} et le potentiel électrostatique V , la connaissance de V en un point de l'espace **suffit** pour la détermination de $\vec{E}(M)$. Cette relation implique des conditions de **continuité** et de **dérivabilité** sur la fonction $V(M)$.

✓ **Unité** : l'unité du **potentiel électrostatique** dans le système MKSA est le **Volt** (V).

D'après la relation qui lie le **champ électrostatique** \vec{E} et le potentiel électrostatique V , l'unité du champ électrostatique est le **Volt par mètre** (V/m).

I.6.2.3 Propriétés

La circulation C_{AB} du champ \vec{E} le long du contour AB est:

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = - \int_A^B dV = V(A) - V(B) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (\text{I. 20})$$

✓ La circulation du champ de vecteur \vec{E} , le long de AB, est donc égale à la **différence** de potentiel $V_A - V_B$. Ainsi, la connaissance de \vec{E} ne définit que les **différences** de potentiel.

✓ Pour avoir le potentiel en un point, il faudra définir une origine arbitraire des potentiels. Il est commode de choisir le potentiel nul à **l'infini** quand la distribution de charges est limitée à un

domaine fini.

✓ La circulation du champ de vecteur \vec{E} , le long de AB est indépendante de la forme du contour AB ; elle **ne dépend pas** du chemin suivi (la circulation élémentaire dC est différentielle totale exacte).

conséquence:

En conséquence la circulation de \vec{E} est **nulle** le long de tout contour **fermé**. Le champ E est un champ de vecteurs à **circulation conservative** qui dérive d'une fonction scalaire appelée potentiel électrostatique.

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = - \int_A^B dV = V(A) - V(B) \Leftrightarrow \oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}} V$$

I.6.3 Potentiel électrostatique créé par une distribution de charges continu

Chaque élément infinitésimal de la distribution (noté dV ou dS ou dl) centré au point P porte une charge infinitésimale dq et crée un potentiel infinitésimal :

$$dV(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} + cst \quad (\text{I. 21})$$

Le potentiel total créé par la distribution est obtenu en intégrant le potentiel infinitésimal : soit dans le volume , soit sur la surface S , soit le long de la courbe C .

| Distribution | Uniformément chargée | Non uniformément chargée |
|--------------|---|---|
| Volumique | $V(M) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{dV}{r} + cst$ | $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho dV}{r} + cst$ |
| Surfacique | $V(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{dS}{r} + cst$ | $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma dS}{r} + cst$ |
| Linéique | $V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dl}{r} + cst$ | $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r} + cst$ |

Tableau I.3 : Potentiel créé par une distribution continue

Quelques propriétés :

- Le potentiel est continu et dérivable dans le vide ou dans une distribution volumique de charges.
- Le potentiel est continu et non dérivable à la traversée d'une surface chargée.
- Le potentiel diverge à l'approche d'une distribution linéique de charges ou d'une charge ponctuelle.

I.6.4 Topographie du potentiel électrostatique

I.6.4.1 Surfaces équipotentielles d'une distribution

a- Définition

Les surfaces équipotentielles d'équation $V = cte$ sont des sphères centrées en M .

En effet, sur ces surfaces, on a :

$$dV = (\overrightarrow{grad} V) \cdot \overrightarrow{dl} = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{dl} \perp \vec{E}$$

I.6.4.2 Lignes de champ et surfaces équipotentielles

Les lignes de champ, qui sont les courbes tangentes en chaque point au champ \vec{E} , sont ici des droites passant par la charge ponctuelle q placée en M . Ces lignes sont orientées centrifuges ou centripètes suivant que q est respectivement positif ou négatif (Figure I.19).

D'après la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$, le champ \vec{E} est **normal** aux surfaces équipotentielles et dirigé vers les potentiels **décroissants** (sans le signe moins dans cette relation, E est dirigé vers les potentiels croissants).

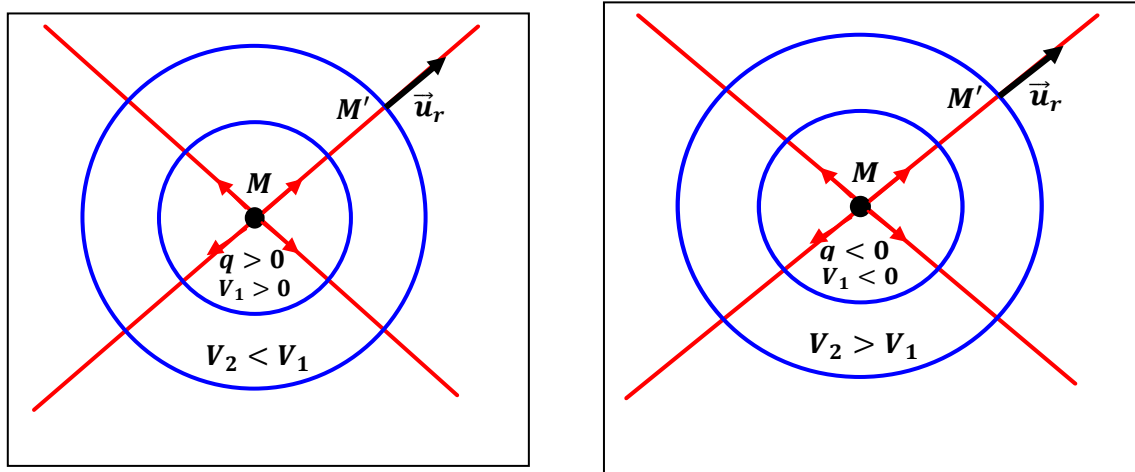


Figure I.19

I.6.4.3 propriétés de symétrie

Le potentiel électrostatique respecte les symétries (plans, axes), mais, étant défini à une constante additive près, ne satisfait pas directement aux plans d'antisymétries de la distribution de charges. Cela est néanmoins possible sous réserve d'un choix ad hoc de la constante, qui implique le choix d'une valeur nulle du potentiel en tout point du plan d'antisymétrie.

I.7 Energie potentielle d'une charge placée dans un champ

I.7.1 Charge dans un champ électrostatique "extérieur"

soit une charge q placée au point M dans un champ électrostatique \vec{E} , considérons le travail de la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}(M)$ s'exerçant sur cette charge pour un déplacement élémentaire \vec{dl} :

$$\delta W_{\vec{F}} = q\vec{E}(M) \cdot \vec{dl} = -q \overrightarrow{grad}(V) \cdot dl = -q dV(M)$$

ou $V(M)$ est le potentiel électrostatique en M

on sait qu'on peut construire une énergie potentiel à partir de travail d'un opérateur, s'opposant à celui de la force considérée, en écrivant:

$$dE_p = -\delta W_{\vec{F}} = qdV$$

$$\Rightarrow \boxed{E_p = qV(M)} \quad (I.22)$$

E_P est l'énergie potentielle que possède la charge q du fait de sa position M dans le champ scalaire V.

I.7.2 Système de charges en interaction

I.7.2.1 Cas de deux charges

on considère deux charges q_1 et q_2 distante de r_{12} , chaque charge ressent le potentiel créé par la deuxième. par symétrie, on aura :

$$E_{P_1} = E_{P_2} = E_P = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \quad (\text{I. 23})$$

c'est l'énergie potentielle " **d'interaction** "

Nous pouvons aussi écrire cette énergie sous les formes suivantes:

$$\begin{aligned} E_{P_{12}} &= q_1 V_2(M_1) = q_2 V_1(M_2) \\ &= \frac{1}{2} [q_1 V_2(M_1) + q_2 V_1(M_2)] \end{aligned}$$

ou $V_1(M_2)$ est le potentiel crée par la charge q_1 au point M_2 et $V_2(M_1)$ est le potentiel crée par la charge q_2 au point M_1

I.7.2.2 Cas de n charges

En notant r_{ij} la distance entre deux charges quelconques q_i et q_j , l'énergie potentielle " d'interaction " s'écrit:

$$E_P = \sum_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (\text{I. 24})$$

on peut également écrire en faisant attention à ne pas compter deux fois le même terme d'énergie potentielle :

$$E_P = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} q_i V_i \quad (\text{I. 25})$$

avec

$$V_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (\text{I. 26})$$

I.8 Théorème de Gauss

I.8.1 Introduction

Dans certains cas, le calcul du champ électrostatique peut être beaucoup plus facile en utilisant les propriétés du flux d'un champ newtonien.

Dans le calcul de la circulation du champ électrostatique \vec{E} , nous avons utilisé le fait que \vec{E} est de la forme $f(r)\vec{u}_r$ et nous avons en déduit la relation entre le champ \vec{E} et le potentiel V. Nous allons maintenant déduire une équation du champ \vec{E} qui dépend spécifiquement du fait que $f(r)$ est en $1/r^2$. Les développements qui suivent s'appliquent donc au champ de la forme \vec{u}_r / r^2 .

I.8.2 Flux du champ d'une charge

I.8.2.1 Vecteur élément de surface

Une surface élémentaire quasi-plane dS autour d'un point M possède deux faces. Pour distinguer ces deux faces, il est nécessaire d'orienter la surface. Pour cela, on associe à cet élément de surface un vecteur unitaire $\vec{n}(M)$, normal à la surface. Pour une surface fermée, il est toujours dirigé vers l'extérieur de la surface.

On appelle vecteur élément de surface le vecteur

$$\vec{dS} = \vec{n}(M) dS$$

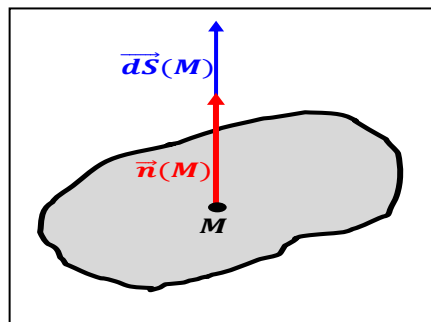


Figure I.20

I.8.2.2 Flux du champ électrostatique

I.8.2.2.1 Définition

Soit $\vec{E}(M)$ le champ électrostatique créé en M par une certaine distribution de charges. Le flux élémentaire $\vec{E}(M)$ à travers $\vec{dS}(M)$ est le scalaire $d\phi$ défini par:

$$d\phi = \vec{E}(M) \cdot \vec{dS}(M) \quad (\text{I. 27})$$

Le flux de $\vec{E}(M)$ à travers la surface (S) s'obtient par intégration de $d\phi$ sur (S)

$$\phi = \int d\phi$$

I.8.2.2.2 Flux créé par une charge ponctuelle

a) Flux élémentaire

Soit une charge ponctuelle $q > 0$ placée en O et M un point de l'espace (figure I .21).

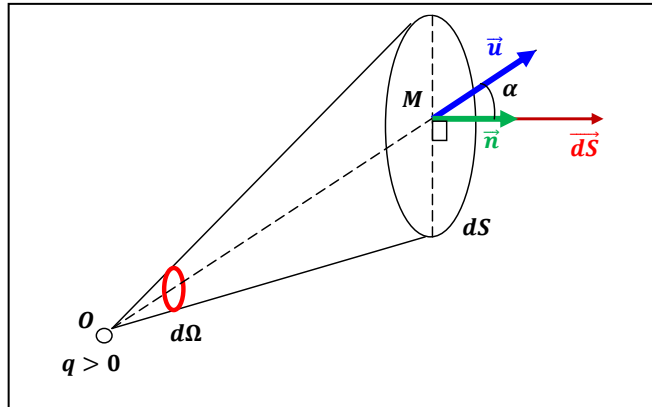


Figure I.21

Le champ $\vec{E}(M)$ créé par q en M est :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{r^2}$$

avec, $\vec{u} = \overrightarrow{OM} / \|\overrightarrow{OM}\|$ et $r = \|\overrightarrow{OM}\|$

Soit dS un élément de surface entourant le point M ; orientons la surface dS (figure I.21). Le flux élémentaire de \vec{E} à travers la surface orientée est :

$$d\phi = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{dS}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (\text{I.28})$$

avec

$$d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{dS}}{r^2} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{r^2} dS = \frac{dS \cos \theta}{r^2} \quad (\text{I.29})$$

où, $d\Omega$: est l'angle solide élémentaire sous lequel, du point O on voit la surface élémentaire.

Le signe de $d\Omega$ dépend de l'orientation de la surface :

- $d\Omega > 0$ si $\alpha = (\vec{u}, \vec{n}) < \Pi/2$
- $d\Omega < 0$ si $\alpha > \Pi/2$

b) Flux sortant à travers une surface fermée

Soit une surface fermée Σ . On se propose de calculer le flux du champ électrostatique \vec{E} créé par une charge ponctuelle q à travers la surface fermée Σ . Plus précisément on s'intéresse au **flux sortant**, donc on a choisi d'orienter le vecteur \vec{n} dans **le sens de la normale sortante** à Σ . Deux cas seront envisagés :

- le cas où la charge q est située à l'extérieure de la surface Σ

- et celui où la charge q est située à l'intérieur de la surface Σ

Nous désignons par l'indice "i" les charges situées à l'intérieur de Σ et par l'indice "e" les charges extérieures à Σ . Soit \vec{E}_i le champ créé par q_i et \vec{E}_e le champ créé par q_e .

❖ **1^{er} Cas : La charge est située à l'extérieur de Σ**

Nous pouvons calculer le flux sortant de la surface fermée Σ (figure I.22) à partir des flux élémentaires. En effet, traçons un cône élémentaire de sommet O (où se trouve la charge extérieure à Σ , q_e) et d'angle solide $d\Omega$. Ce cône découpe sur la surface Σ deux surfaces élémentaires dS_1 en M_1 et c et M'_1 . Soient \vec{n}_1 et \vec{n}'_1 les vecteurs sortant des surfaces dS_1 et dS'_1 . L'angle solide sous lequel du point O on voit les surfaces élémentaires orientées dS_1 et dS'_1 , a la même valeur absolue, mais de signes opposés à cause de l'orientation du vecteur normal \vec{n} par rapport à \vec{u} (figure I.22) :

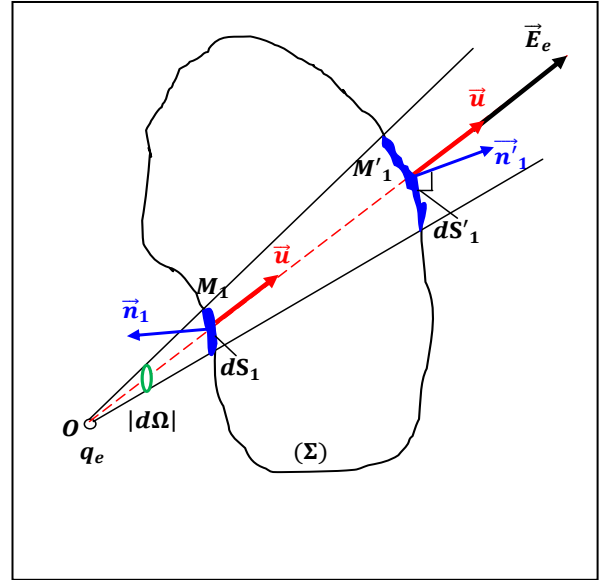


Figure I.22

$$d\Omega_1 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}_1}{r_1^2} dS_1 = -d\Omega'_1 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}'_1}{r_1'^2} dS'_1$$

Si on considère le flux du champ \vec{E}_e créé par la charge q_e située en O, sortant des surfaces dS_1 et dS'_1 , d'après (I.21) et (I.22), on obtient :

$$d\phi_e = d\phi_1 + d\phi'_1 = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0} d\Omega_1 + \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0} d\Omega'_1 = 0$$

Pour obtenir le flux de \vec{E}_e sortant de la surface Σ , $\phi_e = \oiint_{\Sigma} \vec{E}_e \cdot \vec{dS}$, on peut balayer toute la surface Σ à l'aide de cônes élémentaires tels que celui de la figure III-2. Chacun de ces cônes intercepte sur la surface Σ une paire de surfaces élémentaires dS_1 et dS'_1 telles que leur contribution au flux total:

$$d\phi_1 + d\phi'_1 = 0$$

Résultat:

On en conclut que le flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle située à l'extérieur d'une surface fermée Σ , sortant de la surface Σ est nul :

$$\phi_e = \oiint_{\Sigma} \vec{E}_e \cdot \vec{dS} = 0$$

❖ **2ème Cas : La charge est située à l'intérieur de Σ**

Soit (C) le cône élémentaire de sommet O et d'angle solide $d\Omega_1$ (figure I.23).

Dans ce cas, l'angle solide sous lequel du point O on voit dS_1 est égal à l'angle solide sous lequel de O on voit dS'_1 :

$$d\Omega_1 = d\Omega'_1$$

d'où

$$d\phi_1 = d\phi'_1 = d\phi_i$$

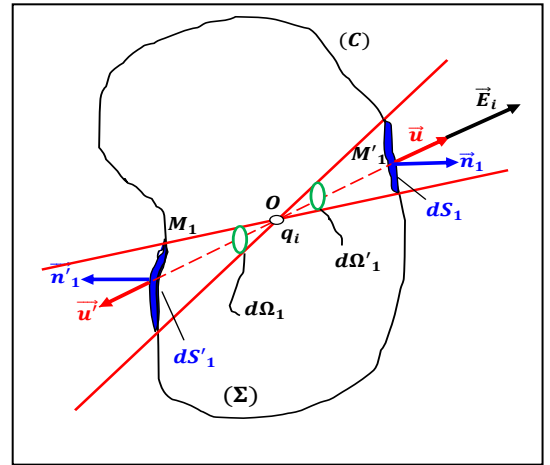


Figure I.23

Le flux élémentaire $d\phi_i$ créée par \vec{E}_i à travers une surface élémentaire dS_i (figure I.24) est donnée par :

$$d\phi_i = \vec{E}_i \cdot \vec{dS}_i = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0} d\Omega_i$$

Le flux total sortant de Σ est la somme des flux élémentaires $d\phi_i$:

$$\phi_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{\Sigma} d\Omega_i$$

$\oiint_{\Sigma} d\Omega_i$: est l'angle solide sous lequel du point O, on voit la surface fermée Σ ;

Ω_i : est donc l'angle solide sous lequel du point O on voit tout l'espace :

$$\Omega_i = 4\pi$$

D'où

$$\phi_i = \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

Résultat:

Le flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle située à l'intérieur d'une surface fermée Σ , sortant de la surface Σ est égal à :

$$\phi_i = \vec{E}_i \cdot \vec{dS} = \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

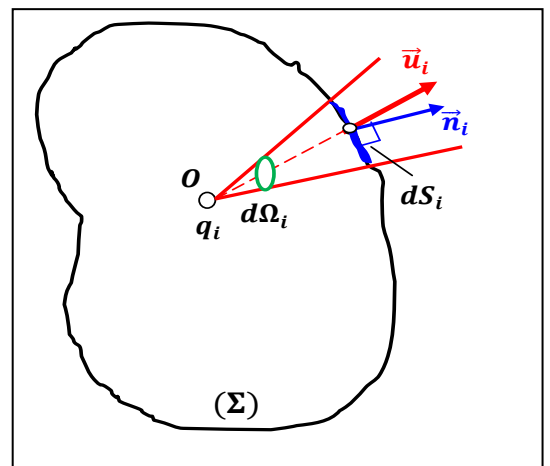


Figure I.24

Ainsi, le flux total du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle est :

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_i = \Phi_i = \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

Cette relation relie le flux à travers une surface fermée (Σ) et les échanges à l'intérieure de cette surface.

I.8.3 Théorème de GAUSS

On considère plusieurs charges q_i , les unes à l'intérieur du volume τ , les autres à l'extérieur.

- Si q_i est à l'intérieur : $\Phi_i = \frac{q_i}{\epsilon_0}$
- Si q_i est à l'extérieur : $\Phi_i = 0$

Par conséquent, le flux du champ résultant à travers (S) n'est dû qu'aux seules charges intérieures à S :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_i \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (\text{Théorème de Gauss})$$

I.8.3.1 Validité du Théorème de Gauss

Précisons que ce théorème est obtenu à partir de la loi de Coulomb (loi fondamentale de l'électrostatique). Ce théorème reste valable quand les charges sont en mouvement.

Le théorème de Gauss est une conséquence :

- 1) De la loi en $1/r^2$ régissant les interactions entre les charges électriques
- 2) Du caractère central des forces électrostatiques
- 3) Du principe de superposition

I.8.3.2 Calcul du champ électrostatique à l'aide du théorème de Gauss

Le calcul d'un champ électrostatique à l'aide du théorème de Gauss n'est en général envisageable que dans les cas de distributions de charges à symétrie élevée, donc le théorème de Gauss constitue un outil de calcul rapide du champ électrostatique créé par une distribution de charges possédant une symétrie élevée.

Le principe de Calcul correspond à suivre les étapes suivantes:

➤ **Première étape: Considération de symétrie**

Il faut obtenir à l'aide des symétries de la distribution, la forme du champ électrostatique:

- utilisation de plan de symétrie et antisymétrie pour déterminer sa direction
- utilisation d'invariance par rotation ou translation pour réduire la dépendance de ces composantes.

➤ **Deuxième étape: Choix de la surface de Gauss**

La forme obtenue pour le champ détermine le choix d'une surface de Gauss rendant élémentaire le calcul du flux. Cette surface, dite de Gauss, doit être fermée et elle doit passer par le point M ou on veut calculer le champ.

➤ **Troisième étape: application du théorème de Gauss**

L'application du théorème de Gauss achève la détermination du champ électrostatique.

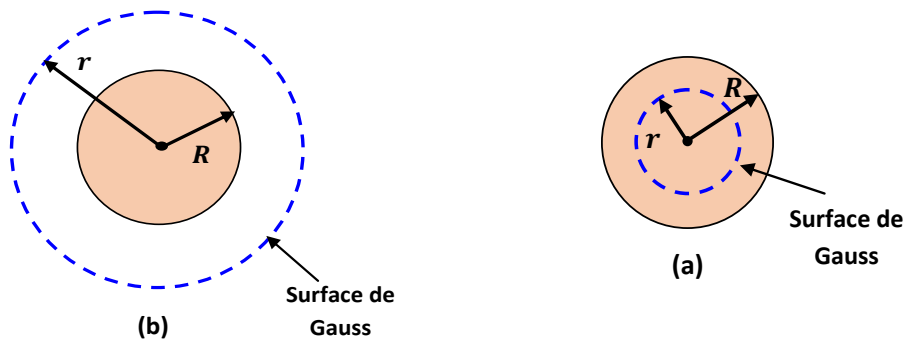
Exercice d'application: "sphère chargée en volume"

- 1) Déterminer le champ créé par une sphère chargée en volume avec une densité de charge uniforme.
- 2) En déduire l'expression du potentiel $V(r)$.

Solution

1) Calcul du champ électrostatique $\vec{E}(M)$

- **Invariance:** par translation et rotation $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, \varphi) = \vec{E}(r)$
- **Symétrie:** $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r)\vec{u}_r$
- **Choix de la surface de Gauss:** sphère de rayon de rayon r



• **Application du Théorème de Gauss:**

$$\phi = \oiint_{(S_{gauss})} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint_{(S_{gauss})} E(r) \cdot dr = E_r 4\pi\epsilon_0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Il suffit de déterminer la champ dans les deux régions distinctes $r < R$ et $r > R$.

a) Champ à l'intérieur : $r < R$

La charge totale à l'intérieur de la surface de Gauss est donnée par:

$$dq = \rho dV$$

$$V_{\text{sphère}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$Q_{\text{int}} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

La formule de champ devient:

$$E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\frac{4}{3}\rho\pi r^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

Finalement

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r}$$

b) Champ à l'extérieur : $r > R$

La sphère de Gauss enferme un volume V supérieur à celui de la boule, mais la distribution de charges n'est non nulle que jusqu'à $r = R$. Donc la charge totale à l'intérieur de la surface de Gauss est donnée par:

$$Q_{\text{int}} = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$$

La formule de champ devient:

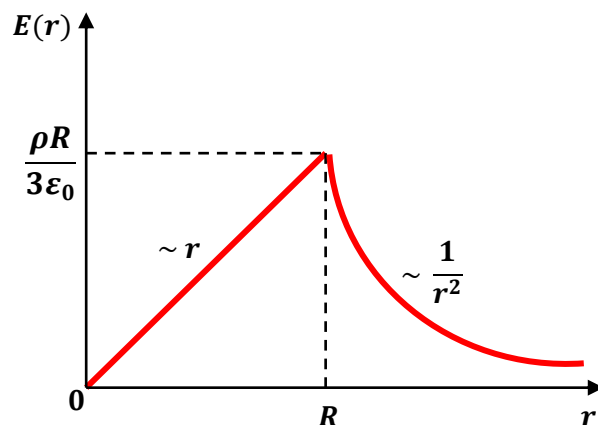
$$E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\frac{4}{3}\rho\pi R^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

Finalement

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r}$$

• **Représentation graphique:**

Pour $r = R \Rightarrow E(r) = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}$



2) Calcul du potentiel électrostatique $V(M)$

Le champ \vec{E} étant radial: $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ et $dV = -\vec{E} \cdot \vec{dr}$

❖ A l'extérieure: $r > R$

$$V = - \int E dr = - \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + C_1$$

Le potentiel est nul à l'infini : $V(\infty) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

ce qui donne:

$$V(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$$

❖ A l'intérieur: $r < R$

$$V = - \int E dr = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int r dr = - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + C_2$$

C_2 est donnée par la relation de continuité du potentiel:

$$V_{ext}(r = R) = V_{int}(r = R)$$

ce qui donne:

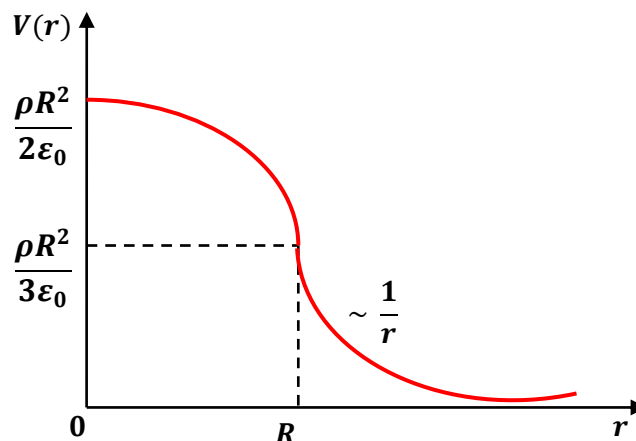
$$\frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} = - \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0}$$

Finalement

$$V(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{r^2}{3R^2} \right]$$

❖ Représentation graphique

Pour $r = R \Rightarrow E(r) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$



I.9 Le dipôle électrostatique

I.9.1 Définition

Le dipôle électrostatique est l'ensemble de **deux** charges électriques **égales** et de signes **contraires** ($-q$) et ($+q$) ($q > 0$), (figure I.25). Ces deux charges sont fixées respectivement en deux points A et B séparées d'une distance ($a = AB$). On se propose d'étudier les caractéristiques du champ et du potentiel électrostatiques créés par ces deux charges en un point M très éloigné des charges : $a \ll r = OM$: **approximation dipolaire**.

Les dipôles sont souvent rencontrés en chimie : certaines molécules se comportent comme des dipôles du fait de la différence d'électronégativité des atomes qui les constituent, d'autres se polarisent sous l'action d'un champ électrostatique.

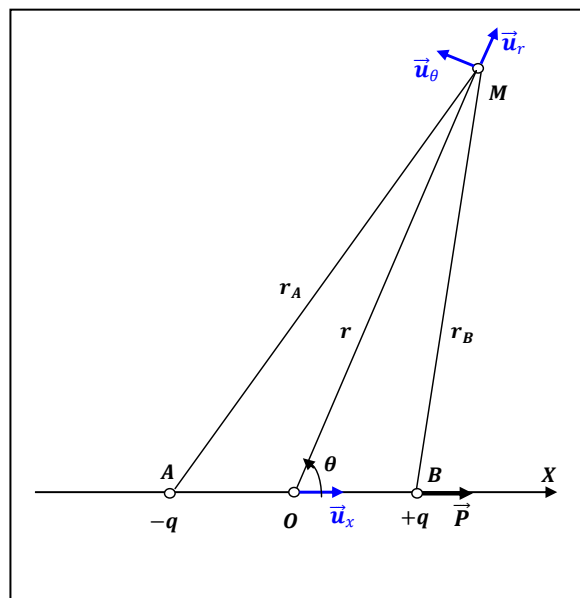


Figure I.25

I.9.2 Moment dipolaires électriques

Pour tout dipôle électrostatique, on définit son moment dipolaire électrique (figure I.25). On appelle moment dipolaire du dipôle, exprimé en Coulomb-mètre ($C.m$), le vecteur :

$$\vec{P} = q \overrightarrow{AB} = qa \vec{i} \quad (\text{I.30})$$

En désignant par a la distance séparant A et B, la norme du moment dipolaire vaut :

$$p = \|\vec{p}\| = qa$$

I.9.3 Potentiel électrostatique créé par un dipôle

La position de M est repérée dans le système des coordonnées **polaires** (r, θ)

D'après le principe de superposition, le potentiel $V(M)$ créé par le dipôle en un point M repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) est donnée par :

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{BM} - \frac{1}{AM} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

avec

$$BM^2 = r_B^2 = (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB})^2 = (r^2 - ra \cos\theta + \frac{a^2}{4} = r^2 \left(1 - \frac{a \cos\theta}{r} + \frac{a^2}{4r^2} \right)$$

$$\frac{1}{BM} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a \cos\theta}{r} + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a \cos\theta}{2r} \right)$$

de même

$$\frac{1}{AM} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a \cos\theta}{2r} \right)$$

Le potentiel $V(M)$ est donc donné par :

$$V(M) = \frac{qa \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{P \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{I.31})$$

Soit $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur position du point M par rapport au point O (milieu de $[A, B]$) et \vec{P} le moment dipolaire (figure I.26).

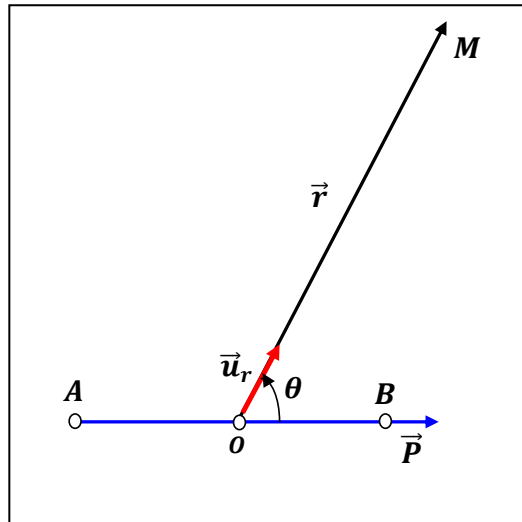


Figure I.26

On a :

$$\vec{P} \cdot \vec{r} = pr \cos\theta$$

Le potentiel $V(M)$ s'écrit donc :

$$V(M) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{I.32})$$

Cette expression qui fait intervenir un produit scalaire est indépendante de tout système de coordonnées.

Il faut remarquer que la **décroissance** du potentiel en créé par un **dipôle** ($1/r^2$) est plus rapide que dans le cas d'une **charge** ponctuelle qui est en ($1/r$).

I.9.4 Champ électrostatique créé par un dipôle

I.9.4.1 Composantes du champ en coordonnées polaires

Le dipôle présente une symétrie de révolution autour de (AB). Le champ électrostatique $E(M)$ est donc contenu dans le plan (M, AB) (figure I.27).

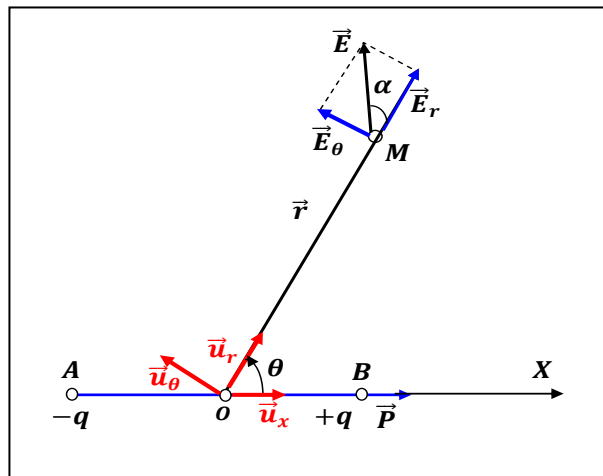


Figure I.27

D'après le principe de superposition, le champ en M est donné par :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M) = \vec{E}_r \vec{u}_r + \vec{E}_\theta \vec{u}_\theta \quad (\vec{E}_z = 0)$$

Pour calculer les composantes du champ, utilisons la relation :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M)$$

avec, $\overrightarrow{\text{grad}}V(M) = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$ $V(M) = \frac{P \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}$

Les composantes du champ dérivant du potentiel $V(M)$ s'écrivent dans le système de coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \vec{E}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r = \frac{2P \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{u}_r \\ \vec{E}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta = \frac{2P \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta \\ \vec{E}_z = 0 \end{cases} \quad (\text{I.33})$$

I.9.4.2 Composantes du champ en coordonnées cartésiennes

Notons que les composantes cartésiennes du champ suivant Ox et Oy (du plan AMB) s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j} \end{cases}$$

Les composantes de \vec{E} :

$$\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta = \frac{2P\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}) + \frac{2P\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} (-\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j})$$

et

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\cos^2\theta - 1)\vec{i} + \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\sin\theta\cos\theta)\vec{j}$$

- Lorsqu'on s'éloigne du dipôle, le potentiel décroît en $\frac{1}{r^2}$ (comparé à $\frac{1}{r}$ par une charge ponctuelle) et le champ en $\frac{1}{r^3}$ (comparé à $\frac{1}{r}$).

I.9.5 Force et couple exercés par un champ électrique sur un dipôle

Soit θ l'angle de AB (support du moment dipolaire \vec{P}) avec l'axe \vec{Ox} pris dans la direction du champ appliqué \vec{E} .

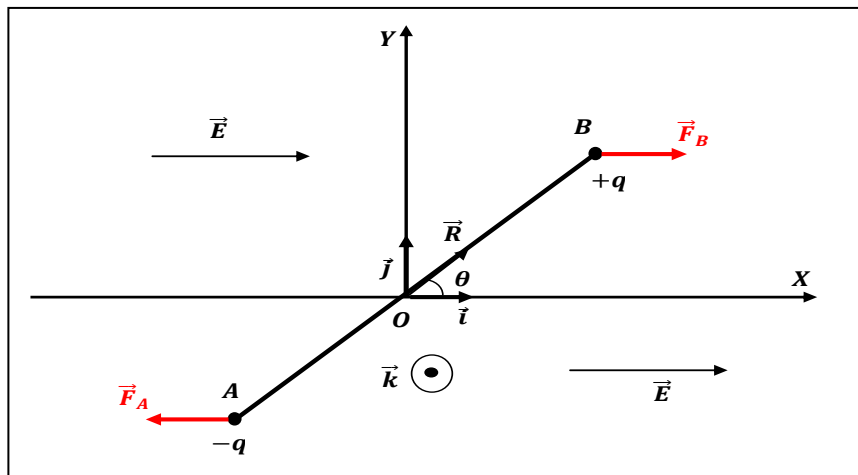


Figure I.28

• Force résultante sur le dipôle

Puisque le champ extérieur est **uniforme**, la résultante des forces est évidemment nulle

$$\vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_A = q\vec{E} \vec{i} - q\vec{E} \vec{i} = 0$$

La force résultante est nulle, mais le moment résultant ne l'est pas, \vec{F}_A et \vec{F}_B constituent un couple.

• Moment résultant :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= \vec{OA} \wedge \vec{F}_A + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B \\ &= \vec{OA} \wedge (-\vec{F}_B) + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B \\ &= \vec{AB} \wedge \vec{F}_B = q\vec{AB} \wedge \vec{E}_0 = q\vec{a} \wedge \vec{E}_0 \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\vec{\Gamma} = \vec{P} \wedge \vec{E}_0 = \|\vec{P}\| \|\vec{E}_0\| \sin \theta \vec{k} \quad (\text{I.34})$$

Ce moment tend à aligner le dipôle parallèlement au champ \vec{E} ($\theta = 0$).

I.9.6 Énergie potentielle d'interaction du dipôle

C'est l'énergie nécessaire pour amener $+q$ et $-q$ de l'infini à leur position en B et A.

$$E_p = qV_B - qV_A = q(V_B - V_A)$$

Or le champ appliqué \vec{E} est lié à $V_B - V_A$ par

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} = -\frac{\Delta V}{\Delta x} \vec{i} = -\frac{V_B - V_A}{AB} \vec{i} = -\frac{V_B - V_A}{a \cos \theta} \vec{i}$$

On en déduit :

$$E_p = -aqE \cos \theta$$

soit

$$E_p = -PE \cos \theta = -\vec{P} \cdot \vec{E} \quad (\text{I.35})$$

Cette expression représente l'énergie d'interaction du dipôle associée au champ E_0 et n'a rien à voir avec **l'énergie interne du dipôle** (énergie nécessaire pour amener une charge de l'infini à une distance a de l'autre). Nous **retrouvons** les positions d'équilibre :

- Pour $\theta = 0$ (\vec{P} a le même sens que \vec{E}), $E_p = -PE \Rightarrow$ L'énergie potentielle est **minimale** et l'équilibre est **stable**.
- Pour $\theta = \pi$ (\vec{P} est antiparallèle à \vec{E}), $E_p = -PE \Rightarrow$ L'énergie potentielle est maximale et l'équilibre instable.

Exercices d'application

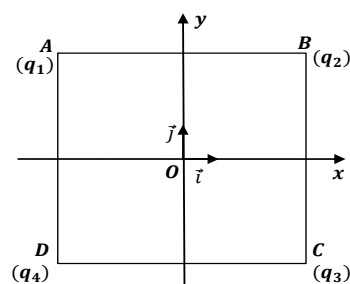
Exercice 01:

On place quatre charges ponctuelles aux sommets $ABCD$ d'un carré de côté $a = 1m$, et de centre O , origine d'un repère orthonormé Oxy de vecteurs unitaires \vec{i} et \vec{j} .

On donne :

$$\begin{aligned} q_1 &= q = 10^{-8}C & q_2 &= -2q \\ q_3 &= 2q & q_4 &= -q \end{aligned}$$

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 S \cdot I$$



1) Déterminer le champ électrique \vec{E} au centre O du carré. Préciser la direction, le sens et la norme de \vec{E} .

2) Exprimer le potentiel V créé en O par les quatre charges.

3) Exprimer le potentiel sur les parties des axes $x'x$ et $y'y$ intérieures au carré. Quelle est, en particulier, la valeur de V aux points d'intersection de ces axes avec les côtés du carré (I, I', J et J')?

Exercice 02:

On considère un disque de rayon R , de centre O , portant une densité de charge surfacique $\sigma > 0$.

1) Retrouver, par un calcul direct, le champ \vec{E} créé par le disque en un point M de son axe $z'Oz$ ($OM = z > 0$) à partir du champ élémentaire \vec{dE} créé par la charge élémentaire $dq = \sigma dS$.

2) Que devient ce champ \vec{E} lorsque le rayon du disque R tend vers l'infini ?

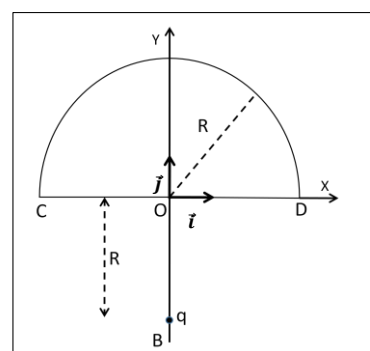
3) On considère un plan infini portant une densité de charge surfacique $\sigma > 0$, percé d'un trou circulaire de centre O et de rayon r .

-Calculer le champ \vec{E} en un point M de l'axe $z'Oz$ du trou.

Exercice 03:

on considère un demi cercle (C, D) , (Voir figure) de centre O et de rayon R , uniformément chargé avec une densité linéique de charge constante et positive.

soit q une charge ponctuelle placée en un point B comme indiqué sur la figure, ($OB = R$)



1/a- calculer le potentiel électrostatique $V_1(O)$ créé par le demi cercle chargé (C,D) au point O .

b- Calculer le potentiel électrostatique $V_2(O)$ créé par la charge ponctuelle q au point O .

c- En déduire le potentiel électrostatique total $V(O)$ créé en O .

2/a- Montrer que le champ électrostatique $\vec{E}_1(O)$, créé par la distribution de charge linéique en point O , est de la forme: $\vec{E}_1(O) = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \vec{j}$

b- Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}_2(O)$, créé par la charge ponctuelle q au point O .

c- En déduire le champ électrostatique total $\vec{E}(O)$ créé au point O .

d- Déterminer la relation entre λ et q pour que $\vec{E}(O) = 0$.

Exercice 04:

I- On considère une spire circulaire de centre O et de rayon R , uniformément chargée avec une densité de charge linéique $\lambda(\lambda > 0)$.

a) Sans faire de calcul, donner la direction du champ électrique $\vec{E}_s(M)$ en un point M de l'axe de la spire tel que $\vec{OM} = x$. justifiez votre réponse.

b) Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}_s(M)$ et le potentiel $V_s(M)$ au point M .

II- Soit un fil infini uniformément chargé avec une densité de charge linéique $-\lambda$.

a) En utilisant la symétrie de la distribution, quelle est la distribution du champ électrique $\vec{E}_f(M)$ en un point M situé a une distance r du fil. Justifier votre réponse.

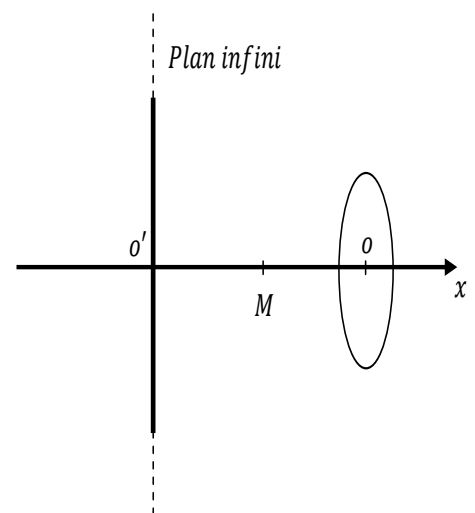
b) Par application du théorème de gauss, déterminer le champ électrique $\vec{E}_f(M)$ en un point M .

c) Déduire le potentiel $V_f(M)$. on donne $V_r(r = 1) = 0$.

III- On place le fil infini perpendiculairement à l'axe principale de la spire circulaire et à une distance $2a$ de celle ci (voir figure).

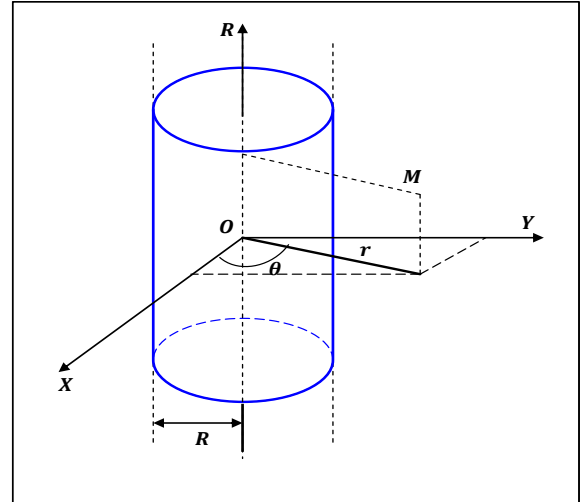
a) Déterminer le champ \vec{E} créée par le fil infini et la spire circulaire au point M tel que M est au milieu de $\vec{OO'}$.

b) Déterminer le potentiel $V(M)$.



Exercice 05:

On considère un cylindre de rayon R , de longueur infinie, chargée uniformément en surface par une densité surfacique $\sigma (\sigma > 0)$. A l'aide du théorème de Gauss on désire déterminer le champ électrostatique \vec{E} en tout point M de l'espace, créé par cette distribution. M est un point situé à la distance r de l'axe (OZ) du cylindre et repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . (voir figure)



- 1) En utilisant les symétries et les invariances, déterminer la direction de $\vec{E}(M)$ et les variables dont il dépend.
- 2)
 - a- Définir précisément la surface de Gauss que vous utilisez (en justifiant votre choix).
 - b- déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace.
- 3) En déduire le potentiel $V(M)$ pour tous les points M de l'espace ($r < R$ et $r > R$), on prendra comme origine des potentiels ($V = V_0$ en $r = 0$).
- 4) Tracer les courbes de variations $E(r)$ et $V(r)$ en fonction de r . Conclure.
- 5) Quelles sont les lignes de champs et les surfaces équipotentielle pour cette distribution de charges.

Exercice 06:

Soit une sphère de centre O et de rayon R , chargée uniformément en volume avec une densité volumique ρ . (figure a)

- 1)
 - a- En utilisant les règles de symétrie et d'invariances, montrer que le champ électrique en un point quelconques de l'espace s'écrit sous la forme : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$.
 - b- Déterminer alors le champ à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.
 - c- En déduire ensuite le potentiel à l'intérieur et l'extérieur de la sphère, on prendra $V(\infty) = 0$.
- 2) On place une charge ponctuelle q positive au centre de la sphère (figure b)
 - a- En utilisant le principe de superposition, déterminer le champ résultant créé par la charge q et la sphère chargée en tout point de l'espace.

b- Déterminer le potentiel produit en tout point de l'espace, par le système formé par q et la sphère chargée.

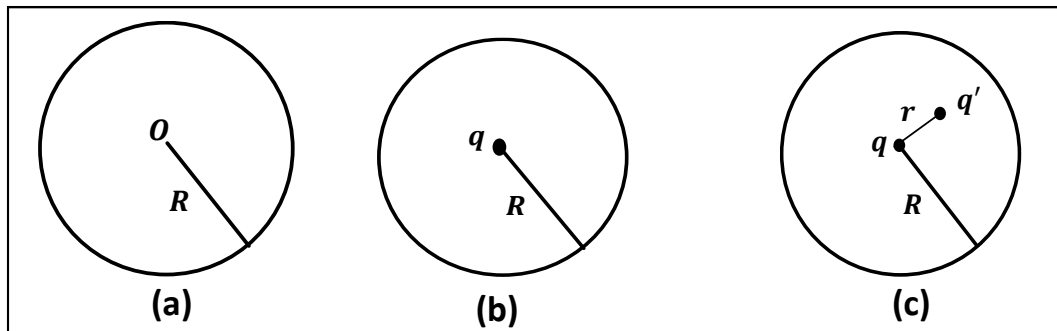
c- pour quelle valeur ρ_0 de ρ , la charge du système formé par q et la sphère chargée est nulle ? On conserve cette valeur pour le reste de l'exercice.

d- Réécrire l'expression du champ résultant en tout point de l'espace, en fonction de q et r .

3) On place une deuxième charge ponctuelle q' positive à l'intérieur de la sphère, à la distance $r \leq R$ du centre. (figure c)

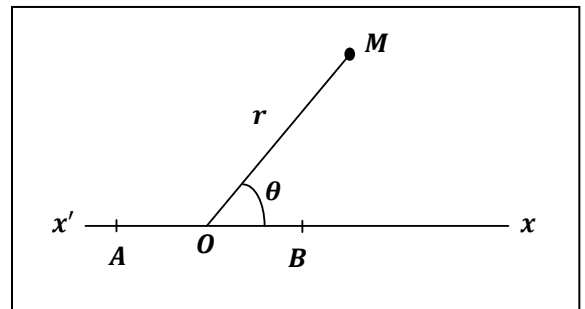
a- Déterminer la force électrostatique résultante exercée sur q' , représenter cette force sur un schéma.

b- Pour quelle valeur de r , la charge q' est en équilibre?



Exercice 07:

Dans l'espace où règne un champ électrique uniforme \vec{E} , on considère sur un axe $x'Ox$ parallèle à \vec{E} deux points A et B tels que \overrightarrow{AB} soit dans le même sens que \vec{E} .



- 1) Quelles sont les surfaces équipotentielles ?
- 2) Quel est le potentiel en un point M de l'espace situé à la distance r de O et tel que l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = \theta$
- 3) On place les charges $-q$ et $+q$ respectivement en A et B .
 - a) Montrer que le dipôle AB est en équilibre stable.
 - b) Quel est le potentiel résultant en M ?
 - c) Montrer qu'il existe une sphère de centre O , sur laquelle ce potentiel reste constant.
Calculer numériquement le rayon de cette sphère ?
 - d) Quelle est la valeur constante de ce potentiel ?

Solution des exercices

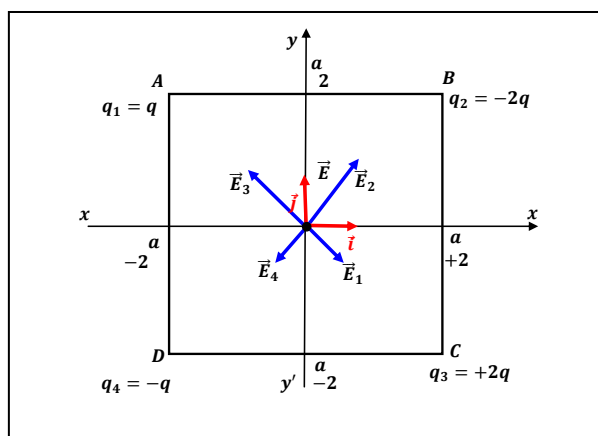
Exercice 01:

1) Détermination du champ \vec{E} en O

Soit $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ et \vec{E}_4 les champs créés en O respectivement par les charges q_1, q_2, q_3, q_4 .

On a :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$



par raison de symétrie:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 + \vec{E}_4 &= -2E_1 \cos \frac{\pi}{4} \vec{j} \\ &= -2k \cdot \frac{2q}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \\ &= -\frac{2kq}{a^2} \sqrt{2} \vec{j} \end{aligned}$$

On a de même:

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 + \vec{E}_3 &= 2 E_2 \cos \frac{\pi}{4} \vec{j} = 2k \frac{4q}{a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \\ &= 4k \frac{q}{a^2} \sqrt{2} \vec{j} \end{aligned}$$

Soit

$$\vec{E} = \frac{2kq}{a^2} \sqrt{2} \vec{j}$$

Le champ résultant \vec{E} est donc:

- Dirigé suivant l'axe $y'Oy$;
- Dans le sens positif de l'axe $y'Oy$;

- De norme $E = \frac{2kq}{a^2} \sqrt{2}$.

A.N: $E = 9 \cdot 10^9 \times 10^{-8} \times 2\sqrt{2} = 254,6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

2) Détermination du potentiel V en O

Soient V_1, V_2, V_3 et V_4 les potentiels créés en O respectivement par les charges q_1, q_2, q_3, q_4 .

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{2kq}{a\sqrt{2}} [1 - 2 + 2 - 1]$$

Soit

$$V = 0$$

3) Variation du potentiel sur les axes $x'Ox$ et $y'Oy$

a) 1^{er} cas: su l'axe $x'Ox$, on a :

$$MA = MD \quad \text{et} \quad MB = MC$$

$$\Rightarrow V = kq \left[\frac{1}{MA} - \frac{2}{MB} + \frac{2}{MC} - \frac{1}{MD} \right] \text{ d'où } V = 0$$

L'axe $x'Ox$ est une équipotentielle $V = 0$

I et I' étant sur l'axe, on a $V(I) = V(I') = 0$

b) 2^{er} cas: su l'axe $y'Oy$, on a :

$$MA = MB \quad \text{et} \quad MC = MD$$

$$V = kq \left[\frac{1}{MC} - \frac{1}{MA} \right]$$

Soit

$$V = kq \left\{ \left[(y-a)^2 + \frac{a^2}{4} \right]^{-\frac{1}{2}} - \left[(y-a^2) + \frac{a^2}{4} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

En deux points symétriques par rapport à O , sur l'axe $y'Oy$, les potentiels sont opposés:

$$V(y) = -V(-y)$$

Si M est en J , on a $JA = \frac{a}{2}$ et $JC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Soit

$$V(J) = kq \left[\frac{2}{a\sqrt{5}} - \frac{2}{a} \right] = \frac{2kq}{a} \left(\frac{\sqrt{5}-5}{5} \right)$$

Si M est en J' , alors

$$V(J') = -V(J)$$

A.N

$$V(J) = -99,5 \text{ Volts}$$

$$V(J') = 99,5 \text{ Volts}$$

Exercice 02:

1) Calcul direct du champ \vec{E}

- **Symétrie + invariance**

Tout plan contenant l'axe oz est un plan de symétrie et invariance par rotation autour de oz

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(0, 0, z) = E(z)\vec{k}$$

- **Expression du champ créé par dq :**

$$\vec{dE} = k \frac{dq}{PM^2} \vec{u}_{PM} = k \frac{\sigma dS}{PM^2} \vec{u}_{PM}$$

avec $dS = r dr d\theta$ et $PM = \frac{z}{\cos \alpha}$

$$\vec{dE} = \frac{k r dr d\theta}{z^2} \sigma \cos^2 \alpha \vec{u}_{PM}$$

Le champ dE_z créé par la couronne comprise entre les deux rayons r et $r dr$ est:

$$dE_z = \frac{k r dr}{z^2} \sigma \cos^3 \alpha \int_0^{2\pi} d\theta = k \frac{2\pi r dr}{z^2} \sigma \cos^3 \alpha$$

On a pour tous les éléments e la couronne :

$$\tan \alpha = \frac{r}{z} \Rightarrow \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{dr}{z}$$

$$dE_z = k \frac{2\pi}{z^2} z (\tan \alpha) z \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \sigma \cos^3 \alpha$$

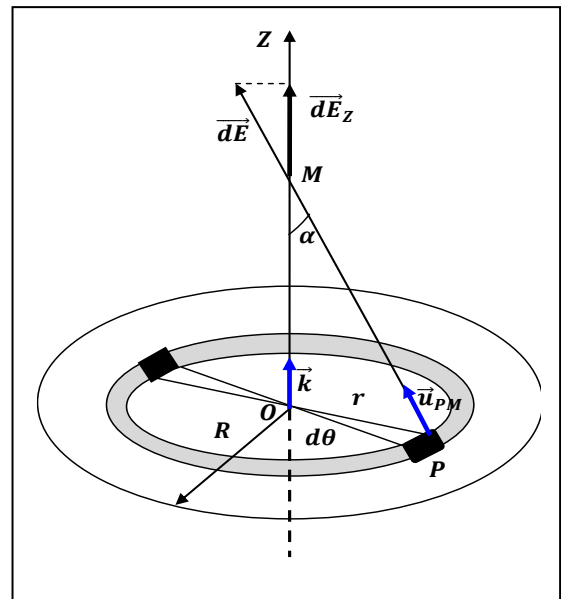
$$= k 2\pi \sigma \sin \alpha d\alpha$$

Le champ créé par le disque de rayon R est donc:

$$E_z = k 2\pi \sigma \int_0^{\alpha_0} \sin \alpha d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha_0)$$

finalement

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{(z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \vec{k}$$



2) Quand R tend vers l'infini , alors

$$\vec{E} \rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}$$

3) Calcul du champ E en un point de l'axe z'Oz du trou

D'après le principe de superposition , le champ \vec{E} créé par le plan d'un trou est :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

où \vec{E}_1 est le champ créé par le plan infini chargé avec une densité $+\sigma$

et \vec{E}_2 est le champ créé par le disque avec une densité $-\sigma$

Le champ est donné par:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k} + \left[-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{(z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} \vec{k}}$$

Exercice 03:

1/a- calcul du potentiel électrostatique $V_1(O)$ créé par le demi cercle chargé (C,D) au point O.

- Expression du potentiel $V_1(O)$:

$$dV_1(O) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Distribution linéique le long de demi cercle : $dq = \lambda dl$

$$\text{avec} \quad dl = R d\theta \quad (\theta \text{ varie de } 0 \text{ à } \pi)$$

$$\Rightarrow V_1(O) = \int_0^\pi \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta = \frac{\lambda\pi}{4\pi\epsilon_0}$$

Finalement

$$\boxed{V_1(O) = \frac{\lambda}{4\epsilon_0}}$$

1/b- Calcul du potentiel électrostatique $V_2(O)$ créé par la charge ponctuelle q au point O .

$$V_2(O) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

1/c- Le potentiel électrostatique total $V(O)$ créé en O .

Le potentiel électrostatique total $V(O)$ créé en O est la somme entre le $V_1(O)$ et le $V_2(O)$:

$$V(O) = V_1(O) + V_2(O) = \frac{\lambda}{4\epsilon_0} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Soit

$$V(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{R} + \lambda \right]$$

2/a- Le champ électrostatique $\vec{E}_1(O)$ créé par la distribution de charge linéique en point O , est de la forme:

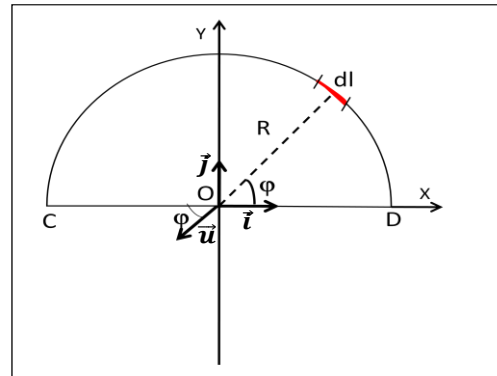
$$d\vec{E}_1(O) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}$$

avec $dq = \lambda dl$ et $dl = R d\varphi$

$$d\vec{E}_1(O) = \frac{\lambda R d\varphi}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}$$

par projection le vecteur unitaire \vec{u} est donné par:

$$\vec{u} = -\cos \varphi \vec{i} - \sin \varphi \vec{j}$$



Soit

$$d\vec{E}_1(O) = \frac{\lambda R d\varphi}{4\pi\epsilon_0 R^2} [-\cos \varphi \vec{i} - \sin \varphi \vec{j}]$$

Par intégration

$$\vec{E}_1(O) = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left[\left(\int_0^\pi -\cos \varphi d\varphi \right) \vec{i} + \left(\int_0^\pi -\sin \varphi d\varphi \right) \vec{j} \right]$$

Finalement

$$\vec{E}_1(O) = \frac{-2\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \vec{j} = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \vec{j}$$

2/b- Le champ électrostatique $\vec{E}_2(O)$, créé par la charge ponctuelle q au point O .

$$\vec{E}_2(O) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{j}$$

2/c- Le champ électrostatique total $\vec{E}(O)$ créé au point O .

Le champ électrostatique total $\vec{E}(O)$ créé au point O est la somme entre le $\vec{E}_1(O)$ et $\vec{E}_2(O)$:

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_1(O) + \vec{E}_2(O)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(O) = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \right) \vec{j}$$

2/d- La relation entre λ et q pour que $\vec{E}(O) = \vec{0}$.

$$E(O) = 0 \Rightarrow \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{q = 2 \lambda R}$$

Exercice 04:

I) Etude de la spire:

a) La direction du champ électrostatique $\vec{E}_s(M)$:

Par raison de symétrie le champ électrostatique créé par la spire est porté par l'axe (ox).

En effet deux éléments de charge dq de longueur dl centre en P et P' symétrique par rapport a (ox), créent en M deux champs élémentaires $\vec{dE}_s(M)$ et $\vec{dE}_{s'}(M)$ dont la resultante est portée par l'axe (ox).

b) Le champ électrostatique $\vec{E}_s(M)$:

$$\vec{dE}_s = -dE \cos \alpha \vec{i} = -\frac{dq \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \vec{i}$$

$$\text{or } dq = \lambda dl \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \frac{x}{PM}$$

$$PM^2 = x^2 + R^2 \quad \rightarrow \quad PM = \sqrt{x^2 + R^2}$$

$$\Rightarrow \vec{dE}_s = -\frac{\lambda dl \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)} \vec{i} = -\frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2) \sqrt{x^2 + R^2}} x \vec{i}$$

$$\text{avec} \quad dl = R d\theta$$

soit

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dE_s} &= -\frac{\lambda x R d\theta}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{i} \\ \Rightarrow \vec{E}_s &= \int \overrightarrow{dE_s} = \int_0^{2\pi} -\frac{\lambda x R d\theta}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{i} \\ \Rightarrow \vec{E}_s &= -\frac{\lambda x R}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta \vec{i} \end{aligned}$$

d'où

$$\vec{E}_s = -\frac{\lambda x R 2\pi}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{i}$$

Finalement

$$\vec{E}_s = \frac{-\lambda x R}{2\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{i}$$

- **Le Potentiel électrostatique $V_s(M)$:**

$$\text{On a } dV_s = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 PM}$$

avec $dq = \lambda dl$, $PM = \sqrt{x^2 + R^2}$ et $dl = R d\theta$

$$\Rightarrow dV_s = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$\Rightarrow V_s = \int dV_s = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

Finalement

$$V_s = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}}$$

II) Etude du Fil:

- a) **La direction du champ électrostatique $\vec{E}_f(M)$:**

La distribution admet comme plan de symétrie un plan P_1 passant par M et contient l'axe (yy') et un autre plan P_2 perpendiculaire à l'axe (yy') , on déduit alors que le champ est porté par l'axe de direction \vec{U}_r .

- Le système est invariant par rotation autour du fil
- Le système est invariant par translation parallèle au fil

Le champ ne dépend que de la distance du point M au fil

$$\vec{E}_f(M) = \vec{E}_f(r)\vec{u}_r$$

b) Application du théorème de Gauss:

- $\phi = \oiint_{S_{Gauss}} \vec{E}_f(M) \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$
- Surface de Gauss:

Le champ est radial et constant sur un cylindre, la surface de Gauss convenable sera un cylindre de rayon r et de hauteur h .

$$\begin{aligned} \phi &= \oiint_{S_{Gauss}} \vec{E}_f(M) \cdot \vec{dS} \\ &= \iint_{S_{b1}} \vec{E}_f(M) \cdot \vec{dS}_{S_{b1}} + \iint_{S_{b2}} \vec{E}_f(M) \cdot \vec{dS}_{S_{b2}} + \iint_{S_L} \vec{E}_f(M) \cdot \vec{dS}_L \\ &= \left\{ \iint_{S_{b1}} E_f(M) \cdot \vec{u}_r \cdot \vec{dS}_{S_{b1}} \vec{k} \right\}_{=0} + \left\{ \iint_{S_{b2}} E_f(M) \cdot \vec{u}_r \cdot \vec{dS}_{S_{b2}} (-\vec{k}) \right\}_{=0} + \iint_{S_L} E_f(M) \cdot \vec{u}_r \cdot \vec{dS}_L \\ &= \iint_{S_L} E_f(M) \cdot \vec{u}_r \cdot \vec{dS}_L \end{aligned}$$

Le champ est constant sur un cylindre

$$\phi = \iint_{S_L} E_f(r) \cdot dS_L = E_f(r) \cdot S_L = E_f(r) \cdot 2\pi r h$$

- $Q_{int} = \int -\lambda dl = -\lambda \int_0^h dl = -\lambda h$

Les charges sont disposé sur le segment de longueur h d'où:

$$\begin{aligned} E_f(r) \cdot 2\pi r h &= -\frac{\lambda h}{\epsilon_0} \\ \rightarrow E_f(r) &= -\frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\vec{E}_f(r) = -\frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \vec{u}_r}$$

❖ **Le potentiel $V_f(M)$:**

On a $\vec{E}_f(M) = -\overrightarrow{grad} V_f(M)$

$$E(r) \vec{u}_r = -\frac{dV_f(M)}{dr} \vec{u}_r$$

$$\rightarrow dV_f(M) = -dE(r) dr \Rightarrow dV_f(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r}$$

d'où

$$V_f(M) = \int dV_f(M) = \int \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r}$$

$$\Rightarrow V_f(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + cste$$

$$\text{On a } V_f(r=1) = 0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln 1 + cste \Rightarrow cste = 0$$

Finalement

$$V_f(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r$$

III) Fil + Spire

a) Le champ électrostatique \vec{E} :

On a

$$\vec{E} = \vec{E}_s(M) + \vec{E}_f(M) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r = a \\ x = a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{-\lambda a R}{2\epsilon_0(a^2 + R^2)^{3/2}} \vec{i} - \frac{\lambda}{2\pi a \epsilon_0} \vec{u}_r$$

b) Le potentiel électrostatique $V(M)$:

On a

$$V(M) = V_s(M) + V_f(M)$$

$$\Rightarrow V(M) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 \sqrt{a^2 + R^2}} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln a$$

Finalement

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \left(\frac{R}{\sqrt{a^2 + R^2}} + \frac{\ln a}{\pi} \right)$$

Exercice 05:

1) La direction et le sens du champ électrostatique $\vec{E}(M)$:

- La distribution admet comme plans de symétrie, un plan passant par le point M et contenant l'axe zz' et un plan perpendiculaire à l'axe zz' . En déduit alors que le champ $\vec{E}(M)$ est porté par l'intersection de ces plans, c'est à dire l'axe de direction \vec{u}_r

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z) \vec{u}_r$$

- La distribution est invariante par toute rotation autour de l'axe zz'

$$\vec{E}(M) = E_r(r, z)\vec{u}_r$$

- La distribution est invariante par toute translation selon l'axe zz'

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$$

2.

a) Choix de la surface de Gauss

Le champ $\vec{E}(M) = E_r$ est radial et constant sur un cylindre d'axe zz' et de rayon r , la surface de Gauss convenable sera un cylindre de rayon r et de hauteur h .

b) Le champ $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace

- Le théorème de Gauss:

$$\phi = \oiint_{S_{Gauss}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

avec $S_{Gauss} = S_{B1} + S_{B2} + S_L$

où S_{Gauss} : La surface de Gauss

S_{B1} : Surface de la 1^{ère} base supérieure du cylindre.

S_{B2} : Surface de la 2^{ème} base inférieure du cylindre.

S_L : Surface Latérale

Donc

$$\phi = \oiint_{S_{Gauss}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_{B1}} \vec{E}_f(M) \cdot \vec{dS}_{S_{B1}} + \iint_{S_{B2}} \vec{E}_f(M) \cdot \vec{dS}_{S_{B2}} + \iint_{S_L} \vec{E}_f(M) \cdot \vec{dS}_L$$

or $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$

d'où $\phi = \iint_{S_{B1}} E_r(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{n}_{B1} + \iint_{S_{B2}} E_r(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{n}_{B2} + \iint_{S_L} E_r(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{n}_L$

avec $\begin{cases} \vec{n}_{B1} = \vec{k} \\ \vec{n}_{B2} = -\vec{k} \\ \vec{n}_L = \vec{u}_r \end{cases}$ et $\begin{cases} \vec{u}_r \cdot \vec{k} = 0 \\ \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \phi = \iint_{S_{Gauss}} E_r(r) \cdot dS = E_r(r) \iint dS = E_r(r) S_L = E_r(r) 2\pi r h$$

Car la surface du cylindre est égale $2\pi r h$

$$\Rightarrow \phi = E_r(r) 2\pi r h$$

- **1^{er} cas: $r < R$ (M à l'intérieur de la surface de Gauss)**

On a un cylindre de rayon R , de Longueur infinie, chargé uniformément en **surface**

$$\text{Donc } Q_{int} = 0 \Rightarrow \oint E_r(r) 2\pi r h = 0 \Rightarrow E_r(r) = 0$$

$$E(M) = 0$$

- **2^{eme} cas: $r > R$ (M à l'extérieur de la surface de Gauss)**

$$\text{Donc } Q_{int} = \iint \sigma dS$$

Les charges uniformément réparties sur la surface du cylindre donc $\sigma = cste$

$$\text{d'où } Q_{int} = \sigma \iint dS = \sigma 2\pi R h$$

$$\text{alors } \oint = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = E(r) 2\pi R h \Rightarrow \frac{\sigma 2\pi R h}{\epsilon_0} = E(r) 2\pi R h \Rightarrow E(r) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

$$\text{Finalement } \vec{E}(M) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } r < R \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

3) Le potentiel $V(M)$ en tout point de l'espace

$$\text{On a } \vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

Le gradient en coordonnées cylindriques est:

$$\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

puisque $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de θ et z on a alors:

$$E_r(r) \vec{u}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r \Rightarrow dV = -E(r) dr$$

- **1^{er} cas: $r < R$**

$$\text{On } E(r) = 0 \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow V = cste$$

$$\text{D'après les conditions au limites pour } r = 0 \Rightarrow V = V_0$$

d'où

$$V(M) = V_0$$

On le note

$$V_{int}(M) = V_0$$

- **2^{eme} cas: $r \geq R$**

On a $\vec{E}(M) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r$ et $dV = -E(r) dr$

$$V(M) = \int dV = \int \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} dr = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \int \frac{dr}{r} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln(r) + cste$$

On le note

$$V_{ext}(M) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln(r) + cste$$

Pour déterminer la constante en utilisant la continuité du potentiel pour $r = R$

On a

$$V_{int}(r = R) = V_{ext}(r = R) \Rightarrow V_0 = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln(R) + cste \Rightarrow cste = V_0 - \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln(R)$$

$$\Rightarrow V_{ext}(M) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln(r) + V_0 - \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln(R)$$

d'où

$$V_{ext}(M) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) + V_0$$

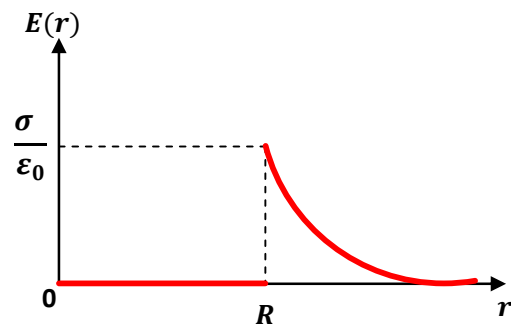
4) Représentation de $E(r)$ et $V(r)$ en fonction de r

- Pour la fonction $E(r)$:

$$\text{On a } E(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

$$\text{Pour } r = R \Rightarrow E(r = R) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} E(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} = 0$$

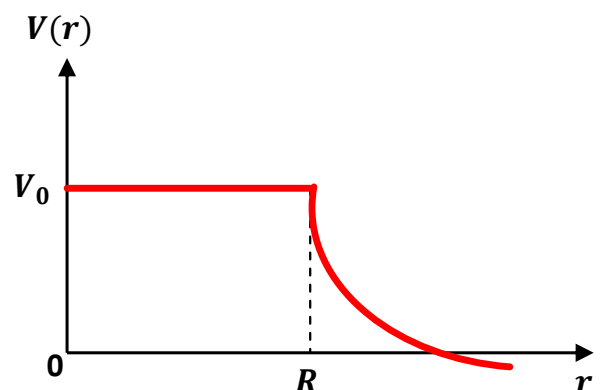


- Pour la fonction $V(r)$:

$$\text{On a } V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{si } r < R \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) + V_0 & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

$$\text{Pour } r = R \Rightarrow V(r = R) = V_0$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) + V_0 \right)$$



$$= \lim_{r \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1}{-\infty}\right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1}{-\infty}\right) = \ln(0^-) = -\infty$$

5) Les lignes de champ et les surfaces équipotentielles

- **Lignes de champ:**

Les lignes de champ sont des droites qui partent de la surface du cylindre chargé, leur prolongation passe par l'origine.

- **Les surfaces équipotentielles:**

$$\Rightarrow V(M) = cste$$

- à l'intérieur $V(M) = cste = V_0$

- à l'extérieur $V(M) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) + V_0 = C_1 \Rightarrow \ln\left(\frac{R}{r}\right) = \frac{\epsilon_0}{\sigma R} (C_1 - V_0) = C_2$

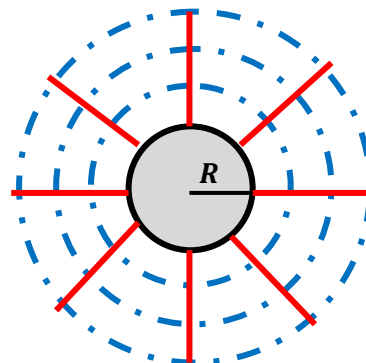
$$\ln(R) = \ln(r) - C_2 = C_3 \Rightarrow r = e^{C_3} = cte$$

- $r = cte \Rightarrow$ Les surfaces équipotentielles sont des cylindres de même axe que la distribution

-

--- Surface équipotentielle

— Ligne de champ



Exercice 06:

1)

a- Symétrie et invariances:

Tout axe passant par le centre de O est un axe de symétrie, le champ est donc porté par OM

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, \varphi)$$

ρ étant uniforme \Rightarrow la charge est invariante par toute rotation autour du centre $O \Rightarrow E(M)$ est donc indépendant de θ et de φ .

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{E}(r)\vec{u}_r$$

b- Le champ à l'intérieur et l'extérieur de la sphère:

- **Choix de la surface de Gauss**

La surface de Gauss convenable sera une sphère de centre O et de rayon $r = OM$.

- **Application du Théorème de Gauss:**

$$\phi = \oiint_{S_{Gauss}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \phi = E \oiint_{S_{Gauss}} dS = E(r) S = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

- **1^{er} cas : à l'intérieur de la sphère ($r < R$)**

$$dq = \rho dV \Rightarrow Q_{int} = \iiint \rho dV \Rightarrow Q_{int} = \rho V_{sphère}$$

$$\Rightarrow Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

d'où

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \vec{u}_r}$$

- **2^{ème} cas : à l'extérieur de la sphère ($r \geq R$)**

$$dq = \rho dV \Rightarrow Q_{int} = \iiint \rho dV \Rightarrow Q_{int} = \rho V_{sphère}$$

$$\Rightarrow Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

d'où

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r}$$

Finalement

$$\begin{cases} \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \vec{u}_r & \text{si } r < R \\ \vec{E}(r) = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

c- le potentiel à l'intérieur et l'extérieur de la sphère

Calculant le potentiel en M à partir de $\vec{E}(M)$:

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M) \Rightarrow \vec{E}(r) \vec{u}_r = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow V(M) = -\int \vec{E}(r) dr$$

- **1^{er} cas : à l'intérieur de la sphère ($r < R$)**

$$E(r) = \frac{\rho r}{3 \varepsilon_0} \Rightarrow V(M) = -\int \frac{\rho r}{3 \varepsilon_0} dr = -\frac{\rho}{3 \varepsilon_0} \int r dr$$

$$\Rightarrow V(M) = -\frac{\rho r^2}{6 \varepsilon_0} + C_1$$

$$\Rightarrow V_{int}(r) = -\frac{\rho r^2}{6 \varepsilon_0} + C_1$$

- **2^{ème} cas : à l'extérieur de la sphère ($r \geq R$)**

$$E(r) = \frac{\rho R^3}{3 \varepsilon_0 r^2} \Rightarrow V(M) = -\int \frac{\rho R^3}{3 \varepsilon_0 r^2} dr = -\frac{\rho R^3}{3 \varepsilon_0} \int \frac{1}{r^2} dr$$

$$\Rightarrow V_{ext}(r) = \frac{\rho R^3}{3 \varepsilon_0 r} + C_2$$

On a $V(\infty = 0) \Rightarrow C_2 = 0$

$$\Rightarrow V_{ext}(r) = \frac{\rho R^3}{3 \varepsilon_0 r}$$

C_1 est déduit par la Continuité du potentiel en $r = R$

$$V_{int}(r = R) = V_{ext}(r = R) \Rightarrow C_1 = \frac{\rho R^2}{3 \varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6 \varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2 \varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow V_{int}(r) = \frac{\rho}{6 \varepsilon_0} (3R^2 - r^2)$$

Finalement

$$\begin{cases} V_{int}(r) = \frac{\rho}{6 \varepsilon_0} (3R^2 - r^2) & \text{si } r < R \\ V_{ext}(r) = \frac{\rho R^3}{3 \varepsilon_0 r} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

2. a- Le champ résultant créé par la charge q et la sphère chargée en tout point de l'espace.

Le champ produit en tout point de l'espace est la somme vectorielle des champs produit par la sphère et la charge:

Le champ créé par la charge q est donné par:

$$\vec{E}_q(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

d'où

$$\begin{cases} \vec{E}(M) = \left(\frac{\rho r}{3\epsilon_0} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \vec{u}_r & \text{si } r < R \\ \vec{E}(M) = \left(\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\vec{u}_r}{r^2} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

b- Le potentiel produit en tout point de l'espace, par le système formé par q et la sphère chargée.

Le potentiel produit en tout point de l'espace est la somme vectorielle des champs produit par la sphère et la charge:

Le potentiel créé par la charge q est donné par:

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

d'où

$$\begin{cases} V(M) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{si } r < R \\ V(M) = \left(\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{r} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

c- La valeur de ρ_0 pour que la charge du système formé par q et la sphère chargée est nulle

La charge du système (sphère +q) est nulle si:

$$\rho_0 \frac{4\pi R^3}{3} + q = 0$$

$$\Rightarrow \rho_0 = -\frac{3q}{4\pi R^3}$$

d- L'expression du champ résultant en tout point de l'espace, en fonction de q et r .

En remplaçant $\rho_0 = -\frac{3q}{4\pi R^3}$ dans l'expression de champ on obtient:

$$\begin{cases} \vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{r}{R^3} \right) \vec{u}_r & \text{si } r < R \\ \vec{E}(M) = \mathbf{0} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

3)

a- La force électrostatique résultante exercée sur q' .

q' placée à $r \leq R$:

La force $\vec{F}_{/q'}$ subit par q' est donnée par :

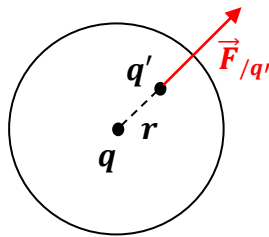
$$\vec{F}_{/q'} = q' \vec{E}(r \leq R)$$

ce qui donne

$$\vec{F}_{/q'} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R^3 - r^3}{R^3} \right) \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

$\vec{F}_{/q'}$ a le même sens que de \vec{u}_r

- Représentation



b- La valeur de r pour que la charge q' soit en équilibre

pour que la charge q' soit en équilibre il faut que :

$$\vec{F}_{/q'} = \mathbf{0}$$

d'où

$$r = R$$

Exercice 07:

1) Le champ électrostatique \vec{E} étant uniforme et parallèle à AB , les surfaces équipotentielles $V = cste$ sont les plans perpendiculaires à \vec{E} donc à AB .

2) Le potentiel $V(M)$

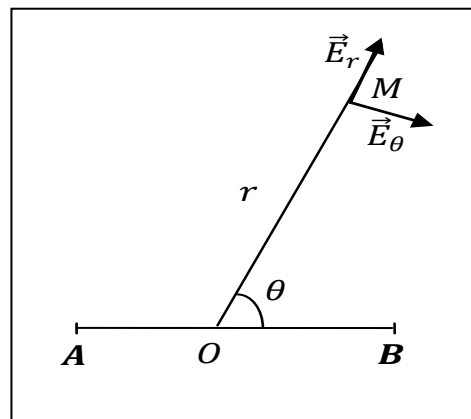
On a $-dV = \vec{E} \cdot d\vec{l}$

avec $\vec{E} = E \cos \theta \vec{u}_r - E \sin \theta \vec{u}_\theta$

et $d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r \vec{u}_\theta$

$$\Rightarrow -\int_{V(O)}^{V(M)} dV = \int_0^r E \cos \theta dr$$

d'où



$$V(O) - V(M) = E_r \cos \theta$$

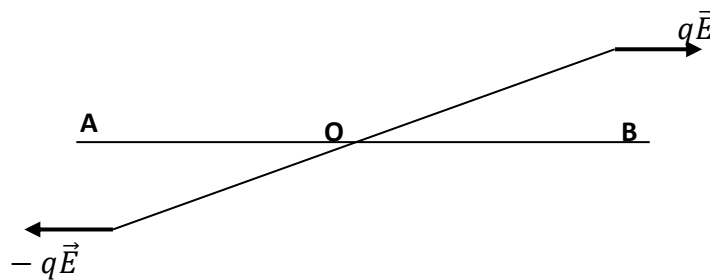
$$\Rightarrow \boxed{V(M) = V(O) - E_r \cos \theta}$$

3)

a- Le dipôle est soumis à un couple de forces de moment:

$$\Gamma = \vec{P} \wedge \vec{E} = q \overrightarrow{AB} \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{car } \overrightarrow{AB} // \vec{E})$$

Le dipôle est donc en équilibre ; l'équilibre est stable car , lorsqu'on écarte légèrement le dipôle de sa position d'équilibre, le couple de forces $(q\vec{E}, -q\vec{E})$ tend à l'y ramener.



b) Le potentiel résultant en M :

Le potentiel résultant en M est :

$$V_M = V_{dipole} + V_{champ E}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_M = \frac{kP \cos \theta}{r^2} + V_0 - E_r \cos \theta}$$

c) Surface équipotentielle:

$$\frac{kP \cos \theta}{r^2} - E_r \cos \theta = cste$$

$$\Rightarrow \cos \theta \left(\frac{kP}{r^2} - E_r \right) = cste$$

pour que la relation ci dessus soit valable quelle que soit la valeur de θ , il faut que la constante soit nulle, ce qui donne:

- $\cos \theta = 0$: Le plan médiateur de AB est une équipotentielle de potentiel V_0 .
- $r^3 = \frac{kP}{E} : r = \left(\frac{kP}{E} \right)^{1/3}$ ce qui correspond à une sphère de centre O et de rayon r .

A.N: $\boxed{r = \left(\frac{9 \times 10^9 \times 10^{-9}}{72} \right) = 0.5 \text{ m}}$

d) Sur la sphère le potentiel V est constant et égal à V_0 .

Chapitre II

CONDUCTEURS EN EQUILIBRE

ELECTROSTATIQUE

En électricité, un conducteur est un milieu matériel dans lequel certaines charges électriques, dites « charges libres », sont susceptibles de se déplacer sous l'action d'un champ électrique. Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'étudier les propriétés des conducteurs en équilibre électrostatique, Ce sera l'occasion d'introduire les notions de capacité d'un condensateur et de résistance d'un conducteur ohmique utiles en électricité.

II.1 Conducteur et équilibre

II.1.1 Conducteur

Un *conducteur* est un milieu matériel dans lequel certaines charges électriques, dites « charges libres », sont susceptibles de se déplacer sous l'action d'un électrostatique \vec{E} .

II.1.2 Equilibre électrostatique

Un conducteur est en équilibre électrostatique s'il n'y a pas de déplacement de charges mobiles. La répartition des charges est constante dans le temps.

II.2 Caractéristiques du conducteur en équilibre

II.2.1 Le champ électrostatique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre

Aucune charge ne se déplace à l'intérieur d'un conducteur en équilibre. La force \vec{F}_{int} qui s'y applique étant nulle, alors le champ électrostatique à l'intérieur du conducteur est nul également :

$$\vec{F}_{int} = q \vec{E}_{int} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_{int} = \vec{0}$$

En tout point à l'intérieur d'un conducteur en équilibre, le champ électrique \vec{E} est nul.

II.2.2 Répartition des charges

Considérons un conducteur doté d'une charge nette Q et choisissons une surface fermée quelconque de façon qu'elle se retrouve sous la surface du conducteur.

D'après le théorème de Gauss, on a :

$$\phi = \oiint \vec{E}_{int} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Comme $\vec{E}_{int} = 0$, on en déduit que $Q_{int} = 0$.

- *A l'intérieur d'un conducteur chargé en équilibre, la charge électrique est nulle $Q_{int} = 0$.*
- *Les charges, si elles existent, d'un conducteur en équilibre ne sont réparties qu'à sa surface extérieure.*

II.2.3 Potentiel électrique

Considérons la circulation du champ électrique entre deux points M et M' infiniment voisins à l'intérieur d'un même conducteur.

La variation du potentiel $= -\vec{E}_{int} \cdot d\vec{l}$, avec $\vec{E}_{int} = 0$, on obtient $dV = 0$ et l'on déduit que le potentiel électrostatique en tout point d'un conducteur en équilibre est une constante :

$$V_{int} = V_{(s)} = C^{ste}$$

Un conducteur en équilibre électrostatique constitue un volume équipotentiel.

II.2.4 Lignes de champ

Dans un conducteur, même chargé en équilibre, le champ électrique à l'intérieur est \vec{E}_{int} nul et $V_{int} = C^{ste}$. Le champ électrique sur la surface du conducteur est donc perpendiculaire à la surface.

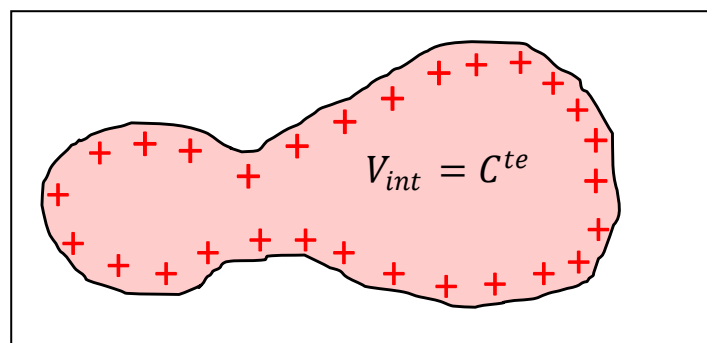


Figure II.1

La surface du conducteur est une équipotentielle $V_{int} = V_{(s)}$. Puisque les lignes de champ électrostatique sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles \Rightarrow le champ créé à l'extérieur près de la surface \vec{E}_{surf} est \perp à celle-ci.

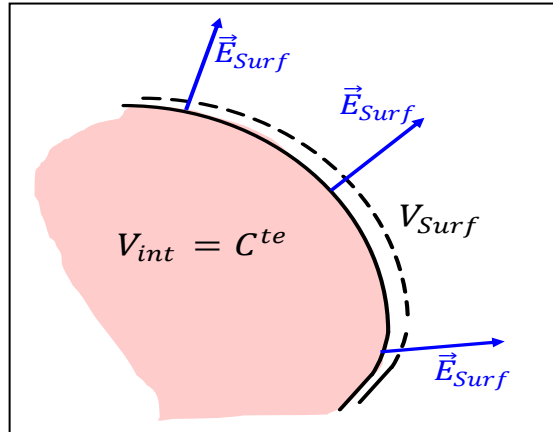


Figure II.2

Le champ est normal à la surface d'un conducteur en équilibre.

II.3 Champ au voisinage d'un conducteur : Théorème de Coulomb.

Considérons un conducteur de forme quelconque. On se propose de calculer le champ électrique en un point au voisinage immédiat de la surface externe du conducteur.

Considérons un conducteur en équilibre de surface (S) et de densité surfacique de charges σ .

En appliquant le théorème de Gauss sur cette surface fermée, nous obtenons:

$$\phi = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Considérons la surface de Gauss fermée telle que représentée sur la figure II.3:

$$S_G = S_{int} + S_{Lat} + S_{ext}$$

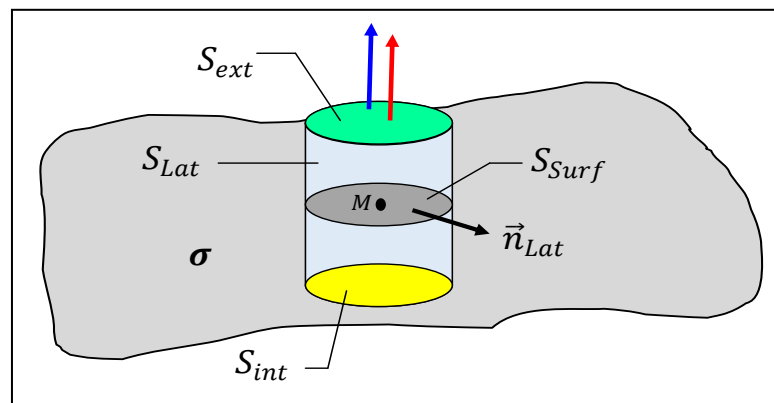


Figure II.3

S_{int} : est une surface quelconque prise à l'intérieur du conducteur s'appuyant sur (dS)

S_{ext} : est considérée comme parallèle à (dS)

S_{Lat} : est la surface latérale du tube de champ construit sur les sections (dS_{int}) et (dS_{ext})

Calculons le flux à travers cette surface de Gauss

$$\phi = \iint_{S_{int}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{int} + \iint_{S_{Lat}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{Lat} + \iint_{S_{ext}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

- $\iint_{S_{int}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{int} = 0$ car $\vec{E}_{int} = \vec{0}$
- $\iint_{S_{Lat}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{Lat} = 0$ car $\vec{E} \perp \vec{dS}_{Lat}$
- $\iint_{S_{ext}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{ext} = E \cdot S_{ext}$ car $\vec{E} // \vec{dS}_{ext}$

On déduit que

$$\phi = \iint_{S_{ext}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{ext} = E \cdot S_{ext} = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot S_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S_{surf}}{\epsilon_0}$$

avec $S_{surf} = S_{ext}$ d'où, finalement: $E(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

En conclusion, le champ au voisinage externe immédiat du conducteur chargé est :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}} \quad (\text{II. 1})$$

\vec{n} : un vecteur unitaire normal à la surface du conducteur, dirigé vers l'extérieur.

Théorème de Coulomb :

Le champ électrostatique à proximité immédiate d'un conducteur portant une charge de densité surfacique σ vaut :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

II.4 Pression électrostatique

Calculons maintenant les forces auxquelles sont soumises les charges électriques situées à la surface d'un conducteur en équilibre.

Considérons un élément de surface dS situé entre deux points M_1 et M_2 infiniment proches, sur un conducteur chargé d'une densité surfacique σ , portant une charge $dq = \sigma dS$.

\vec{E}_1 est le champ créé en M_1 par les charges situées sur dS et \vec{E}_2 le champ créé en M_2 par toutes les autres charges situées à la surface du conducteur (figure II.4).

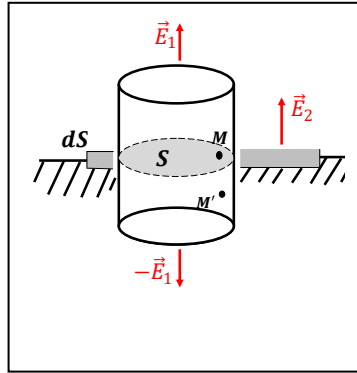


Figure II.4

Le théorème de Gauss appliqué au cylindre élémentaire indiqué sur la figure II.4 donne :

$$E_1 S + E_2 S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

Le champ extérieur créé par l'élément dS seul est donc :

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

Or le champ extérieur au voisinage de dS pris sur le conducteur chargé est selon l'équation :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

On en déduit que le champ créé par le reste du conducteur (conducteur privé de dS) est :

$$\vec{E}_2 = \vec{E} - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

L'élément σdS « ne voyant pas » son propre champ, ne subit que l'action du champ \vec{E}_2 . Il en résulte une force :

$$\vec{dF} = \sigma dS \vec{E}_2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \vec{n}$$

On peut ainsi définir une pression électrostatique s'exerçant en tout point de la surface du conducteur chargé :

$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

Cette quantité est toujours positive.

Vectoriellement, on a :

$$\vec{P}(M) = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \vec{n} \quad (\text{II. 2})$$

ou encore

$$P = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (\text{II. 3})$$

où E est la norme du champ à la surface du conducteur.

Unité de pression : $N/m^2 \equiv Pa$ (Pascal) – $1MPa = 10^6 Pa = 1N/mm^2$

\vec{dF} est toujours normale à la surface du conducteur, et dirigée vers l'extérieur, quel que soit le signe de la charge.

II.5 Pouvoir des pointes

Si un métal chargé possède une pointe, le champ électrique est plus élevé au niveau de la pointe qu'en toute autre région de la surface. La surface mise à disposition des charges y est beaucoup plus grande, et comme les charges se repoussent les unes les autres, il y en a une plus grande quantité au niveau de la pointe. Il en résulte un champ électrique plus intense au voisinage des pointes.

Considérons deux sphères conductrices de rayons respectifs R_1 et R_2 portées au même potentiel (reliées par un fil conducteur). Les deux sphères ont une densité de charge uniforme σ_1 et σ_2 .

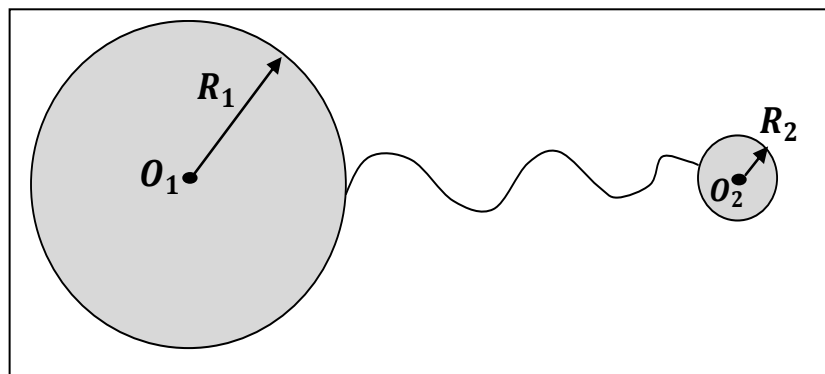


Figure II.5

$$V(O_1) = V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_1} \frac{\sigma_1 dS}{R_1} = \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{R_1} \quad \text{et} \quad V(O_2) = V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_2} \frac{\sigma_2 dS}{R_2} = \frac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{R_2}$$

L'ensemble constituant un seul conducteur avec un nouvel état d'équilibre, on peut donc écrire que :

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{R_2}$$

Et on en déduit:

$$\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2 \Rightarrow \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{R_1}{R_2} \quad (\text{II. 4})$$

Si $R_1 \gg R_2$, alors $\sigma_2 \gg \sigma_1$

Cette dernière équation montre que la sphère ayant le plus petit rayon porte la plus grande densité de charges. Ce résultat se généralise à un conducteur de forme quelconque et explique le pouvoir ionisant d'une pointe.

Conséquence:

On observe une accumulation de charges sur l'extrémité de la pointe.

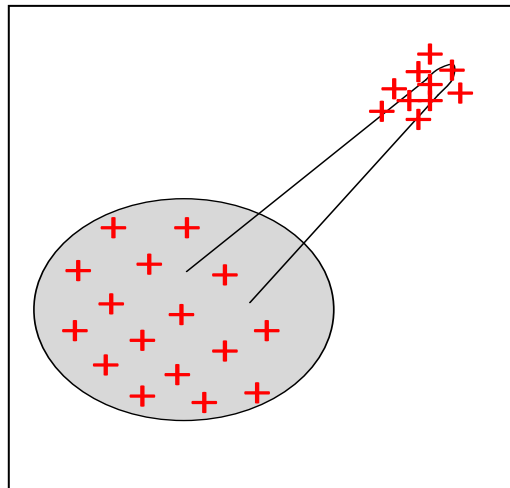


Figure II.6

Applications:

- Le pouvoir de pointe est utile pour faciliter la décharge de l'électricité ; c'est le rôle des paratonnerres qu'on place sur les édifices pour les protéger contre la foudre. La foudre passera préférentiellement par la pointe du paratonnerre et l'électricité de haute intensité s'écoulera au sol, protégeant ainsi l'édifice.

II.6 Cavité vide dans un conducteur : Conducteur creux

Considérons maintenant un conducteur de forme arbitraire contenant une cavité (voir figure II.7). Supposons qu'il n'existe aucune charge à l'intérieur de la cavité.

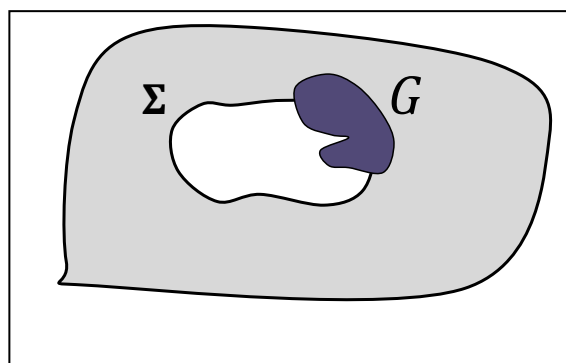


Figure II.7

En l'absence de charges, le potentiel ne peut pas avoir d'extrémum (si c'était le cas, on aurait un ensemble de lignes de champ qui partiraient toutes de cet extrémum, donc il y aurait une charge en ce point). Dans ce cas, le champ électrique à l'intérieur de la cavité doit être nul indépendamment de la distribution de la charge sur la surface externe du conducteur. De plus, le champ à l'intérieur de la cavité est nul même s'il existe un champ électrique à l'extérieur du conducteur. La charge à l'intérieur de cette surface est donc nulle. Ceci étant valable quelque soit le choix de la surface (S) il n'y a donc aucune charge sur la paroi de la cavité.

II.7 Capacité d'un conducteur isolé

Soit un conducteur (C) isolé en équilibre électrostatique, portant une charge Q, répartie sur sa surface externe avec une densité surfacique σ telle que :

$$Q = \iint \sigma dS$$

Les charges se répartissent donc de façon à ce que $V_{int}(M) = V_{(S)} = V_0 = C^{ste}$ pour tout point $M \in C$. En effet, le potentiel en tout point M à l'intérieur du conducteur peut s'écrire:

$$V_{int}(M) = V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{r}$$

Définissons maintenant un potentiel $V'(M) = \lambda V(M)$ avec λ un nombre réel. Ce potentiel vérifie la condition aux limites $V'(M \in C) = \lambda V_0$. C'est donc le potentiel produit par le conducteur mis au potentiel $V'_0 = \lambda V_0$. Notons σ' la nouvelle distribution de charges, on

$$V'(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma' dS}{r} = \lambda V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{r}$$

ce qui implique que

$$\sigma' = \lambda \sigma \quad \text{soit} \quad Q' = \lambda Q$$

On en déduit que le rapport, entre la charge et le potentiel est une constante.

$$\frac{Q}{V} = \frac{Q'}{V'} = C > 0$$

C désigne la capacité propre du conducteur isolé, c'est à dire seul dans l'espace. Sa valeur dépend uniquement de la forme et de la grandeur de sa surface :

$$\boxed{Q = CV} \quad \text{(II. 5)}$$

C mesure la capacité d'un conducteur à stocker une quantité de charge sous un potentiel électrique donné.

Unité: La capacité se mesure en **farad** (F) en hommage à Faraday. $1F = 1C/V$. **Exemple :**

Capacité d'un conducteur sphérique de rayon R

Lorsque l'on porte un conducteur sphérique au potentiel V , du fait de la symétrie sphérique, les charges se répartissent de façon uniforme σ est constant. Son potentiel est donné par l'expression suivante :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma dS}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{dq}{R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

La capacité d'un conducteur sphérique s'écrit donc

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (\text{II.6})$$

La capacité d'une boule conductrice est proportionnelle à son rayon. Notons que si l'on prend un conducteur sphérique de rayon égal au rayon de la Terre, on trouve une capacité $C = 0,7\text{mF}$, ce qui montre que le farad n'est pas une unité très adaptée ; aussi utilise-t-on ses sous multiples:

pF (10^{-12}F), nF (10^{-9}F), μF (10^{-6}F) et mF (10^{-3}F) : Si $R = 1\text{m}$, $C = 0,11\text{ nF}$.

II.8 Phénomènes d'influence

II.8.1 Théorème des éléments correspondants

Soit deux conducteurs (A_1) et (A_2), placés l'un à côté de l'autre et portant des densités surfaciques σ_1 et σ_2 à l'équilibre. S'ils ne sont pas au même potentiel, des lignes de champ électrostatique relient (A_1) et (A_2). Soit un petit contour fermé C_1 situé sur la surface de (A_1) tel que l'ensemble des lignes de champ issues de (A_1) et s'appuyant sur C_1 rejoignent (A_2) (et y dessinent un contour fermé C_2).

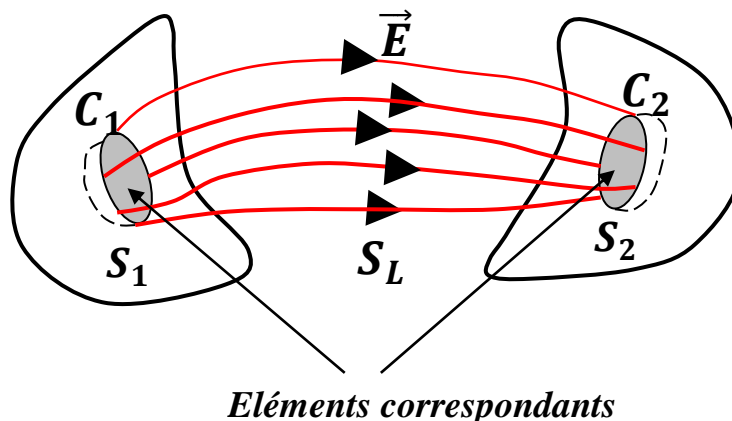


Figure II.8

L'ensemble de ces lignes de champ constitue ce qu'on appelle **un tube de flux** : le flux du champ électrostatique à travers la surface latérale S_L dessinée par ce tube est nul par construction ($\vec{E} \cdot \vec{dS} = 0$). Soit une surface fermée produite $S = S_L + S_1 + S_2$ où S_1 est une surface qui s'appuie sur C_1 et plonge à l'intérieur de (A_1) et S_2 une surface similaire pour (A_2) .

En vertu du théorème de Gauss, on a

$$\begin{aligned} \phi &= \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_L} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{dS} = 0 \\ &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} + \frac{Q_2}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

où Q_1 est la charge totale contenue sur la surface de (A_1) enlacé par C_1 tandis que Q_2 est la charge contenue sur la surface correspondante de (A_2) . Du coup $Q_1 = -Q_2$ nécessairement.

Théorème : les charges électriques portées par deux éléments correspondants sont opposées

II.8.2 Influence partielle

Considérons un conducteur (A) électriquement neutre (figure II.9). Approchons de ce dernier, un conducteur (B) chargé positivement, tel que représenté sur la figure II.9). Le conducteur (B) crée dans l'espace et en particulier dans le conducteur A un champ électrique \vec{E}_B .

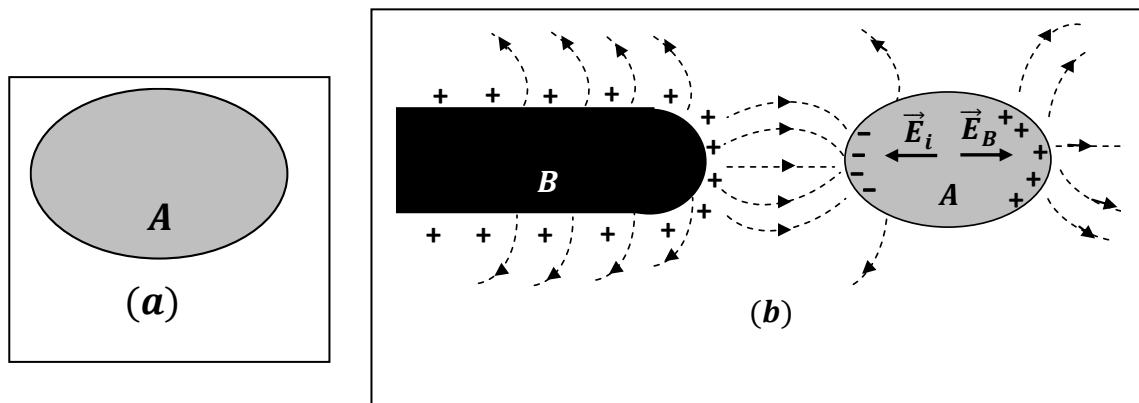


Figure II.9

Les électrons libres du conducteur (A) vont, sous l'action de ce champ, se déplacer dans le sens inverse de \vec{E}_B . Ces électrons s'accumulent progressivement sur la face en regard de (B) et forment à l'équilibre des charges négatives dont la résultante est $-Q$. A l'inverse, des charges positives, dont la résultante est $+Q$, vont apparaître sur l'autre face par défaut d'électrons comme le montre la figure II.9. Ces charges, qui résultent d'une électrisation par

influence, apportent leur contribution au champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur du conducteur.

Elles créent un champ *induit* \vec{E}_i qui vient s'opposer au champ *inducteur* \vec{E}_B et réduire ainsi le champ électrique total. A l'intérieur du conducteur (A) les électrons libres ne cessent leur mouvement que lorsque le champ électrique total s'annule. Le système formé par les deux conducteurs atteint alors un état d'équilibre.

Conséquences:

- Lors de l'évolution de ce phénomène, les charges $+Q$ et $-Q$, *induites* ou créées par influence, interviennent en ajoutant leur action à celle des charges inductrices. Il se produit une *influence retour* de (A) sur (B). On dit qu'il y'a *influence mutuelle*.
- Dans cette expérience, le conducteur (A) a été *électrisé par influence*. Le système étant isolé, le principe de la conservation de la charge implique que la somme des charges induites est nulle. Ainsi, lors d'une électrisation par influence, il n'y aucune création, mais simplement un déplacement de charges.

II.8.3 Influence totale

On peut créer des conditions *d'influence électrostatique totale* en plaçant un conducteur (A_1) de charge Q_1 à l'intérieur d'un conducteur neutre (A_2). Puisque l'ensemble des lignes de champ issues de (A_1) aboutit sur (A_2), on voit apparaître la charge $Q_2^{int} = -Q_1$ sur la face correspondante interne de (A_2), et ceci quelle que soit la position de (A_1). Cette propriété (démontrée à partir du théorème des éléments correspondants) est connue sous le nom de théorème de Faraday.

La charge électrique totale sur (A_2) est simplement.

$$Q_2 = Q_2^{int} + Q_2^{ext} = -Q_1 + Q_2^{ext}$$

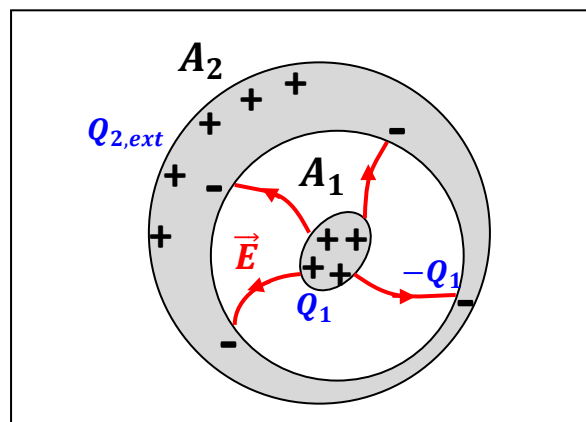


Figure II.10

II.9 Les condensateurs

II.9.1 Définition d'un condensateur

Un condensateur est un système constitué de deux conducteurs électriques en influence totale.

On réalise un tel système en utilisant deux conducteurs dont l'un est creux et entoure complètement l'autre. L'espace compris entre les deux conducteurs, appelées 'armatures', est vide ou rempli d'un milieu isolant (diélectrique).

Lorsqu'une différence de potentiel est appliquée entre les armatures d'un condensateur, en le reliant par exemple à une source d'électricité, il se charge. Les deux plaques acquièrent alors des charges égales et opposées.

Un condensateur est un appareil qui sert à emmagasiner de l'énergie électrique. Il est largement utilisé en électronique et en électrotechnique.

II.9.2 Capacité d'un condensateur

Le concept de capacité électrique, introduit dans le cas d'un seul conducteur, peut être étendu à un condensateur. On définit la capacité d'un condensateur par :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 - V_2} \quad (\text{II. 7})$$

où

Q : est la charge portée par chacune des armatures ($+Q$ pour l'une et $-Q$ pour l'autre)

$V = V_1 - V_2$: est la différence de potentiel entre ces armatures.

La capacité est une constante propre à chaque condensateur. Sa valeur dépend de la forme, des dimensions et de la position relative des deux conducteurs qui le constituent. Elle dépend également de la nature du milieu qui les sépare.

II.9.2.1 Capacité de quelques condensateurs simples

Dans ce qui suit, nous allons voir plusieurs exemples de calculs de capacités. Pour obtenir la capacité C d'un condensateur, il faut calculer la relation entre sa charge Q et sa tension U , c'est à dire :

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{C}$$

Autrement dit, il faut être capable de calculer la circulation du champ électrostatique entre les deux armatures ainsi que la charge Q .

a) Condensateur plan.

Les armatures sont constituées par deux plans parallèles de surface S , distants de e . Supposons que la première est chargée positivement d'une densité $+\sigma$ et la deuxième négativement d'une densité $-\sigma$. Entre les deux armatures, on a :

- $\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_{12}$ pour la 1^{ère} armature
- $\vec{E}_2 = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_{21} = -\frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_{12}$ pour la 2^{ème} armature

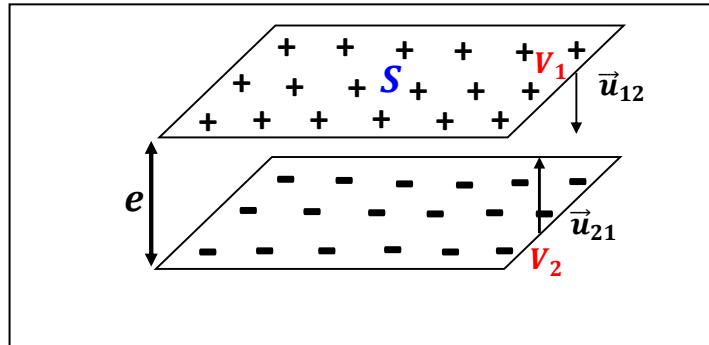


Figure II.11

Le champ total est donc :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_{12}$$

avec $\sigma = \frac{Q}{S}$

La capacité de ce conducteur s'obtient en calculant la circulation de \vec{E} entre les deux armatures :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{M_2}^{M_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E e = \frac{\sigma e}{\epsilon_0} = \frac{Qe}{S\epsilon_0}$$

d'où

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{S\epsilon_0}{e} \quad (\text{II. 8})$$

b) Condensateur sphérique

Soit un condensateur constitué de deux armatures sphériques de même centre O, de rayons respectifs R_1 et R_2 , séparées par un vide. ($R_2 > R_1$). D'après le théorème de Gauss, le champ électrostatique en un point M situé à un rayon r entre les deux armatures vaut :

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \vec{e}_r$$

en coordonnées sphériques, ce qui donne une tension

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

et fournit donc une capacité totale :

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (\text{II. 9})$$

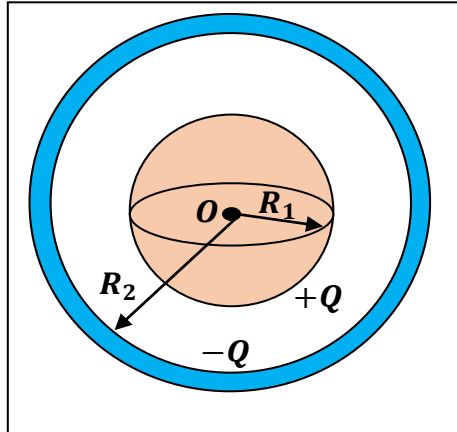


Figure II.12

c) Condensateur cylindrique

Soit un condensateur constitué de deux armatures cylindriques coaxiales (Figure II.13) . Entre ces deux armatures, le théorème de Gauss permet d'écrire :

$$E 2\pi r h = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h} \vec{e}_r$$

On en déduit

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

D'où la capacité

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (\text{II. 10})$$

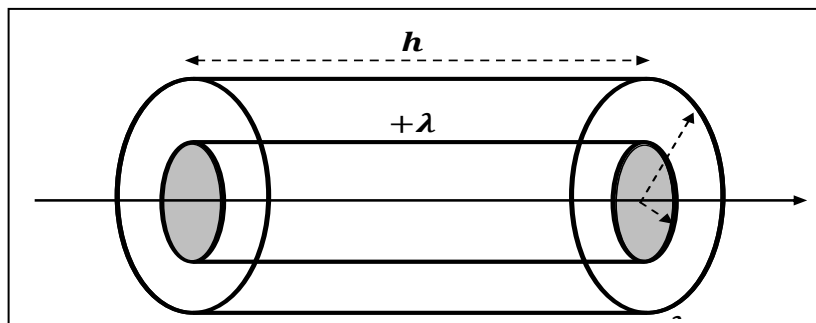


Figure II.13

II.9.3 Associations de condensateurs

Pour des raisons pratiques, on utilise des associations de plusieurs condensateurs afin d'emmagasiner le plus d'énergie possible. On distingue deux types de groupements de condensateurs : le groupement en série et le groupement en parallèle. La capacité équivalente des systèmes qui en résultent dépend du groupement choisi.

II.9.3.1 Condensateurs en série

Soit n condensateurs de capacité C_i associé en série

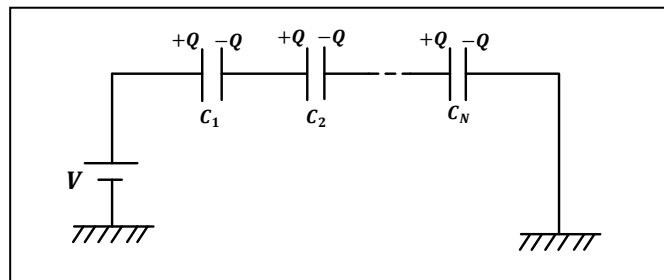


Figure II.14

On porte aux potentiels respectifs V_0 et V_n les deux extrémités de la chaîne de condensateurs.

La charge $+Q$ apparaît sur la première armature et par influence, il apparaît les charges $\pm Q$ sur les armatures de chaque condensateur.

La tension aux bornes du système peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 U &= V_0 - V_n = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \dots + V_{n-1} - V_n \\
 &= \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_1}{C_1} + \dots + \frac{Q_n}{C_n} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \right) Q
 \end{aligned}$$

La capacité équivalente à l'ensemble des n condensateurs en parallèle est donnée par la relation :

$$\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (\text{II. 11})$$

II.9.3.2 Condensateurs en parallèle

Soient N condensateurs, placés en parallèle, avec la même différence de potentiel V (Figure II.15). On désigne par Q_i et C_i la charge électrique et la capacité du $i^{\text{ème}}$ condensateur, on a

$$Q_i = C_i V$$

La charge électrique totale portée par l'ensemble des condensateurs est alors donnée par :

$$Q = \sum_{i=1}^N Q_i = \sum_{i=1}^N C_i V = V \sum_{i=1}^N C_i$$

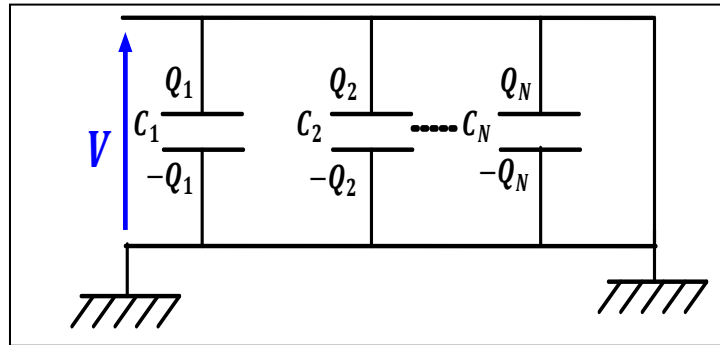


Figure II.15

La capacité équivalente est la somme des capacités individuelles.

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i \quad (\text{II. 12})$$

II.9.4 Énergie électrostatique emmagasinée dans un condensateur

Soit un condensateur constitué de deux armatures A et B. L'énergie électrostatique de ce système de 2 conducteurs est:

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} V_A Q_A + \frac{1}{2} V_B Q_B \\ &= \frac{1}{2} Q (V_A - V_B) = \frac{1}{2} Q U \end{aligned}$$

ou encore

$$W_e = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} Q U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (\text{II. 13})$$

Pour un condensateur plan constitué de 2 armatures de surface S chargées et séparées par l'épaisseur e :

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(\sigma S)^2}{\epsilon_0 S/e} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right)^2 S e \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} E^2 S e = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_V E^2 d\tau \end{aligned}$$

L'énergie du condensateur est stockée dans le champ régnant entre les armatures du condensateur.

Exercices d'application

Exercice 01:

I- Soit une sphère (S_1) pleine, conductrice, de centre O et de rayon R_1 , en équilibre électrostatique et portant une charge Q positive.

- 1) Que vaut le champ électrique en un point à l'intérieur de ce conducteur?
- 2) Que peut on dire du potentiel du conducteur à l'intérieur et en surface?
- 3) Où est située la charge Q ?

II- On met le conducteur (S_1) portant toujours la charge Q , à l'intérieur d'un conducteur (S_2) creux, de forme sphérique, de même centre O , de rayon intérieur R_2 et extérieur R_3 et initialement neutre et isolé. Les deux conducteurs (S_1) et (S_2) sont en équilibre électrostatique.

- 1) Les deux conducteurs (S_1) et (S_2) sont ils en influence partielle? justifiez votre réponse.
- 2) Illustrer sur un schéma la répartition de charge sur les conducteurs (S_1) et (S_2).
- 3) Que passe t'il lorsqu'on relie (S_1) et (S_2) par un fil conducteur? Donner la nouvelle répartition de charge et la capacité du système.

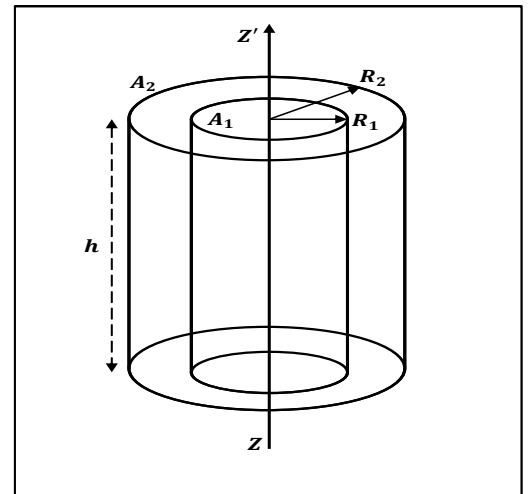
III- Les deux conducteurs (S_1) et (S_2) représentent respectivement les armatures interne et externe d'un condensateur. Le conducteur (S_1) porte la charge Q . $U = V_1 - V_2$ étant la différence de potentielle entre les armatures.

- 1) Déterminer le champ électrique \vec{E} entre les armatures et en deduire $U = V_1 - V_2$.
- 2) En déduire la capacité C du condensateur.
- 3) Quelle est l'énergie emmagasinée dans ce condensateur?

Exercice 02:

I- Soit un conducteur cylindrique A_1 d'axe zz' , de rayon R_1 et de hauteur h tres grande devant R_1 portant une charge sur sa surface latérale repartie avec une densité σ .

- 1) Calculer la charge Q_1 portée par ce conducteur.
- 2) Calculer en utilisant le théorème de Gauss, le champ électrostatiques $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution de charges en tout point M de l'espace. On notera r la distance de M à l'axe ZZ' .



II- On entoure le conducteur A_1 de charge Q_1 et de potentiel V_1 , par un autre conducteur cylindrique A_2 de meme hauteur h et de rayon R_2 ($R_2 > R_1$).

L'ensemble constitue un condensateur cylindrique. L'armature A_2 est mise au potentiel $V_2 = 0$.

1) En justifiant votre réponse ,donner la répartition des charges sur l'armature A_2 (Surface interne et externe).

2) Calculer et représenter graphiquement $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace.

3) Quelle est en fonction de Q_1 , la valeur maximum E_{max} du champ electrostatique entre les armatures A_1 et A_2 .

4) Déterminer la capacité C_0 de ce condensateur cylindrique.

5) A partir de l'expression de la densité d'énergie électrostatiques $dE_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV$ entre les armatures, calculer l'énergie électrostatique E_e emmagasinée par ce condensateur.

- Retrouver alors l'expression de sa capacité C_0 et le potentiel V_1 .

6)

a- Connaissant l'expression de E_{max} , montrer que le rapport V_1/E_{max} ne depend que de R_1 et R_2 .

b- On introduit entre les armatures un isolant de permittivité ϵ . Donner la nouvelle capacité C du condensateur.

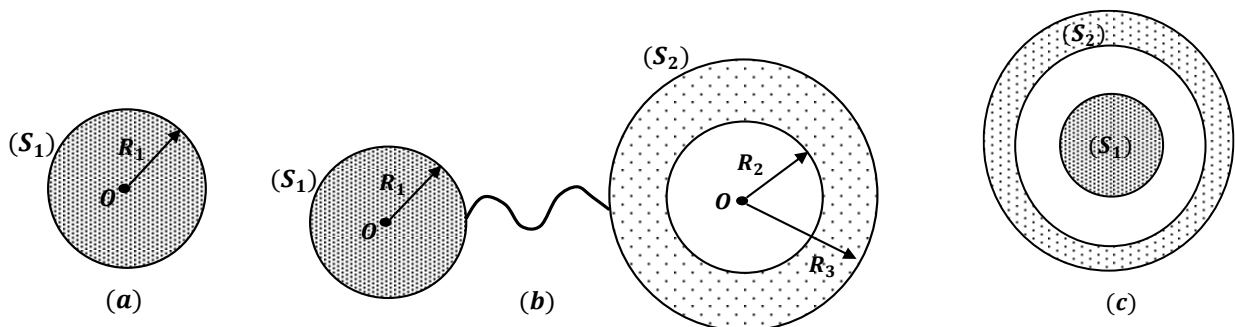
c- L'isolant supporte au max un champ électrostatiques de 70 KV/cm . On veut appliquer une dpp $V = 100 \text{ KV}$ entre les armatures du condensateur. Qu'en pensez vous?

A.N: $R_1 = 1 \text{ cm}$, $R_2 = 3 \text{ cm}$.

Exercice 03:

1) Rappeler les propriétés générales d'un conducteur en équilibre électrostatique.

2) Une sphère conductrice (S_1) isolée, de centre O_1 et de rayon R_1 porte une charge $Q_1 = Q$ (Voir figure)



a) Calculer la densité surfacique de charge σ_1 de (S_1) . Enoncer le theorme de Coulomb et exprimer le champ électrostatique \vec{E}_1 au voisinage de la surface (S_1) .

b) Calculer le potentiel V_1 de (S_1) et en déduire sa capacité C et son energie electrostatique w_e .

3) Une seconde sphère conductrice (S_2) creuse, de rayon intérieur $R_2 > R_1$ et de rayon extérieur $R_3 = 2R_1$ porte une charge $Q_2 = 2Q > 0$ est placée à une distance d de (S_1) , suffisamment éloignée pour que l'on puisse négliger les phénomènes d'influence. Les deux sphères sont reliées par un fil conducteur de capacité négligeable (figure b). On note Q'_1 et Q'_2 les charges portées respectivement par (S_1) et (S_2) à l'équilibre.

a) Comment se répartissent les charges sur les surfaces intérieure et extérieure de (S_2) ? justifier votre réponse.

b) Calculer en fonction de Q les charges Q'_1 et Q'_2 .

4) On coupe la liaison entre (S_1) et (S_2) qui portent respectivement les charges Q'_1 et Q'_2 , et on place la sphère (S_1) à l'intérieur de (S_2) (figure c). On note Q''_1 et Q''_2 et Q''_3 les charges respectives de S_1, S_{2int} et S_{2ext} . Donner en justifiant la nouvelle répartition des charges sur les surfaces de S_1 et S_2 et calculer les potentiels V'_1 de S_1 et V'_2 de S_2 .

Exercice 04:

Un condensateur plan est constitué de deux armatures conductrices identiques de surface S placées à distance e l'une de l'autre. On applique une ddp V_0 entre les armatures.

1) Exprimer, pour ce condensateur, la capacité C_0 , la charge Q_0 et le module E_0 du champ entre les armatures en fonction de e, S et V_0 .

2) On isole le cde la source de tension. Un opérateur fait varier la distance entre les armatures d'une quantité d .

a) Exprimer la nouvelle capacité C_1 du condensateur ainsi que la ddp V_1 entre les armatures.

b) Quelle est le travail fourni par l'opérateur dans ce déplacement ?

3) On maintient la ddp V_0 constante pendant le déplacement d . Quelle est dans ce cas, le travail fourni par l'opérateur?

Solution des exercices

Exercice 01:

I.

1) Le champ électrique en un point à l'intérieur de ce conducteur

Le champ est nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre car les charges immobiles à l'intérieur du conducteur ce qui implique que la vitesse moyenne est nulle ($m\gamma = \sum F$)

$$\Rightarrow \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = q\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$$

2) Le potentiel du conducteur à l'intérieur et en surface

Le potentiel est constant à l'intérieur et en surface du conducteur car:

- Le conducteur en équilibre électrostatique $\vec{E} = 0$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V \Rightarrow V = cste$$

3) la charge Q?

La charge Q répartie en surface car: d'après la relation e la forme local du théorème de Gauss

$div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, et puisque $\vec{E} = 0$ à l'intérieur du conducteur $\Rightarrow \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \rho = 0$, alors Q répartie en surface.

II-

1) Type d' influence partielle

Non, les deux conducteurs sont en influence totale car toutes les lignes de champ portant du conducteurs (S_1) arrivent totalement au conducteur (S_2).

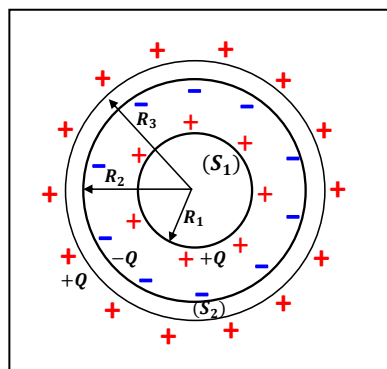
2) La répartition de charge sur les conducteurs (S_1) et (S_2).

La répartition de charge sur les deux conducteurs en influence totale est Q

$$\Rightarrow Q_{2int} = -Q$$

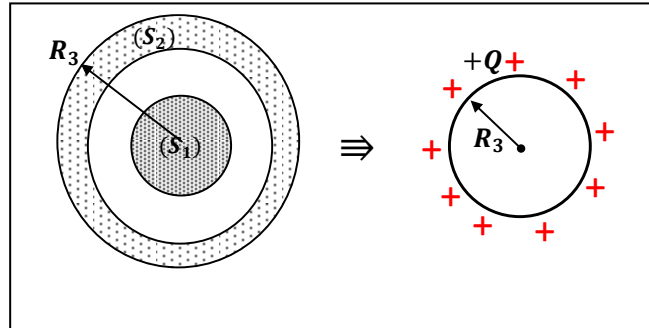
et puisque S_2 est neutre $\Rightarrow Q_2 = Q_{2int} + Q_{2ext} = 0$

$$\Rightarrow Q_{2ext} = -Q_{2int} = Q$$



3) lorsqu'on relie (S_1) et (S_2) par un fil conducteur, on a qu'un seul conducteur en équilibre.

- **Nouvelle répartition:**



Toute la charge Q se met en surface de rayon R_3

- **La capacité du système:**

Au point P, on a :

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(OP)}$$

Sur la surface de rayon R_3

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}, \quad OP = R_3$$

On déduit,

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R_3$$

III-

1) Le champ électrique \vec{E} entre les armatures

- **La direction et le sens:**

Le système possède la symétrie sphérique donc \vec{E} est porté par \vec{u}_r et ne dépend que de r

$$\Rightarrow \vec{E} = E(r)\vec{u}_r$$

- **Surface de Gauss:**

Le champ \vec{E} est radial et constant sur une sphère de rayon r . La surface de Gauss convenable sera une sphère de rayon r .

- **Théorème de Gauss:**

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

- **Pour $R_2 < r < R_3$ (entre les armatures)**

$$\Phi = E(r) \oint_{S_G} dS = E(r)S = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \text{ (les charges sont au surface de la sphère de rayon } R_1 \text{ donc } (+Q))$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

• **Le potentiel (entre R_1 et R_2)**

$$\text{On a } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E(r)\vec{u}_r = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow dV = -E(r)dr$$

$$\Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{R_1}^{R_2} E(r)dr$$

$$\Rightarrow V_2 - V_1 = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2}$$

$$\Rightarrow U = V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

2) La capacité C du condensateur

On a

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

$$\Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]^{-1}$$

$$\Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

3) L'énergie emmagasinée dans ce condensateur

$$\text{On a } w = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \text{ donc } w = \frac{1}{2} Q^2 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

$$\Rightarrow w = \frac{Q^2 (R_2 - R_1)}{8\pi\epsilon_0 R_1 R_2}$$

Exercice 02:

I-

1) La charge Q_1 portée par ce conducteur

La charge est située sur la surface latérale du cylindre :

$$Q = \sigma S = \sigma 2\pi R_1 h$$

2) Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution de charges

- **Symétrie:**

Symétrie cylindrique ($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k}$), $\vec{E}(M)$ radial et ne dépend que de r :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$$

- **Surface de Gauss:**

Cylindre d'axe ZZ' et de rayon r

- **Théorème de Gauss:**

$$\oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

deux cas :

- **1^{er} cas : $r < R_1$**

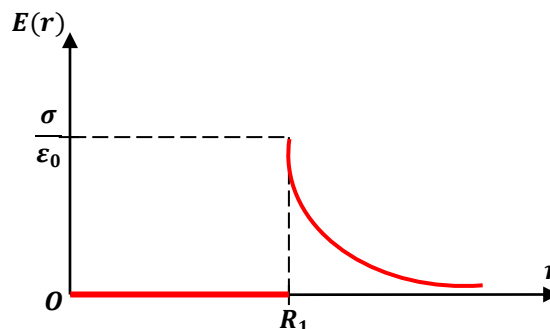
$$Q_{int} = 0 \Rightarrow \vec{E}(M) = 0$$

- **2^{ème} cas : $r \geq R_1$**

$$Q_{int} = Q_1 \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h r} \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

- **Représentation graphique:**



II-

1) La répartition des charges sur l'armature A_2 (Surface interne et externe).

L'armature A_2 en influence totale avec A_1

$$\Rightarrow Q_{2int} = -Q_1 \text{ (influence totale)}$$

et $Q_{2ext} = 0$ car l'armature A_2 est relié à la terre ($V_2 = 0$)

2) Calcul de $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace.

- **Symétrie:**

Symétrie cylindrique ($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k}$), $\vec{E}(M)$ radial et ne dépend que de r :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$$

- **Surface de Gauss:**

Cylindre d'axe ZZ' et de rayon r

- **Théorème de Gauss:**

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Trois cas :

➤ **1^{er} cas : $r < R_1$**

$$Q_{int} = 0 \Rightarrow \vec{E}(M) = 0$$

➤ **2^{ème} cas : $R_1 \leq r < R_2$**

$$Q_{int} = Q_1 \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h r} \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

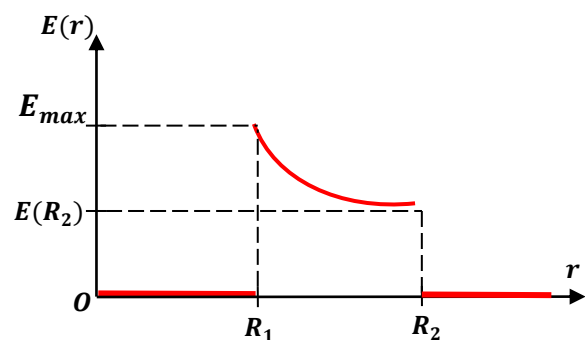
➤ **3^{ème} cas : $r > R_2$**

$$Q_{int} = Q_1 + (-Q_1) = 0 \Rightarrow \vec{E}(M) = 0$$

- **Représentation graphique:**

✓ Pour $r = R_2 \Rightarrow E(R_2) = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0 R_2}$

✓ Pour $r = R_1 \Rightarrow E(R_1) = E_{max} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$



3) La valeur maximum E_{max} du champ électrostatique entre les armatures A_1 et A_2 .

$$E_{max} = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 hr} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

4) La capacité C_0 de ce condensateur cylindrique.

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E(r) \cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h} \cdot \frac{dr}{r} = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h} \cdot \log \frac{R_2}{R_1}$$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\log \frac{R_2}{R_1}}$$

5) L'expression de sa capacité C_0 et le potentiel V_1

$$dE_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV \Rightarrow E_e = \iiint \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 hr} \right)^2 r dr d\theta dz$$

$$E_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 hr} \right)^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{Q_1^2}{4\pi\epsilon_0 h} \log \frac{R_2}{R_1}$$

$$E_e = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_0} \Rightarrow C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\log \frac{R_2}{R_1}}$$

Le potentiel V_1 :

$$E_e = \frac{1}{2} Q_1 V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h} \log \frac{R_2}{R_1}$$

6)

a) Montrer que le rapport V_1/E_{max} ne dépend que de R_1 et R_2 .

$$\frac{V_1}{E_{max}} = R_1 \log \frac{R_2}{R_1}$$

b) La nouvelle capacité C du condensateur.

$$C = \epsilon_r C_0$$

c) $E_{max} = \frac{V_1}{R_1 \log \frac{R_2}{R_1}} = \frac{10^5}{10^{-2} \log 3} = 9,1 \cdot 10^6 V \cdot m^{-1}$ or le diélectrique ne peut supporter qu'un champ de $70 KV/Cm = 7 \cdot 10^6 V \cdot m^{-1}$. $E_{max} \gg 7 \cdot 10^6 V \cdot m^{-1}$ donc le condensateur va claquer.

Exercice 03:

1) Les propriétés générales d'un conducteur en équilibre électrostatique

- $\vec{F} = \vec{0}$
- $\vec{E}_{int} = \vec{0}$
- $V = cste$

2)

a) La densité surfacique de charge σ_1 de (S_1)

On a $Q_1 = Q = \sigma S = \sigma 4\pi R_1^2$

Donc

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

- Théorème de Coulomb

$$\vec{E}(R_1^+) - \vec{E}(R_1^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_r$$

- Le champ électrostatique \vec{E}_1 au voisinage de la surface (S_1)

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_r$$

b) Calculer le potentiel V_1 de (S_1)

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

- La capacité C

$$C = \frac{Q_1}{V_1} = 4\pi\epsilon_0 R_1$$

- Energie électrostatique w_e .

$$w_e = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1}$$

3)

a) Répartition de charges sur les surfaces intérieure et extérieure de (S_2)

puisque la sphère conductrice lié à un autre conducteur par un fil conducteur, alors la surface interne de S_2 contient $Q_{int} = 0$

b) Calcule des charges Q'_1 et Q'_2

On a

$$Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2 = 3Q$$

De plus (S_1) et (S_2) ont le même potentiel

donc

$$\frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \Leftrightarrow \frac{Q'_1}{R_1} = \frac{Q'_2}{R_2}$$

d'où

$$Q'_1 + \frac{R_2}{R_1} Q'_1 = 3Q$$

Donc

$$Q'_1 = \frac{3QR_1}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad Q'_2 = \frac{3QR_2}{R_1 + R_2}$$

4) La nouvelle répartition des charges sur les surfaces de S_1 et S_2

- On a S_1 et S_2 sont en influence totale donc

$$Q''_2 = - Q'_1 = -\frac{3QR_1}{R_1 + R_2} \quad (Q''_1 = Q'_1 \text{ car } S_1 \text{ est isolé})$$

- De plus S_2 est isolé donc sa charge totale se conserve et par suite :

$$Q''_3 = Q'_2 + Q'_1 = 3Q$$

- Calcule des potentiels V'_1 de S_1 et V'_2 de S_2

On a

$$V'_1 = \frac{Q''_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q''_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q''_3}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)} - \frac{3QR_1}{4\pi\epsilon_0 R_2 (R_1 + R_2)} + \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$\Rightarrow V'_1 = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2(R_1 + R_2)} + \frac{1}{R_3} \right)$$

On a

$$V'_2 = \frac{Q''_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q''_3}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$\Rightarrow V'_2 = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{R_1}{R_2(R_1 + R_2)} \right)$$

Exercice 04:

1) La capacité C_0 , la charge Q_0 et le module E_0

On a
$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e} \quad , \quad Q_0 = C_0 V_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e} V_0$$

et
$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q_0}{S\epsilon_0} = \frac{V_0}{e}$$

2)

a) La nouvelle capacité C_1

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e + d}$$

- La ddp V_1 entre les armatures

Système isolé \Rightarrow la charge est constante $Q_0 = Q_1$

Donc

$$Q_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e + d} V_1$$

d'où

$$V_1 = V_0 \left(1 + \frac{d}{e} \right)$$

b) Le travail fourni par l'opérateur

Le travail fourni par l'opérateur dans ce déplacement est égal à la variation d'énergie du condensateur à charge constantes

$$\Delta W = \Delta E_e = E_{e_1} - E_{e_0} = \frac{1}{2} Q_0^2 \left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_0} \right)$$

$$= \frac{1}{2} Q_0^2 \left(\frac{e+d}{\varepsilon_0 S} - \frac{e}{\varepsilon_0 S} \right) = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{\varepsilon_0 S} d$$

Soit

$$\Delta W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 S V_0^2 \frac{d^2}{e^2}$$

3)

Variation d'énergie dans ce déplacement (à potentiel constant)

$$\Delta E_e = E_{e_1} - E_{e_0} = \frac{1}{2} (C_1 - C_0) V_0^2 = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 S V_0^2 \frac{d}{e(e+d)}$$

$\Delta W > 0$ donc

$$\Delta W = -\Delta E_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 S V_0^2 \frac{d}{e(e+d)}$$

Chapitre III

COURANT ELECTRIQUE

Nous avons traité, au premier chapitre, les phénomènes électriques dans des conditions où aucune grandeur physique n'évolue au cours du temps : c'est le cas de l'électrostatique où toutes les charges électriques sont supposées immobiles dans l'espace. Nous allons dans ce chapitre, nous intéresser au cas où ces charges se déplacent en donnant naissance à un courant électrique continu.

III.1 Courants électriques

III.1.1 Origine du courant électrique

Soient deux conducteurs chargés A et B aux potentiels V_A et V_B tels que $V_A > V_B$. On les relie par un fil conducteur pour obtenir un conducteur unique (Figure III.1) qui n'a pas le même potentiel en tout point : il existe une différence de potentiel dV entre 2 points quelconques 1 et 2 du fil. Il en résulte un champ électrique $E = -dV/dr$ qui agit sur les charges pour les déplacer. En se déplaçant ces charges forment un courant électrique qui circule de A vers B. Donc un **courant électrique** est un écoulement de particules chargées. Il est caractérisé par une intensité et un sens.

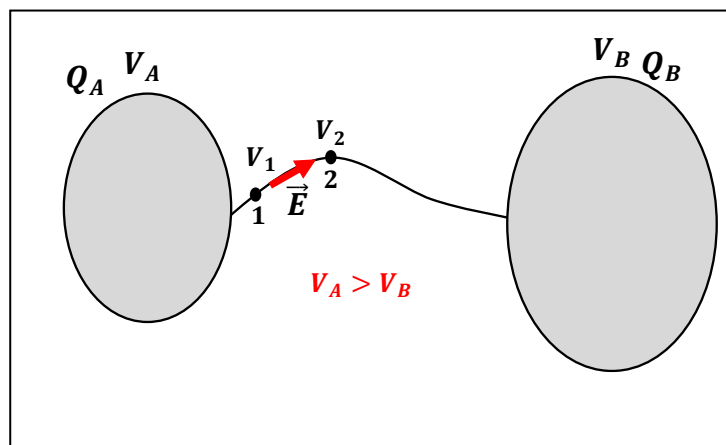


Figure III.1

III.1.2 Sens conventionnel du courant

Dans les métaux, le courant résulte d'un déplacement d'électrons, c'est à dire de charges négatives. Le sens conventionnel du courant, choisi par Ampère au début du dix-neuvième

siècle, est opposé à celui des électrons. Cette convention est toujours en vigueur. Par conséquent, le courant électrique circule du pôle positif au pôle négatif à l'extérieur du générateur et du pôle négatif au pôle positif à l'intérieur du générateur (figure III.2).

Dans les autres matériaux, le courant électrique est dû aux mouvements de différents porteurs de charges : électrons, ions positifs, ions négatifs...

Nous ne considérerons, dans ce qui suit, que la conduction électrique dans les métaux.

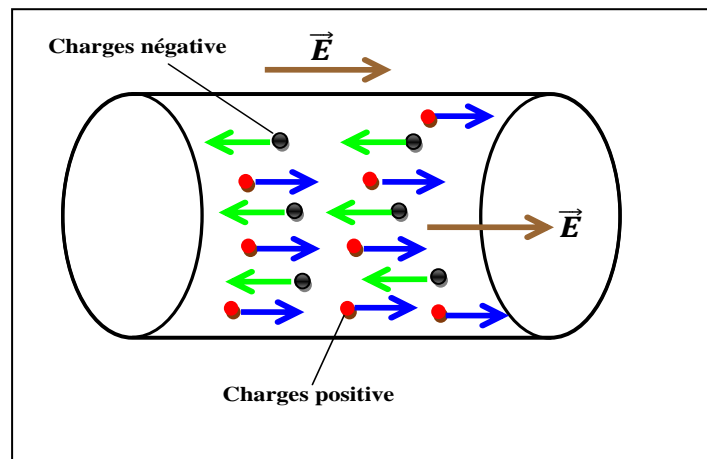


Figure III.2

III.1.3. Intensité du courant

Soit un conducteur métallique de section S . L'intensité I du courant électrique est, par définition, la quantité d'électricité dQ qui traverse la section S pendant un intervalle de temps dt .

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{III. 1})$$

L'intensité I est exprimée en ampères (A): $1A = 1 C/s$

Un courant électrique est *continu* si son intensité I reste constante au cours du temps.

III.1.4 Vecteur densité de courant

➤ On fait les hypothèses suivantes :

- Soit un matériau conducteur dans lequel tous les porteurs de charge sont de même type : tous les porteurs portent la même charge q (supposée positive sur le schéma).
- chaque porteur a une vitesse assimilée à la vitesse de groupe \vec{v} .
- la densité volumique des porteurs (n , en m^{-3}) est uniforme.

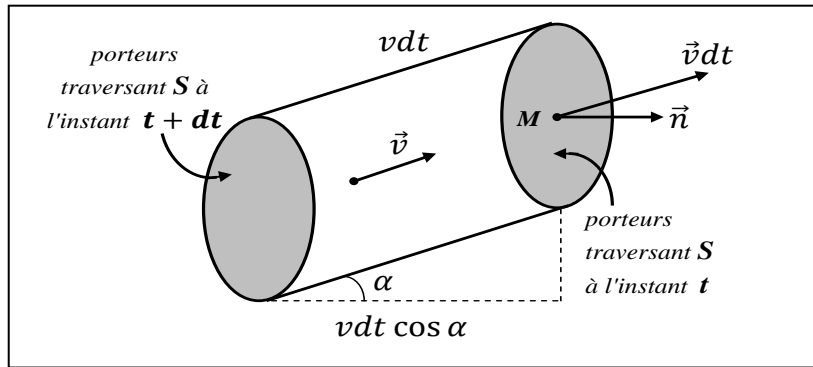


Figure III.3

➤ Pendant la durée élémentaire dt les porteurs qui traversent la surface S (plane et orientée) sont contenus :

- dans le cylindre de base S ,
- de génératrice dt
- et de hauteur $v dt \cos \alpha$.

• Le volume de ce cylindre est :

$$V = v dt \cos \alpha \cdot S$$

Il contient le nombre dN de porteurs de charge qui traversent S entre t et $t + dt$:

$$dN = n \cdot dV$$

La charge qui traverse S pendant la durée dt est donc :

$$dQ = q \cdot dN = q \cdot n \cdot v dt \cos \alpha \cdot S$$

L'intensité du courant qui traverse S est donc :

$$i = \frac{dQ}{dt} = nqv \cos \alpha S$$

➤ A la surface S orientée par le vecteur unitaire \vec{n} , on associe le vecteur surface : $\vec{S} = S \vec{n}$

Or, $\vec{v} \cdot \vec{n} = v \cos \alpha$, d'où :

$$i = nq \vec{v} \cdot \vec{S} \equiv \vec{j} \cdot \vec{S}$$

❖ **Définition :**

On appelle **vecteur densité volumique de courant** et on note \vec{j} le vecteur (exprimé en $A \cdot m^{-2}$) :

$$\vec{j} = nq \vec{v} \tag{III.2}$$

où :

- n : est la densité volumique de porteurs (en m^{-3})
- q : est la charge d'un porteur (en C)
- v : est la vitesse d'ensemble des porteurs (en $m \cdot s^{-1}$)

Ou encore :

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (\text{III.3})$$

où: ρ est la densité volumique de charges mobiles (en $C.m^{-3}$).

❖ **Définition : (Généralisation)**

L'intensité qui traverse une surface S quelconque et orientée par un contour C est égale au *flux de la densité de courant* à travers S :

$$i = \iint_S \vec{j}(M) \cdot \vec{dS}$$

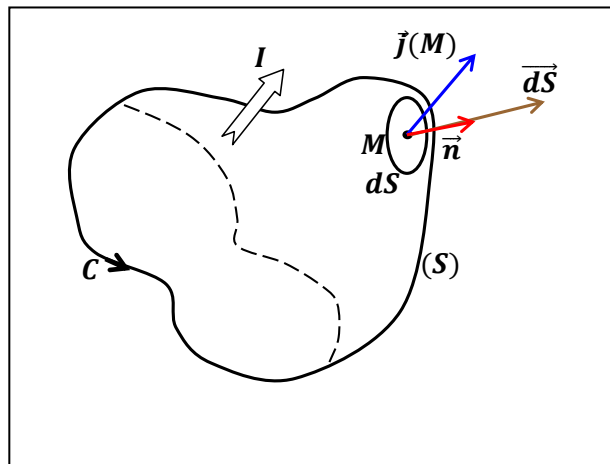


Figure III.4

III.2 Loi d'Ohm

III.2.1 Loi d'Ohm à l'échelle macroscopique.

L'expérience montre que le rapport, entre la différence de potentiel V entre deux points d'un conducteur métallique et le courant qui le traverse, est constant, la température étant maintenue constante.

$$V = R I \quad (\text{III.4})$$

C'est la loi d'Ohm. La constante R est, par définition, la résistance électrique du conducteur, elle est exprimée en ohms (Ω).

III.2.2 Forme locale de la loi d'Ohm.

III.2.2.1 Conductivité électrique

Un conducteur cylindrique, de longueur l et de section S , est soumis à une différence de potentiel V : il en résulte, en tout point du conducteur, un champ électrique \vec{E} tel que :

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$$

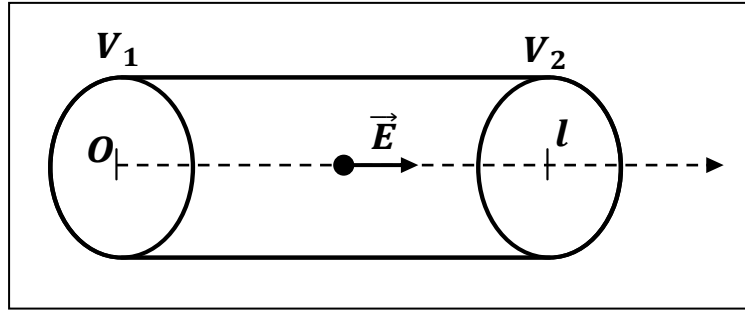


Figure III.5

\vec{E} et $d\vec{l}$ étant parallèles, on a :

$$\iint_{V_1}^{V_2} dV = -E \iint_0^l dl \Rightarrow V = V_1 - V_2 = El \quad (\text{III. 5})$$

La différence de potentiel V donne naissance à un courant électrique I dont la valeur est donnée par la loi d'Ohm(III. 4):

$$V = RI \quad \text{Avec (III. 5)), on a : } El = RJS$$

soit :

$$J = \frac{l}{RS}E = \sigma E \quad (\text{III. 6}) \quad \text{ou} \quad \sigma = \frac{l}{RS} \quad (\text{III. 7})$$

σ : est la **conductivité électrique** du conducteur ; elle est exprimée en $(\Omega^{-1}\text{m}^{-1})$ ou en **siemens** par mètre $(\text{S} \cdot \text{m}^{-1})$. A partir de (III. 7) on a l'expression de la résistance électrique :

$$R = \frac{l}{\sigma S} \quad (\text{III. 8})$$

A l'échelle microscopique, on peut écrire :

$$J = -nev = \frac{ne^2}{k} E$$

Avec (III.6) il vient :

$$\sigma = \frac{ne^2}{k}$$

En fonction du temps de relaxation $(\tau = \frac{m}{k})$, la conductivité s'écrit :

$$\sigma = \frac{ne^2}{m} \tau \quad (\text{III. 9})$$

L'expression (III.6) s'écrit, sous forme vectorielle

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{III. 10})$$

Cette expression est générale, elle constitue la "*forme locale*" de la loi d'Ohm. En tout point M d'un conducteur de conductivité, l'existence d'un champ \vec{E} entraîne l'apparition d'une densité de courant \vec{J} dont l'expression est donnée par $\vec{J} = \sigma \vec{E}$.

III.2.2.2 Résistivité électrique

La résistivité est l'inverse de la conductivité :

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (\text{III. 11})$$

Elle s'exprime en $\Omega \cdot m$

III.3 Association de résistances

III.3.1 Résistances en série

Soient n résistances R_i mises bout à bout dans un circuit et parcourues par un courant I . La tension aux bornes de la chaîne est la somme des tensions aux bornes de chaque élément telle que :

$$U = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \dots + (V_{n-1} - V_n) = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I = R_{eq} I$$

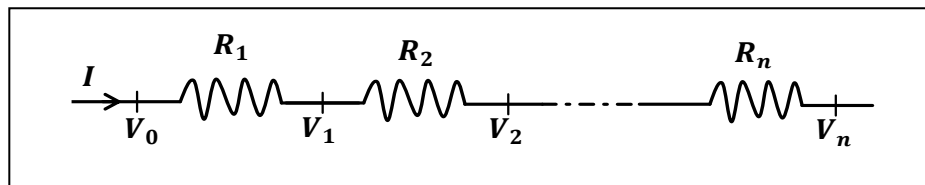


Figure III.6

La résistance équivalente est égale à la somme des résistances:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i \quad (\text{III. 12})$$

III.3.2 Résistances en parallèle

Soient n résistances R_i mises en parallèle sous une tension $U = V_1 - V_2$ et parcourues par un courant I . A présent la même différence de potentiel est appliquée aux bornes des résistances, par conséquent :

$$U = V_1 - V_2 = R_1 I_1 = R_2 I_2 = \dots = R_n I_n$$

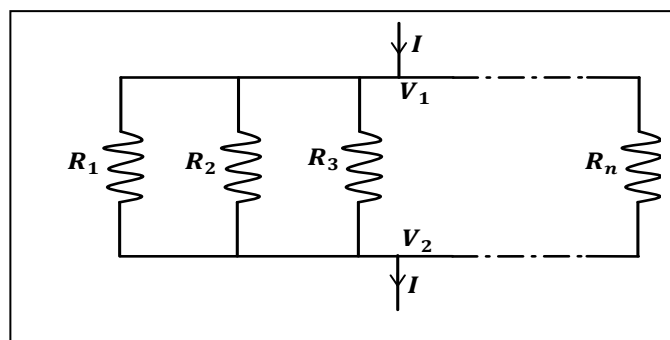


Figure III.7

avec

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

donc

$$\frac{V_1 - V_2}{R_{eq}} = \frac{V_1 - V_2}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_2} + \dots + \frac{V_1 - V_2}{R_n}$$

d'où la résistance équivalente

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (\text{III. 13})$$

III.4 L'effet Joule

La circulation d'un courant I à travers un conducteur électrique, entraîne une perte d'énergie qui se traduit par un échauffement. On peut déterminer l'énergie dissipée pendant le passage du courant.

Si dq est la quantité de charge qui passe d'un point A à un point B du conducteur, le travail des forces électriques est :

$$dW = (V_A - V_B)dq$$

Cette quantité de charge est reliée au courant par : $dq = I dt$

D'où :

$$dW = (V_A - V_B) I dt$$

Si R est la résistance de ce conducteur, on a d'après la loi d'Ohm:

$$V = V_A - V_B = RI$$

Le travail s'écrit alors :

$$dW = V I dt = RI^2 dt \quad (\text{III. 14})$$

Cette énergie est dissipée sous forme de chaleur : c'est *l'effet Joule*

Elle correspond à une puissance :

$$P = \frac{dW}{dt} = RI^2 \quad (\text{III. 15})$$

soit

$$P = \frac{V^2}{R} \quad \text{ou} \quad P = VI \quad (\text{III. 16})$$

Comme V et I sont constants, la puissance P reste constante au cours du temps.

III.5 Rôle du générateur : force électromotrice

Soit un générateur (G), appliquant une d.d.p. $V_A - V_B > 0$ aux bornes d'un conducteur AB .

En régime stationnaire ou quasi stationnaire, en tous les points du circuit, y compris dans le générateur, et les lignes de champ sont des courbes fermées.

Si le conducteur était fermé sur lui-même, on aurait :

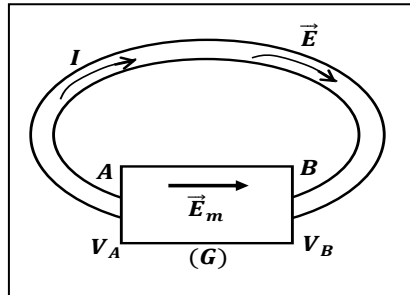


Figure III.8

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{puisque} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

soit

$$\oint \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{ce qui entraînerait} \quad \vec{j} = 0$$

Par conséquent, si le générateur établit un champ \vec{E} entre A et B dans le conducteur, c'est qu'il est lui-même le siège d'un champ \vec{E}_m dit champ électromoteur (non électrostatique), qui transporte les charges (supposées positives pour simplifier) de V_B à $V_A > V_B$, leur faisant ainsi remonter le potentiel, alors que le champ électrostatique \vec{E} les transporte de V_A à V_B dans le conducteur. C'est la circulation de ce champ \vec{E}_m dans le générateur qui assure la d.d.p. $V_A - V_B$.

Cette circulation est appelée *force électromotrice e* du générateur (f.é.m.), bien qu'elle ait les dimensions d'un potentiel. On a :

$$e = \int_{AB} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = V_A - V_B \quad \text{(III. 17)}$$

Le champ \vec{E}_m peut avoir des origines chimiques (piles et accumulateurs) ou magnétiques (f.é.m. induite).

III.5.1 Générateur en circuit ouvert :

La borne au potentiel le plus élevé constitue la borne positive, et l'autre borne, la borne négative.

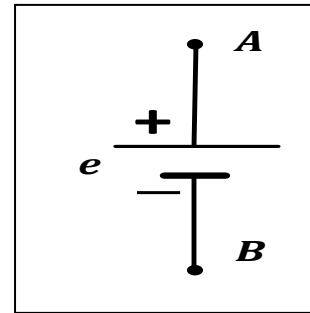


Figure III.9

On a simplement : $e = V_A - V_B > 0$ (III. 18)

III.5.2 Générateur en circuit fermé :

En se référant à la loi d'Ohm, on a :

$$e = V_A - V_B = (R + r)I \quad (\text{III. 19})$$

Si le générateur a une résistance r non négligeable, celle-ci prélève sur e la chute de tension (ou chute ohmique) $r I$ avant de délivrer $V_A - V_B$ aux bornes A et B . On a donc :

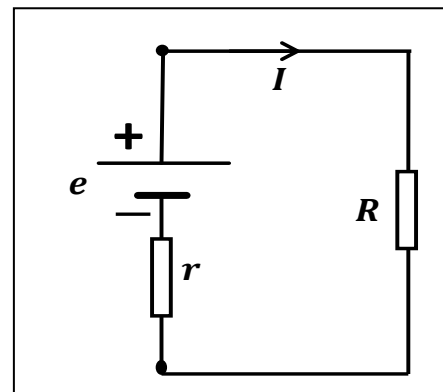


Figure III.10

$$\begin{aligned} e - rI &= V_A - V_B = RI \\ I &= \frac{e}{R + r} \end{aligned} \quad (\text{III. 20})$$

III.5.3 Tronçon de circuit comportant un générateur

$$V_A - V_B = rI - e \quad (\text{III. 21})$$

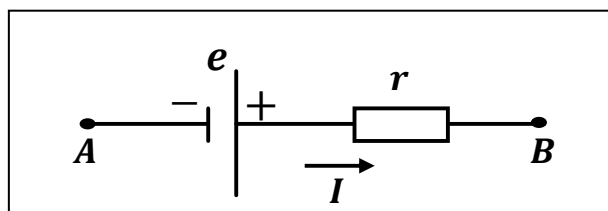


Figure III.12

III.5.4 Cas d'un récepteur

Alors que pour un générateur, le courant sort du pôle positif et rentre par le pôle négatif, pour un récepteur, le courant suit le chemin inverse : il sort par le pôle négatif. Dans ce cas, la f.é.m. qui est toujours positive, est appelée force contre-électromotrice.

Dans un circuit complexe, comprenant des générateurs et des récepteurs, il peut arriver que le courant d'un générateur sorte par le pôle négatif. Dans ce cas, ce générateur se comporte comme un récepteur : il se charge.

➤ Tronçon de circuit comportant un récepteur

$$V_A - V_B = rI + e' \quad (\text{III. 22})$$

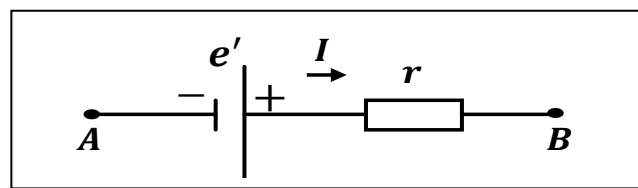


Figure III.11

Dans un récepteur, le courant entre par la borne positive de ce dernier et sort par sa borne négative.

- e' représente la f.c.é.m du récepteur.

- r est sa résistance interne.

III.6 Les lois de Kirchhoff

Etablies en 1845 par le physicien allemand Gustav Kirchhoff, ces lois, au nombre de deux, expriment la conservation de l'énergie et de la charge dans un circuit électrique.

a) Première loi de Kirchhoff

On l'appelle aussi *loi des nœuds*. Aux nœuds A, B, C, de la figure III.13, on applique le principe de la conservation de la charge électrique.

En effet, les charges ne peuvent pas s'accumuler en un point quelconque du circuit, donc :

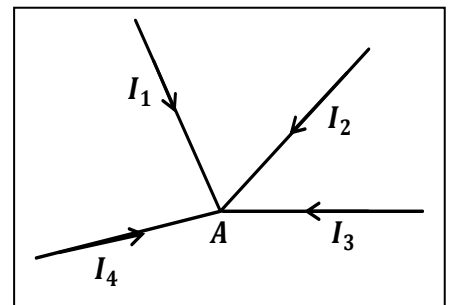


Figure III.13

La somme des intensités des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme des intensités des courants qui en ressortent.

C'est la première loi de Kirchhoff :

Dans le cas de la figure III.13, on a :

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4$$

Cette loi peut être traduite mathématiquement par l'expression :

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

où

$$\sum I_{entrant} = \sum I_{sortant} \quad (\text{III. 23})$$

a) Deuxième loi de Kirchhoff

On l'appelle aussi *loi des mailles*. Soit une charge q se déplaçant le long d'une maille ; chaque nœud de la maille se trouve à un potentiel bien défini par rapport à un nœud d'origine ou de référence commune M dont le potentiel est appelée masse.

q se déplace le long de la maille ABEFA et subit des variations d'énergie potentielle le long du parcours. On a :

$$q(V_A - V_B + V_B - V_E + V_E - V_F + V_F - V_A) = q(0) = 0$$

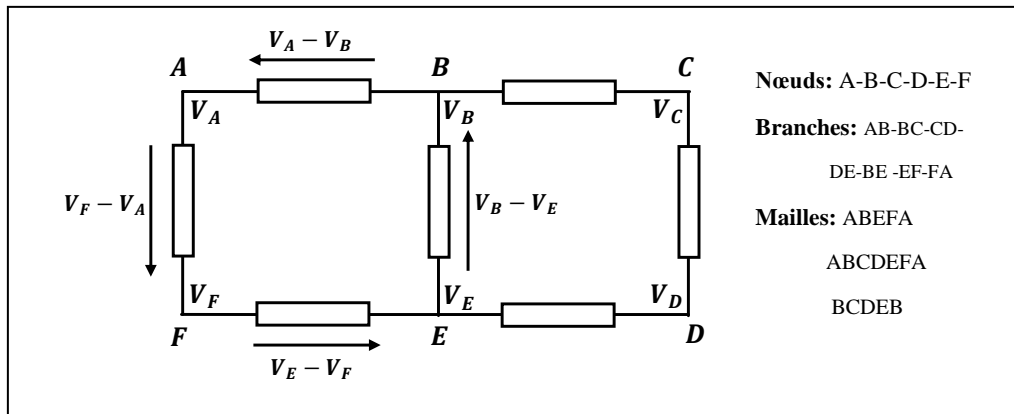


Figure III.14

On choisit un sens arbitraire de parcours sur la maille : par exemple le sens des aiguilles d'une montre. Les différences de potentiel sont des grandeurs algébriques et ont des orientations arbitraires.

Par convention, les différences de potentiel V_i des flèches parcourues dans le même sens que le parcours seront comptées positivement. $V_1 = V_A - V_B$

La somme des différences de potentiel le long d'une maille est nulle. Cette loi est baptisée loi des mailles ou deuxième loi de Kirschhoff.

$$\sum_i V_i = 0 \quad (\text{III. 24})$$

Exercices d'application

Exercice 01:

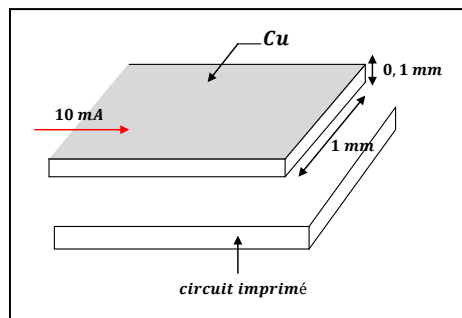
- 1) Calculer le temps de relaxation et la mobilité des charges libres dans le cuivre.
- 2) Calculer la vitesse des charges libres dans un fil de cuivre cylindrique et homogène de section $S = 2,5 \text{ mm}^2$. le fil étant parcouru par un courant $I = 10 \text{ A}$.
On donne la masse volumique du cuivre : $\rho_M = 8,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, sa masse atomique $M_A = 63,6 \text{ g}$, sa conductivité électrique $\sigma = 5,88 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ et le nombre d'Avogadro $N = 6,02 \cdot 10^{23}$. On suppose qu'il y a un électron libre par atome de cuivre. ($e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$)

Exercice 02:

Les liaisons électriques sur les cartes des circuits imprimés se font grâce à de fines couches de cuivre d'épaisseur $0,1 \text{ mm}$ et de largeur 1 mm .

Le composant électrique placé sur le circuit débite dans la fine couche un courant de 10 mA .

- 1) Quelle est la densité de courant j ?



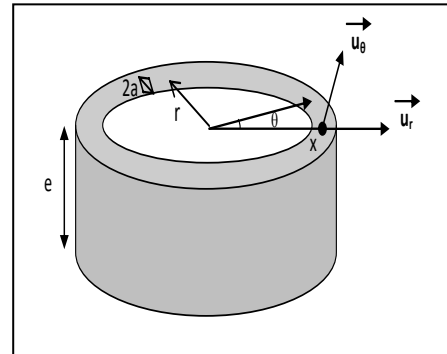
- 2) Comparer cette densité de courant à celle d'une alimentation domestique dont les fils de section 1 mm^2 sont parcourus par un courant d'intensité 1 A .

Exercice 03:

- Calculer l'expression de la résistance d'un conducteur annulaire cylindrique, homogène de conductivité σ dont les faces sont des cylindres de rayons r_1 , r_2 et de longueur l . Elles sont soumises à une différence de potentiel $V = V_1 - V_2$.

Exercice 04:

Un anneau épais d'épaisseur e , de largeur $2a$ et de rayon r moyen constitué d'un métal ayant les propriétés d'un conducteur ohmique parcouru par un courant I . Sachant que la densité de courant \vec{j} ne dépend que du rayon x et porté par la tangente à l'anneau



$$\vec{j} = j(x)\vec{u}_\theta$$

- 1) Ecrire l'expression de la tension U existant le long d'une ligne de courant (x fixe) sur l'ensemble de l'anneau en fonction de ρ , $j(x)$, x
- 2) Dédire que la densité de courant \vec{j} est de forme $\vec{j} = \frac{k}{x}\vec{u}_\theta$.
- 3) Exprimer l'intensité I traversant l'anneau en fonction de $(k, e, r + a$ et $r - a)$
- 4) Dédire que $\vec{j} = \frac{k}{x}\vec{u}_\theta = \frac{I}{xe \ln \frac{r+a}{r-a}}\vec{u}_\theta$, x étant la distance à l'axe, au point considéré.
- 5) Donner l'expression de la résistance R

En rappel que : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ correspond à une écriture microscopique de la loi d'Ohm macroscopique

$$U = RI$$

Solution des exercices

Exercice 01:

1) Calcul du temps de relaxation et la mobilité des charges libres

- La conductivité est reliée au temps de relaxation par :

$$\sigma = \frac{ne^2}{m} \tau$$

- Le nombre d'électrons par m^3 :

$$n = \frac{\rho_M}{M_A} N_A \Rightarrow n = \frac{8,8 \cdot 10^3}{63,6 \cdot 10^{-3}} 6 \cdot 10^{23} = 0,83 \cdot 10^{29}$$

- Le temps de relaxation est :

$$\tau = \frac{m_e}{ne^2} \sigma = 2,5 \cdot 10^{-15} \text{ s}$$

- La mobilité des électrons dans le cuivre a pour valeur :

$$\mu = \frac{\sigma}{ne} = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$$

2) On obtient à partir de l'expression de la densité de courant J , la vitesse des électrons :

$$J = ne v \Rightarrow v = \frac{J}{ne}$$

avec

$$J = \frac{I}{S} = 4 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2 \Rightarrow v = 0,31 \text{ mm/s}$$

Exercice 02:

1) Quelle est la densité de courant J

La section d'une fine couche de cuivre est constante et vaut :

$$S = l e = 1 \times 0,1 = 0,1 \text{ mm}^2 = 1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$$

La densité de courant dans la couche est donnée par le rapport entre l'intensité du courant et la section du conducteur :

$$j = \frac{I}{S} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-7}} = 1 \cdot 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

- On peut appliquer cette formule parce que la densité de courant est homogène et la section du conducteur est constante.

2) De même, dans l'alimentation domestique, on a :

$$j = \frac{I}{S}$$

avec

$$I = 1 \text{ A} \text{ et } S = 1 \text{ mm}^2 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

A.N.

$$j = \frac{1}{1 \cdot 10^{-6}} = 1 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

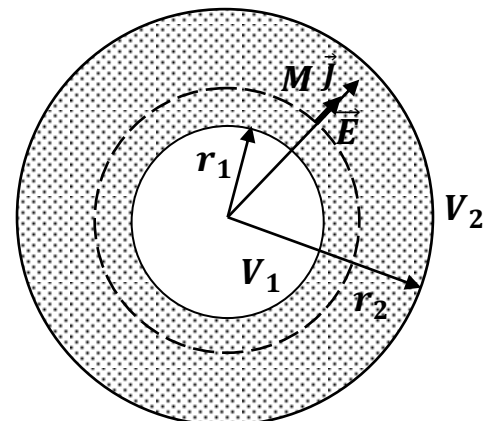
La densité de courant est plus grande dans l'alimentation domestique que dans le semi-conducteur.

Exercice 03:

- **Calcul de la résistance d'un conducteur annulaire cylindrique**

En raison de la symétrie du problème, les équipotentielles sont des cylindres coaxiaux de surface S et les lignes de champ et de courant sont radiales.

En tout point M , à l'intérieur du conducteur règne un champ \vec{E} tel que :



$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dr}$$

En intégrant de r_1 à r_2 , il vient

$$-\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \Rightarrow V = V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

D'après la loi d'Ohm on a :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

d'où

$$V = \frac{1}{\sigma} \int_{r_1}^{r_2} \vec{j} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\sigma} \int_{r_1}^{r_2} J \cdot dr \quad (a)$$

D'autre part l'intensité du courant est :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad \text{soit} \quad I = J l \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r l J$$

$$\Rightarrow J = \frac{I}{2\pi r l} \quad (b)$$

En effet \vec{j} reste constant et perpendiculaire à la surface $S = 2\pi r l$, donc parallèle à $d\vec{S}$

A partir de (a) et (b), on peut écrire :

$$V = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{2\pi l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{I}{r} dr = \frac{1}{\sigma} \frac{I}{2\pi l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$$

Soit

$$V = \frac{I}{2\pi l \sigma} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Sachant que $V = R I$, on en déduit :

$$R = \frac{1}{2\pi l \sigma} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Exercice 04:

1) L'expression de la tension U

La circulation de $\vec{E} = \rho \vec{j}(x)$ sur un cercle et égale à U

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

d'après le schéma $d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_\theta$ ($\theta = 0, 2\pi$)

d'où $U = \int_0^{2\pi} \rho \vec{j}(x) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta$

Soit



$$U = 2\pi\rho J(x)x \quad (1)$$

2) La densité de courant $J(x)$

D'après la relation (1) on trouve

$$J(x) = \frac{U}{2\pi\rho} \frac{1}{x} \quad (2)$$

3) L'expression de l'intensité I

$$I = \iint \vec{j}(x) \cdot \vec{dS}$$

Or I correspond au flux du vecteur densité de courant à travers une section $dS = e \cdot dx$ entre $r - a$ et $r + a$

$$I = \int_{r-a}^{r+a} J(x) \cdot e \cdot dx$$

En remplaçant (2) dans (1) on a

$$I = \int_{r-a}^{r+a} \frac{k}{x} \cdot e \cdot dx \quad d'où \quad k = \frac{U}{2\pi\rho}$$

$$\Rightarrow I = ke \int_{r-a}^{r+a} \frac{dx}{x}$$

finalemt

$$I = ke \ln \left(\frac{r+a}{r-a} \right) \quad (3)$$

4) Dédution de J

De (3) on a

$$k = \frac{I}{e \ln \left(\frac{r+a}{r-a} \right)}$$

Remplaçant dans $\vec{j}(x) = \frac{k}{x} \vec{u}_\theta$

on obtient

$$\vec{j} = \frac{I}{ex \ln \left(\frac{r+a}{r-a} \right)} \vec{u}_\theta$$

5) Expression de la résistance R

$$U = R I$$

on a aussi

$$k = \frac{I}{e \ln \left(\frac{r+a}{r-a} \right)} = \frac{U}{2\pi\rho}$$

$$\Rightarrow U = \frac{2\pi\rho}{e \ln \left(\frac{r+a}{r-a} \right)} I$$

D'où

$$R = \frac{2\pi\rho}{e \ln \left(\frac{r+a}{r-a} \right)}$$

Chapitre IV

MAGNETOSTATIQUE

Nous avons étudié, au premier chapitre, l'interaction électrique qui intervient entre deux corps électrisés. Nous allons considérer, à présent, une autre interaction, l'interaction magnétique, qui fait intervenir le champ magnétique. La magnétostatique est l'étude des phénomènes magnétiques statiques, générés par des courants constants uniquement (courant continu).

IV.1 Introduction

IV. 1.1 Propriétés des aimants.

Dès l'antiquité les grecs avaient remarqué qu'une pierre de Magnésie, la magnétite, avait la propriété d'exercer une force sur de petits morceaux de fer : d'où le mot magnétisme. Comme pour l'électricité, la contribution des grecs à l'étude du magnétisme fut purement linguistique. Puis on avait remarqué que les propriétés d'un aimant ne se manifestent qu'à ses extrémités : les *pôles*. Ces deux pôles, appelés, comme les pôles géographiques, pôle nord et pôle sud, sont différents.

L'expérience montre que : *Deux pôles de même nom se repoussent alors que deux pôles, de noms contraires, s'attirent.*

Au début du moyen âge, les chinois utilisèrent les propriétés de certains corps magnétiques et inventèrent les *premières boussoles*. Ce fut la première application du magnétisme.

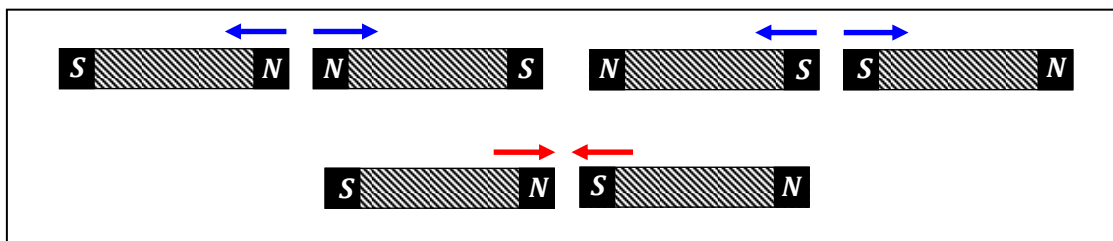


Figure IV.1

IV.1.2 Champ magnétique.

Le voisinage d'un aimant est caractérisé par l'existence d'un *champ magnétique* de la même manière qu'un champ gravitationnel existe au voisinage de la terre et un champ électrique

autour d'une charge électrique. De même il existe, comme nous allons le voir, au voisinage d'un circuit électrique un champ magnétique.

Un champ magnétique est une région de l'espace où, en chaque point, le pôle d'un petit aimant est soumis à l'action d'une force.

Comme en électrostatique, on définit un vecteur champ magnétique noté \vec{B} . Ce vecteur est tangent aux lignes de champ.

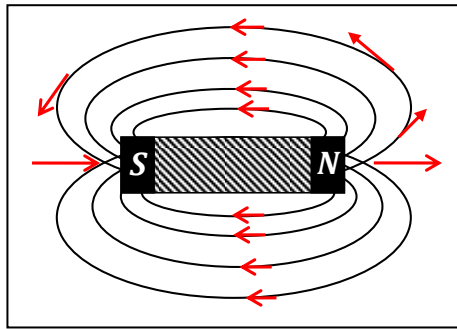


Figure IV.2

Les lignes du champ magnétique sortent du pôle nord de l'aimant et rentrent par le pôle sud.

Dans le système M.K.S.A rationalisé, le champ magnétique est mesuré en *tesla* (T), en hommage au savant serbe Nikola Tesla (1856-1943), inventeur de l'alternateur.

IV.1.3 La force magnétique

IV.1.3.1 Force de Lorentz

La force agissant sur une charge ponctuelle q dépend généralement non seulement de la position de cette charge mais également de sa vitesse \vec{v} . Cette force \vec{F} est décomposée en deux composantes, la composante électrique \vec{F}_e (qui ne dépend pas de la vitesse de la charge) et la composante magnétique \vec{F}_m (qui dépend de la vitesse de la charge). Toutes les propriétés de la force magnétique peuvent être décrites par l'introduction de la notion de champ magnétique noté usuellement \vec{B} qui s'exprime en tesla (T). La force magnétique \vec{F}_m est décrite par :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (\text{IV. 1})$$

Cette force a pour module:

$$F = q v B |\sin(\vec{v}, \vec{B})|$$

Généralisation:

La force résultante agissant sur la particule chargée est appelée force de Lorentz ; elle s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}] \quad (\text{IV. 2})$$

Cette définition est universelle, elle s'applique aussi bien pour les champs stationnaires que pour les champs dépendant du temps et quelle que soit la vitesse \vec{v} . Dans l'approximation non relativiste la force de Lorentz comme toute autre force, ne dépend pas du référentiel d'inertie choisi. Par contre sa décomposition en composante électrique et composante magnétique n'a de signification que si le référentiel d'inertie utilisé est explicitement défini. L'expression de la force de Lorentz peut être considérée comme la définition du champ électrique \vec{E} et du champ magnétique \vec{B} . Le champ magnétique \vec{B} , contrairement au champ électrique \vec{E} , n'exerce aucune force sur une charge immobile.

➤ **Caractéristiques de la force de Lorentz**

Direction : perpendiculaire à $q\vec{v}$ et à \vec{B} donc au plan formé par $q\vec{v}$ et à \vec{B} .

Sens : déterminé par la **règle des trois doigts de la main droite :**

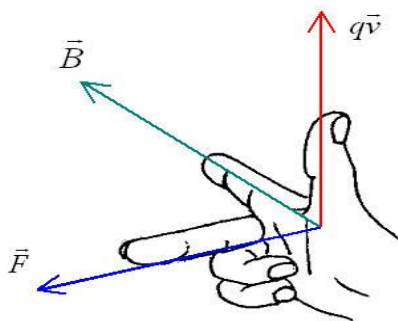


Figure en perspective

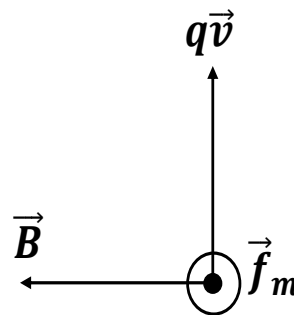


Figure schématique

Figure IV.3

- **Pouce :** sens de $q\vec{v}$ (= sens de \vec{v} si $q > 0$; = sens opposé à \vec{v} si $q < 0$)
- **Index :** sens de \vec{B}
- **Majeur :** sens de \vec{F}_m

Norme : $F_m = qvB \sin \alpha$

où q est la charge (C), v est la vitesse de la charge (m/s), B est l'intensité (la norme) du vecteur champ magnétique (T) et α est l'angle formé par $q\vec{v}$ et \vec{B} .

- si $\alpha = 90^\circ$ alors $F_m = qvB$ (force maximale)
- si $\alpha = 0$ alors $F_m = 0$

IV.1.3.2 Force de Laplace.

Lorsqu'un fil conducteur, parcouru par un courant I , est placé dans un champ magnétique \vec{B} , chaque élément $d\vec{l}$ du fil subit l'action d'une force qui s'appelle la force de Laplace élémentaire $d\vec{F}$ donnée par :

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (\text{IV. 3})$$

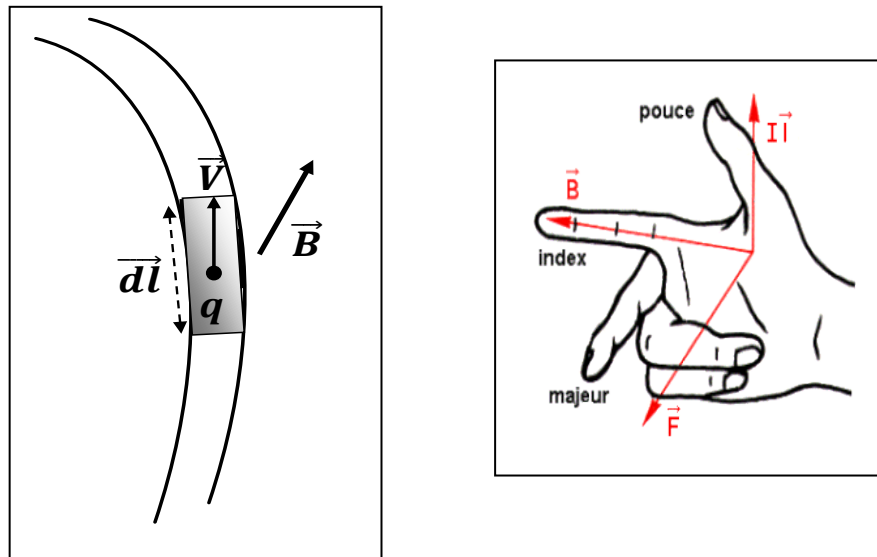


Figure IV.4

Nous allons démontrer la loi de Laplace à partir de la force de Lorentz trouvée précédemment. Considérons donc un fil parcouru par un courant I placé dans un champ magnétique \vec{B} . Ce courant I étant associé au déplacement des charges le long du fil à la vitesse \vec{v} , chaque charge électronique q subit la force de Lorentz $q\vec{v} \wedge \vec{B}$. S'il y a n charges par unité de volume, le nombre de charges élémentaires contenues dans un volume infinitésimal $d\tau$ est égal à $nd\tau$ et la force $d\vec{F}$ agissant sur cet élément de volume est donc :

$$d\vec{F} = nq d\tau \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (\text{IV. 4})$$

La densité de courant par définition est donnée par:

$$\vec{j} = nq \vec{v} \quad (\text{IV. 5})$$

la force $d\vec{F}$ agissant sur l'élément de volume $d\tau$ est égale à :

$$d\vec{F} = d\tau \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (\text{IV. 6})$$

Si le fil est de section uniforme S , le volume $d\tau$ correspond à une longueur $d\vec{l}$ de fil, tel que:

$$d\tau = S \cdot d\vec{l}$$

L'expression de "*la force de Laplace*" est donnée alors par:

$$\vec{dF} = I \vec{dl} \wedge \vec{B} \quad (\text{IV.7})$$

Caractéristiques de la force de Laplace

Un conducteur de longueur l placé dans un champ magnétique et parcouru par un courant I , est soumis à une force de Laplace \vec{F} :

- **Direction** : perpendiculaire au plan formé par le conducteur et B
- **Sens** : déterminé par la règle des trois doigts de la main droite

Pouce : sens du courant

Index : sens de \vec{B}

Majeur : sens de \vec{F}

- **Norme** : $F = IBl \sin \alpha$

où I est l'intensité de courant (A)

B est l'intensité (la norme) du vecteur champ magnétique (T)

α est l'angle formé par B par rapport au conducteur.

si $\alpha = 90^\circ$ alors $F = IBl$ (force maximale) si $\alpha = 0$ alors $F = 0$

IV.2 Expressions du champ magnétique

IV.2.1 Champ magnétique créé par une charge en mouvement

Le champ magnétique créé en un point M par une particule de charge q située en un point P et animée d'une vitesse v dans un référentiel galiléen est donné par l'expression suivante:

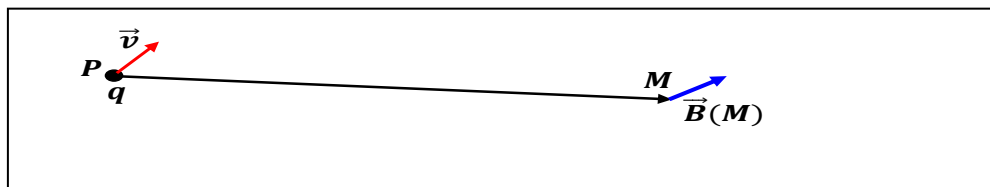


Figure IV.5

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \quad (\text{IV.8})$$

- Comme nous l'avons déjà mentionné dessus, l'unité du champ magnétique dans le système international est le **Tesla (T)**.
- Une autre unité appartenant au système ci-dessus CGS, le **Gauss (G)**, est également très souvent utilisée :

$$1 \text{ Gauss} = 10^{-4} \text{ Tesla.}$$

- μ_0 : est la **perméabilité du vide** : il décrit la capacité du vide à « laisser passer » le champ magnétique. Sa valeur dans le système d'unités international MKSA est :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1} \text{ (H pour Henry)}$$

IV.2.2 Champ magnétique créé par un ensemble de charges en mouvement

De même que pour le champ électrostatique, le **principe de superposition** s'applique au champ magnétique.

Considérons N particules de charges q_i situés en des points P_i et de vitesse v_i . En vertu du principe de superposition, le champ magnétique créé en un point M est la somme vectorielle des champs créés par chaque particule et vaut:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \vec{v}_i \wedge \overrightarrow{P_i M}}{\|\overrightarrow{P_i M}\|^3} \quad (\text{IV. 9})$$

Si le nombre de particules est très grand dans un volume V donné et qu'on s'intéresse à des échelles spatiales bien plus grandes que la distance entre ces particules, il est avantageux d'utiliser une description continue. Il faut donc définir des distributions continues comme nous l'avons fait en électrostatique. Mais des distributions continues de quoi ?

Le passage à la limite continue consiste à assimiler tout volume élémentaire, situé autour d'un point P quelconque de la distribution de charges en mouvement, à une charge dq animée d'une vitesse moyenne \vec{v} . Le champ magnétique résultant s'écrit alors:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{dq \vec{v} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \quad (\text{IV. 10})$$

où l'intégrale porte sur le volume V total embrassé par ces charges.

IV.2.3 Champ créé par un circuit électrique (formule de Biot et Savart)

Soit un élément infiniment petit parcouru par un courant I

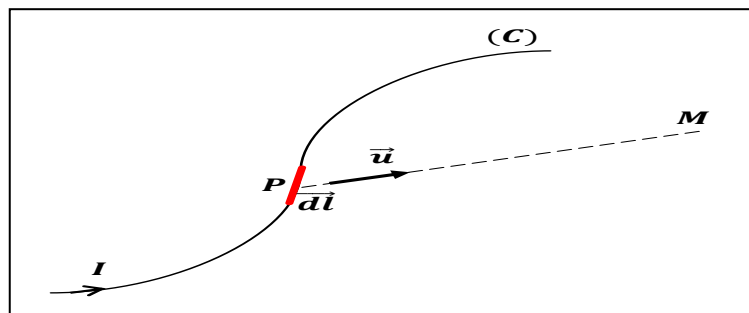


Figure IV.6

Le champ magnétique élémentaire créé par l'élément de courant $I \cdot dl$ au point M à la distance $\|\overrightarrow{PM}\| = r$ est donné par la loi de Biot et Savart :

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad (\text{IV.11})$$

Formule de Biot et Savart :

En un point M quelconque de l'espace, le champ magnétique créé par un circuit parcouru par un courant permanent I est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Cette loi permet de donner :

- **Le sens de \vec{dB} :** $(\vec{dB}, \vec{dl}, \vec{u})$ forme un trièdre directe
- **La direction de \vec{dB} :** $\vec{dB} \perp (\vec{dl}, \vec{u})$
- **Le module de \vec{dB} :** $dB = \frac{\mu_0 I \cdot dl \cdot |\sin(\vec{dl}, \vec{u})|}{4\pi r^2}$

IV.3 Lois fondamentales de la magnétostatique

IV.3.1 Flux du champ magnétique

IV.3.1.1 Conservation du flux magnétique

Considérons une surface fermée S quelconque, s'appuyant sur une courbe C fermée et orientée, c'est à dire pour laquelle on peut définir localement un élément de surface $\vec{dS} = dS\vec{n}$, dont le vecteur normal est orienté vers l'extérieur (convention).

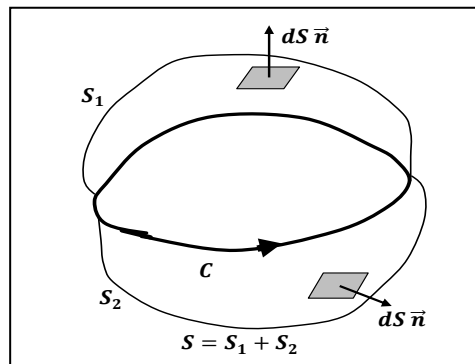


Figure IV.7

Le flux du champ magnétique à travers cette surface fermée vaut

$$\Phi = \oiint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0 \quad (\text{IV.12})$$

Cette loi est générale et reste valable même en régime variable.

La conservation du flux magnétique est une propriété très importante et montre une différence fondamentale entre le champ magnétique et le champ électrostatique. Nous avons vu, avec le théorème de Gauss, que le flux du champ électrostatique dépend des charges électriques

contenues à l'intérieur de la surface

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}_s \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Si la charge totale est positive, le flux est positif et il « sort » de cette surface un champ électrostatique (source). Si la charge est négative, le flux est négatif et le champ « rentre », converge vers la surface (puits). Cette propriété reste d'ailleurs également valable en régime variable. Rien de tel n'a jamais été observé pour le champ magnétique. On ne connaît pas de charge magnétique analogue à la charge électrique (se serait un « monopôle magnétique ») : tout le champ qui rentre dans une surface fermée doit également en ressortir. La source la plus élémentaire de champ magnétique est un dipôle (deux polarités), comme l'aimant dont on ne peut dissocier le pôle nord du pôle sud.

On peut aisément montrer que le flux à travers une surface S s'appuyant sur un contour fermé C est indépendant du choix de cette surface. Prenons deux surfaces S_1 et S_2 s'appuyant sur C et telles que $S = S_1 + S_2$ soit une surface fermée. En orientant cette surface vers l'extérieur, la conservation du flux magnétique impose

$$\Phi_S = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = 0$$

donc $\Phi_{S_1} = -\Phi_{S_2}$, ce qui rentre d'un côté ressort de l'autre. La différence de signe provient de la convention d'orientation de la normale : le flux est le même dans les deux cas.

IV.4 Circulation du champ magnétique

IV.4.1 Circulation du champ autour d'un fil infini

Le champ \vec{B} créé par un fil infini (Exercice 01) en un point $M(r, \theta, z)$ s'écrit en coordonnées cylindriques

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \quad (\text{IV. 13})$$

Considérons maintenant une courbe fermée quelconque C . Un déplacement élémentaire le long de cette courbe s'écrit $\vec{dl} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{k}$. La circulation élémentaire de \vec{B} est définie par:

$$dC = \vec{B} \cdot \vec{dl} = \vec{B} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\theta$$

La circulation de \vec{B} sur la courbe fermée C vaut alors:

$$C = \oint_{\text{courbe}} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I \oint_{\text{courbe}} \frac{d\theta}{2\pi} \quad (\text{IV. 14})$$

Plusieurs cas de figure peuvent se présenter :

- Si C n'enlace pas le fil, $\oint_C d\theta = 0$.
- Si C enlace le fil une fois, $\oint_C d\theta = 2\pi$.
- Si C enlace le fil N fois, $\oint_C d\theta = 2N\pi$

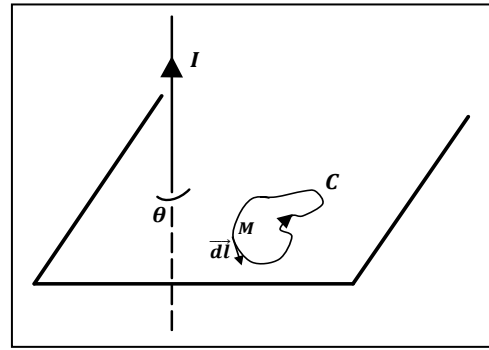


Figure IV.8

IV.5 Théorème d'Ampère

La circulation de B sur une courbe fermée est donc directement reliée au courant qui traverse la surface délimitée par cette courbe. C'est Ampère qui, en recherchant une explication du magnétisme dans une théorie de la dynamique des courants, découvrit cette propriété du champ magnétique démontrée ici sur un cas particulier à partir de la loi de Biot et Savart.

Théorème : La circulation de B le long d'une courbe C quelconque, orientée et fermée, appelée contour d'Ampère, est égale à μ_0 fois la somme algébrique des courants qui traversent la surface délimitée par C

$$\oint_{\text{courbe}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{\text{algeb}} I_{\text{int}} \quad (\text{IV.15})$$

Cette relation fondamentale est l'équivalent du théorème de Gauss pour le champ électrostatique : elle relie le champ (\vec{B} ou \vec{E}) à ses sources (le courant I ou la charge Q) dans le vide (à l'intérieur d'un matériau il faut les corriger). Cependant, à la différence du théorème de Gauss, elle n'est valable qu'en régime permanent (courants continus).

Remarque : Avant d'appliquer le théorème d'Ampère, il faut d'abord déterminer la direction de \vec{B} en utilisant la symétrie. En suite choisir **un contour fermé** qui permet le calcul simple de la circulation. En générale, si \vec{B} est un champ tournant (suivant \vec{u}_θ) on choisit un cercle, sinon un rectangle.

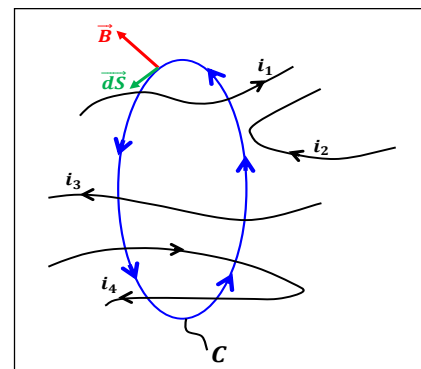


Figure IV.9

Exemple:

$$\oint_{\text{courbe}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{\text{algeb}} I_{\text{int}} = \mu_0 (i_1 + i_3 + i_4 - i_2) = \mu_0 (i_1 + i_3)$$

➤ **Forme locale du théorème D'Ampère**

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Par le théorème de la circulation, on a : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S}$

Donc : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$

soit:

$$\boxed{\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}} \quad (\text{forme locale du théorème d'Ampère})$$

IV.6 Induction électromagnétique

IV.6.1 Introduction

Expérience Oersted : Un courant produit un champ magnétique. Les scientifiques se sont demandé si l'inverse est vrai ?

Est-ce qu'un champ magnétique pouvait faire apparaître un courant électrique?

En 1830, Joseph Henry et Michael Faraday ont confirmé cette hypothèse.

Le terme **induction électromagnétique** désigne la production de courants et donc de **f.é.m.** à partir de champs magnétiques ; on parle de courants induits et de f.é.m. induites

IV.6.2 Expériences fondamentales

Expérience 1 : circuit fixe dans un champ variable

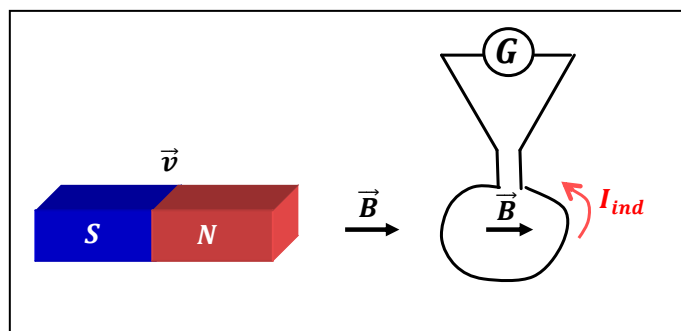


Figure IV.10

Résultat :

- Si on rapproche l'aimant, il apparaît un courant induit dans la spire
- Si on éloigne l'aimant, il apparaît un courant induit dans le sens opposé
- S'il n'y a pas de mouvement, pas de courant induit

Expérience 2 : circuit mobile dans un champ statique

On déplace la spire et on garde l'aimant constant

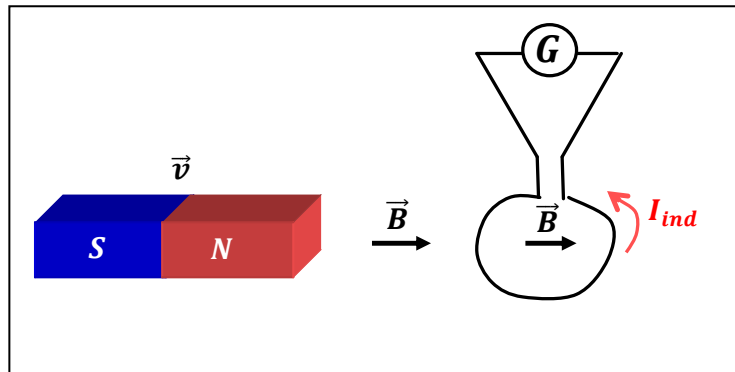


Figure IV.11

Résultat :

- Le même résultat est obtenu en laissant l'aimant immobile et en bougeant la boucle de courant.
- La valeur du courant est d'autant plus importante que la vitesse du déplacement de l'aimant ou du circuit.

IV.6.3 Loi de Lenz et de Faraday

Ce qui est commun aux deux expériences : **C'est la variation du flux** : $\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS}$

ϕ varie au cours du temps soit :

- Par variation du champ $B(t)$ (expérience 1)
- Par déplacement du circuit $S(t)$ (expérience 2)

La variation du flux fait apparaître :

- un courant induit si le circuit est fermé
- une ddp si le circuit est ouvert

On interprète l'apparition de ce courant induit en supposant qu'il existe dans le circuit induit un **générateur (fictif) de fem e** .

- **Loi de Faraday** : *la variation temporelle du flux magnétique à travers un circuit fermé y engendre une fem induite*

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (\text{IV. 16})$$

L'induction électromagnétique est donc un phénomène qui dépend intrinsèquement du temps

et, au sens strict, sort du cadre de la magnétostatique (étude des phénomènes magnétiques stationnaires). Nous allons toutefois l'étudier, l'induction étant l'équivalent magnétique de l'influence électrostatique.

➤ **La loi de Lenz**

Pour trouver de manière qualitative le sens du courant induit, on utilise la loi de Lenz qui stipule que :

Le sens du courant induit est tel que le champ magnétique qu'il crée s'oppose à la variation de flux qui lui a donné naissance.

Exercices d'application

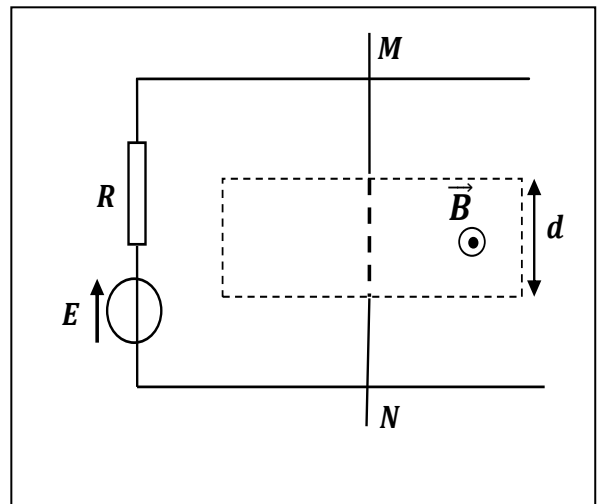
Exercice 01:

Calculer le champ magnétique créé par un segment parcouru par un courant d'intensité I en un point M situé à la distance a du segment. On appellera θ_1 et θ_2 les angles entre la perpendiculaire au fil issue de M et les droites joignant M aux extrémités du segment.

- 1) Examiner le cas du fil rectiligne infini.
- 2) Retrouver la question précédente (champ créé par un fil rectiligne infini) en appliquant le théorème d'Ampère.

Exercice 02:

Considérons deux conducteurs parallèles formant un "rail de Laplace" sur lequel peut se déplacer une barre mobile conductrice MN selon le schéma ci-dessous (vue de dessus). Le générateur a une f.é.m $E = 5\text{ V}$ et une résistance interne $R = 5\ \Omega$, la barre MN de longueur totale $L = 0,12\text{ m}$ a une résistance négligeable ; elle crée un court-circuit en refermant le circuit entre les deux rails. On place MN dans l'entrefer d'un aimant en U (de largeur $d = 4\text{ cm}$) où règne un champ magnétique uniforme de norme $B = 0,1\text{ T}$



- 1) Expliquer (et justifier à l'aide de quelques mots et d'éventuellement un schéma) comment on doit placer l'aimant en U pour obtenir le champ magnétique tel qu'il est représenté sur la figure par le vecteur B , c'est à dire perpendiculaire au plan du schéma (ou des rails) et dirigé vers le haut.
- 2) Déterminer le sens et l'intensité du courant dans le circuit.
- 3) Déterminer en direction, sens et grandeur la force de Laplace agissant sur la barre MN. (aidez-vous d'un schéma représentant les vecteurs significatifs)
- 4) La barre MN se déplace (à vitesse considérée constante) dans le champ magnétique sur une longueur de 6 cm dans le sens impliqué par la force de Laplace.
 - a) Déterminer le flux coupé par la barre.
 - b) En déduire le travail exercé lors de ce déplacement de la barre MN.

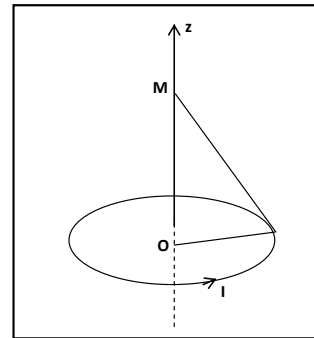
5) Quelle est alors la force électromotrice induite dans le circuit si le parcours a lieu en 1 ms? Représentez cette force électromotrice e .

Exercice 03:

Soit une spire filiforme de rayon R parcourue par un courant d'intensité I .

1) Déterminer le champ magnétique créé en un point de l'axe de la spire situé à une distance z du centre de celle-ci.

2) Tracer la courbe $B(z)$.



Exercice 04:

On considère un solénoïde de longueur L comportant au total N spires jointives ayant le même rayon R , régulièrement réparties.

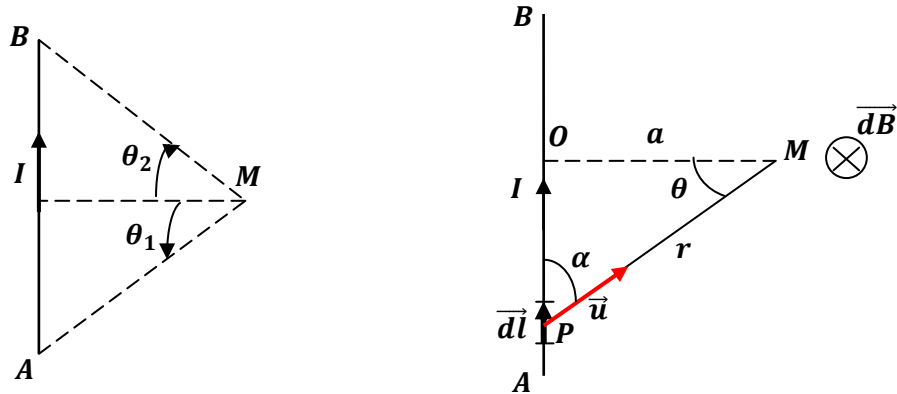
1) Déterminer le champ magnétique créé en un point quelconque de l'axe du solénoïde en fonction des angles α_1 et α_2 sous lesquels on voit les faces terminales du solénoïde depuis le point considéré.

2) Examiner le cas du solénoïde « infiniment long », c'est-à-dire tel que $R \ll L$

Solution des exercices

Exercice 01:

1) On oriente les angles θ_1 et θ_2 par le sens du courant I . Dans le cas de la figure ci dessous, θ_1 est négatif et θ_2 est positif



Un élément \vec{dl} de AB crée en un point M (Figure si dessus) un champ élémentaire \vec{dB} perpendiculaire au plan formé par \vec{dl} et \vec{PM} et orienté dans le cas de la figure vers l'intérieur. Alors, d'après la loi de Biot et Savart, on a :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Le module de \vec{dB} est alors :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dl \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dl \cos \theta}{r^2}$$

On écrivant :

$$OM = a ; PM = r = \frac{a}{\cos \theta} ; OP = l = a \tan \theta$$

$$\Rightarrow dl = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$$

En reportant dans dB , il vient :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta \cos \theta \frac{\cos^2 \theta}{a} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \theta d\theta$$

En intégrant sur tout le segment AB , on obtient :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta$$

donc

$$B_{segment} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

2) Pour un fil de longueur infini $\theta_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ et $\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, B tend vers une valeur limite

$$B_{fil\ inf} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dB = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

D'où le champ d'induction magnétique crée par un fil infini :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

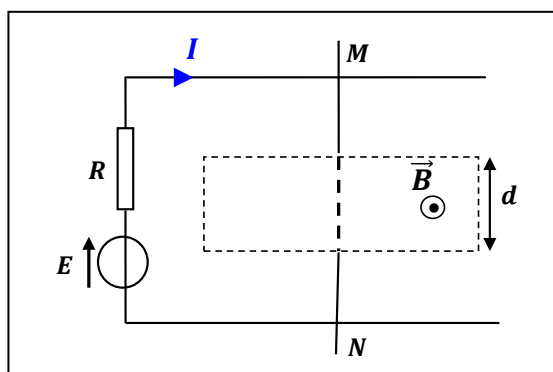
Exercice 02:

1) Position de l'aimant

L'aimant doit être placé pôle Sud vers le haut

2) Le sens de I

Le sens de I est donné par le sens de E (voir le schéma) de M vers N



La tension aux bornes du générateur est nulle (court-circuit)



$$U = E - rI$$

soit :

$$I = E / r = 5 / 5 = 1 \text{ A}$$

3) La force de Laplace agissant sur la barre MN

La longueur du conducteur soumis au champ magnétique correspond à la distance notée «d» dans l'énoncé et non pas à la longueur totale L de la barre

$$F = B.I.L. \sin \alpha$$

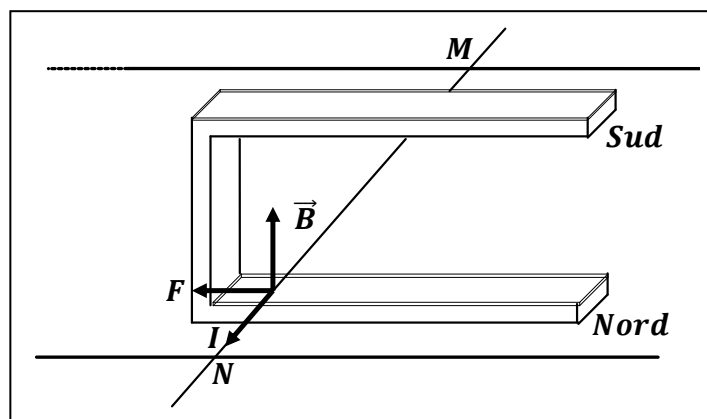
s'écrit donc ici

$F = B.I.d. \sin \alpha$ avec $\sin \alpha = 1$ (α étant l'angle entre la direction du conducteur et le vecteur champ magnétique B et donc $\alpha = \pi/2$).

On a donc

$$F = B I d = 0.1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 10^{-2} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

D'après la règle d'orientation régissant les sens de la force F , de l'intensité I et du champ magnétique B (les sens de I , B et F forment un trièdre direct), la force F est dirigée vers la gauche.



4)

a) Le flux coupé par la barre.

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S$$

avec

$S = d \times \text{longueur du déplacement}$

$$\Phi = B \cdot S = 0.1 \times 4 \cdot 10^{-2} \times 6 \cdot 10^{-2} = 24 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

b) Le travail exercé lors de ce déplacement de la barre MN.

$$W = I \cdot \Delta\phi = 1 \times 24 \cdot 10^{-5} = 24 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

ou encore , en faisant le produit de la force de Laplace par le déplacement car ce dernier s'effectue dans la direction et le sens de la force :

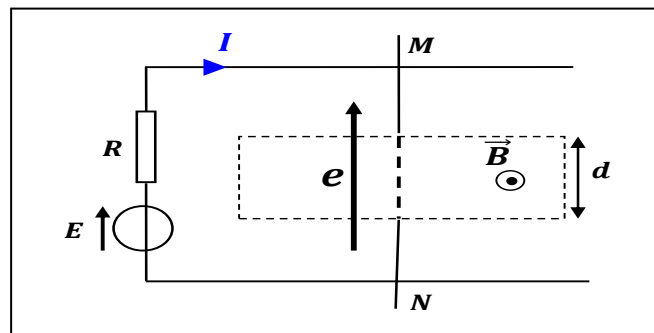
$$W = F \times \text{longueur du déplacement} = 4 \cdot 10^{-3} \times 6 \cdot 10^{-2} = 24 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

5) La force électromotrice induite dans le circuit

$$e = -d\phi / dt \quad \text{que l'on peut écrire aussi} \quad e = -\Delta\phi / \Delta t$$

avec $\Delta\phi$ variation de flux entre le début du déplacement de MN et la fin . En fait ici $\Delta\phi =$ flux coupé calculé en (4.1) et avec $\Delta t = 1 \text{ ms}$ donné par l'énoncé.

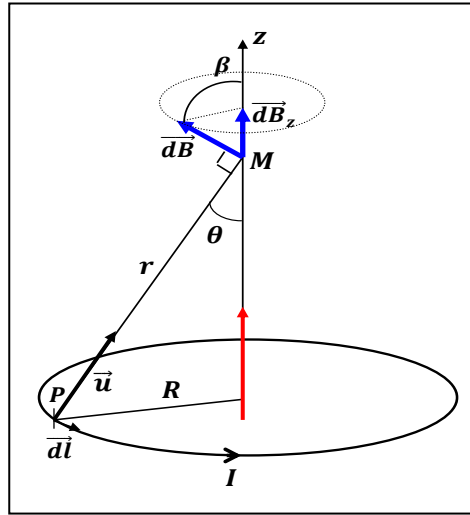
$$e = 24 \cdot 10^{-5} / 10^{-3} = 0.24 \text{ V}$$



Exercice 03:

1) le champ magnétique créé en un point de l'axe de la spire

Soit un courant circulaire de centre O , de rayon r (voire Figure ci dessous). Nous calculons le champ \vec{B} en un point M situé sur l'axe Oz du cercle. Par raison de symétrie, \vec{B} est porté par cet axe. L'élément de courant $d\vec{l}$ d'origine P , crée en un point M un champ $d\vec{B}$ perpendiculaire à PM et à $d\vec{l}$. Posons. $PM = r$



La loi de Biot et Savart donne :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{r^3}$$

De plus $\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM}$

Alors

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge (\vec{PO} + \vec{OM})}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PO}}{r^3} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{OM}}{r^3}$$

Intégration :

$$\oint \vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PO}}{r^3} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\vec{dl} \wedge \vec{OM}}{r^3}$$

$$\oint \vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\oint (\vec{dl} \wedge \vec{PO})}{r^3} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\oint (\vec{dl} \wedge \vec{OM})}{r^3}$$

On a

- $\oint (\vec{dl} \wedge \vec{OM}) = (\oint \vec{dl}) \wedge \vec{OM} = 0$
- $\oint (\vec{dl} \wedge \vec{PO}) = R \cdot dl \cdot \vec{n}$

$$\Rightarrow \oint (\vec{dl} \wedge \vec{PO}) = \oint (R \cdot dl \cdot \vec{n}) = R \left(\oint dl \right) \cdot \vec{n} = 2\pi R^2 \cdot \vec{n}$$

On en déduit :

$$\vec{B} = \oint \vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(\oint \vec{dl}) \wedge \vec{PO}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{2\pi R^2}{r^3} \vec{n}$$

Alors

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3} \cdot \vec{n}$$

Ou encore en notant que : $R = r \sin \theta$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta \cdot \vec{n}$$

Autre méthode :

On remarque que \vec{dl} est perpendiculaire à \vec{PM}

La loi de Biot et Savart donne :

$$\begin{aligned} \vec{dB} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \\ \Rightarrow \vec{dB} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cdot PM}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{PM^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \end{aligned}$$

La contribution de \vec{dB} au champ total est : $dB_z = dB \cos \beta = dB \sin \theta$

car $\cos \beta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$

$$B_{spire} = \int dB_z = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} \int dl = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2r^2} \sin \theta \cdot R$$

Comme $r = \frac{R}{\sin \theta}$

$$B_{spire} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta$$

Soit en fonction de la distance z :

$$B_{spire} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

D'où

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$

2) En deux points M et M' de l'axe, symétrique par rapport à O , le champ \vec{B} est identique. On étudie donc $\vec{B}(z)$ pour $z \geq 0$ et on complétera par symétrie pour $z \leq 0$.

- $\frac{dB}{dz} = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{3\mu_0 I R^2 z}{2(z^2+R^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3\mu_0 I R^2 z}{2(z^2+R^2)^{\frac{5}{2}}}$

➤ Pour $z \geq 0$, $\frac{dB}{dz} \leq 0$, donc $B(z)$ est une fonction décroissante de z .

➤ Pour $z = 0$, $\frac{dB}{dz} = 0$: la courbe $B(z)$ admet donc une tangente horizontale en ce point

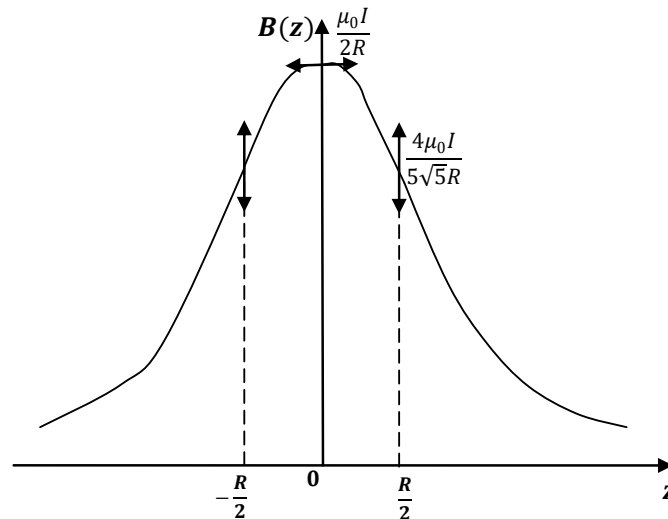
- $\frac{d^2B}{dz^2} = -\frac{3\mu_0 I R^2}{(z^2+R^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{15\mu_0 I R^2 z^2}{(z^2+R^2)^{\frac{7}{2}}} = \frac{3\mu_0 I R^2}{2(z^2+R^2)^{\frac{7}{2}}} (4z^2 - R^2)$

➤ $\frac{d^2B}{dz^2}$ s'annule pour $z = \frac{R}{2}$ ($z > 0$), avec : pour $z < \frac{R}{2}$, $\frac{d^2B}{dz^2} < 0$ et pour $z > \frac{R}{2}$, $\frac{d^2B}{dz^2} > 0$

La courbe $B(z)$ admet donc un point d'inflexion pour $z = \frac{R}{2}$ avec $B\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{4\mu_0 I}{5\sqrt{5}R}$

➤ Pour $z = 0$, $B = B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$

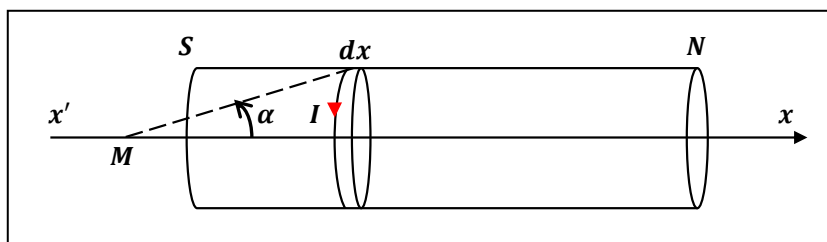
➤ On en déduit la courbe $B(z)$



Exercice 04:

1) Le champ magnétique créé en un point quelconque

Symbolisons le solénoïde comme ci-dessous. Soit le point M où l'on calcule le champ



Remarquons que toutes les spires produisent un champ de même sens porté par l'axe xx' que nous orientons dans le sens du champ. Il s'agit de calculer B au point « appartenant à l'axe xx' » (est pris comme origine des abscisses).

Soit une tranche du solénoïde, d'abscisse x et d'épaisseur dx ; elle est vue de M « sous l'angle α ; peu varier de 0 à π selon la position de « sur l'axe. Cette tranche est assimilable à une bobine plate contenant $dN = \frac{N}{L} dx = n dx$ spires. Sa contribution au champ est :

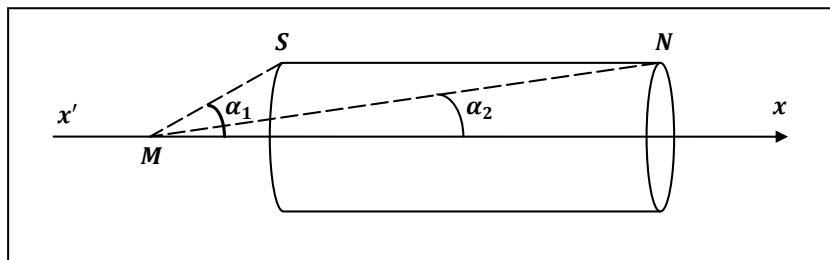
$$dB = \frac{\mu_0 n I}{2R} \cdot \sin^3 \alpha dx$$

Prenons α comme variable d'intégration.

$$x = \frac{R}{\tan \alpha}, \quad dx = -R \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow dB = -\frac{1}{2} \mu_0 n I \cdot \sin \alpha d\alpha$$

Pour la position M choisi, α peut varier de α_1 à α_2 (les angles sous lesquels on voit les deux extrémités du solénoïde, voir figure ci dessous).



Par intégration :

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$$

2) Cas du solénoïde « infiniment long », c'est-à-dire tel que $R \ll L$

Dans le cas d'un solénoïde de longueur très grande par rapport au rayon, on a $\alpha_1 \rightarrow \pi$ et $\alpha_2 \rightarrow 0$

$$B = \mu_0 n I$$

Conclusion : le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde.

Références:

- [1] Haris Benson « Physique 2 Electricité et Magnétisme », édition de Boeck, 1996.
- [2] Richard Feynman , Robert B. Leighton , Matthew Sands , Michel Bloch , Goery Delacote, « Le Cours de Physique de Feynman : Electromagnétisme », Addison- Wesley, 1994.
- [3] Daniel Cordier, « Cours de Physique Electromagnétisme 1. Electrostatique et Magnétostatique », Dunod, Paris, 2004.
- [4] Djelouah Hakim, « Electromagnétisme », Ed. Les Cours de la Faculté de Physique, 2012.
- [5] John R. Reitz, Frederick J. Milford, Robert W. Christy, « Foundations of Electromagnetic Theory », Addison-Wesley, 1979.
- [6] Emile Amzallag, Josep Cipriani , Josseline Ben Aim, Norbert Piccioli, « Electrostatique et Electrocinétique », Dunod, Paris, 2006.
- [7] Jean-Marie Brebec, Thierry Desmarais, Marc Menetrier, Bruno Noel, Regine Noel, Claude Orsini « Electromagnétisme », Hachette Livre, Paris, 2003.
- [8] C. Templier, « Electromagnétisme : régimes permanents et régimes variables »,Erasmus-Socrates KTU 2006 , Université de Poitiers, France.
- [9] Ait-Gougam Leila, Bendaoud Mohamed, Douliche Naima, Mekideche Fawzia, « Licence de Physique S2 : Electricité », Ed. Les Cours de la Faculté de Physique, 2012.
- [10] Zouhaier Hafsia, Saliha Nouri, « Notes de cours d'électrostatique », Ed. Les Cours de l'Ecole Supérieure des Sciences et Technique de Tunis, 2009.
- [11] Michel Saint-Jean, Janine Bruneaux, Jean Matricon, « Electrostatique et magnétostatique », Belin, Paris, 2002.