



République Algérienne Démocratique et populaire Ministère de
l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Supérieure en Génie Électrique et Énergétique d'Oran ESSG2E
Analyse numérique
Dr. RIABI Lakhdar
2020-2021

0.1 Introduction

Depuis plusieurs années, l'analyse numérique connaît un essor considérable et la plupart des facultés de sciences et de génie offrent au moins un cours d'introduction à cette discipline. La maîtrise de cet outil extrêmement performant est devenue indispensable dans la formation scientifique en général, et en particulier dans celle des ingénieurs, puisqu'elle permet d'aborder et de résoudre des problèmes dont la solution est inimaginable par les méthodes analytiques classiques, par exemple en Intégration, résolution des équations non linéaires, interpolation, équations différentielles . . . L'analyse numérique propose des algorithmes (méthodes de calculs approchées) pour résoudre les problèmes que l'analyse classique ne donne pas de méthodes explicites de résolutions. Deux notions s'avèrent alors importantes :

- Les erreurs numériques (il est important d'avoir une idée sur l'erreur commise sur un résultat approché déterminé par les différentes méthodes de l'analyse numérique.)

- La notion de convergence (Les résultats se souvent déterminés comme limite d'une suite construite à partir d'un algorithme correspondant au problème posé)

Ce cours contient les chapitres suivants :

Chapitre 1 : Résolution des équations non linéaires dans \mathbb{R}

Chapitre 2 : Résolution des systèmes linéaires $Ax=b$

Chapitre 3 : Interpolation polynômiale

Chapitre 4 : Dérivation numérique

Chapitre 5 : Intégration numérique

Chapitre 6 : Résolution numérique des équations différentielles

Table des matières

0.1	Introduction	2
1	Résolution des équations non linéaires dans \mathbb{R}	5
1.0.1	Existence et localisation des racines	5
1.0.3	Les méthodes de séparation	6
1.1	Méthode de dichotomie (bissection)	6
1.1.1	Étude de convergence	7
1.2	Méthode du point fixe (approximation successive)	8
1.2.7	Méthode de Newton-Raphson(méthodes des tangentes)	9
1.3	Ordre de convergence	10
1.4	Exercices	12
2	Résolution des systèmes linéaires	15
2.1	Systèmes linéaires	15
2.2	Méthode de Cramer	16
2.3	Les Méthodes directes	17
2.4	Élimination de Gauss(Méthode du pivot de Gauss)	17
2.5	Méthode de Gauss-Jordan	19
2.6	Méthode de la Décomposition LU	20
2.7	Méthode de Cholesky	22
2.8	Exercices	24
2.9	Les méthodes itératives	26
2.9.2	Méthode de Jacobi	26
2.9.4	Méthode de Gauss-Seidel	27
2.9.6	Convergence des méthodes itératives	28
2.9.21	Méthode de Relaxation	30
2.10	Exercices	31
3	Interpolation polynômiale	33
3.1	Méthodes utilisées :	33
3.1.1	Matrice de Vandermonde	33
3.1.4	Méthode de Lagrange	34

3.1.6	Méthodes de Newton	35
3.1.10	Erreur d'interpolation	36
3.1.12	Différences finies (cas des points équidistants)	37
3.2	Polynôme d'Hermite	40
3.2.3	L'erreur d'interpolation d'Hermite	40
3.3	Exercices	41
4	Dérivation numérique	44
4.1	Dérivées d'ordre 01	44
4.2	Dérivées d'ordre 02	47
4.3	Exercices	48
5	Intégration numérique	49
5.1	Méthodes de Newton cotes simples et composées	49
5.2	Lois de Newton-Cotes composites	52
5.3	Quadrature de Gauss	56
5.4	Exercices	58
6	Équations différentielles du premier ordre	60
6.1	La Méthode d'Euler	61
6.2	La Méthode de Runge-Kutta	62
6.2.1	Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2 : RK2	62
6.2.3	Runge-Kutta d'ordre 4 : RK4	63
6.3	Résolution numérique d'un système d'équations différentielles .	64
6.4	Exercices	65

Chapitre 1

Résolution des équations non linéaires dans \mathbb{R}

Introduction

On présente ici quelques méthodes de résolution numériques des équations $f(x) = 0$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

On se propose de déterminer la ou les solutions de $f(x) = 0$ ou f est un polynôme de degré ≥ 3 ou l'expression de f est complexe.

Les méthodes classiques de résolution ne permettent pas de résoudre de tels problèmes. On fait donc appel aux techniques des méthodes numériques.

Pour cela on procède de la manière suivante :

1.0.1 Existence et localisation des racines

L'existence

Théorème 1.0.2. (*Théorème des valeurs intermédiaires*)

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$: Si $f(a) \times f(b) < 0$; il existe au moins une valeur $c \in [a, b]$ telle que $f(c) = 0$.

Si de plus f est strictement monotone sur $[a, b]$ (la dérivée de $f(x)$ existe et garde un signe constant dans $[a, b]$) alors la racine de l'équation $f(x) = 0$ est unique.

Localisation des racines :

La plupart des méthodes numériques nécessite la détermination d'un intervalle $[a, b]$ contenant une seule racine dite racine séparée α de $f(x) = 0$

1.0.3 Les méthodes de séparation

1. L'étude des variations de f , puis l'utilisation du théorème de la valeur intermédiaire.
2. La réécriture de f sous forme $f_1(x) = f_2(x)$, puis la recherche des points d'intersection entre f_1 et f_2 .

Exemple 1.0.4. Séparer les racines des équations :

a) $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ dans \mathbb{R}

$f(x) = 0$ admet (03) racines s_1, s_2 et s_3 (On a utilisé le tableau de variations de $f(x)$ dans \mathbb{R}) En observant le tableau de variation, on remarque facilement que :

$s_1 \in [-3, -1]$, $s_2 \in [-1, 1]$ et $s_3 \in [1, 3]$

b) $f(x) = e^t \sin t - 1$ dans $[-\pi, \pi]$

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-t} = \sin t$$

Les points d'intersection des deux fonctions e^{-t} et $\sin t$ tracés dans le même repère sont s_1 et s_2 , $s_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $s_2 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ce qui veut dire que s_1 et s_2 , sont les racines de $f(x) = 0$

Remarque On suppose dans la suite que f est continue et que la racine α est localisée (séparée) dans un intervalle $[a, b]$.

1.1 Méthode de dichotomie (bissection)

L'idée : est de construire une suite d'intervalles de plus en plus petits contenant une racine séparée de $f(x) = 0$.

Algorithme 1.

On construit trois suites $(a_n); (b_n)$ et (x_n) de la manière suivante.

(a) $a_0 = a, b_0 = b$.

(b) Pour $n \geq 0$

(a) $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$

(b) i. Si $f(x_n) = 0$ alors x_n est la racine de f et le processus est arrêté

ii. Sinon

-Si $f(x_n)f(b_n) < 0$ alors $a_{n+1} = x_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

-Si $f(x_n)f(b_n) > 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = x_n$.

1.1.1 Étude de convergence

Théorème 1.1.2. Soit f continue sur $[a, b]$. Nous supposons que $f(a)f(b) < 0$ et que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution α dans $[a, b]$. Si l'algorithme de dichotomie arrive jusqu'à l'étape n (de sorte que $x_i \neq \alpha, 0 \leq i \leq n$) alors

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}.$$

Remarque. Cette dernière inégalité nous montre que lorsque $n \rightarrow \infty$; $x_n \rightarrow \alpha$ solution de $f(x) = 0$ donc la convergence.

Et nous permet d'estimer à l'avance le nombre d'itérations nécessaires pour approcher α

avec une précision donnée ε

Par exemple pour avoir une erreur ne dépassant pas ε , il suffit que :

$$\begin{aligned} |x_n - \alpha| \leq \varepsilon &\Rightarrow \frac{b - a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{\ln 2} \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $n = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{\ln 2} \right\rceil + 1$

Exemple 1.1.3. Résoudre l'équation suivante :

$$\sin t - t + 0,5 = 0$$

par la méthode de Dichotomie avec 4 chiffres significatifs exacts.

Soit $f(x) = \sin t - t + 0,5$, rappelons dans la section précédente on a trouvé que f admet une solution entre 1 et 2 car $f(1) = 0.3414$ et $f(2) = -0.5907$

On calcul le nombre d'itération n on prend $\varepsilon = \times 10^{-2}$

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{2-1}{2 \cdot 10^{-3}}\right)}{\ln 2} = 5, ..$$

Alors $n = 6$.

On peut résumer le travail dans le tableau :

Intervalle	a_n	b_n	$x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$	$f(x_n)$
$[a_0, b_0[$	1	2	1,5	-0.0025
$[a_1, b_1[$	1	1.5	1.25	0.1989
$[a_2, b_2[$	1.25	1.5	1.375	0.1058
$[a_3, b_3[$	1.375	1.5	1.4375	0.053
$[a_4, b_4[$	1.4375	1.5	1.46875	0.0260
$[a_5, b_5[$	1.46875	1.5	1.484375	0.01189
$[a_6, b_6[$	1.484375	1.5	1.4921875	0.0047

la solution approximé au 10^{-2} est 1,4921875

1.2 Méthode du point fixe (approximation successive)

Définition 1.2.1. (Point fixe)

Soit $g(x)$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ On dit que α est un point fixe de g sur $[a, b]$ si $g(\alpha) = \alpha$

Interprétation géométrique : Point fixe d'une fonction g est l'abscisse (et l'ordonnée) du point d'intersection de la courbe $y = g(x)$ et la première bissection $y = x$.

Exemple 1.2.2. $g(x) = x^2$ admet deux points fixe dans \mathbb{R} car $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$

Théorème 1.2.3. Soit à résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $[a, b]$ On considère g une fonction définie sur $[a, b]$ telle que :

- i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$
- ii) $\forall x \in [a, b]; g(x) \in [a, b]$ Autrement dit : g est stable dans $[a, b]$.
- iii) g est contractante i.e. : Il existe une constante $k \in]0, 1[$ telle que :

$$|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b]$$

Alors la fonction $g(x)$ admet un point fixe unique $\alpha \in [a, b]$ vérifiant $f(\alpha) = 0$

α est la limite de la suite définie par : $\begin{cases} x_0 \in [a, b], \\ x_{n+1} = g(x_n). \end{cases}$

Et on a l'estimation suivante :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0|$$

Remarque. -la solution α s'appelle point fixe de g

- Il existe de nombreuses transformations d'une équation $f(x) = 0$ pour former $g(x) = x$.

Exemple 1.2.4. On $f(t) = e^{-t} - 2t + 1 = 0$ peut être écrite comme suite :

$$t = g(t) \Leftrightarrow \begin{cases} t = e^{-t} - t + 1 = g_1(t), \\ t = \frac{e^{-t} + 1}{2} = g_2(t), \\ t = -\ln(2t - 1) = g_3(t), \end{cases}$$

Il est souvent difficile de vérifier la contraction de g sur $[a, b]$ d'où on utilise la proposition suivante :

Proposition 1.2.5. Si g est dérivable dans $[a, b]$ alors g est contractante si et seulement si il existe un réel $k < 1$ tel que pour tout $x \in [a, b]$ on ait :

$$\sup |g'(x)| \leq k < 1$$

Critère d'arrêt : On définit un critère d'arrêt ou , on calcule le nombre d'itérations n suffisant pour avoir une valeur approchée x_n de α à ε près avec le même Principe que la dichotomie.

C'est à dire :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0| < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{\ln(\frac{\varepsilon(1-k)}{x_1 - x_0})}{\ln k}$$

On obtient : $n = \lceil \frac{\ln(\frac{\varepsilon(1-k)}{x_1 - x_0})}{\ln k} \rceil + 1$

Exemple 1.2.6. Soit $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ avec $x \in [1, 2]$

Trouver une valeur approchée de la solution α de $f(x) = 0$ par la méthode de point fixe, en prenant 4 chiffres près.

1.2.7 Méthode de Newton-Raphson (méthodes des tangentes)

On suppose que f est de classe C^2 au voisinage de α (deux fois continuellement dérivable au voisinage de α)

Le développement de Taylor d'ordre deux de f nous donne :

$$f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(c)}{2}(\alpha - x_n)^2 \text{ ou } c \in]\alpha; x_n[$$

Et comme $f(\alpha) = 0$, en supposant que $f'(x_n) \neq 0$, on aura :

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(x_n - \alpha)^2$$

En négligeant le reste $R = -\frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(x_n - \alpha)^2$, la quantité qu'on notera x_{n+1} constitue alors une valeur approchée de $x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Et la formule de récurrence de Newton est donnée par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Théorème 1.2.8. (de convergence)

Soit f une fonction de classe $C^2([a, b])$ vérifiant les conditions suivantes :

- i) $f(a)f(b) < 0$
- ii) $f'(x), f''(x)$ sont non nuls et gardent des signes constants pour $x \in [a, b]$

Alors, pour un choix de x_0 tel que $f''(x_0).f(x_0) > 0$, la suite :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

converge vers l'unique solution α de $f(x) = 0$

Et on a l'estimation d'erreurs suivante :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{M}{2m}|x_{n-1} - x_n|^2$$

Où : $M = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ et $m = \inf_{x \in [a, b]} |f'(x)|$

Exemple 1.2.9. soit la fonction $f(x) = x^3 + x - 1$

Utiliser la méthode de Newton pour approcher α la racine de f avec deux chiffres significatifs exacts.

1.3 Ordre de convergence

Définition 1.3.1. Soit $m \in \mathbb{N}$ On dit qu'une méthode convergente est d'ordre m s'il existe une constante K telle que

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq K|x_n - \alpha|^m$$

- Si $m = 1$ (et $K < 1$) on parle de convergence linéaire
- Si $m = 2$ on parle de convergence quadratique.
- Si $m = 3$ on parle de convergence cubique.

Exemple 1.3.2. Dans la méthode de Newton-Raphson on :

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq K|x_n - \alpha|^2$$

avec $K = \frac{\sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|}{\inf_{x \in [a,b]} |f'(x)|}$

Cette dernière inégalité montre que la convergence est bien quadratique.

Théorème 1.3.3. Soit $g : I = [a, b] \rightarrow [a, b]$ de classe C^m , avec $m \in \mathbb{N}$. On suppose que g admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$ vérifiant $|g'(\alpha)| < 1$. donc si

$$g'(\alpha) = \dots = g^{(m-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } g^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

alors l'ordre de convergence de (x_n) tel que $x_{n+1} = g(x_n)$ est égal à m .

1.4 Exercices

Exercice 1.4.1. Soit la fonction :

$$f(x) = x^2 - \ln(1 + x)$$

1. Montrer graphiquement que la fonction $f(x)$ admet deux racines l'une évidente que l'on précisera et localiser l'autre dans un intervalle de longueur 0,5
2. Écrire l'Algorithme de Dichotomie et donner la valeur approchée de cette racine (donner les 7 premières itérations)
3. Quel est le nombre d'itération qui assure que l'erreur soit inférieure à 10^{-6}

Exercice 1.4.2. Soit l'équation $f(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 1 = 0$, $x \in [0, 7]$.

1. Montrer que $f(x) = 0$ admet trois racines réelles $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < 7$.
2. Utilisant la méthode de la bisection, trouver une approximation de α_2 avec la précision 10^{-3}
3. A l'aide de la méthode du point fixe, déterminer une fonction g telle que $g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$ pour laquelle l'itération converge plus rapidement vers la plus grande racine α_3 avec une précision de 10^{-2} .
4. Par la méthode de Newton, trouver une approximation de la plus petite racine α_1 avec une précision de 10^{-2} .

Exercice 1.4.3. On veut calculer l'unique racine positive r de l'équation $f(x) = 0$ où

$$f(x) = e^x - x - 2$$

On vous propose d'appliquer 2 méthodes de points fixes, basées sur les fonctions suivantes :

$$g_1(x) = e^x - 2$$

$$g_2(x) = \ln(2 + x)$$

1. Comment ces fonctions g_1 et g_2 ont-elles été obtenues ?
2. Dans quel intervalle de longueur 1 se trouve cette racine ? (justifier)
3. En déduire si les méthodes de points fixes utilisant g_1 et g_2 convergent, et leur ordre de convergence le cas échéant.
4. Faire 5 itérations à partir de $x_0 = 1$ pour chacune des 2 méthodes de point fixe.

5. Déterminer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour avoir une erreur inférieure à 10^{-6} , lorsqu'on a choisi $x_0 = 1$ et la fonction g_2 .
6. Appliquer la méthode de Newton à l'équation de départ et faites 5 itérations à partir de $x_0 = 1$.
7. Pour quelles valeurs de x_0 ne peut-on pas démarrer la méthode de Newton ?

Exercice 1.4.4. Le but de cet exercice est de calculer α la racine cubique de 2 ($\alpha = \sqrt[3]{2}$)

1. À l'aide de la méthode de **Newton** montrer comment trouver un algorithme pour le calcul de α avec une erreur inférieure à 10^{-3} .
2. Appliquer la méthode de sécante pour calculer α avec une erreur inférieure à 10^{-3} .
3. Soit g la fonction définie sur $[1, 2]$ par : $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3x^2}$
 - a) Faire l'étude complète de la fonction g . et montrer que $g(\alpha) = \alpha$
 - b) montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n), \\ x_0 \in [1, 2] \end{cases}$ converge vers α
 - c) Déterminer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour avoir une erreur inférieure à 10^{-3} , lorsqu'on a choisi $x_0 = 1$
4. Soit la fonction $g_\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g_\omega(x) = (1 - \omega)x^3 + (1 - \frac{\omega}{3})x + 2(\omega - 1) + \frac{2\omega}{3x^2}, \omega \in \mathbb{R}$$

et la suite de la méthode de points fixe $x_{n+1} = g_\omega(x_n)$ x_0 donné

- a) Pour quelles valeurs du paramètre ω on a α est un point fixe de $g_\omega(x)$
- b) Pour quelles valeurs du paramètre ω la méthode de points fixe $x_{n+1} = g_\omega(x_n)$ est d'ordre 2 ?
- c) Existe-t-il des valeurs du paramètre ω pour lesquelles la méthode de point fixe $x_{n+1} = g_\omega(x_n)$ est-elle d'ordre 3 ?

Exercice 1.4.5. On considère la fonction

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{3}{2}$$

dans l'intervalle $[0; 1]$.

1. *Montrer que la fonction f a un zéro \bar{x} dans $[0; 1]$ et que ce zéro est unique.*
2. *Écrire la méthode de Newton pour calculer le zéro \bar{x} . Que peut-on dire de la convergence de cette méthode ? Et quel est son ordre de convergence ?*
3. *peut-on appliquer la méthode de la bisection pour calculer le zéro \bar{x} ? Justifier la réponse.*
4. *On veut utiliser maintenant une méthode de point fixe pour calculer \bar{x} et on considère la fonction*

$$\Phi_\omega(x) = \omega \log\left(\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{3}{2}\right) + (1 - \omega)x,$$

ou ω est un paramètre réel. Pour quelles valeurs de ω le zéro \bar{x} de la fonction f est un point fixe de la fonction Φ_ω ?

5. *Donner les valeurs du paramètre ω pour lesquelles cette méthode de point fixe est convergente.*

Chapitre 2

Résolution des systèmes linéaires

2.1 Systèmes linéaires

Introduction :

Un système linéaire de n équations à n inconnues est un ensemble de relations algébriques de la forme : (a_{ij} et b_i donnés)
$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. \dots\dots\dots(1)$$

on peut écrire celles-ci comme

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_j, i = 1, \dots, n \quad (1)$$

où les x_j sont les inconnues, les a_{ij} les coefficients du système et les b_i les composantes du second membre. Très souvent, il est commode d'écrire le système (1) sous la forme matricielle

$$AX = b$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ la matrice des coefficients}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ le vecteur colonne du second membre et}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ le vecteur colonne inconnu}$$

- Définition 2.1.1.**
1. une matrice carrée A est dite régulière si $\det A \neq 0$ et singulière si non.
 2. Si A et B sont deux matrices carrées $n \times n$; $AB = BA = I$, alors B est dite matrice inverse de A et on la note : $B^{-1} = A^{-1}$
 3. Chaque matrice carrée régulière A possède une seule matrice inverse

$$A^{-1} = \frac{(A^*)^t}{\det A}$$

telle que A^* est la matrice de cofacteurs appelée aussi matrice adjointe.

La résolution du système précédent $AX = b$ peut s'effectuer par plusieurs méthodes :

- Une méthode classique (Cramer).
- Les méthodes directes.
- Les méthodes itératives.

2.2 Méthode de Cramer

Cette méthode repose sur les déterminants. Si $\det A \neq 0$ alors le système $AX = b$ admet une solution unique X donnée par :

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad i = 1, \dots, n$$

Où A_i est la matrice obtenue en remplaçant dans A , la $i^{\text{ème}}$ colonne par b .

Numériquement : on calcule : $\det A_i$, $\det A$ et $\frac{\det A_i}{\det A}$ donc pour résoudre un système d'ordre n Cramer nécessite $(n+1)^2 n!$ opérations.

Exemple 2.2.1. Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} t_1 + 2t_2 + 3t_3 = 1 \\ 3t_1 + 8t_2 + 13t_3 = 5 \\ 2t_1 + 9t_2 + 18t_3 = 11 \end{cases} \quad \dots (S_1)$$

$$\text{On a } \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 13 \\ 2 & 9 & 18 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

Donc le système (S_1) admet une solution unique et on a la solution est

$$t_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 13 \\ 11 & 9 & 18 \end{pmatrix}}{4} = 1$$

$$t_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 13 \\ 2 & 11 & 18 \end{pmatrix}}{4} = -3$$

$$t_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 5 \\ 2 & 9 & 11 \end{pmatrix}}{4} = 2$$

2.3 Les Méthodes directes

Une méthode est dite directe, si elle donne au bout d'un nombre fini d'opérations (acceptable) une solution exacte du problème.

Permet ces méthodes on a :

- a) Méthode de Gauss
- b) Méthode de Gauss-Jordan
- c) Méthode de décomposition de A en LU
- d) Méthode de Cholesky.

qui sont utilisées généralement lorsque $n \leq 100$.

2.4 Élimination de Gauss(Méthode du pivot de Gauss)

La méthode de Gauss engendre un algorithme fini exact dont l'idée est de transformer le système initial en un système triangulaire (inférieur ou supérieur).

Exemple 2.4.1. Soit à résoudre le système (S_1)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 8x_2 + 13x_3 = 5 \\ 2x_1 + 9x_2 + 18x_3 = 11 \end{cases} \quad \text{ce système s'écrit encore } AX = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 13 \\ 2 & 9 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

1ère étape : $a_{11}^{(1)} = 1 \neq 0$ on obtient

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 13 & 5 \\ 2 & 9 & 18 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

2ème étape $a_{22}^{(2)} = 2 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 12 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

alors la solution du système est (1;-3; 2)

Soit A une matrice d'ordre n régulière

Principe :

Transformation de la matrice A en une matrice triangulaire supérieure.

Pour cela, on construit $[A, b]$ et

$$[A, b] \xrightarrow{\text{transformation}} [A^{(n)}, b^{(n)}]$$

Où $A^{(n)}$ est une matrice triangulaire supérieure

Puis, on résout le système $A^{(n)}X = b^{(n)}$ dont X est la solution exacte du système $AX = b$ On procède de la manière suivante :

Étapes

1^{ère} Étape

On pose $A = A^{(1)}$, $b = b^{(1)}$

Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$ (pivot de la première étape) on fait les opérations suivantes :

$$\begin{cases} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)} \end{cases} \quad \text{on obtient alors :}$$

$$[A^{(2)}; b^{(2)}] = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \dots a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1}^{(2)} & \dots a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

k^{ème} Étape

Si $a_{kk}^{(k)} \neq 0$

$$\begin{cases} L_k^{(k+1)} = L_k^{(k)} \\ L_i^{(k+1)} = L_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} L_k^{(k)} \quad i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

et

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}, \quad i = k+1, \dots, n; \quad j = k+1, \dots, n$$

$$a_{ik}^{(k+1)} = 0 \quad i = k+1, \dots, n$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}$$

Résolution de $A^{(n)}X = b^{(n)}$

$AX = b \Leftrightarrow A^{(n)}X = b^{(n)}$ c'est à dire le système triangulaire

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(n)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{nn}^{(n)} x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

On commence par déterminer x_n puis $x_{n-1} \dots$ (résolution par retour en arrière).

- Remarque.**
1. La méthode de Gauss nécessite $\frac{2}{3}n^3$ opérations pour résoudre un système d'ordre n
 2. Si l'un des pivots est nul, on permute la ligne du pivot avec une ligne supérieure.
 3. la méthode de Gauss permet de calculer $\det A = (-1)^p \prod_{k=1}^n a_{kk}^{(k)}$ où p est le nombre de permutation de lignes.

2.5 Méthode de Gauss-Jordan

Soit A une matrice d'ordre n régulière

Principe

Transformation de la matrice A en la matrice identité i.e $[A : b] \rightarrow$ Transformation $[I : b']$ où I est la matrice identité d'où $Ax = b \Leftrightarrow Ix = b' \Leftrightarrow x = b'$

Étapes

1^{ère} Étape

On pose $A = A^{(1)}, b = b^{(1)}$

Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$ (pivot de la première étape) on fait les opérations suivantes :

$$\begin{cases} L_1^{(2)} = \frac{1}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)} \\ L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - a_{i1}^{(1)} L_1^{(2)} \quad i = 2, \dots, n \end{cases} \quad \text{on obtient alors :}$$

$$[A^{(2)}; b^{(2)}] = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

k^{ème} Étape

Si $a_{kk}^{(k)} \neq 0$

$$\begin{cases} L_k^{(k+1)} = \frac{1}{a_{kk}^{(k)}} L_k^{(k)} \\ L_i^{(k+1)} = L_i^{(k)} - a_{ik}^{(k)} L_k^{(k+1)} \quad i = 1, \dots, n; i \neq k \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} a_{kj}^{(k+1)} = \frac{a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k+1)} \quad i = 1, \dots, n; i \neq k \quad j = k+1, \dots, n \\ b_k^{(k+1)} = \frac{b_k^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - a_{ik}^{(k)} b_k^{(k+1)} \quad i = 1, \dots, n; i \neq k \end{cases}$$

Remarque. 1. La méthode de Gauss-Jordan nécessite n^3 Opérations pour un système d'ordre n .

2. Elle est aussi conseillée pour inverser une matrice

$$[A : I] \rightarrow \text{Transformation } [I : A^{-1}]$$

Exemple 2.5.1. résoudre le système (S_1) par la méthode de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} t_1 + 2t_2 + 3t_3 = 1 \\ 3t_1 + 8t_2 + 13t_3 = 5 \\ 2t_1 + 9t_2 + 18t_3 = 11 \end{cases}$$

2.6 Méthode de la Décomposition LU

Soit à résoudre le système $AX = b \dots (1)$.

Principe : mettre la matrice A sous forme LU Où :

L : matrice triangulaire inférieure.

U : matrice triangulaire supérieure .

Donc la résolution de système (1) devient :

$$AX = b \Leftrightarrow L.U.X = b \Leftrightarrow \begin{cases} LY = b \dots (2) \\ UX = Y \dots (3) \end{cases}$$

Donc la résolution de $AX = b$ revient à la résolution des deux systèmes triangulaires (2) et (3)

Question : Sous quelles conditions à priori, la matrice A admet une décomposition $L.U$?

Théorème 2.6.1. Soient A une matrice régulière d'ordre n et $A_{(k)}_{1 \leq k \leq n-1}$ les sous matrices principales d'ordre k de A .

A se décompose sous forme $L.U$ si et seulement si : $\det A_{(k)} \neq 0 \forall k, 1 \leq k \leq n-1$

Remarque. Il faut souligner que la décomposition de la matrice A en produit de deux matrice $L.U$ n'est pas unique.

- Selon la **décomposition de Crout** on pose $u_{ii} = 1, i = 1, \dots, n$ dans ce cas $\det A = \det L = \prod_{i=1}^n l_{ii}$
- la **décomposition de Doolittle** on pose $l_{ii} = 1, i = 1, \dots, n$ dans ce cas $\det A = \det U = \prod_{i=1}^n u_{ii}$

Exemple 2.6.2.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 0 & -4 & \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 \\ & 1 & -0,5 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

décomposition de Crout de plus on $\det A = 2 \times (-4) \times 4 = -32$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ & -4 & 2 \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

décomposition de Doolittle et on $\det A = 2 \times (-4) \times 4 = -32$

Algorithme de Doolittle

- pour $k = 1 : n$
- pour $j = 1 : n$
- $u_{kj} = a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}u_{rj}$
- fin
- pour $i = k + 1 : n$
- $l_{ik} = \frac{1}{u_{kk}}(a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir}u_{rk})$
- fin
- fin

2.7 Méthode de Cholesky

Définition 2.7.1. A est dite symétrique si

$$A = A^t \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}; \quad i, j = 1, \dots, n$$

Définition 2.7.2. A est dite définie positive si $\det A_{(k)} > 0 \forall k, 1 \leq k \leq n$ avec $A_{(k)}_{1 \leq k \leq n}$ les sous matrices principales.

Exemple 2.7.3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

Théorème 2.7.4. Si A est une matrice carrée d'ordre n , régulière, symétrique et définie positive, alors elle peut être décomposée sous la forme $A = L.L^t$ avec L est une matrice triangulaire inférieure.

Principe :

A est une matrice symétrique et définie positive on aura :

$$AX = b \Leftrightarrow (LL^t)X = b \Leftrightarrow L \underbrace{(L^t X)}_Y = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} LY = b \\ L^t X = Y \end{cases}$$

Algorithme de Cholesky :

Pour le calcul de L , on utilise la procédé d'identification qu'on appelle « Algorithme de Cholesky ». On multiplie les matrices L et L^t , puis on identifie les coefficients respectifs dans l'égalité : $A = L.L^t$ colonne par colonne on obtient :

1^{ère} colonne

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} \text{ et } l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}, \quad i \geq 2$$

2^{ème} colonne

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}.$$

$$l_{i2} = \frac{1}{l_{22}}(a_{i2} - l_{i1}l_{21}), \quad 3 \leq i \leq n$$

Ainsi à la $k^{\text{ème}}$ colonne :

On a l'algorithme suivant :

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}, \quad 2 \leq k \leq n.$$

$$l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}}(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}l_{kj})$$

Remarque. 1. La méthode de Cholesky nécessite $\frac{n^3}{3}$ opérations élémentaires (meilleure que celle de Gauss).

2. $\det A = \det(L.L^t) = (\det L)^2 = \prod_{i=1}^n l_{ii}^2$

Proposition 2.7.5. *Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n . Elle est dite définie positive si elle vérifie la propriété suivantes :*

Toutes les valeurs propres de A (qui sont nécessairement réelles) sont strictement positives.

Exemple 2.7.6. *Soit le système*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

On a A est symétrique car $a_{ij} = a_{ji}$ et définie positive

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{5}{2}} & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{9}{10}} & \sqrt{\frac{3}{5}} \end{pmatrix}$$

2.8 Exercices

Exercice 2.8.1. 1. Résoudre le système triangulaire suivant $AX = b$
où :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 20 \end{pmatrix}$$

2. Calculer le déterminant de A et A^{-1} .

Exercice 2.8.2. Soit la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

1. Prouver que le système $AX = b$ admet une solution unique.

2. Trouver la solution de système $AX = b$ pour $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

3. Résoudre le système linéaire $AX = b$ par la méthode de remontée (solution en fonction de $b_1; b_2; b_3$ et b_4). En déduire A^{-1}

Exercice 2.8.3. Soit le système suivant :

$$(S_1) : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_4 = 2 \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 = -9 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 2 \\ -3x_2 - 12x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

1) Mettre le système (S_1) sous forme matricielle $AX = b$.

2) Résoudre ce système par la méthode de Gauss et déduire $\det A$

3) calculer la matrice A^{-1} .

4) Prouver que A admet une décomposition LU et calculer L et U

Exercice 2.8.4. Soit le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} t_1 + 2t_2 - 3t_3 = -1 \\ 2t_1 + 5t_2 - 4t_3 = -3 \\ -3t_1 - 4t_2 + 14t_3 = 1 \end{cases}$$

1) Mettre le système (S) sous forme matricielle $AT = b$.

- 2) Résoudre ce système par la méthode de Gauss et déduire $\det A$
- 3) calculer A^{-1} .
- 4) Résoudre ce système par la méthode de décomposition LU (Dollittle)
- 5) Montrer que A est symétrique définie positive.
- 6) Résoudre alors le système (S) par la méthode de Choleski.

2.9 Les méthodes itératives

Lorsque n est très grand la résolution des systèmes $AX = b$ pour les matrices directes devient très compliquée.

Donc on applique des méthodes, dites itératives

Définition 2.9.1. Une méthode itérative de résolution de $AX = b$, consiste d'abord à passer au système $X = B.X + C$ (que l'on déterminera) et sa solution est alors la limite de la suite définie par : $X^{(k+1)} = B.X^{(k)} + C$

D'une manière générale : On décompose A sous forme $A = M - N$ avec M facilement inversible. Alors :

$$A.X = b \Leftrightarrow (M - N).X = b \Leftrightarrow X = M^{-1}.N.X + M^{-1}.b$$

On pose :

$$B = M^{-1}.N \text{ et } C = M^{-1}.b$$

On obtient : $X = B.X + C$

En utilisant le principe du théorème de point fixe, on construit la suite :

$$X^{(k+1)} = B.X^{(k)} + C$$

Les méthodes itératives qu'on va voir sont :

- a) Méthode de Jacobi
- b) Méthode de Gauss-Seidel
- c) Méthode de Relaxation

2.9.2 Méthode de Jacobi

On suppose que les $a_{ii} \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$

On décompose la matrice A sous forme :

$$A = D - L - U = D - (L + U)$$

avec $D = (a_{ii})_{i=1, \dots, n}$ Diagonale de A

$$L = \begin{cases} -a_{ij}, & \text{si } i > j \\ 0, & \text{si } i \leq j \end{cases}$$

$$\text{et } U = \begin{cases} -a_{ij}, & \text{si } i < j \\ 0, & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

On pose $M = D$, $N = L + U$

et on a $B = M^{-1}.N$ donc la matrice de Jacobi $B_j = D^{-1}.(L + U)$ et $C = D^{-1}.b$ Et l'algorithme de Jacobi s'écrit :

$$\begin{cases} X^{(k+1)} = B_J.X^{(k)} + C, & \text{avec } X^{(0)} \text{ donné} \\ B_J = M^{-1}.N = D^{-1}.(L + U) & \text{et } C = D^{-1}.b \end{cases}$$

Ou encore $X^{(0)}$ donné

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} [b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}], \quad i = 1, \dots, n$$

Exemple 2.9.3. Soit le système

$$\begin{cases} 4t_1 + 2t_2 + t_3 = 4 \\ -t_1 + 2t_2 = 2 \\ 2t_1 + t_2 + 4t_3 = 9 \end{cases} \quad \text{On a } D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc la matrice de Jacobi $B_J = D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

2.9.4 Méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel est une amélioration de la méthode de Jacobi dans laquelle les valeurs calculées sont utilisées au fur et à mesure du calcul et non à l'issue d'une itération comme dans la méthode de Jacobi.

dans ce cas on prend : $M = D - L$ et $N = U$

donc la matrice de Gauss-Seidel $B_{G,S} = M^{-1}.N = (D - L)^{-1}.U$

Et l'algorithme de Gauss-Seidel s'écrit :

$$\begin{cases} X^{(k+1)} = B_{G,S}.X^{(k)} + C, & \text{avec } X^{(0)} \text{ donné} \\ B_{G,S} = M^{-1}.N = (D - L)^{-1}.U & \text{et } C = (D - L)^{-1}.b \end{cases}$$

Ou encore $X^{(0)}$ donné

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} [b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}], \quad i = 1, \dots, n$$

Exemple 2.9.5. Soit le système

$$\begin{cases} 4t_1 + 2t_2 + t_3 = 4 \\ -t_1 + 2t_2 = 2 \\ 2t_1 + t_2 + 4t_3 = 9 \end{cases} \quad \text{On a } D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

la matrice de Gauss-Seidel $B_{G,S} = (D - L)^{-1}.U = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{5}{16} & \frac{5}{32} \end{pmatrix}$

2.9.6 Convergence des méthodes itératives

Considérons, de façon générale le processus itératif :

$$X^{(k+1)} = B.X^{(k)} + C \dots (1)$$

Théorème 2.9.7. (de convergence)

l'itération définie par (1) converge quelque soit l'approximation de départ $X^{(0)}$ si $\rho(B) < 1$ où $\rho(B)$ est le rayon spectrale de la matrice B définie par

$$\rho(B) = \{\max(|\lambda_i|), (\lambda_i) \text{ les valeurs propres de la matrice } B\}$$

Exemple 2.9.8. le rayon spectrale de la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\rho(B) = 2 + \sqrt{3}$ car les valeurs propres de B sont : $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2 - \sqrt{3}, \lambda_3 = 2 + \sqrt{3}$

Définition 2.9.9. Normes matricielles

On appelle norme matricielle $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) est une application $\|\cdot\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant

- $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n, \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (inégalité triangulaire)
- $\forall A \in \mathcal{M}_n, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ (homogénéité)
- $\forall A \in \mathcal{M}_n, \|A\| = 0 \Rightarrow A = 0_{\mathcal{M}_n}$
- $\|A.B\| \leq \|A\| \|B\|$

Remarque. En pratique, on utilise les normes canoniques (facilement calculables) :

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2}$$

Exemple 2.9.10. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ alors on a :

$$\|A\|_1 = \max(|1| + |-2|, |-1| + |3|, |4| + |1|) = 5$$

$$\|A\|_\infty = \max(|1| + |-1|, |-2| + |4|, |3| + |1|) = 6$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{1 + 4 + 1 + 9 + 16 + 1} = 5,65$$

Proposition 2.9.11. *Pour toute norme matricielle $\|\cdot\|$ et pour toute matrice B :*

$$\rho(B) \leq \|B\|$$

Théorème 2.9.12. $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, s'il existe une norme matricielle $\|\cdot\|$ telle que $\|B\| < 1$ alors :

la méthode itératif $X^{(k+1)} = B.X^{(k)} + C$ converge quelle que soit $X^{(0)}$

Définition 2.9.13. Une matrice A est dite à diagonale strictement dominante, si : $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$; $i = 1, \dots, n$

Exemple 2.9.14. la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est à diagonale strictement dominante car : $4 > 2 + 1$ et $2 > 1 + 0$ et $4 > 2 + 1$

Théorème 2.9.15. Si A est une matrice à diagonale strictement dominante alors les deux méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel sont convergentes.

Théorème 2.9.16. Si la matrice A est une matrice symétrique définie positive, alors la méthode de Gauss-Seidel est convergente.

Théorème 2.9.17. Si les deux matrices A et $2D - A$ sont symétriques définies positives, alors la méthode de Jacobi est convergente.

Définition 2.9.18. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont on note les coefficients a_{ij} , est dite **tridiagonale** si :

$$a_{ij} = 0 \text{ pour tous } (i, j) \text{ tels que } |i - j| > 1,$$

Proposition 2.9.19. Si la matrice A est tridiagonale alors : $\rho(B_{G.S}) = \rho(B_J)^2$

Exemple 2.9.20. la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ est tridiagonale

2.9.21 Méthode de Relaxation

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ régulière dont tous les termes diagonaux $a_{ii} \neq 0, i = 1, \dots, n$

Nous écrivons la matrice A sous la forme

$$A = D - L - U$$

Si ω est un nombre réel non nul (appelé paramètre de relaxation), nous pouvons aussi écrire

$$A = \frac{1}{\omega}D - L - \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + U\right)$$

et par suite, nous posons $M = \frac{1}{\omega}D - L$ et $N = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + U\right)$

donc $AX = b \Leftrightarrow X = B_\omega X + C$ avec la matrice de relaxation

$$B_\omega = \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + U\right)$$

Et l'algorithme de Relaxation s'écrit :

$$\begin{cases} X^{(k+1)} = B_\omega \cdot X^{(k)} + C, & \text{avec } X^{(0)} \text{ donné} \\ B_\omega = \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + U\right) & \text{et } C = \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1} \cdot b \end{cases}$$

Ou encore $X^{(0)}$ donné

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j < i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j > i} a_{ij}x_j^{(k)} \right], i = 1 \dots n$$

Théorème 2.9.22. *Si A est une matrice tridiagonale définie positive, alors la méthode de Jacobi et la méthode de Relaxation sont convergentes lorsque $0 < \omega < 2$. De plus, il existe un et un seul paramètre de Relaxation optimale*

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B_J)^2}}$$

où $\rho(B_J)$ est le rayon spectral de la matrice de Jacobi.

Exemple 2.9.23. *On considère le système :*
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 = 5, \end{cases}$$

on a la matrice de relaxation $B_\omega = \begin{pmatrix} 1 - \omega & \frac{\omega}{2} \\ \frac{\omega}{2}(1 - \omega) & 1 - \omega + \frac{\omega^2}{4} \end{pmatrix}$

et $\rho(B_J) = \frac{1}{2}$ et $\omega_{opt} = 8 - 4\sqrt{3}$

2.10 Exercices

Exercice 2.10.1. (Concours 2013)

On considère le système linéaire suivant :

$$(S_2) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -30 \\ -x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

1. Prouver que le système (S_2) admet une solution unique.
2. Calculer les matrices de l'itération de Jacobi, de Gauss-Seidel et de Relaxation.
3. Prouver que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel divergent. (utiliser le rayon spectral).

Exercice 2.10.2. Soit donné le système d'équations linéaires suivantes

$$\begin{cases} 2t_1 + t_2 + t_3 = 1 \\ t_1 + 2t_2 + t_3 = 3 \\ t_1 + t_2 + 4t_3 = 8 \end{cases}$$

- 1- Étudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.
- 2- En partant de l'approximation initiale $t^{(0)} = [0, 1, 0]^T$, Trouver la valeur approchée de la solution du système donné $(T^{(4)})$ par la méthode de Jacobi et Gauss Seidel et Relaxation.

Exercice 2.10.3. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Écrire les algorithmes de Jacobi et Gauss-Seidel appliqués à $Ax = b$.
2. Montrer que ces algorithmes convergent.
3. Calculer $J, \|J\|_\infty, \rho(J)$ et $G, \|G\|_\infty, \rho(G)$. (J matrice de Jacobi et G matrice de Gauss-Seidel)
4. Pour $x^0 = (0, 0, 0)^T$ et $\varepsilon = 10^{-6}$, calculer les nombres d'itérations k_1 et k_2 à effectuer par ces deux algorithmes pour avoir respectivement : $\|x^{(k)} - x\|_\infty \leq \varepsilon, \forall k \geq k_1$ par Jacobi et $\|x^{(k)} - x\|_\infty \leq \varepsilon, \forall k \geq k_2$ par Gauss-Seidel.

Exercice 2.10.4. Soit le système :

$$S_\alpha : A_\alpha X = b_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x_1 - x_2 + 2x_3 = \alpha + 2 \\ \alpha x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = \alpha + 1 \end{cases}$$

1. Calculer, par **élimination de Gauss**, la solution exacte X du système (S_α) . et déduire $\det A_\alpha$
2. Pour quelles valeurs de α la matrice A_α est à diagonale strictement dominante par ligne
3. On suppose $\alpha = 1$
 - a) Donner la matrice de **Jacobi** B_J pour le système (S_1)
 - b) Étudie la convergence de la méthode de **Jacobi** (pour $\alpha = 1$)
 - c) Trouver $B_{G.S}$ et calculer $X^{(3)}$ par la méthode de **Gauss-Seidel** avec $X^{(0)} = (0, 0, 0)$

Chapitre 3

Interpolation polynômiale

Introduction :

Soit $y = f(x)$ une fonction dont on ne connaît que les valeurs y_i qu'elle prend aux $(n + 1)$ points distincts $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ on a donc : $f(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$.

Problème :

Déterminer un polynôme $P_n(x_i) = y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$ de manière à pouvoir estimer les valeurs $f(x)$ au moyen de $P_n(x)$ pour x tel que : $\min x_i \leq x \leq \max x_i$

C'est ce qu'on appelle Interpolation de la fonction f par le polynôme $P_n(x)$ aux points x_0, x_1, \dots, x_n

avec $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

Définition 3.0.1. *Le polynôme $P(x)$ est dit polynôme d'interpolation de f aux points $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ si :*

$$\begin{cases} \text{degré de } p \leq n \\ P(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n \end{cases} \dots\dots\dots(1)$$

Théorème 3.0.2. *Si les points x_i sont distincts, alors le polynôme d'interpolation de f aux points $x_i, i = 0, 1, \dots, n$, existe et il est unique*

Comment construire ce polynôme d'interpolation ?

3.1 Méthodes utilisées :

3.1.1 Matrice de Vandermonde

Une première tentative consiste à déterminer les inconnues a_i du polynôme $P_n(x)$ en vérifiant directement les $(n + 1)$ équations de collocation :

$P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ ou encore $a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n = f(x_i)$ qui est un système linéaire de $(n + 1)$ équations en $(n + 1)$ inconnues. Ce système s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Définition 3.1.2. la matrice associée aux points x_0, x_1, \dots, x_n est la matrice de Vandermonde

Exemple 3.1.3. On doit calculer le polynôme passant par les points $(0, 1); (1, 2); (2, 9)$ et $(3, 28)$. Étant donné ces 4 points, le polynôme recherché est tout au plus de degré 3 : Ses coefficients a_i sont solution de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 28 \end{pmatrix}$$

dont la solution est $(1, 0, 0, 1)$. Le polynôme recherché est : $P_3(x) = 1 + x^3$

3.1.4 Méthode de Lagrange

Les polynômes de Lagrange notés $L_i(x)$, sont définies par :

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Les polynômes $L_i(x)$ sont de degré $\leq n$ et vérifient

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i=j \end{cases}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot L_i(x)$$

est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points x_i , $i = 0, 1, \dots, n$

Exemple 3.1.5. Construire le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $y = f(x) = \sin \pi x$, pour les points $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

Remarque. Les polynômes de Lagrange s'adaptent mal aux changements de points (si on ajoute un point on doit refaire tous les calculs)

Question : La méthode suivante permet-elle de compléter les valeurs déjà obtenues sans refaire tous les calculs ?

3.1.6 Méthodes de Newton

Différences divisées d'une fonction

On considère l'expression suivante :

$$P_n(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)(t - t_1) \\ + \dots + a_n(t - t_0) \dots (t - t_{n-1}) \dots (1)$$

Pour le calcul de a_0 on utilise le fait que : $f(t_0) = P_n(t_0) = a_0$

Pour a_1 , $f(t_1) = P_n(t_1) \Rightarrow a_1 = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$

On procède de la même manière jusqu'à l'obtention de a_n .

Définition 3.1.7. Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ et t_0, t_1, \dots, t_n ($n + 1$) points de $[a, b]$ distincts.

On appelle différences divisées de f d'ordre successifs $0, 1, \dots, n$ les expressions suivantes :

— d'ordre 0 : $f[t_i] = f(t_i)$

— d'ordre 1 : $f[t_i, t_j] = \frac{f(t_j) - f(t_i)}{t_j - t_i}$

— d'ordre $k > 1$: $f[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k-1}, t_{i+k}] = \frac{f[t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] - f[t_i, \dots, t_{i+k-1}]}{t_{i+k} - t_i}$

Application :

— $a_0 = f[t_0] = f(t_0)$

— $a_1 = f[t_0, t_1]$

— $a_2 = f[t_0, t_1, t_2]$

...

— $a_n = f[t_0, t_1, \dots, t_n]$

Calcul des différences divisées

t_i	$f[t_i]$	$f[t_i, t_{i+1}]$	$f[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}]$...	$f[t_i, \dots, t_{i+n}]$
t_0	$f(t_0)$				
t_1	$f(t_1)$	$f[t_0, t_1]$			
t_2	$f(t_2)$	$f[t_1, t_2]$	$f[t_0, t_1, t_2]$		
\cdot				...	
\cdot			$f[t_0, \dots, t_n]$
\cdot				...	
t_{n-1}	$f(t_{n-1})$				
t_n	$f(t_n)$	$f[t_{n-1}, t_n]$			

Exemple 3.1.8. Écrire La table de différences divisées pour les points $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 9)$ et $(3, 28)$

Remarque. Les différences divisées sont indépendantes de la numérotation des points t_i

Formules de Newton En remplaçant ces expressions dans (1) on obtient le polynôme d'interpolation de f sous forme de Newton :

$$P_n(t) = f[t_0] + f[t_0, t_1](t - t_0) + \dots + f[t_0, \dots, t_n](t - t_0)\dots(t - t_{n-1})$$

Vérifiant : $\begin{cases} \text{degré de } p \leq n \\ P(t_i) = f(t_i), i = 0, 1, \dots, n \end{cases}$

Exemple 3.1.9. Écrire le polynôme d'interpolation de Newton pour les points $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 9)$ et $(3, 28)$

Remarque. — *Avantage de la méthode :* si on ajoute p points supplémentaires, il suffit de les écrire à la suite du tableau et de compléter les différences divisées. Si l'on veut, au contraire négliger les q derniers points, il suffira d'arrêter le tableau des différences divisées aux nombres de points demandés.

3.1.10 Erreur d'interpolation

Le problème fondamental est d'étudier l'erreur commise $f(t) - P_n(t)$.

Théorème 3.1.11. Soit $[a, b]$ un intervalle contenant t_0, t_1, \dots, t_n on suppose que f est $(n + 1)$ fois dérivables sur $[a, b]$.

Alors pour tout $t \in [a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$f(t) - P_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (t - t_i) \dots (2)$$

Remarque. La formule (2) ne permet pas d'estimer d'une manière exacte la valeur de l'erreur, par contre, elle permet d'en calculer une majoration d'où :

Corollaire. Sous les hypothèses du théorème précédent on a :

$$|f(t) - P_n(t)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (t - t_i) \right|$$

Où : $M = \sup_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|$

3.1.12 Différences finies (cas des points équidistants)

Ce cas a une grande importance dans l'interpolation des fonctions données sous forme de tableau. Dans ce cas les points d'interpolation sont en progression arithmétiques, i.e. :

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_n = x_0 + nh, h > 0$$

Différences finies progressives : (non divisées)

Définition 3.1.13. Soient $f(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$ des nombres réels. On appelle différence finie d'ordre 1 l'expression

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, i = 0, 1, \dots, n - 1$$

D'ordre 2 :

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, i = 0, 1, \dots, n - 2$$

En général, une différence finie d'ordre k :

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, i = 0, 1, \dots, n - k$$

Par convention : $\Delta^0 y_i = y_i, i = 0, 1, \dots, n$

Exemple 3.1.14. Donner la table des différences finies progressives pour les points $(2, -6), (4, 2), (6, 18)$ et $(8, 42)$

Remarque. Pour $(n + 1)$ points, on peut définir que des différences finies allant jusqu'à l'ordre n .

Relation entre les différences finies progressive et les différences divisées

Théorème 3.1.15. Soit f une fonction dont on connaît les valeurs $f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, avec $x_i = x_{i-1} + h$, $h > 0$.

Alors :

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k[f(x_i)]}{h^k k!}, \quad 0 \leq i \leq i+k \leq n$$

où $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]$ est la différence divisée d'ordre k aux points $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ et $\Delta^k f(x_i)$ est la différence finie progressive d'ordre k au point $f(x_i)$.

Polynôme d'interpolation de Newton par les différences finies :

Soient x_0, x_1, \dots, x_n . $n + 1$ abscisses telles que : $x_{i+1} = x_i + h$; $i = 0, 1, \dots, n$ et $h > 0$. Le polynôme d'interpolation de f aux points x_i peut s'écrire :

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

$$+ \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Exemple 3.1.16. Calculer le polynôme d'interpolation de Newton P associé aux points $(2, -6), (4, 2), (6, 18)$ et $(8, 42)$

Différences finies régressives :

Définition 3.1.17. Soient $f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ des nombres réels. On appelle différence finie régressive d'ordre 1 l'expression

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n$$

D'ordre 2 :

$$\nabla^2 y_i = \nabla y_i - \nabla y_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n$$

En général, une différence finie d'ordre k :

$$\nabla^k y_i = \nabla^{k-1} y_i - \nabla^{k-1} y_{i-1}, \quad i = k, k + 1, \dots, n$$

Par convention : $\nabla^0 y_i = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$

Relation entre les différences finies régressives et les différences divisées

Théorème 3.1.18. Soit f une fonction dont on connaît les valeurs $f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, avec $x_i = x_{i-1} + h$, $h > 0$.

Alors :

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{\nabla^k[f(x_k)]}{h^k k!}, \quad 0 \leq i \leq i+k \leq n$$

Polynôme d'interpolation de Newton par les différences finies régressives :

Soient x_0, x_1, \dots, x_n . $n+1$ abscisses telles que : $x_{i+1} = x_i + h$; $i = 0, 1, \dots, n$ et $h > 0$. Le polynôme d'interpolation de f aux points x_i peut s'écrire :

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{\nabla f(x_1)}{1!h}(x - x_0) + \frac{\nabla^2 f(x_2)}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

$$+ \frac{\nabla^n f(x_n)}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

3.2 Polynôme d'Hermite

On peut généraliser l'interpolation de Lagrange d'une fonction f pour chercher un polynôme (courbe) qui passe pas seulement par les points $(x_i; f(x_i))$; mais dont les dérivées coïncident à certains points avec les dérivées de la fonction f .

Nous avons imposé au polynôme d'interpolation $P(x)$ de satisfaire $P(x_i) = f(x_i)$; $i = 0, 1 \dots n$

Maintenant, nous allons lui imposer de satisfaire en plus à $P'(x_i) = f'(x_i)$; $i = 0, 1 \dots n$

Définition 3.2.1. On appelle polynôme d'interpolation d'Hermite de degré inférieur ou égale à $2n + 1$ le polynôme donné par la formule :

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)H_i(x) + \sum_{i=0}^n f'(x_i)V_i(x)$$

avec

$$H_i(x) = [1 - 2(x - x_i)L'_i(x_i)]L_i^2(x)$$

$$V_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x); \quad i = 0, 1 \dots n$$

et $L_i(x)$ est le polynôme de Lagrange au point x_i .

Exemple 3.2.2. Calculer le polynôme d'Hermite $p_3(x)$ tel que : $P(0) = f(0), p'(0) = f'(0), p(5) = f(5), p'(5) = f'(5)$ pour $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

3.2.3 L'erreur d'interpolation d'Hermite

Théorème 3.2.4. Soit $[a, b]$ un intervalle contenant x_0, x_1, \dots, x_n . On suppose que f est $(2n+2)$ fois continument dérivables sur $[a, b]$. Alors, pour tout $x \in [a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$E_n(x) = f(x) - P_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} \left[\prod_{i=0}^n (x - x_i) \right]^2$$

Cette relation est l'expression analytique de l'erreur d'interpolation d'Hermite. Elle ne permet évidemment pas de calculer la valeur exacte de l'erreur, elle permet par contre, d'en calculer une majoration. D'ou

Sous les hypothèses du théorème précédent, on a

$$|f(x) - P_{2n+1}(x)| \leq \frac{\sup_{x \in [a, b]} |f^{(2n+2)}(x)|}{(2n+2)!} \left[\prod_{i=0}^n (x - x_i) \right]^2$$

3.3 Exercices

Exercice 3.3.1. On considère la table de 4 points donnée par :

t	-2	-1	1	2
$f(t)$	42	13	-3	-26

1) Déterminer le polynôme $P_3(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ qui interpole f sur cette table. (Utiliser la matrice de Vandermonde.)

2) Donner la base $[(L_i)]_{(i=1,\dots,4)}$ des polynômes de Lagrange associée aux points de la table.

3) Calculer le polynôme P d'interpolation de Lagrange.

4) Donner la base $[(N_i)]_{(i=1,\dots,4)}$ des polynômes de Newton associée aux points de la table.

5) Calculer le polynôme Q d'interpolation de Newton.

6) Calculer une estimation de $f(1.5)$

7) On ajoute la cinquième point $(3, -83)$. Calculer dans ce cas $P_4(t)$

Exercice 3.3.2. On se donne la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \frac{1}{(1+t^2)}$ et on considère les points $[(t_i)]_{(i=0)}^5$ d'abscisses $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

1) Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange P associé aux points $[(t_i)]_{(i=0)}^5$

2) Calculer les erreurs $E(1.75) = |f(1.75) - P(1.75)|$ et $E(2.75) = |f(2.75) - P(2.75)|$

3) Calculer le polynôme de Newton Q par les techniques des différences divisées.

4) Donner la formule de l'erreur théorique au points 3.75 et 4.75. comparer les résultats avec les erreurs $E(3.75) = |f(3.75) - P(3.75)|$ et $E(4.75) = |f(4.75) - P(4.75)|$. Que peut-on remarquer ?

Exercice 3.3.3. (concours 2018)

1. Calculer le polynôme d'interpolation P_2 de la fonction

$$f(x) = \cos x \text{ en les points } x_i = \frac{\pi}{2}i, \text{ avec } i = 0, 1, 2.$$

2. Soit P_3 l'interpolant de la même fonction en les points

$$x_i = \frac{\pi}{2}i, \text{ avec } i = 0, 1, 2, 3.$$

a) Y'a-t-il une relation entre P_2 et P_3 ? Est-elle généralisable ?

b) Calculer P_3 .

Exercice 3.3.4. Soient x_0, x_1, x_2 trois points d'interpolation distincts équidistant et h le pas d'interpolation. Le polynôme d'interpolation de **Newton** de la fonction f aux points x_0, x_1, x_2 est : $P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$

1. Montrer que : $a_0 = f[x_0]$; $a_1 = f[x_0, x_1]$ et $a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$
2. Soit la fonction tabulé suivante

x_i	0	0,5	1,0	1,5	2,0
$f(x_i)$	-1,00	-2,25	-2,00	1,25	9,00

- a) Utiliser un polynôme d'interpolation de Newton de degré 3 pour estimer $f(1,75)$
 - b) Donner l'expression analytique de l'erreur $E_3 = |f(1,75) - p_3(1,75)|$
3. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et P le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $-n, \dots, -1, 1, \dots, n$ sur \mathbb{R} .

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}$ tel que $|f(0) - P(0)| = (n!)^2 \frac{|f^{(2n)}(c)|}{(2n)!}$

Exercice 3.3.5. En relevant toutes les 10 secondes la vitesse de l'écoulement de l'eau dans une conduite cylindrique on obtient

$$v(0) = 2.00; v(10) = 1.89; v(20) = 1.72; v(30) = 1.44$$

- 1) Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange P associé aux points 0, 10, 20, 30.
- 2) Estimer la vitesse à l'instant 25 secondes
- 3) Calculer le polynôme d'interpolation de Newton Q associé aux points 0, 10, 20, 30.
- 4) Après combien de secondes la vitesse de l'écoulement deviendra nulle ?

Exercice 3.3.6. Soit $f(x) = \cos(\pi x)$, $x \in [-1, +1]$ et P le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $-1, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, 1$ sur $[-1, +1]$.

1. Justifier sans calcul le degré exact de P .
2. Appliquer l'algorithme de Newton pour le calcul de P (différences divisées). En déduire l'expression de P .
3. Donner l'estimation de l'erreur d'interpolation $f(x) - P(x)$, $x \in [-1, +1]$.
4. Estimer l'erreur d'interpolation en $x = 0$ et comparer avec l'erreur exacte.
5. Soient $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = e^{3x}$ définies sur $[0, 1]$. Estimer le nombre maximum de points pour que l'erreur entre la fonction et son polynôme d'interpolation de Lagrange soit inférieur à 0.1, 0.01, 0.001.

Exercice 3.3.7. Soit la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange P vérifiant :

$$p(0) = f(0), p\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right), p(1) = f(1)$$

2. Calculer $p(0.1)$ et $p(0.9)$. Comparer aux valeurs exactes.
Évaluer $f(x) - p(x)$ pour ces deux valeurs.
3. Déterminer Q polynôme d'interpolation d'Hermite vérifiant :

$$Q(0) = f(0), Q(1) = f(1), Q'(0) = f'(0), Q'(1) = f'(1)$$

Calculer $Q(0.1)$ et $Q(0.9)$.

Exercice 3.3.8. (Concours 2013)

En course à pied sur route, on utilise des modèles d'interpolation pour estimer, à partir de performances (temps) qu'un coureur a déjà réalisées sur certaines distances.

x (m)	0	100	1500	10000
$t(x)$ (s)	0	13	245	1980

1. Utiliser un polynôme d'interpolation de Newton de degré 2 pour estimer la performance que devrait réaliser ce coureur sur une distance de 5000m
2. Au lieu d'utiliser un polynôme d'interpolation pour approcher $t(x)$, on pourrait utiliser une fonction logarithmique d'interpolation de forme

$$g(x) = a + b \ln c(x - d)$$

où a, b, c et d sont des paramètres à déterminer. Proposer une démarche pour calculer les valeurs de ces quatre paramètres. Ne pas résoudre.

3. Si on prend $a = b = 1$, trouver la fonction logarithmique d'interpolation et calculer $g(5000m)$

Chapitre 4

Dérivation numérique

On peut aborder la dérivation numérique d'au moins deux façons. La première approche consiste à utiliser le développement de Taylor et la seconde est fondée sur l'égalité $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$. Nous utiliserons un mélange des deux approches, ce qui nous permettra d'avoir un portrait assez complet de la situation. Commençons d'abord par l'équation $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$. Si on dérive de chaque coté de l'égalité, on obtient

$$f'(x) = P'_n(x) + E'_n(x)$$

$$f''(x) = P''_n(x) + E''_n(x)$$

...

Ainsi, pour évaluer la dérivée d'une fonction connue aux points $(x_i; f(x_i))$ $i = 0, 1, \dots, n$ il suffit de dériver le polynôme d'interpolation passant par ces points. De plus, le terme d'erreur associé à cette approximation de la dérivée est tout simplement la dérivée de l'erreur d'interpolation. Ce résultat est vrai quel que soit l'ordre de la dérivée.

4.1 Dérivées d'ordre 01

Il est également utile de se rappeler que l'erreur d'interpolation s'écrit :

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c(x))}{(n+1)!} [(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)]$$

En dérivant cette expression, tout en tenant compte de la dépendance de c envers x , on obtient :

$$E'_n(x) = \frac{f^{(n+2)}(c(x))c'(x)}{(n+1)!} [(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)]$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c(x))}{(n+1)!} \left[\sum_{k=0}^n \prod_{j=0, j \neq k}^n (x - x_j) \right]$$

Et pour $x = x_i$ on a

$$E'_n(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(c(x_i))}{(n+1)!} \left[\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j) \right] \dots (1)$$

Si on suppose de plus que les x_i sont équidistants, c'est à dire : $x_{i+1} - x_i = h$ ce qui signifie que $x_i - x_j = (i - j)h$

on obtient :

$$E'_n(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(c_i)h^n}{(n+1)!} \left[\prod_{j=0, j \neq i}^n (i - j) \right]$$

En particulier, si $i = 0$ on trouve :

$$E'_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c_0)h^n}{(n+1)!} \left[\prod_{j=0, j \neq 0}^n (-j) \right]$$

c'est à dire

$$E'_n(x_0) = \frac{(-1)^n h^n f^{(n+1)}(c_0)}{(n+1)}$$

avec $c_0 \in [x_0, x_n]$

Si on choisit le polynome de degré 1 passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$; on a grace à la formule d'interpolation de Newton :

$$P_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

et donc,

$$f'(x) = P'_1(x) + E'_1(x) = f[x_0, x_1] + E'_1(x)$$

Pour $x = x_0$ et puisque $(x_1 - x_0) = h$, on arrive à :

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + E'_1(x_0)$$

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(c_0), c_0 \in [x_0, x_1]}$$

qui est la différence avant d'ordre 1. On l'appelle différence avant car, pour évaluer la dérivée en $x = x_0$, on cherche de l'information vers l'avant (en $x = x_1$).

De la même manière, pour $x = x_1$ on a :

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + E'_1(x_1)$$

$$\boxed{f'(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} + \frac{h}{2} f''(c_1), \quad c_1 \in [x_0, x_1]}$$

qui est la différence arrière d'ordre 1.

Passons maintenant aux polynômes de degré 2. Soit les points $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$. Le polynôme de degré 2 passant par ces trois points est :

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

dont la dérivée est :

$$P_2'(x) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](2x - (x_0 + x_1))$$

Lorsque x prend successivement les valeurs x_0 , x_1 et x_2 il est facile de montrer que l'on obtient des approximations d'ordre 2 de la dérivée.

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{-f(x_2) + 4f(x_1) - 3f(x_0)}{2h} + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(c_0), \quad c_0 \in [x_0, x_2]}$$

$$\boxed{f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(c_1), \quad c_1 \in [x_0, x_2]}$$

$$\boxed{f'(x_2) = \frac{3f(x_2) - 4f(x_1) + f(x_0)}{2h} + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(c_2), \quad c_2 \in [x_0, x_2]}$$

Exemple 4.1.1. On tente d'évaluer la dérivée de $f(x) = \exp(x)$ en $x = 0$. La solution exacte est $f'(0) = \exp(0) = 1$. On peut comparer ce résultat avec ceux que l'on obtient par les différentes formules aux différences. Par exemple, la différence avant d'ordre 1 donne pour $h = 0,1$:

$$f'(0) \simeq \frac{e^{0+h} - e^0}{h} = \frac{e^{0,1} - e^0}{0,1} = 1.05170918$$

Une valeur plus petite de h conduit à un résultat plus précis. Si $h = 0,05$:

$$f'(0) \simeq \frac{e^{0+0,05} - e^0}{0,05} = 1.0254219$$

On obtient ainsi une erreur à peu près deux fois plus petite, ce qui confirme que cette approximation est d'ordre 1.

Si on utilise cette fois une différence centrée d'ordre 2, on obtient avec $h = 0.05$:

$$f'(0) \simeq \frac{e^{0,05} - e^{-0,05}}{2(0,05)} = 1.0004167$$

pour $h = 0.025$ on obtient :

$$f'(0) \simeq \frac{e^{0,025} - e^{-0,025}}{2(0,025)} = 1.00010418$$

avec une erreur à peu près 4 fois plus petite qu'avec $h = 0.05$

4.2 Dérivées d'ordre 02

Les dérivées d'ordre supérieur posent toutefois une difficulté supplémentaire, qui provient principalement de l'analyse d'erreur. Nous préférons suivre une approche légèrement différente basée sur le développement de Taylor.

Reprenons le polynôme de degré 2 déjà utilisé pour calculer la dérivée première

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

et sa dérivée seconde est

$$P_2''(x) = 2f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2}$$

pour $x = x_0$

$$f''(x_0) \simeq P_2''(x_0) = \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2}$$

On remarque qu'il s'agit d'une formule aux différences avant. Pour déterminer l'ordre de l'erreur liée à cette approximation, on utilise le développement de Taylor. Dans un premier temps on a

$$f(x_0 + 2h) = f(x_0) + f'(x_0)(2h) + \frac{f''(x_0)}{2!}(2h)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(2h)^3 + \frac{f''''(x_0)}{4!}(2h)^4 + \dots$$

de même

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)(h) + \frac{f''(x_0)}{2!}(h)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(h)^3 + \frac{f''''(x_0)}{4!}(h)^4 + \dots$$

$$\text{On parvient alors à : } \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2} = \frac{f''(x_0)h^2 + f'''(x_0)h^3 + O(h^4)}{h^2}$$

$$= f''(x_0) + f'''(x_0)h + O(h^2) = f''(x_0) + O(h)$$

Cette différence avant est donc une approximation d'ordre 1 de la dérivée seconde

Pour $x = x_1$

$$f''(x_1) = \frac{f(x_1 + h) - 2f(x_1) + f(x_1 - h)}{h^2} + O(h^2)$$

Pour $x = x_2$

$$f''(x_2) = \frac{f(x_2) - 2f(x_2 - h) + f(x_2 - 2h)}{h^2} + O(h)$$

4.3 Exercices

Exercice 4.3.1. *A partir des données expérimentales*

x	1	1.01	1.02
$f(x)$	1.27	1.32	1.38

Calculer les approximations de $f'(1.005)$, $f'(1.015)$ et $f''(1.01)$ données par les formules centrées :

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \text{ et } f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

Exercice 4.3.2. *Une voiture roulant à 60 km/h accélère au temps $t = 0$ s et sa vitesse v en km/h est mesurée régulièrement :*

$t_i[s]$	0.0	0.5	1.0	1.5	2
$v[km/h]$	60.0	68.4	75.5	82.2	89.4

1. En utilisant le meilleur polynôme de degré 2 possible, obtenir une approximation de la vitesse (en km/h) à $t = 1.2$ s.
2. Obtenir l'expression analytique de l'erreur d'interpolation commise en (1).
3. Utiliser la formule de la différence centrée et obtenir une approximation de l'accélération a (en m/s^2) à $t = 1.0$ s avec $h = 0.5$ et $h = 1.0$

Chapitre 5

Intégration numérique

Position du problème

Il s'agit de calculer $I = \int_a^b f(x) = F(a) - F(b)$. Dans plusieurs cas, on ne peut pas évaluer l'expression analytique de la primitive F , ou bien la fonction f n'est connue que pour un nombre fini de points.

L'idée de base des méthodes numériques pour résoudre ce problème (que l'on appelle méthodes de quadratures) est de remplacer la fonction f par son polynôme d'interpolation aux points $x_i \in [a, b]$ pour $i = 0, 1, \dots, n$.

5.1 Méthodes de Newton cotes simples et composées

1) Méthode du rectangle ($n = 0$)

Cette formule est obtenue en remplaçant la fonction f par une constante égale la valeur de f au milieu de $[a, b]$. Ce qui donne

$$I_0 = \int_a^b f(x) dx \simeq \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Si $f \in C^2([a, b])$ l'erreur est donnée par

$$E_0(f) = \frac{h^3}{3} f''(\varepsilon), \quad \varepsilon \in [a, b] \text{ et } h = \frac{b-a}{2}$$

Exemple 5.1.1. On doit calculer : $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

comme la fonction e^{-x^2} n'a pas de primitive, il faut absolument utiliser une méthode numérique. Dans ce cas

$$I_0 = \int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-(\frac{1}{2})^2} dx = (1-0)e^{-\frac{1}{4}}$$

= 077880078

(la solution exacte est 0,746824113)

2) Méthode des trapèzes ($n = 1$)

Cette formule est obtenue en remplaçant f par $P_1(x)$, son polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 1 aux points $x_0 = a$ et $x_1 = b$. On a

$$P_1(x) = \frac{(x-b)}{(a-b)}f(a) + \frac{(x-a)}{(b-a)}f(b)$$

alors

$$\begin{aligned} \int_a^b P_1(x) dx &= \int_a^b \frac{(x-b)}{(a-b)}f(a) dx + \int_a^b \frac{(x-a)}{(b-a)}f(b) dx \\ &= \frac{f(a)}{(a-b)} \int_a^b (x-b) dx + \frac{f(b)}{(b-a)} \int_a^b (x-a) dx \\ &= \frac{f(a)}{(a-b)} \left[\frac{1}{2}x^2 - bx + c \right]_a^b + \frac{f(b)}{(b-a)} \left[\frac{1}{2}x^2 - ax + c \right]_a^b \\ &= \frac{f(a)}{(a-b)} \left[\frac{1}{2}b^2 + ba - \frac{1}{2}a^2 \right] + \frac{f(b)}{(b-a)} \left[\frac{1}{2}b^2 - ba + \frac{1}{2}a^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)] \end{aligned}$$

Donc $I_1 = \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)]$

Si $f \in C^2([a, b])$, l'erreur est donnée par

$$E_1(f) = -\frac{h^3}{12}f''(\varepsilon) \text{ avec } \varepsilon \in]a, b[\text{ et } h = b - a$$

Exemple 5.1.2. Il s'agit d'évaluer numériquement

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

dont la valeur exacte est 1.

On applique la méthode de trapèze

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \simeq \frac{\pi}{2} \left(\sin 0 + \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4} = 0,785398164$$

3) Méthode de Simpson ($n = 2$)

Cette formule est obtenue en remplaçant f par $P_2(x)$, son polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 2 aux points $x_0 = a$ et $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$. On a

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-b)}{(a-x_1)(a-b)}f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x_1-a)(x_1-b)}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(x-a)(x-x_1)}{(b-a)(b-x_1)}f(b)$$

Donc

$$I_2 = \int_a^b P_2(x) = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)]$$

Si $f \in C^4[a, b]$, l'erreur est donnée par

$$E_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\varepsilon) \text{ avec } \varepsilon \in]a, b[\text{ et } h = \frac{b-a}{2}$$

Exemple 5.1.3. On reprend une fois de plus le calcul de l'exemple précédent. pour la fonction $f(x) = \sin x$ dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a avec la méthode de Simpson

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \simeq \frac{\pi}{12} [\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2}] = 1,0022799$$

Ce résultat est plus précis que l'approximation obtenue par la méthode de trapèze.

4) Méthode de Newton ($n = 3$)

Soit $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$ et $x_3 = x_0 + 3h = b$, avec $h = \frac{b-a}{3}$. On

$$I_3 = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^3 A_i f(x_i)$$

avec $A_i = \int_a^b L_i(x) dx$ ou L_i est le polynôme de Lagrange au points x_i après calcul, il vient :

$$A_0 = \frac{3}{8}h, \quad A_1 = \frac{9}{8}h, \quad A_2 = \frac{9}{8}h, \quad A_3 = \frac{3}{8}h$$

et alors

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{3}{8}h [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

Ou

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{(b-a)}{8}[f(a) + 3f(c) + 3f(d) + f(b)]$$

avec $c = \frac{2a+b}{3}$, $d = \frac{a+2b}{3}$

5.2 Lois de Newton-Cotes composites

Principe

L'idée est donc de découper le domaine total d'intégration $[a, b]$ en m intervalles. On approxime alors l'aire \tilde{I}_k , $k \in [0, m-1]$ de chaque intervalle par des méthodes de Newton-Cotes simples, et on en déduit une approximation de l'aire totale par une simple somme :

$$\tilde{I} = \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{I}_k$$

Sur chaque intervalle, une méthode de degré $p+1$ évalue la fonction à intégrer en $p+1$ points,

Méthode des trapèzes ($p = 1$, $n = m$)

La méthode des trapèzes composite applique la méthode des trapèzes simple ($p = 1$) sur chacun des m intervalles. Le nombre total de sous-intervalles est donc à nouveau $n = m$. Chaque intégrale vaut :

$$\tilde{I}_{1,k} = (x_{k+1} - x_k) \frac{f_k + f_{k+1}}{2}$$

Si bien que l'intégrale totale vaut :

$$\tilde{I}_1 = \frac{h}{2}(f_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f_k + f_n)$$

Exemple 5.2.1. On divise l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ en 4 sous-intervalles ($n = 4$) d'après la formule des trapèzes composée on $h = \frac{\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{8}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \simeq \frac{\pi}{8}(\sin 0 + 2[\sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{8}] + \sin \frac{\pi}{2})$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \simeq 0.9871158$$

L'erreur est simplement la somme de toutes les erreurs :

$$E_1 = -\frac{h^3}{24}(f''(\varepsilon_0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f''(\varepsilon_k) + f''(\varepsilon_n))$$

$$E_1 = -\frac{h}{12}nf''(\varepsilon) \text{ avec } \varepsilon \in]a, b[$$

Une majoration de la valeur absolue de l'erreur commise est donc donnée par l'expression

$$|E_1| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{[a,b]}(|f''|)$$

alors le nombre de subdivisions n de $[a, b]$, pour évaluer $\int_a^b f(x)dx$ à ε près, est donnée par :

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{[a,b]}(|f''|) \leq \varepsilon$$

alors

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon} \sup_{[a,b]}(|f''|)}$$

Exemple 5.2.2. On revient à l'exemple précédent donc on a le nombre de subdivisions n pour calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ avec un erreur $\varepsilon = 10^{-3}$

$$n \geq \sqrt{\frac{(\frac{\pi}{2} - 0)^3}{12 \cdot 10^{-3}}}$$

$n \geq 17,97$ on prend $n = 18$

Méthode de Simpson ($p = 2, n = 2m$)

La méthode de Simpson composite applique la méthode de Simpson simple ($p = 2$) sur chacun des m intervalles. Le nombre total de sous-intervalles est donc cette fois-ci $n = 2m$ (il est forcément pair). Chaque intégrale vaut :

$$\tilde{I}_{2,m} = \frac{(x_{k+2} - x_k)}{6}(f_k + 4f_{k+1} + f_{k+2})$$

Si bien que (pour un nombre d'intervalles n pair) l'intégrale totale vaut :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 &= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \\ &= \frac{h}{3}(f_0 + 4 \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} f_{2k+1} + 2 \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} f_{2k} + f_n) \end{aligned}$$

Exemple 5.2.3. On divise l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ en 4 sous-intervalles ($n = 4$) d'après la formule de Simpson on $h = \frac{\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{8}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \simeq \frac{\pi}{8} (\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{8} + 2 \sin \frac{\pi}{4} + 4 \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{2})$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \simeq 1.0001346$$

À nouveau, l'erreur est simplement la somme de toutes les erreurs :

$$E_2 = -\frac{h^4}{180} (b-a) f^{(4)}(c), \quad c \in]a, b[$$

avec $h = \frac{b-a}{n}$

Une majoration de la valeur absolu de l'erreur commise est donc donnée par l'expression

$$|E_2| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \sup_{[a,b]} (|f^{(4)}|)$$

Donc on peut calculer le nombre de subdivisions n de $[a, b]$ pour évaluer $\int_a^b f(x) dx$ à ε près

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4} \sup_{[a,b]} (|f^{(4)}|) \leq \varepsilon$$

alors

$$n^4 \geq \frac{(b-a)^5}{180\varepsilon} \sup_{[a,b]} (|f^{(4)}|)$$

Méthode des rectangles ($p = 0, n = m$)

La méthode des rectangles composite applique la méthode des rectangles simple ($p = 0$) sur chacun des m intervalles. Le nombre total de sous-intervalles est donc $n = m$. L'aire de chaque intervalle vaut :

$$\tilde{I}_k = (x_{k+1} - x_k) f\left(\frac{x_{k+1} + x_k}{2}\right) = hf_k$$

Si bien que l'intégrale totale vaut :

$$\tilde{I}_0 = h \sum_{k=0}^{n-1} f_k$$

L'erreur est simplement la somme de toutes les erreurs :

$$E_0 = \frac{h^3}{3} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\varepsilon_k) = \frac{h^3}{3} n f''(\varepsilon)$$

où l'on a utilisé le fait que $h = \frac{b-a}{n}$ donc

$$|E_0| \leq \frac{(b-a)^3}{3n^2} \sup_{[a,b]}(|f''|)$$

5.3 Quadrature de Gauss

La quadrature de Gauss est donnée par la formule :

$$\int_{-1}^1 f(t)dt = \sum_{i=1}^n \omega_i f(t_i) + E_n$$

où les inconnues ω_i, t_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sont déterminées à partir du système non linéaire de $2n$ équations :

$$(S) : \begin{cases} \omega_1 t_1^0 + \omega_2 t_2^0 + \dots + \omega_n t_n^0 = 2 \\ \omega_1 t_1^1 + \omega_2 t_2^1 + \dots + \omega_n t_n^1 = 0 \\ \omega_1 t_1^2 + \omega_2 t_2^2 + \dots + \omega_n t_n^2 = \frac{2}{3} \\ \omega_1 t_1^3 + \omega_2 t_2^3 + \dots + \omega_n t_n^3 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \omega_1 t_1^{2n-2} + \omega_2 t_2^{2n-2} + \dots + \omega_n t_n^{2n-2} = \frac{2}{2n-1} \\ \omega_1 t_1^{2n-1} + \omega_2 t_2^{2n-1} + \dots + \omega_n t_n^{2n-1} = 0, \end{cases}$$

Le système (S) est non linéaire et sa résolution par la voie usuelle présente de grandes difficultés. C'est pourquoi on utilise une autre méthode.

Définition 5.3.1. (Polynôme de Legendre)

Le polynôme de Legendre est donné par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} [(x^2 - 1)^n]^{(n)}$$

Par exemple :

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \dots$$

La méthode :

On prend comme t_i ($i = 1, 2, \dots, n$) les racines du polynôme de Legendre. Si l'on connaît les abscisses t_i , on trouve facilement à partir du système linéaire de n premières équations du système (S) les constantes ω_i .

Si la fonction $f(x)$ est continue dans $[a, b]$, on utilise la quadrature de Gauss de la manière suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2} \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) + E_n$$

Où

$$x_i = \frac{b+a}{2} + t_i \frac{b-a}{2}, i = 1, 2, \dots, n$$

et t_i étant les racines du polynôme de Legendre $P_n(x)$ dans l'intervalle $[-1, 1]$, et ω_i les solutions du système linéaire des n premières équations du système (S).

L'erreur de la formule de Gauss à n points d'appuis est donnée par l'expression :

$$\begin{aligned} |E_n| &= \left| \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4 f^{(2n)}(c)}{([2n]!)^3 (2n+1)} \right| \\ &\leq \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4 \sup_{[a,b]} |f^{(2n)}(x)|}{([2n]!)^3 (2n+1)} \end{aligned}$$

Exemple 5.3.2. Calculer l'intégrale $\int_0^1 e^{-x} dx$ à l'aide de la formule de Gauss à trois ordonnées. Évaluer le résultat obtenu

5.4 Exercices

Exercice 5.4.1. On considère l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

- (a) Donner la valeur exacte de cette intégrale I .
- (b) Calculer les valeurs approchées à l'aide des formules simples du point-milieu, trapèze, et Simpson. Comparer avec la valeur exacte.
- (c) Utiliser la méthode de Simpson composée avec $n = 4$ pour évaluer l'intégrale.
- (d) Quel serait le pas d'intégration si l'on désire une précision de 10^{-6} à l'aide de formule de Simpson composée.

Exercice 5.4.2. Soit l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^x te^{-t} dt$$

Combien faut-il de subdivisions de $[0; 1]$ pour évaluer $I(1)$ à 10^{-8} près en utilisant

1. la méthode des trapèzes
2. la méthode de Simpson.

Exercice 5.4.3. Considérons l'intégrale : $I = \int_0^1 e^t dt$

- 1 Calculer la valeur exacte de I .
- 2 Utiliser la méthode de trapèze simple pour calculer I et évaluer l'erreur
- 3 Montrer que l'approximation I_n par la méthode du trapèze composée avec n subdivision de l'intervalle $[0; 1]$ est donnée par : $I_n = \frac{1+e}{2n} + \frac{1}{n} \frac{e^{\frac{1}{n}} - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$
- 4 Calculer I_4 et I_{10} et majorer l'erreur pour les deux cas
- 5 Pour $n = 4$ (nombre de subdivision) montrer que l'approximation de I par la méthode de Simpson est donnée par : $J_4 = (1 + 4x + 2x^2 + 4x^3 + x^4)/12$ où $x^4 = e$. Calculer l'erreur d'approximation $|J_4 - I|$

Exercice 5.4.4. (Concoure 2017) Soit f une fonction continue sur $[-1, 1]$ et son intégrale :

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

On considère la formule de quadrature suivante :

$$\tilde{I}(f) = \omega_0 f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \omega_1 f(0) + \omega_2 f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

1. Trouver $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ pour que la formule de quadrature soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à n , où n est le plus élevé possible. Quel est ce degré ?
2. En utilisant la formule de quadrature précédente, calculer la valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

Exercice 5.4.5. I Considérons l'intégrale : $I = \int_{-1}^1 e^{t^2} dt$

1. Calculer une approximation de I par application de la méthode du trapèze composée avec 4 intervalles.
2. Montrer que l'application de la méthode du trapèze composée avec n intervalles de pas $h = \frac{2}{n}$ s'écrit :

$$I_n = he + h \sum_{i=1}^{n-1} e^{(ih-1)^2}$$

3. Montrer que $|I_n - I| \leq \frac{4e}{n^2}$, en déduire la valeur de n pour laquelle l'erreur est $\leq 10^{-2}$.

II On considère la formule de quadrature suivante :

$$\tilde{I}(f) = \omega_1 f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + \omega_2 f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

1. Trouver ω_1, ω_2 pour que la formule de quadrature soit exacte ?
2. En utilisant la formule de quadrature précédente, calculer la valeur approchée de l'intégrale $I = \int_{-1}^1 e^{t^2} dt$

Chapitre 6

Équations différentielles du premier ordre

La résolution numérique des équations différentielles est probablement le domaine de l'analyse numérique où les applications sont les plus nombreuses. Dans ce chapitre comme dans les précédents, les diverses méthodes de résolution sont d'autant plus précises qu'elles sont d'ordre élevé.

Nous considérons principalement les équations différentielles de premier ordre avec conditions initiales

Le problème mathématique Nous prenons comme point de départ la formulation générale d'une équation différentielle d'ordre 1 avec condition initial.

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé de \mathbb{R} et f une application donnée

$$\begin{cases} f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ (t, y) \rightarrow f(t, y), \end{cases} \quad (6.1)$$

La variable indépendante t représente très souvent le temps.

Et soit y une application différentiable de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . On appelle équation différentielle du premier ordre, la relation

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \quad (6.2)$$

On appelle problème de Cauchy ou problème de condition initiale l'équation différentielle à laquelle on adjoint la condition initiale $y(a) = y_0$ où y_0 est un nombre donné :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (6.3)$$

Il s'agit donc d'obtenir $y(t)$, si on cherche une solution analytique, où une approximation de $y(t)$, si on utilise une méthode numérique.

Exemple 6.0.1. Soit l'équation différentielle du premier ordre :

$$\begin{cases} y'(t) = ty(t) \\ y(1) = 2 \end{cases} \quad (6.4)$$

Définition 6.0.2. Soit f une application définie sur $[a, b] \times \mathbb{R}$, s'il existe une constante $L > 0$ indépendante de t, u et v telle que

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, t \in [a, b]$$

alors f est dite Lipschitzienne de rapport L sur $[a, b] \times \mathbb{R}$ (ou simplement L -lipschitzienne).

Théorème 6.0.3. (Existence et Unicité) Si f est une application définie sur $[a, b] \times \mathbb{R}$ continue et L -lipschitzienne par rapport à y , alors le problème de Cauchy (6.3) admet une solution unique sur $[a, b]$ et ceci pour toute condition initiale y_0 .

Proposition 6.0.4. Si on

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| \leq L, \quad \forall y \in \mathbb{R}, t \in [a, b] \Rightarrow f \text{ est } L\text{-lipschitzienne}$$

6.1 La Méthode d'Euler

La méthode d'Euler, est la plus simple et consiste à substituer la dérivée $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ par l'expression

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \quad (6.5)$$

où $h = \frac{b-a}{n}$ est le pas d'intégration numérique. Considérons alors une subdivision de $[a, b]$ en n sous intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ de longueur h , $i = 0, \dots, n$ et $t_i = a + ih$ avec $t_0 = a$ et $t_n = b$.

L'expression (6.5) entraîne

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t)$$

d'où

$$y(t+h) = y(t) + hf(t, y).$$

L'algorithme d'Euler s'écrit alors :

$$\begin{cases} y_0 = y(a) \text{ (donné)} \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \quad i = 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (6.6)$$

Exemple 6.1.1. Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + t + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On a donc $t_0 = 0$ et $y_0 = 1$, et on prend un pas de temps $h = 0,1$.

De plus, on a : $f(t, y) = -y + t + 1$

On peut montrer que la solution analytique est $y(t) = \exp(-t) + t$

Le tableau suivant rassemble les résultats des 4 premières itérations, on peut aussi comparer les résultats numérique et analytique.

t_i	$y(t_i)$ exacte	y_i	$ y(t_i) - y_i $
0.0	1	1	0
0.1	1.004837	1	0.004837
0.2	1.018731	1.01	0.008731
0.3	1.040818	1.029	0.011818
0.4	1.070302	1.0561	0.01422

Erreur d'Euler

Théorème 6.1.2. Supposons que l'application $f(t, y)$ soit continue par rapport aux deux variables et L -lipschitzienne par rapport à y , et $y \in C^2[a, b]$. On pose $M_2 = \max_{t \in [a, b]} |y''(t)|$ alors on a la majoration

$$E = |y_i - y(t_i)| \leq (e^{L(b-a)} - 1) \frac{M_2}{2L} h$$

c'est à dire que la méthode d'Euler est d'ordre 1.

6.2 La Méthode de Runge-Kutta

Les méthodes de Runge-Kutta sont bien utilisées dans la pratique car elles présentent plusieurs avantages, facilité de programmation et stabilité de la solution

6.2.1 Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2 : RK2

Pour $i = 0, 1, \dots$

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_i, y_i) \\ k_2 = hf(t_i + h, y_i + k_1) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ t_{i+1} = t_i + h \\ \text{Ecrire } t_{i+1} \text{ et } y_{i+1} \end{cases}$$

Exemple 6.2.2.

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + t + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

6.2.3 Runge-Kutta d'ordre 4 : RK4

Dans la pratique on utilise la méthode plus performante de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4), pour des fonctions suffisamment régulières on a alors $|E_i| = O(h^4)$.

Algorithme : RK4

Pour $i = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_i, y_i) \\ k_2 = hf(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = hf(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 = hf(t_i + h, y_i + k_3) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ t_{i+1} = t_i + h \\ \text{Ecrire } t_{i+1} \text{ et } y_{i+1} \end{cases}$$

Exemple 6.2.4.

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + t + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Le tableau qui suit compare la solution numérique et la solution exacte et donne l'erreur absolue.

t_i	$y(t_i)$ exacte	y_i	$ y(t_i) - y_i $
0.0	1	1	0
0.1	1.004837418	1,004837	0.819×10^{-7}
0.2	1.0187307798	1.0187309014	0.148×10^{-6}
0.3	1.0408182207	1.040818422	0.210×10^{-6}
0.4	1.07030200460	1.0703202889	0.242×10^{-6}

6.3 Résolution numérique d'un système d'équations différentielles

Soit le système :

$$(S) : \begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_1(t_0) = \alpha_1 \\ \vdots \\ y_n(t_0) = \alpha_n \end{cases}$$

$$\text{Soit } y(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{vmatrix} \text{ et } f(t, y) = \begin{vmatrix} f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{vmatrix}$$

$$\text{le système } (S) \text{ s'écrit donc : } \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}$$

On peut appliquer les méthodes déjà étudiées au problème

Exemple 6.3.1. Soit le système

$$\begin{cases} y_1' = 2y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2 \\ y_1(0) = 1, y_2(0) = 2 \end{cases}$$

$$\text{On a } y(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{vmatrix} \text{ et la condition initial } y(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } f(t, y) = \begin{vmatrix} 2y_2 \\ y_1 - y_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y(t)$$

En utilisant la méthode Runge-Kutta d'ordre 2 avec un pas $h = 0,1$

6.4 Exercices

Exercice 6.4.1. *Considérons le problème de Cauchy (C)*

$$\begin{cases} y'(x) = e^{-x} - 2y(x) = f(x, y(x)), & x \in [0, 1] \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1. *Montrer que $f(x, y(x))$ est Lipschitzienne par rapport à y et donner la constante de Lipschitz.*
2. *Donner l'expression de la solution exacte $y(x)$.*
3. *Calculer une estimation de $y(0.3)$ par la méthode d'Euler en utilisant le pas $h = 0.1$ et déduire l'erreur absolue en $t = 0.3$*

Exercice 6.4.2. *On considère, pour $t \in [0, 2]$, le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + t + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. *Le problème admet-il une seule solution ?*
2. *On prend un pas de temps $h = 0.5$ et $y_0 = 0$. Appliquer la méthode d'Euler à ce problème pour approcher $y(2)$*
3. *On prend un pas de temps $h = 0.5$ et $y_0 = 0$. Appliquer la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 à ce problème pour approcher $y(1)$*

Bibliographie

- [1] A.Fortin, **Analyse numérique pour ingénieurs**, Edition de l'école polytechnique de Montréal 1994.
- [2] M. Fellah-N. H. Allal, **Exercices corrigés en analyse numérique élémentaire**, OPU,2005
- [3] J.Rappaz, M. Picasso, **Introduction à l'analyse numérique** 2010.
- [4] J.P.DEMAILLY, **Analyse numérique et équations différentielles**.
Collection Grenoble Sciences, Grenoble, 1991
- [5] M.LAKRIB, **Cours d'analyse numérique**. OPU, Alger, 2005.
- [6] F.Jedrzejewski, **Introduction aux méthodes numériques**, Springer-Verlag France,Paris 2005.