

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Supérieure en Génie Electrique et  
Energétique Oran



المدرسة العليا في الهندسة الكهربائية  
والطاقوية بهران

---

---

# Cours de Théorie et Traitement de Signal

---

---

**Dr. Fatima TAHRI**

**Janvier 2018**

# *AVANT-PROPOS*

Ce document est un support de cours destiné aux étudiants en 3<sup>ème</sup> année de la formation d'ingénieur d'état en électrotechnique. Mais bien entendu il peut être utilisé par tout ceux en 1<sup>er</sup> cycle ou 2<sup>ème</sup> cycle LMD.

En plus c'est un document de base en matière de théorie et traitement de signal pour les post-graduants, qui désirent approfondir leurs connaissances.

Dans le cadre de ce cours, nous nous intéressons principalement au traitement de signal qui est une discipline indispensable de nos jours. Il a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs d'information.

<b>Chapitre I. GENERALITES SUR LES SIGNAUX</b>	
I.1 Introduction	01
I.2. Signal	01
I.3. Théorie du signal	01
I.4. Le traitement de signal	01
I.5. Système	02
I.6. Types de signal	02
I.7. Signal causal	03
I.8. Classification énergétique	03
I.9. Classification morphologique	05
I.10. Classification spectrale	06
I.11. Représentation temporelle/fréquentielle (spectre)	07
I.12. Bruit	08
<b>Chapitre II. LES SIGNAUX DETERMINISTES</b>	
II.1. Introduction	09
II.2. Fonction signe	09
II.3. Echelon unité (échelon de Heaviside)	09
II.4. Fonction de Rampe	09
II.5. Fonction Rectangulaire	09
II.6. Fonction Triangulaire	10
II.7. Impulsion de Dirac	11
II.8. Sinus cardinal	12
II.9. Systèmes	13
<b>Chapitre III. CONVOLUTION ET CORRELATION</b>	
III.1. Introduction	15
III.2. Convolution	15
III.3. Propriétés	18
III.3.3. Distributivité	19
III.4. Corrélation	20
III.5. Relation entre la corrélation et la convolution	22
III.6. Propriétés	23
<b>Chapitre IV. ANALYSE DE FOURIER</b>	
IV.1. Introduction	24
IV.2. L'analyse de Fourier	24

IV.3. Transformation de Fourier des fonctions périodiques : série de Fourier	24
IV. 4. Transformation de Fourier des fonctions	33
IV.5. Transformée de Fourier des signaux élémentaires	39
IV.6. Produit d'une fonction périodique par un signal à énergie finie	41
<b>Chapitre V. Transformée de Laplace</b>	
V.1. Introduction	43
V.2. Définition de la transformée de Laplace :	43
V.3. Domaine de convergence ( $D_p$ )	45
V.4. Propriétés usuelles de la transformée de Laplace	46
V.5. Tableau des transformées de Laplace	48
V.6. Transformée inverse de Laplace	49
<b>Chapitre VI. L'ECHANTILLONNAGE</b>	
VI. 1. Introduction	54
VI.2. Principe de l'échantillonnage	54
VI.3. Echantillonnage idéal d'un signal analogique	55
VI.4. La transformée de Fourier d'un signal échantillonné	56
VI.5. Problème d'échantillonnage	57
VI.6. Echantillonnage et recouvrement du spectre	58
VI.7. Enoncé du théorème de Shannon	60
VI.8. Quantification	62
VI.9. Transformée de Fourier Discrète	64
<b>Chapitre VII. LA TRANSFORMEE EN Z</b>	
VII.1. Introduction	69
VII.2. Définition 1	69
VII.3. Définition 2	69
VII.4. La transformée en z des signaux discrets standards	69
VII.5. Propriétés de la transformée en Z	71
VII.6. Transformée inverse en Z	74
VII.7. La convolution et la transformée en Z	76
<b>Chapitre VII. LES FILTRES ANNALOGIQUES</b>	
VIII.1. Introduction	78
VIII.2. Caractéristiques de base	78
VIII.3. Filtres passe-bas	80
VIII.3.1. Circuit RL série	81

VIII.3.2. Circuit RC série	83
VIII.3.3. Les courbes de Bode	84
VIII.4. Filtres passe-haut	86
VIII.5. Filtres passe-bande	89
VIII.5.1. Caractéristiques	89
VIII.5.2. Circuit RLC série	89
VIII.6. Filtres coupe-bande	91
VIII.6.1. Filtre coupe-bande RLC série	91
<b>ANNEXES</b>	
Annexe A	94
Annexe B1	95
Annexe B2	96
Bibliographies	97

## **Chapitre I**

# **GENERALITES SUR LES SIGNAUX**

### **I.1 Introduction :**

Dans ce chapitre, quelques définitions et notions élémentaires d'énergie et de puissance sont introduites afin de fixer les objectifs de ce cours.

### **I.2. Signal :**

Une grandeur physique dépendant du temps ou d'autre variable, véhicule une information utile à l'observateur

Exemple : un bip sonore → le son.

La lumière → onde lumineuse.

La musique → acoustique → un morceau ou une chanson.

La photographie → l'image → les portraits d'une personne.

Remarque : le rôle majeur du signal c'est la communication dans les disciplines tel que : automatique, informatique et électrique.

### **I.3. Théorie du signal :**

La théorie du signal est l'ensemble des outils conceptuels qui permettent de construire des modèles théoriques basés sur les lois physiques exprimés en langage mathématique pour fournir une représentation du signal.

### **I.4. Le traitement de signal :**

C'est la discipline ou technique qui s'appuyant sur les ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliquée, qui a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs de l'information.

Domaine d'application : le traitement de signal trouve son champ d'application dans les domaines concerner par la perception, la transmission ou l'exploitation de ses informations.

Exemple : analyse biomédicale, géo physique, astronomie, traitement d'image etc...

En électrotechnique : vibration d'une machine tournante, fluctuation des charges d'un réseau électrique, perturbation électromagnétique.

**Remarque :** Les signaux que nous étudions sont des grandeurs qui évoluent avec le temps. La variable peut ne pas être «t». ex : un signal optique est une fonction du temps et de l'espace.

**I.5. Système :**

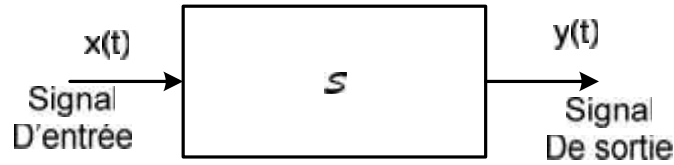


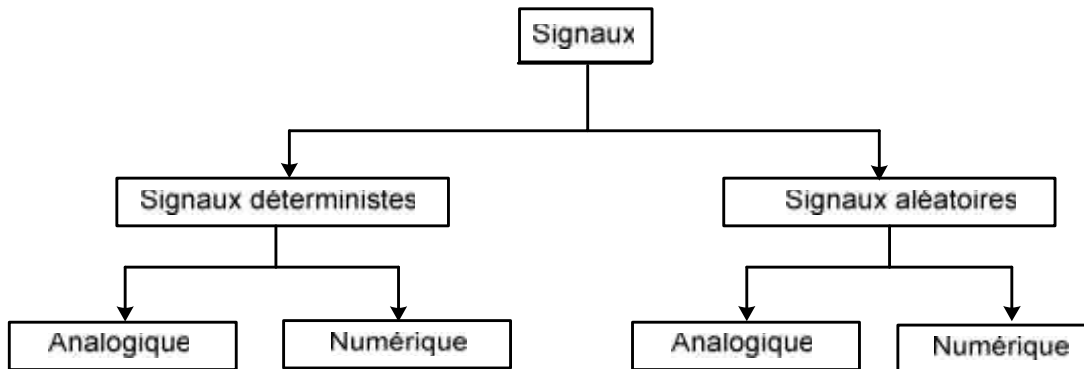
Figure I.1. Schéma universel d'un système de structure indifférente (boîte noire).

**Exemple :** système de transmission (par satellite).

Système de transformation (amplificateur, codeur, décodeur,...).

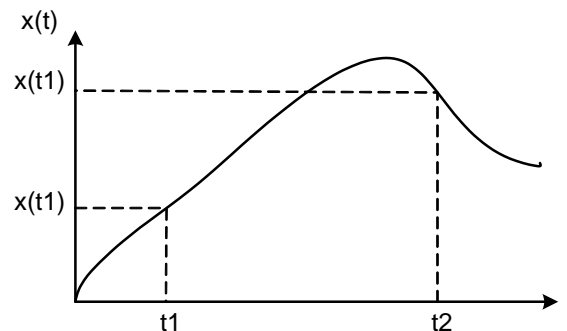
**I.6. Types de signal :**

Les signaux peuvent être distingués en deux grandes catégories



**I.6.1. Signaux déterministes :**

Se sont des signaux dont l'évolution en fonction du temps, peut être parfaitement décrit par un modèle mathématique.



**I.6.2. Signaux aléatoires :**

Se sont des signaux dont le comportement est imprévisible pour leur description, on utilise la description physique. On distingue également dans chacune des deux classes des signaux analogiques et des signaux numériques.



**I.7. Signal causal :**

Un signal causal est tout signal nul pour toutes les valeurs nulles du temps, on dit qu'un système est causal si sa réponse est nulle pour  $t < 0$ .

**I.8. Classification énergétique :**

**a) Signaux à énergie finie :**

$$u(t) = Ri(t)$$

L'énergie dissipée pendant une durée donnée  $(t_1, t_2)$

$$E = \int_{t_1}^{t_2} \frac{u^2(t)}{R} dt = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t) dt$$

Le plus souvent, on considère l'énergie normalisée, dans ce cas  $R = 1\Omega$

$$E = \int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt$$

$$E = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt$$

Si  $s(t)$  est complexe

$$E = \int_{t_1}^{t_2} s^*(t) s(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt$$

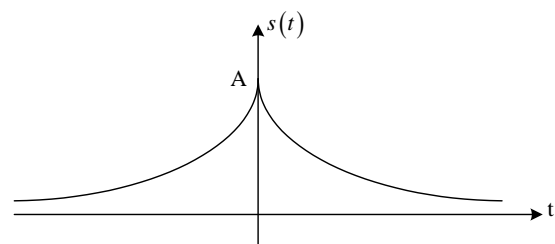
\* : c'est le conjugué.

$$x = a + jb, \quad x^* = a - jb$$

**Définition :** on appelle un signal à énergie finie non nulle tout signal dont l'énergie reste finie quand l'intervalle considéré varie de  $-\infty$  a  $+\infty$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$$

L'énergie est toujours positive



**Exemple :**

$$s(t) = Ae^{-a|t|}, a > 0$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Ae^{-a|t|}|^2 dt$$

$$E = A^2 \int_{-\infty}^0 e^{2at} dt + A^2 \int_0^{+\infty} e^{-2at} dt = \frac{A^2}{a}$$

Le signal est à énergie finie

Remarque : les signaux d'énergie finie sont tout les signaux de type transitoire, qu'il soit déterministes ou aléatoires.

**b) Signaux à puissance moyenne finie :**

Nombreux signaux importants ne vérifient pas la condition précédente, a savoir :

- Les signaux périodiques.
- Les signaux aléatoires permanant.
- Les signaux quasi périodiques  $x(t) = \sum_i \sin(\tilde{S}_i t)$

Ces signaux sont caractérisés par leur puissance moyenne.

La puissance moyenne d'un signal  $s(t)$  quelconque dans un intervalle de temps  $(t_1, t_2)$  est égale à :

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt$$

**Définition :** on dit qu'un signal  $s(t)$  est à une puissance moyenne finie non nulle, un signal pour le quel l'équation précédente reste finie de 0 a  $+\infty$

$$0 < P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt < \infty$$

**Remarque :** les signaux à puissance moyenne fini ne sont pas des signaux physiquement réalisables.

**Exemple :**

Soit un signal  $s(t) = 5V$  pour  $-\infty < t < +\infty$ , est ce que c'est un signal de puissance ou d'énergie ?

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} 25dt = \infty$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 25dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} 25[T] = 25W \quad \text{c'est un signal de puissance.}$$

**I.9. Classification morphologique :**

Dans cette famille, on prend en compte les différentes étapes sous les quelles un signal se présente

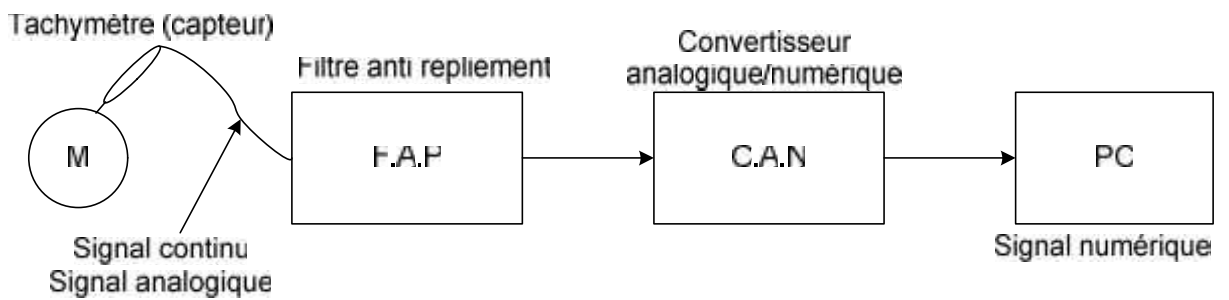


Figure I.2. Schéma d'une chaîne de mesure et de traitement.

**a) Signal analogique (continu) :** c'est un signal dont l'amplitude et le temps sont continu.

$$f(t) \rightarrow \text{(Fonction mathématique).}$$

La variable 't' varie de façon continue.

$$\forall t \rightarrow \exists \text{ la valeur du signal à cet instant } f(t).$$

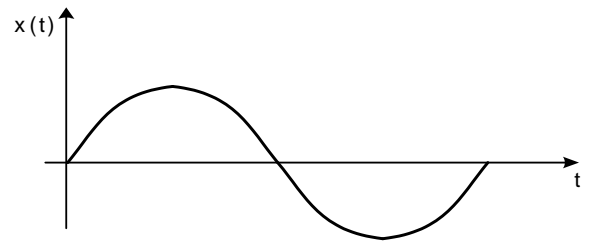
**Exemple :**  $f(t) = a \cos(\check{S}t + \{ )$

$a$  : amplitude.

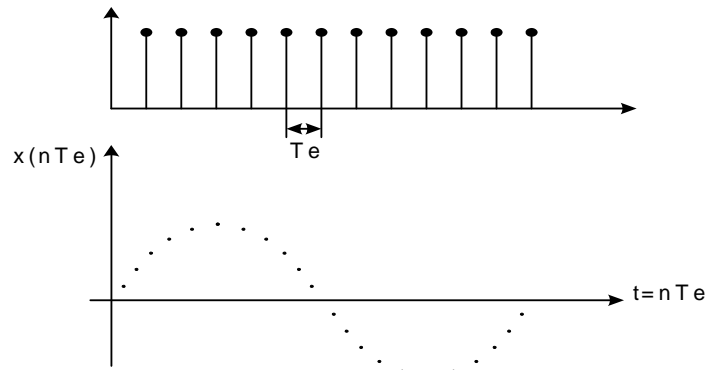
$$\check{S} = 2\pi f \quad \text{: pulsation.}$$

{ : phase.

**b) Signal échantillonné :** un signal échantillonné est un signal dont l'amplitude est continue et le temps discret.

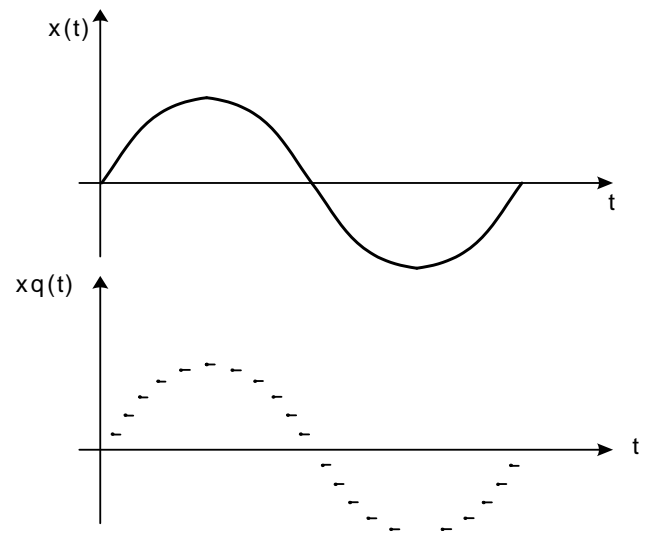


**c) Signal quantifié :** c'est un signal dont l'amplitude est discrète et le temps est continu. La quantification à chaque amplitude donne une valeur quantifiée  $x_q(t)$  prise parmi un ensemble fini d'une valeur discrète.



**d) Signal numérique :**

Un signal numérique est un signal échantillonné et quantifié (discret en amplitude et en temps).



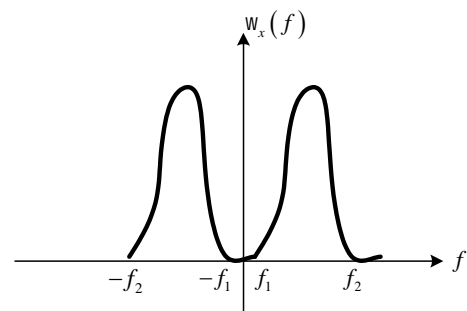
### I.10. Classification spectrale :

Se fait selon la distribution du spectre d'énergie sur l'axe de fréquence ( $w_x(f)$ ).

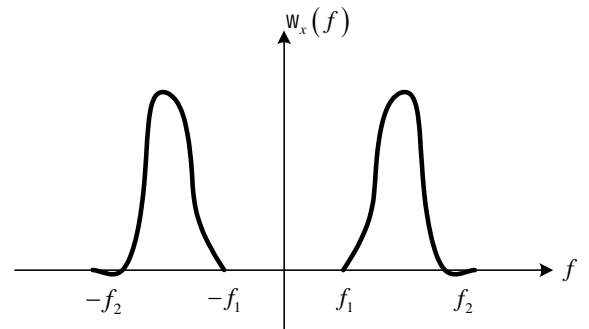
La bande de fréquence  $B = f_2 - f_1$ .

On aura donc :

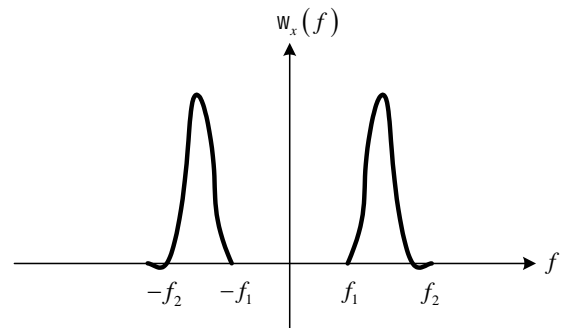
1. Signaux de basse fréquence



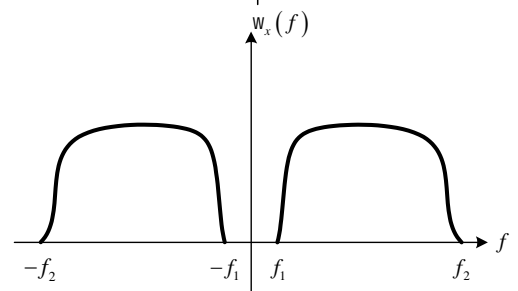
2. Signaux de haute fréquence



3. Signaux à bande étroite



4. Signaux à large bande



**I.11. Représentation temporelle/fréquentielle (spectre):**

En plus de sa description temporelle, le signal peut avoir une représentation fréquentielle (spectrale) à travers son spectre qu'on obtient à l'aide d'un outil puissant qui est la transformée de Fourier TF.

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (\text{Spectre du signal})$$

*réel    complexe*

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = |X(f)| e^{j\phi(f)}$$

$|X(f)|$  : Amplitude

$\phi(f)$  : Phase

### I.12. Bruit:

Tout signal perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal est considéré comme bruit.

*Rapport signal/bruit :*

C'est une mesure de degré de contamination du signal par un bruit. On le note :

$$r = \frac{P_s}{P_b} \rightarrow \begin{array}{l} \text{puissance du signal} \\ \text{puissance du bruit} \end{array}$$

$$r_{dB} = 10 \log_{10} r \rightarrow \begin{array}{l} \text{puissance du signal} \\ \text{puissance du bruit} \end{array}$$

## **Chapitre II**

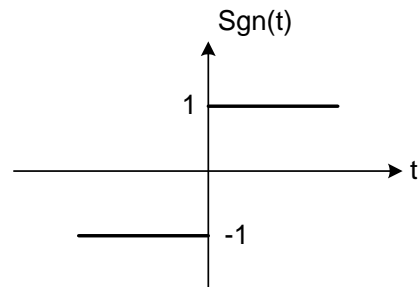
# **LES SIGNAUX DETERMINISTES**

**II.1. Introduction :**

L'évolution des signaux déterministes ou certains en fonction du temps peut être parfaitement modélisé par une fonction mathématique. On l'utilise pour alléger la représentation mathématique de certains signaux rencontrés souvent en théorie du signal.

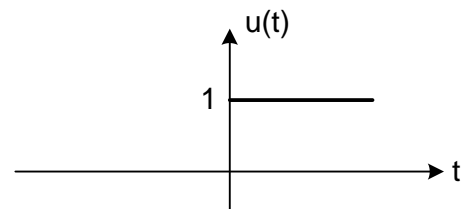
**II.2. Fonction signe :**

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



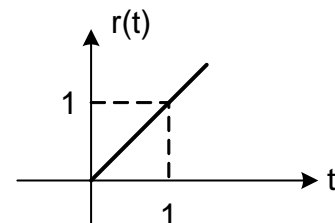
**II.3. Echelon unité (échelon de Heaviside) :**

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

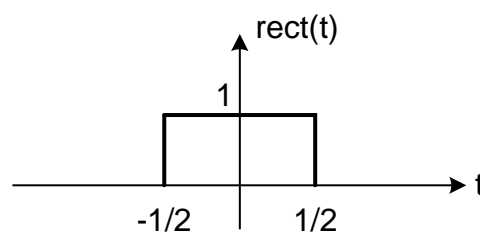


**II.4. Fonction de Rampe :**

$$r(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



**II.5. Fonction Rectangulaire :**



On l'appelle également Fenêtre

$$x(t) = A \cdot \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$$

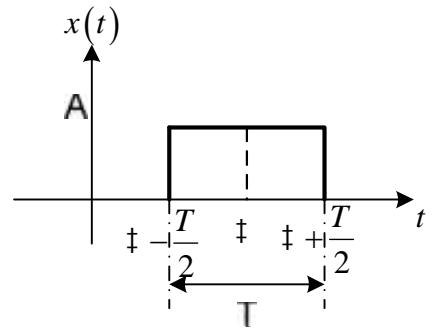
A : Amplitude.



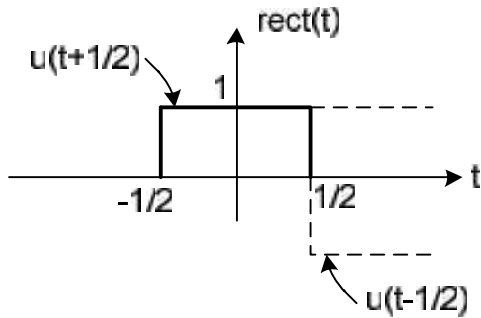
$\dagger$  : Centre de symétrie.

$T$  : Largeur.

On peut définir la fonction rectangulaire en fonction de l'échelon

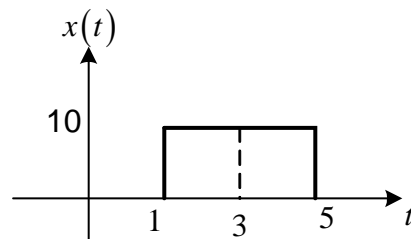


$$rect(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$$



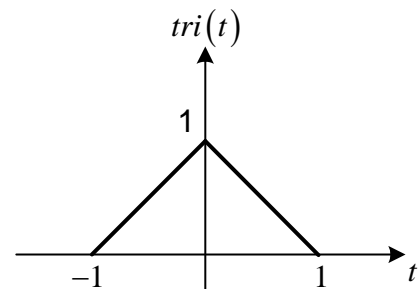
**Exemple :** représenter  $x(t)$  graphiquement :

$$x(t) = 10 \cdot rect\left(\frac{t-3}{4}\right)$$



## II.6. Fonction Triangulaire :

$$Tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 0 \\ 0 & |t| > 0 \end{cases}$$

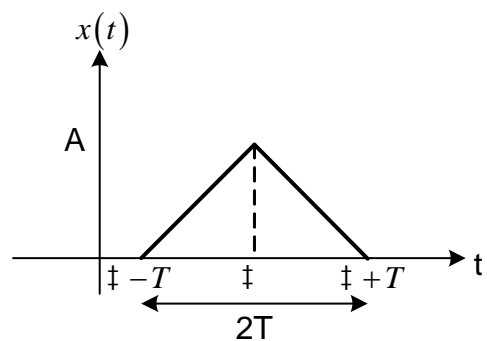


$$x(t) = A \cdot tri\left(\frac{t - \dagger}{T}\right)$$

$A$  : Amplitude.

$\dagger$  : Centre de symétrie.

$T$  : La demi-largeur.



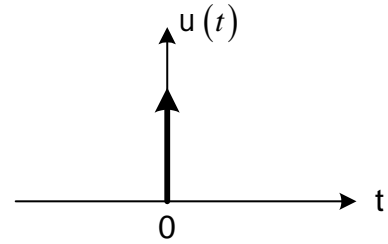
**II.7. Impulsion de Dirac :**

Impulsion de Dirac  $\equiv$  Distribution de Delta

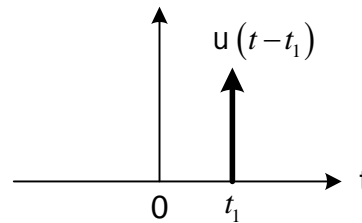
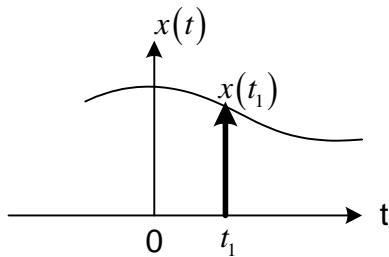
$\equiv$  Impulsion unité

Elle peut être définie par le produit scalaire :

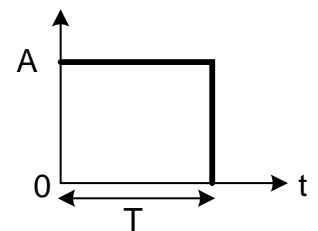
$$\langle x(t), u(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot u(t) dt = x(0) \quad (II.1)$$



$u(t)$  : est un opérateur d'échantillonnage

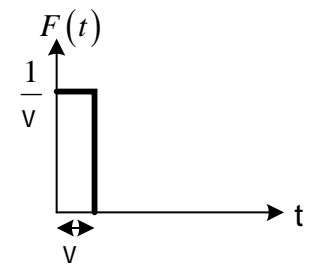


$$\langle x(t), u(t-t_1) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot u(t-t_1) dt = x(t_1)$$



Dans l'équation (II.1) si  $x(t) = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) dt = 1 = u(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^0 u(t) dt = 0 & t < 0 \\ \int_0^{+\infty} u(t) dt = 1 & t > 0 \end{cases}$$



$$\lim_{v \rightarrow 0} F(t) = u(t)$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Pratiquement l'impulsion du Dirac peut être considéré comme une fonction rectangulaire de surface unité dont la durée tend vers zéro.

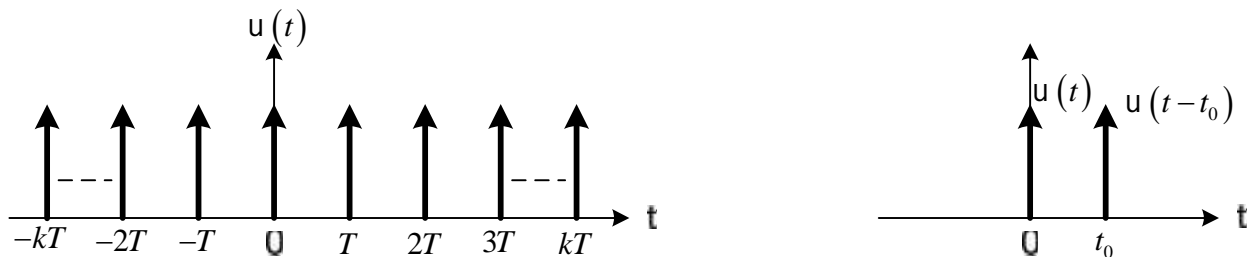
**II.7.1. Produit d'une fonction continue par une impulsion de Dirac :**

$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t) \quad (\text{II.2})$$

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0) \quad (\text{II.3})$$

**II.7.2. Peigne de Dirac :**

On appelle peigne de Dirac une succession périodique d'impulsions de Dirac.



$$u_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

$T$  : est période de peigne.

Cette suite est parfois appelée fonction d'échantillonnage ou train d'impulsions.

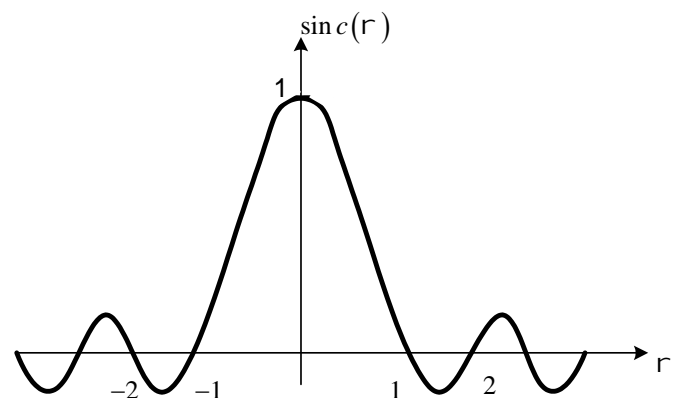
De l'équation (II.2) et (II.3) on peut avoir :

$$x(t) \cdot u_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \cdot \delta(t - kT) \quad (\text{II.4})$$

**II.8. Sinus cardinal :**

C'est le rapport entre une fonction sinusoidale et son argument :

$$\boxed{\sin c(r) = \frac{\sin(fr)}{fr}} \quad \sin(r) \underset{r \rightarrow 0}{\approx} r$$



**II.9. Systèmes :**

**II.9.1. Définition d'un Système :**

Mathématiquement un système est un opérateur, ou une transformation qui à partir d'un signal d'entrée  $x(t)$  fournit un signal de sortie  $y(t)$ .



On note  $y(t) = T[x(t)]$

**II.9.2. Système linéaire:**

Un système T est linéaire si :

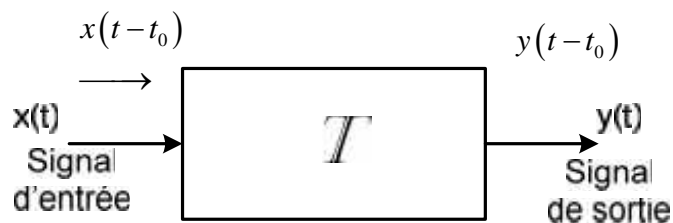
$$\boxed{\forall a_1 \in \mathcal{R}, \forall a_2 \in \mathcal{R}, T[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = \underbrace{a_1 T[x_1(t)]}_{y_1(t)} + \underbrace{a_2 T[x_2(t)]}_{y_2(t)}} \quad (\text{II.5})$$

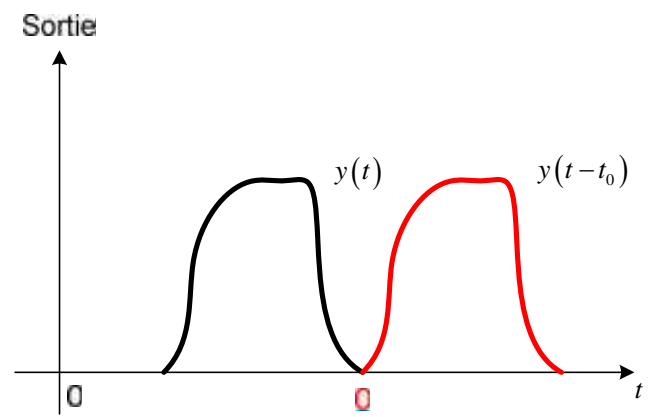
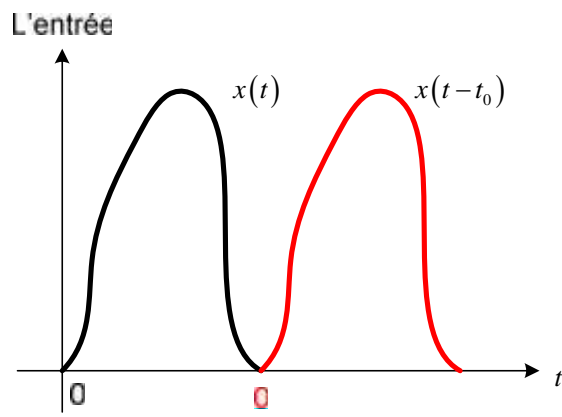
**II.9.3. Système invariant:**

Un système est dit invariant dans le temps si et seulement si :

$$\boxed{T[x(t-t_0)] = y(t-t_0); \forall t_0 \in \mathcal{R}} \quad (\text{II.6})$$

Un décalage à l'entrée correspond le même décalage à la sortie.





## **Chapitre III**

# **CONVOLUTION ET CORRELATION**

### III.1. Introduction :

La convolution et la corrélation sont des concepts physiques significatifs dans plusieurs domaines scientifiques.

Elles jouent un rôle important dans l'analyse et le traitement des signaux.

### III.2. Convolution :

#### III.2.1. Définition :

Le produit de convolution entre deux fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$  est défini de la façon suivante :

$$f(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\dagger) \cdot g(t - \dagger) d\dagger \quad (\text{III.1})$$

Le produit de convolution exprime la quantité de recouvrement d'une fonction  $f$  lorsqu'on la déplace sur une autre fonction  $g$  : c'est un *mélangeur* de fonction. C'est un outil important en TDS (traitement des signaux).

De même le signal de sortie  $y(t)$  d'un système linéaire causal est donné par le produit de convolution du signal d'entrée  $x(t)$  par la réponse impulsionnelle du système  $h(t)$ .

Dans le cas discret :

$$\begin{array}{c}
 x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) = x(n) \otimes h(n) \\
 \phantom{x(n)} \phantom{\longrightarrow} \phantom{\boxed{h(n)}} \phantom{\longrightarrow} = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot h(n - k)
 \end{array}$$

#### III.2.2. Représentation graphique du produit de convolution :

En examinant le produit de convolution suivant :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= x(t) \otimes h(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\dagger) \cdot h(t - \dagger) d\dagger
 \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

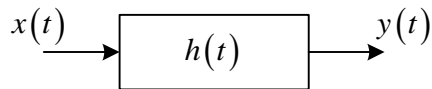
On peut énumérer les différentes étapes et opérations intervenant dans le produit de convolution :

1. La variable  $t$  est remplacé par  $\dagger$  .
2. On prend la symétrie de  $h(\dagger)$  par rapport à l'axe des ordonnées  $h(\dagger) \rightarrow h(-\dagger)$

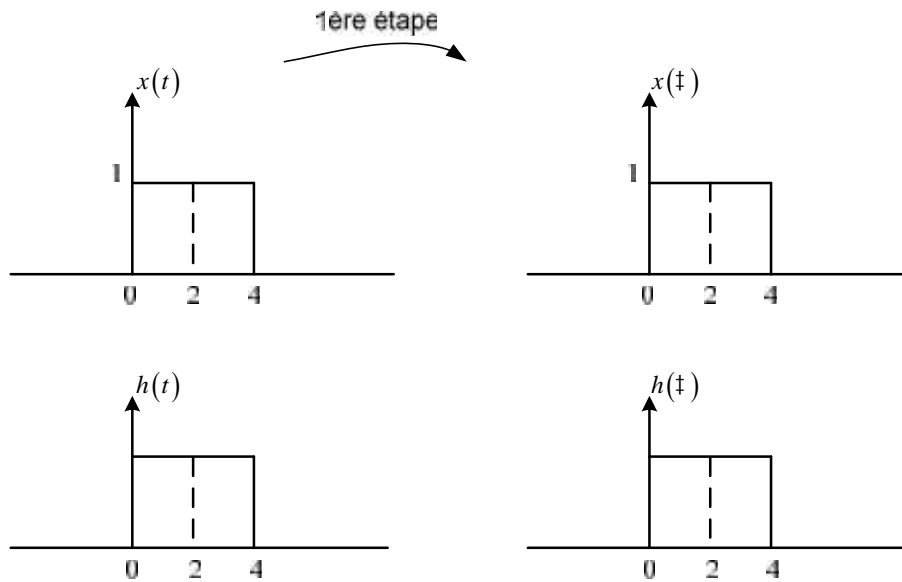
3. Cette fonction  $h(-\dagger)$  est ensuite translaturée vers la droite d'une quantité  $t$   $h(-\dagger) \rightarrow h(t-\dagger)$
4. On fait le produit  $x(\dagger)$  par  $h(t-\dagger)$
5. Le produit de convolution est une fonction du temps  $t$ , est doit être évalué pour  $-\infty < t < +\infty$

**Exemple :**

Soit  $x(t) = h(t) = \text{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right)$

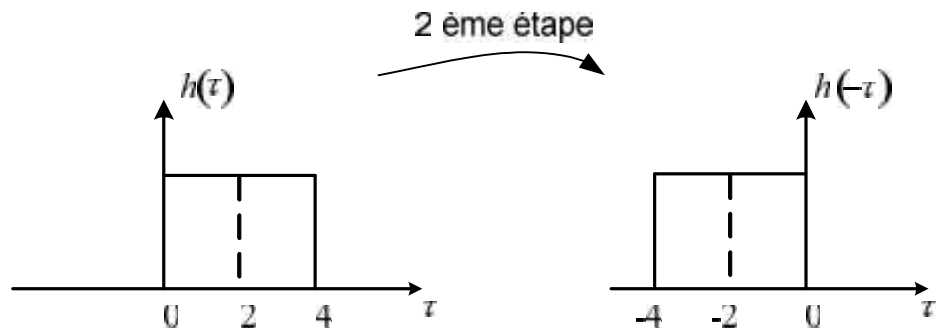


Calculer  $y(t)$

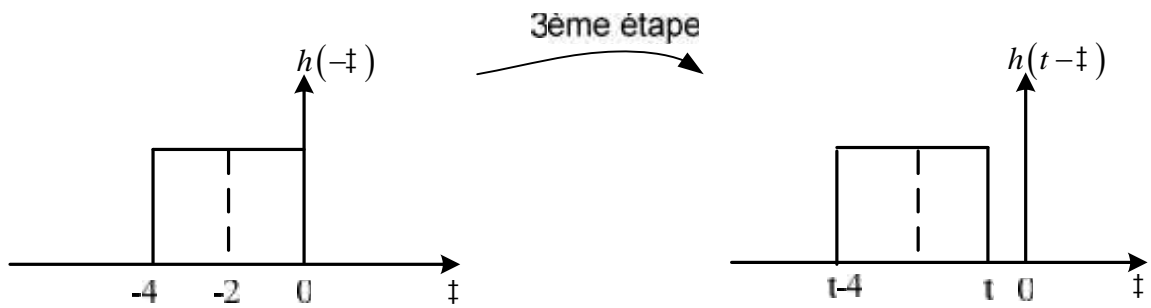




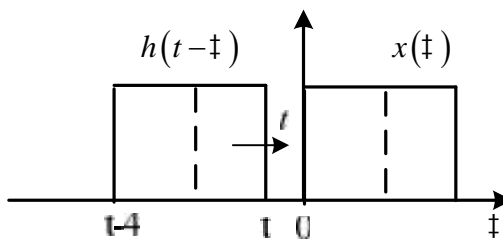
2<sup>ème</sup> étape



3<sup>ème</sup> étape



4<sup>ème</sup> et 5<sup>ème</sup> étape



1<sup>er</sup> cas :

$t < 0 \Rightarrow y(t) = 0$  (il n'y a aucune section entre les deux).

2<sup>ème</sup> cas :

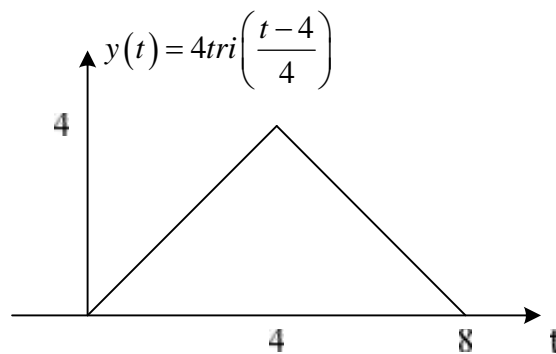
$$0 \leq t \leq 4 \Rightarrow y(t) = \int_0^t 1 \cdot d\ddagger = t$$

3<sup>ème</sup> cas :

$$t > 4 \Rightarrow y(t) = \int_{t-4}^4 1 \cdot d\ddagger = 8 - t$$

$$t - 4 > 4 \Rightarrow t > 8 \Rightarrow y(t) = 0$$

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t \leq 4 \\ 8 - t & 4 \leq t \leq 8 \\ 0 & t > 8 \end{cases}$$



$$\text{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right) = 4\text{tri}\left(\frac{t-4}{4}\right)$$

### III.3. Propriétés :

#### III.3.1. Commutativité :

Le produit de convolution est commutatif

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = h(t) \otimes x(t) \tag{III.3}$$

$$x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\ddagger) \cdot h(t - \ddagger) d\ddagger \tag{III.4}$$

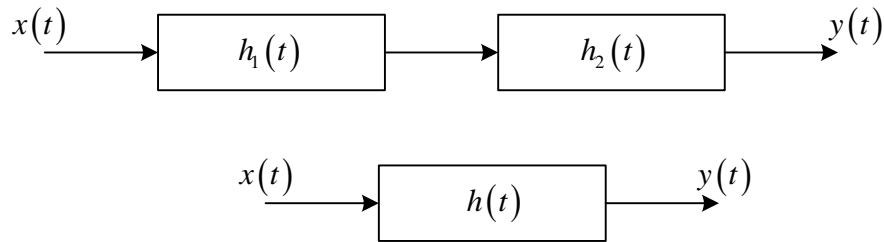
Si on pose :

$$t - \dagger = M \rightarrow \begin{cases} d\dagger = -dM \\ \dagger \rightarrow +\infty, M \rightarrow -\infty \\ \dagger \rightarrow -\infty \rightarrow, M \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

L'équation (III.4) devient :

$$\begin{aligned} & \int_{+\infty}^{-\infty} x(t-M).h(M)(-dM) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-M).h(M)(dM) \\ &= h(t) \otimes x(t) \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

**III.3.2. Associativité :**



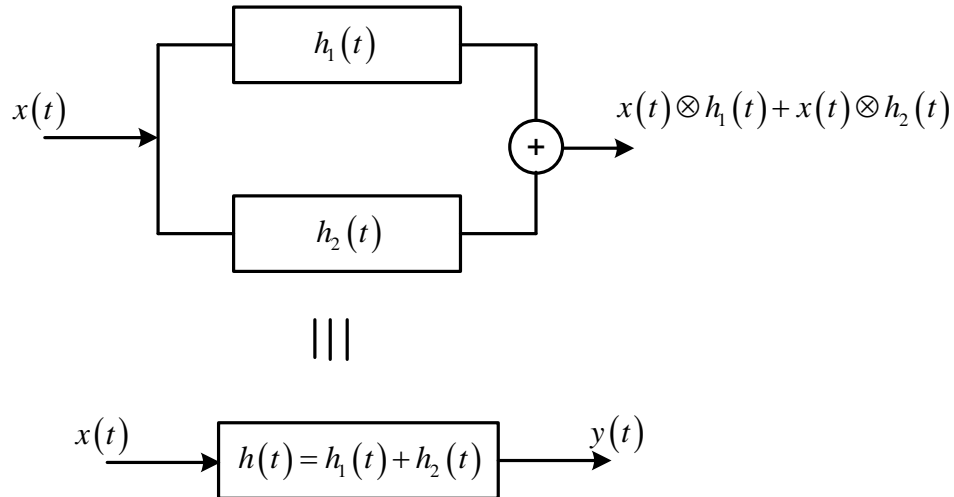
$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \otimes h(t) \\ &= x(t) \otimes [h_1(t) \otimes h_2(t)] \\ &= [x(t) \otimes h_1(t)] \otimes h_2(t) \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

**III.3.3. Distributivité :**

Cette propriété est la conséquence de la linéarité des intégrales.

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \otimes h_1(t) + x(t) \otimes h_2(t) \\ &= x(t) \otimes [h_1(t) + h_2(t)] \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Grâce à cette propriété, on peut dire que la mise en parallèle de deux systèmes de réponse impulsionnelle  $h_1(t)$  et  $h_2(t)$  est équivalente à un système dont la réponse impulsionnelle  $h(t)$  est la somme des deux réponses  $h_1(t)$  et  $h_2(t)$ .



### III.4. Corrélation :

#### III.4.1. Principe de la corrélation :

En traitement de signaux, il est souvent nécessaire de comparer deux signaux, cela peut se faire de plusieurs manières.

La méthode qui est la plus utilisée consiste à une mesure de leur similitude de forme et de position en faisant translater l'un des signaux par rapport à l'autre mathématiquement. Cette opération est un produit scalaire.

#### III.4.2. Définition de la corrélation :

C'est la relation réciproque qui indique le degré de similitude entre deux fonctions (signaux).

##### a) Fonction d'inter-corrélation dans le cas des signaux énergétiques :

On appelle fonction d'inter corrélation notée  $R_{xy}(\dagger)$  en anglais (cross corrélation), la fonction permettant la mesure de la similitude entre deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$ .

$$R_{xy}(\dagger) = \langle x^*, y_{\dagger} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \cdot y(t + \dagger) dt \quad (\text{III.9})$$

Avec  $x^*(t)$  le conjugué de  $x(t)$ .

$y_{\dagger} \rightarrow y(t)$  est translaté d'une quantité  $\dagger$ .

Cas discret :

$$R_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n) \cdot y(n+k) \quad (\text{III.10})$$

Cas particulier :

Si nous sommes dans les signaux réels

$$R_{xy}(\dagger) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t+\dagger) dt \quad (\text{III.11})$$

**b) Fonction d'auto-corrélation dans le cas des signaux énergétiques :**

Cette opération permet de comparer un signal  $x(t)$  avec lui-même durant l'intervalle de temps  $t$  dont l'un des signaux est décalé (translaté) d'une certaine quantité  $\dagger \Rightarrow y(t) = x(t)$ .

$$R_x(\dagger) = \langle x^*, x_{\dagger} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \cdot x(t+\dagger) dt \quad (\text{III.12})$$

Cas discret :

$$R_x(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n) \cdot x(n+k) \quad (\text{III.13})$$

**c) Relation entre énergie et fonction d'autocréation :**

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) x(t) dt = R_x(0) \quad (\text{III.14})$$

La valeur à l'origine d'une fonction d'auto-corrélation représente l'énergie du signal :

$$\boxed{E_x = R_x(0)} \quad (\text{III.15})$$

**d) Fonction d'inter-corrélation dans le cas des signaux à puissance moyenne finie :**

$$R_{xy}(\dagger) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t) y(t+\dagger) dt \quad (\text{III.16})$$

e) **Fonction d'auto-corrélation dans le cas des signaux à puissance moyenne finie :**

$$R_x(\dagger) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t) x(t + \dagger) dt \quad (\text{III.17})$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t) x(t) dt = R_x(0) \quad (\text{III.18})$$

### III.5. Relation entre la corrélation et la convolution :

$$\left\{ \begin{array}{l} z(\dagger) = x(\dagger) \otimes y(\dagger) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(\dagger - t) dt \\ R_{xy}(\dagger) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \cdot y(t + \dagger) dt \end{array} \right. \quad (\text{III.19})$$

Si on pose  $M = -t$

$$\left\{ \begin{array}{l} t \rightarrow +\infty \Rightarrow M = -\infty \\ t \rightarrow -\infty \Rightarrow M = +\infty \\ dt = -dM \end{array} \right.$$

L'équation (III.20) devient :

$$\begin{aligned} R_{xy}(\dagger) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(-M) y(\dagger - M) dM \\ &= x^*(-\dagger) \otimes y(\dagger) \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Dans le cas des signaux réels :  $R_{xy}(\dagger) = x(-\dagger) \otimes y(\dagger)$

La différence entre la fonction d'inter-corrélation  $R_{xy}(\dagger)$  et la convolution des deux fonctions se trouve au niveau de la fonction qui est inversé par rapport au temps. Dans le cas des fonctions réelles et paires, la convolution et la corrélation sont équivalent.

Si  $x(\dagger)$  réel et paire alors :  $R_{xy}(\dagger) = x(\dagger) \otimes y(\dagger)$ .

### III.6. Propriétés :

#### a) La symétrie :

Si les signaux sont complexes :

$$R_{xy}(\dagger) = R_{yx}^*(-\dagger) \quad (\text{III.21})$$

Dans le cas où les signaux sont réels :

$$R_{xy}(\dagger) = R_{yx}(-\dagger) \quad (\text{III.22})$$

Remarque : pour une fonction d'autocorrélation, on peut dire que pour un signal réel :

$$R_x(\dagger) = R_x(-\dagger) \quad (\text{III.23})$$

Cela veut dire que la fonction d'autocorrélation  $R_x(\dagger)$  est une fonction réelle paire.

#### b) La périodicité :

Si un signal  $x(t)$  est périodique d'une période  $T$  alors  $R_x(\dagger)$  est aussi périodique de la même période.

$$x(t) = x(t + kT) \rightarrow R_x(\dagger) = R_x(\dagger + kT) \quad (\text{III.24})$$

#### c) Additivité :

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) + y(t) \rightarrow R_z(\dagger) \\ R_z(\dagger) &= R_x(\dagger) + R_y(\dagger) + R_{xy}(\dagger) + R_{yx}(\dagger) \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

#### Cas particulier :

Si  $x(t)$  et  $y(t)$  sont indépendants (il n'y a aucune ressemblance entre les deux)

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_{xy}(\dagger) &= R_{yx}(\dagger) = 0 \\ \Rightarrow R_z(\dagger) &= R_x(\dagger) + R_y(\dagger) \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

## **Chapitre IV**

# **ANALYSE DE FOURIER**



**IV.1.Introduction:**

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), plus communément appelé Joseph Fourier, est un mathématicien et physicien français connu pour ses travaux sur la décomposition des fonctions périodiques en séries trigonométriques convergentes appelées séries de Fourier et leurs applications au problème de la propagation de la chaleur.

**IV.2. L'analyse de Fourier :**

L'analyse de Fourier est l'outil mathématique principal qui permet le passage de la représentation temporelle à la représentation fréquentielle. On effectue ce passage pour permettre de décomposer un signal en éléments sinusoïdaux, chaque sinusoïde représente une fréquence, ce qui permet d'obtenir les renseignements sur la distribution fréquentielle.

**IV.3. Transformation de Fourier des fonctions périodiques : série de Fourier :**

La transformée et la série de Fourier permettent de donner une autre représentation des signaux très intéressante pour la théorie de l'information du signal. Cette décomposition exponentielle ou trigonométrique permet d'exprimer le signal en fonction de ses harmoniques. L'analyse de Fourier est très utilisée en électricité comme en physique.

**IV.3.1. Définition du spectre d'un signal :**

Le spectre d'un signal n'est rien d'autre que la représentation en fréquence des sinusoïdes qui le compose.

Une sinusoïde  $x(t) = A \sin(\tilde{S}t + w)$

$A$  : Amplitude

$\tilde{S} = 2\pi f$  : Pulsation

$w$  : La phase

La représentation de l'amplitude en fonction de  $f \rightarrow$  spectre d'amplitude.

La représentation de la phase en fonction de  $f \rightarrow$  spectre de phase.

**IV. 3.2. Les harmoniques :**

On appelle les différentes sinusoïdes qui composent le signal harmonique. On le numérote en fonction de leurs fréquences.

L'harmonique numéro  $n$  à une fréquence égale à  $n$  multiple celle de la fréquence de départ (fondamentale).

L'harmonique  $n=1$  s'appelle le fondamentale.

**IV. 3.3. Première forme de la décomposition en série de Fourier (série de Fourier trigonométrique condensé) :**

Un signal  $x(t)$  périodique de fréquence  $f_0$  peut s'écrire comme la somme :

D'un terme constant  $\rightarrow$  c'est la valeur moyenne.

Plus, un nombre (infini) de sinusoïdes de fréquences multiple de  $f_0$  se sont les harmoniques

Première forme de la décomposition en série de Fourier :

$$\boxed{x(t) = \langle x \rangle + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cdot \cos(n\check{S}_0 t + W_n)} \quad (IV.1)$$

**IV. 3.4. Série de Fourier trigonométrique (d'Euler) :**

La deuxième forme de la décomposition en série de Fourier :

$$\boxed{x(t) = \langle x \rangle + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cdot \cos(n\check{S}_0 t) + b_n \cdot \sin(n\check{S}_0 t)]} \quad (IV.2)$$

Avec  $\check{S}_0 = 2\pi f_0$ ,  $T_0 = \frac{1}{f_0}$

$$\boxed{\langle x \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt = \bar{x}_{T_0}} \quad (IV.3)$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t) \cdot \cos(n\check{S}_0 t) dt} \quad (IV.4)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{r_0}(t) \cdot \sin(n\tilde{\omega}_0 t) dt \quad (IV.5)$$

Par identification entre (IV.1) et (IV.2) et en utilisant l'identité  $\cos(\Gamma + S) = \cos\Gamma \cos S - \sin\Gamma \sin S$ , On obtient :

$$a_n = C_n \cos(w_n) \quad (IV.6)$$

Et 
$$b_n = C_n \sin(w_n) \quad (IV.7)$$

$$Z = a_n + jb_n = C_n e^{-jw_n} \quad (IV.8)$$

$$|Z| = C_n \Rightarrow C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (IV.9)$$

$$w_n = -\text{Arg}(Z) = -\text{Arctg}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad (IV.10)$$

**Propriété :**

- 1) Si  $x(t)$  est paire ( $x(t) = x(-t)$ )  $\Rightarrow b_n = 0 \quad \forall t$
- 2) Si  $x(t)$  est impaire ( $x(t) = -x(-t)$ )  $\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall t$
- 3) Si on ajoute une constante à  $x(t)$ , c'est la valeur moyenne qui change et non pas  $a_n$  et  $b_n$ .
- 4) Si on change l'origine des temps de  $x(t)$ , le spectre de phase est modifié et non pas le spectre d'amplitude.

**IV. 3.5. Forme complexe de la série de Fourier :**

3<sup>ème</sup> forme de série de Fourier :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\tilde{\omega}_0 t} \quad (IV.11)$$

$C_n$  sont les coefficients de la série de Fourier complexe. La suite des coefficients complexes  $C_n$  constituent le spectre (raies) du signal périodique  $x(t)$ .

$$e^{j\Gamma} = \cos \Gamma + j \sin \Gamma \quad (\text{IV.12})$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n [\cos n\check{S}_0 t + j \sin n\check{S}_0 t] \quad (\text{IV.13})$$

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jn\check{S}_0 t} dt \quad (\text{IV.14})$$

Si  $n = 2$

$$x(t) = C_{-2} [\cos 2\check{S}_0 t - j \sin 2\check{S}_0 t] + C_{-1} [\cos \check{S}_0 t - j \sin \check{S}_0 t] + C_0 + C_1 [\cos \check{S}_0 t + j \sin \check{S}_0 t] + C_2 [\cos 2\check{S}_0 t + j \sin 2\check{S}_0 t] \quad (\text{IV.15})$$

$$x(t) = \underbrace{[C_{-2} + C_2]}_{a_2} \cos 2\check{S}_0 t + \underbrace{[C_{-1} + C_1]}_{a_1} \cos \check{S}_0 t + \underbrace{C_0}_{a_0} + \underbrace{j[C_2 - C_{-2}]}_{b_2} \sin 2\check{S}_0 t + \underbrace{j[C_1 - C_{-1}]}_{b_1} \sin \check{S}_0 t$$

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos \check{S}_0 t + a_2 \cos 2\check{S}_0 t + b_1 \sin \check{S}_0 t + b_2 \sin 2\check{S}_0 t \quad (\text{IV.16})$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\check{S}_0 t + b_n \sin n\check{S}_0 t] \quad (\text{IV.17})$$

$$a_n = C_n + C_{-n} = \frac{1}{T_T} \int x(t) e^{-jn\check{S}_0 t} dt + \frac{1}{T_T} \int x(t) e^{jn\check{S}_0 t} dt \quad (\text{IV.18})$$

$$a_n = \frac{1}{T_T} \int x(t) [e^{jn\check{S}_0 t} + e^{-jn\check{S}_0 t}] dt \quad (\text{IV.19})$$

$$a_n = \frac{2}{T_T} \int x(t) \cos(n\check{S}_0 t) dt \quad (\text{IV.20})$$

$$b_n = j(C_n - C_{-n}) = \frac{2}{T_T} \int x(t) \sin(n\check{S}_0 t) dt \quad (\text{IV.21})$$

$$a_0 = C_0 = \frac{1}{T_T} \int x(t) dt \quad (\text{IV.22})$$

$$C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \quad (\text{IV.23})$$

**Propriété :**

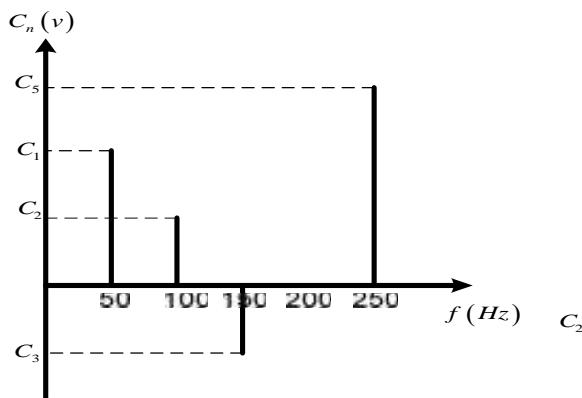
Si  $x(t)$  est réel  $\Rightarrow A_n, B_n$  réels  $\Rightarrow C_{-n} = C_n^*$

Si  $x(t)$  pair  $\Rightarrow B_n = 0 \forall n \Rightarrow C_{-n} = C_n$

Si  $x(t)$  impair  $\Rightarrow A_n = 0 \forall n \Rightarrow C_{-n} = -C_n$

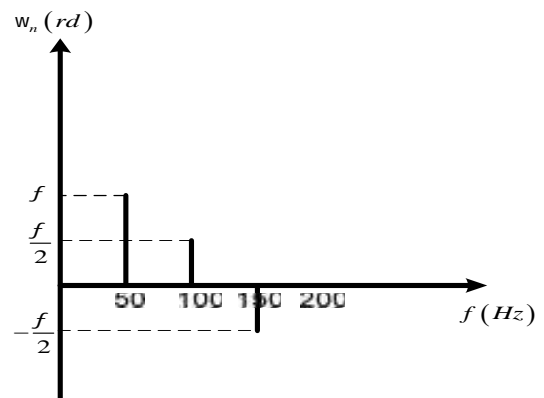
**Exemple :**

$x(t)$  est une tension en sortie d'un circuit ( $f_0 = 50\text{Hz}$ )



Spectre d'amplitude

(Spectre discret)



Spectre de phase

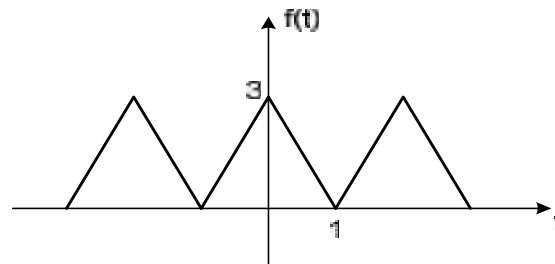
(Spectre discret)

On peut remarquer qu'on obtient des raies correspondantes aux harmoniques 1,2,3,...pour les autres fréquences les sinusoides ne sont pas définis, on dit que le spectre est discret c'est le cas de tout les signaux périodiques.

**IV. 3.6. Condition d'existence de la série de Fourier :**

- Le signal  $x(t)$  doit être périodique.
- La condition de convergence  $|x(t)| < \infty$ .

**Application :**



Calculer  $a_0$ ,  $a_n$  et  $b_n$

La période est :  $T = 2s$  ; la pulsation est :  $\tilde{\omega} = \frac{2\pi}{T} = \pi$  ;  $f(t)$  est une fonction paire :  $b_n = 0$ .

La valeur moyenne est :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 f(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt$$

$$\forall t \in [-1, 0]$$

$$\text{et } \forall t \in [0, 1]$$

$$f(t) = at + b \Rightarrow f(t) = 3t + 3$$

$$f(t) = ct + d \Rightarrow f(t) = -3t + 3$$

D'où :

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^0 (3t + 3) dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2} t^2 + 3t \right]_{-1}^0 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (-3t + 3) dt = \frac{1}{2} \left[ -\frac{3}{2} t^2 + 3t \right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$a_0 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

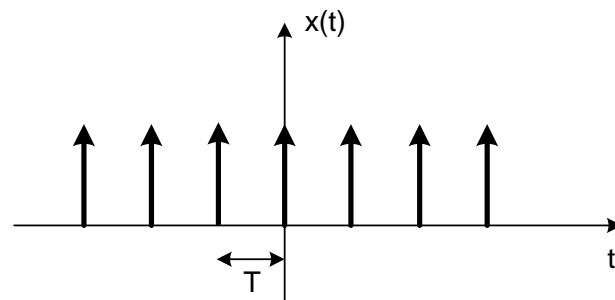
$$\boxed{a_0 = \frac{3}{2}}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cdot \cos(2n\pi f_0 t) dt \Rightarrow a_n = \frac{2}{T} \int_{-1}^1 f(t) \cdot \cos(n\pi t) dt$$

$$a_n = \int_{-1}^0 (3t + 3) \cdot \cos(n\pi t) dt + \int_0^1 (-3t + 3) \cdot \cos(n\pi t) dt$$

En intégrant par partie, on trouve

$$a_n = \frac{3}{(n\pi)^2} [1 - (-1)^n] + \frac{3}{(n\pi)^2} [1 - (-1)^n]$$



D'où :  $a_n = \frac{6}{(nf)^2} [1 - (-1)^n]$

**Exemple :**

Soit un signal  $x(t) = u_T(t)$

1. Décomposer ce signal en série de Fourier complexe.
2. Déterminer les coefficients de la série de Fourier trigonométrique.
3. Tracer le spectre de ce signal.

1)  $x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$

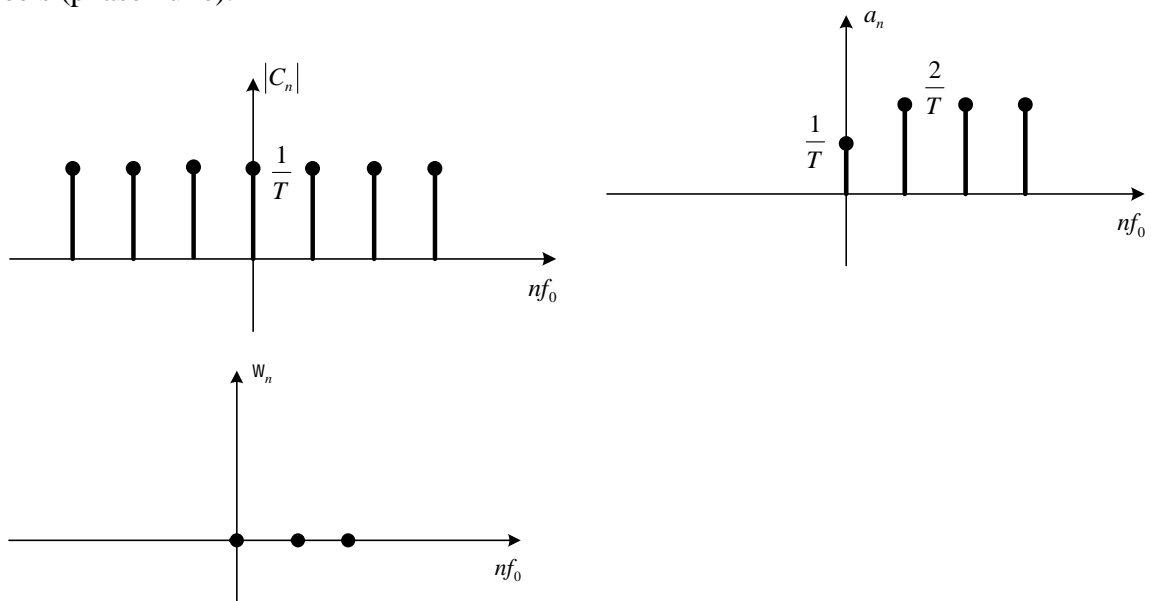
$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \underbrace{e^{-jn\omega_0 t}}_{y(t)} dt = \frac{1}{T} y(0) = \frac{1}{T}$  car  $\int u(t-t_0) y(t) dt = y(t_0)$

2)  $a_n = C_n + C_{-n} = \frac{1}{T} + \frac{1}{T} = \frac{2}{T}$        $a_n = \frac{2}{T}$        $a_0 = C_0 = \frac{1}{T}$

$b_n = 0 = j(C_n - C_{-n}) = j\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T}\right) = 0$

Si on  $a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \cos(0) = \frac{2}{T}$

On remarque que dans ce cas que  $C_n = \frac{1}{T}$  quel que soit  $n$  cela veut dire que les  $C_n$  sont réels (phase nulle).



### IV. 3.7. Limitation de la série de Fourier :

La série de Fourier s'applique uniquement aux signaux :

- périodiques (intégrale sur une période)
- Continue
- Non aléatoire

### IV. 3.8. L'égalité de Parseval

L'égalité de Parseval dite parfois **théorème de Parseval** est une formule fondamentale de la théorie des séries de Fourier.

Dans de nombreuses applications physiques (courant électrique par exemple), cette formule peut s'interpréter comme suit : l'énergie totale s'obtient en sommant les contributions des différents harmoniques.

L'énergie totale d'un signal ne dépend pas de la représentation choisie : fréquentielle ou temporelle.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Soit  $f$  une fonction périodique continue par morceaux.

$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\check{S}t) + b_n \sin(n\check{S}t))$ , est sa série de Fourier, alors on a :

$$\boxed{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)}$$
 Remarque : l'intégrale peut être prise sur n'importe quel

intervalle de longueur T.

En utilisant la forme complexe des séries de Fourier, on montre que l'égalité de **Parseval** s'écrit aussi :

$$\boxed{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2}$$

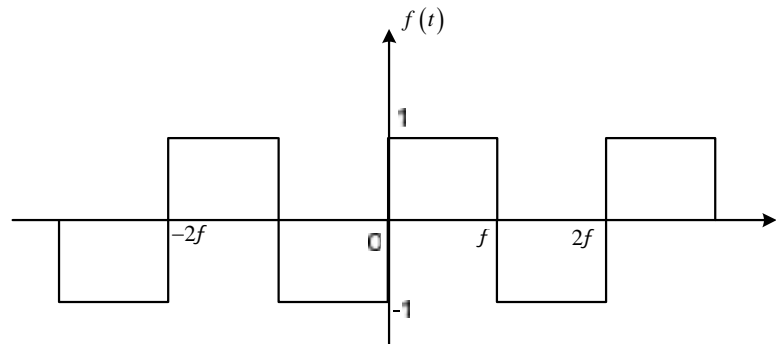
La formule de **Parseval** permet de calculer la somme de certaines séries numériques.

Exemple :

On considère la fonction périodique de période  $2f$  définie comme suit :



$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [0; f[ \\ -1 & \text{sur } [f; 2f[ \end{cases}$$



Cette fonction est monotone par morceaux et bornée. Calculons ses coefficients de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{f} \left[ \int_{-f}^0 (-1) dt + \int_0^f dt \right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{f} \left[ \int_{-f}^0 (-1) \cos(nt) dt + \int_0^f \cos(nt) dt \right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{f} \left[ \int_{-f}^0 (-1) \sin(nt) dt + \int_0^f \sin(nt) dt \right] = \frac{2}{nf} (1 - \cos nf)$$

$$\text{Soit : } b_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{nf}, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

La série de Fourier de la fonction considérée s'écrit donc :

$$f(t) = \frac{4}{f} \left[ \frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \dots + \frac{\sin(2p+1)t}{2p+1} \right]$$

La formule de Parseval donne alors :

$$\frac{1}{2f} \int_0^{2f} f^2(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2$$

On avait obtenu le développement en série de Fourier :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{(2n+1)f} \sin((2n+1)t)$$

La formule de Parseval donne alors :

$$\boxed{\frac{1}{2f} \int_0^{2f} f^2(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2}$$

$$\text{Or : } \frac{1}{2f} \int_0^{2f} f^2(t) dt = 1$$

$$\text{Et : } \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \frac{4}{(2p+1)f} \right)^2 = \frac{8}{f^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

Et donc :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{f^2}{8}}$$

$$\text{C'est-à-dire : } 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{f^2}{8}$$

#### IV. 4. Transformation de Fourier des fonctions :

La transformée de fourier permet d'obtenir une représentation en fréquence (représentation spectrale) des signaux déterministes, continus et non périodiques. Elle exprime la répartition fréquentielle de l'amplitude et de la phase des signaux considérés.

##### IV.4.1. Calcul du spectre par la transformée de Fourier :

C'est une forme complexe de la variable  $f$  définie par ;

$$X(f) = TF[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$X(f)$  indique quelle quantité de fréquence  $f$  est présente dans le signal  $x(t)$  sur l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ .

$X(f)$  est une fonction de  $f$ , généralement complexe :

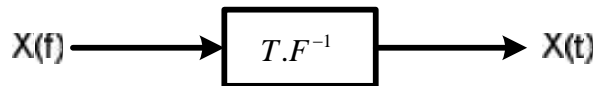
$$\begin{aligned} X(f) &= R\{X(f)\} + j.I\{X(f)\} = |X(f)| \cdot e^{j\phi(f)} \\ &= |X(f)| \cos(\phi(f)) + j|X(f)| \sin(\phi(f)) \end{aligned}$$

Le module est l'amplitude du spectre :

$$|X(f)| = \sqrt{R[X(f)]^2 + I[X(f)]^2}$$

$$\text{L'argument } \phi(f) = \arg(X(f)) = \arctg\left(\frac{\text{Im}[X(f)]}{\text{Re}[X(f)]}\right)$$

La transformation inverse est donnée par :

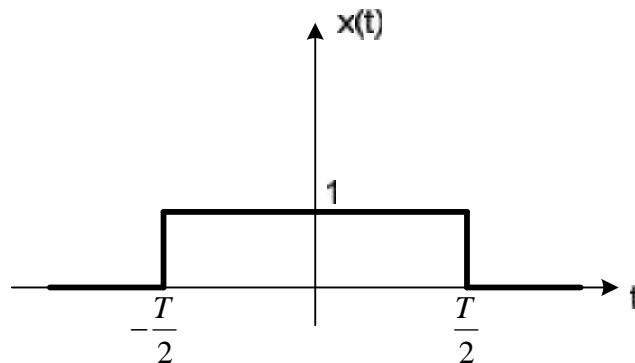


$$x(t) = TF^{-1}\{X(f)\}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t} \cdot df$$

$$x(t) = \frac{1}{2f} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tilde{S}) \cdot e^{j\tilde{S}t} \cdot d\tilde{S} \quad \text{avec } \tilde{S} = 2\pi f \Rightarrow d\tilde{S} = 2\pi df$$

**Application :**



1. Calculer la transformée de Fourier de  $x(t) = \text{rect}_T(t)$  ;
2. Représenter le spectre de  $x(t)$ .

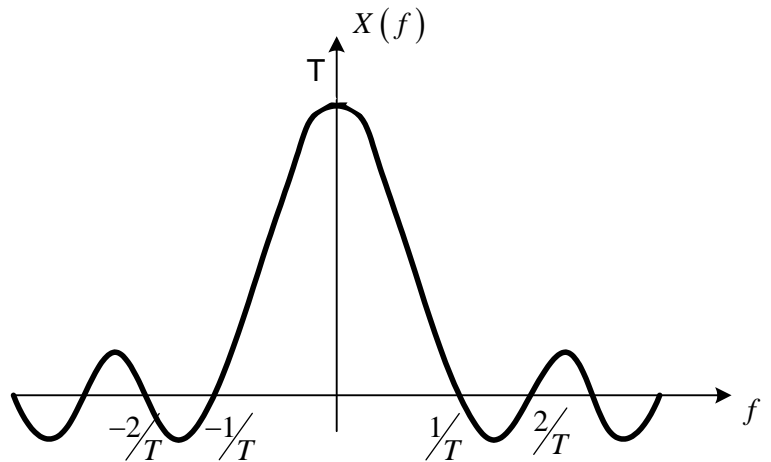
$$\begin{aligned} X(f) &= TF\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}_T(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot dt = -\frac{1}{j2\pi f} \left[ e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Or : } \sin r = \frac{1}{2j} \left[ e^{rj} - e^{-jr} \right] \text{ et } \text{sinc } r = \frac{\sin(fr)}{fr}$$

$$\text{D'où } X(f) = \frac{1}{f} \cdot \sin(f fT) = T \cdot \frac{1}{f fT} \cdot \sin(f fT) = T \cdot \text{sinc}(fT)$$

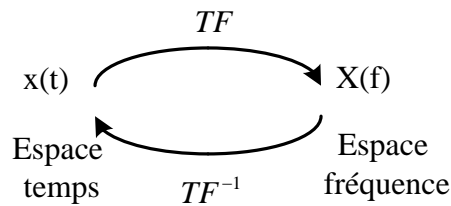
$$\text{D'où } \boxed{X(f) = T \cdot \text{sinc}(fT)}$$

Représentation de  $X(f)$  :



#### IV.4.2. Dualité temps fréquence :

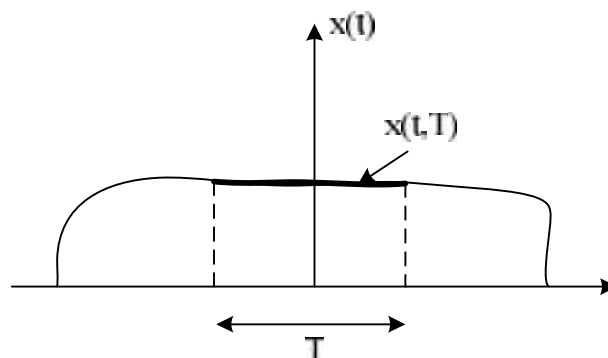
La symétrie des transformations directe et inverse montre l'existence d'une dualité entre l'espace temps et l'espace fréquence.



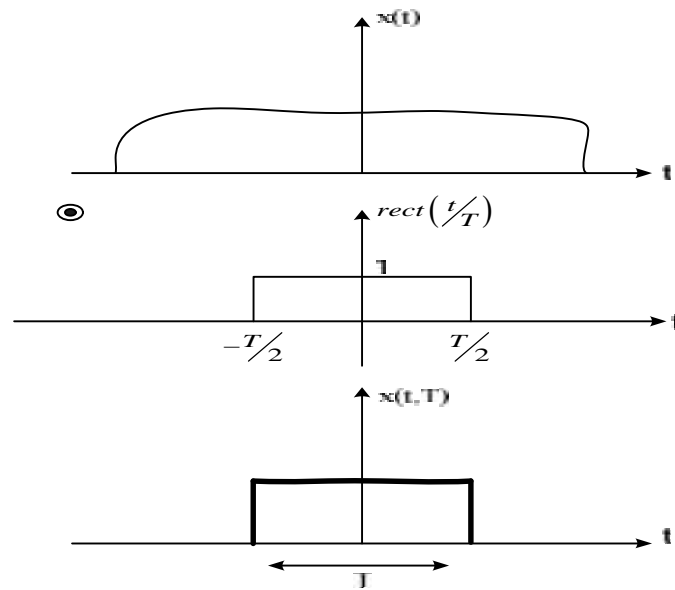
Cette dualité joue un rôle fondamental dans la plupart des méthodes de traitement de signal.

#### IV.4.3. Comparaison entre série de Fourier et transformée de Fourier :

Soit un signal  $x(t)$  quelconque et soit une portion de ce signal



$x(t, T)$  comprise dans l'intervalle  $|t| \leq T/2$

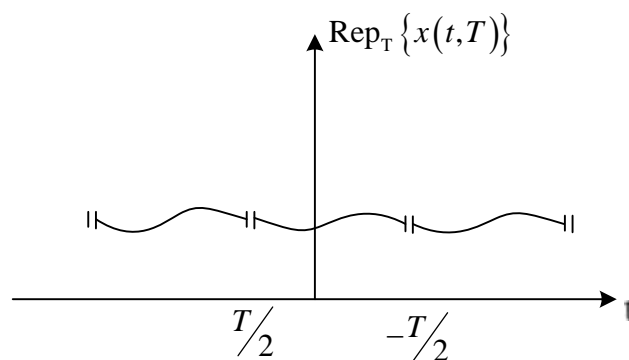


$$x(t, T) = x(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

En développant en série de Fourier cette portion du signal, on trouve les résultats suivants :

$$\begin{cases} x(t, T) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \exp(j2f n f_0 t) \\ C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t, T) \exp(-j2f n f_0 t) dt \end{cases}$$

Seulement en prenant la décomposition de série de Fourier  $x(t, T)$ , on suppose que ce signal est périodique de période T.



$\text{Rep}_T \{x(t, T)\}$  : représente la répétition de  $x(t, T)$

Or pour obtenir notre signal de départ  $x(t)$  il faut augmenter la fenêtre d'observation.

Autrement dit, On fait tomber  $T$  vers l'infini.

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} x(t, T) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \sum_n C_n \exp(j2f n f_0 t) \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \sum_n \left( \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t, T) \exp(-j2f n f_0 t) dt \right) \exp(j2f n f_0 t) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Si } T \rightarrow \infty \begin{cases} \frac{1}{T} \rightarrow df \\ n f_0 \rightarrow f \\ \sum \rightarrow \int \end{cases}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2f ft) dt \right)}_{X(f)} \exp(j2f ft)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(j2f ft) df$$

En conclusion, on peut dire que la TF est une généralisation de la SF en cas des signaux non périodique.

#### IV.4.4. Conclusion :

Pratiquement tous les signaux physiquement réalisables, ont une TF.

Pour les signaux qui ne possède pas la TF, une transformation de même type a été développé c'est la transformée de Laplace.

#### IV.4.5. Propriété de la transformée de Fourier :

##### a) Linéarité :

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(f)$$

$$g(t) \xrightarrow{TF} G(f)$$

$$af(t) + bg(t) \xrightarrow{TF} aF(f) + bG(f)$$

**b) Changement d'échelle du temps :**

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(f)$$

$$f(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{f}{a}\right)$$

Cette propriété montre qu'une dilatation de l'échelle du temps conduit à une compression de l'échelle de fréquence et inversement.

**c) Translation dans le temps :**

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(f)$$

$$\text{Si } f(t-t_0) \xrightarrow{TF} F(f) e^{-j2f f_0 t}$$

$$f(t+t_0) \xrightarrow{TF} F(f) e^{+j2f f_0 t}$$

Cette propriété montre qu'une translation d'un signal dans le domaine temporelle n'influe rien sur son spectre d'amplitude, seul la phase est affectée d'un déphasage liée à cette translation.

**d) Translation fréquentiel :**

$$F(f) \xrightarrow{TF^{-1}} f(t)$$

$$\text{Si } F(f-f_0) \xrightarrow{TF^{-1}} f(t) e^{j2f f_0 t}$$

$$F(f+f_0) \xrightarrow{TF^{-1}} f(t) e^{-j2f f_0 t}$$

**e) Dérivation temporelle :**

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(f)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) e^{j2f ft} df$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) e^{j2f ft} df$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) \frac{d}{dt} (e^{j2f ft}) df$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) (j2f f) e^{j2f ft} df$$

$$\frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{TF} F(f) (j2f f)$$

$$\text{Cas générale : } \frac{d^n f(t)}{dt^n} \xrightarrow{TF} F(f) (j2f f)^n$$

**f) Dérivation fréquentielle :**

$$F(f) \xrightarrow{TF^{-1}} f(t)$$

$$\frac{d^n F(f)}{df^n} \xrightarrow{TF^{-1}} f(t)(-j2\pi t)^n$$

**g) Convolution :**

$$x(t) \otimes h(t) \xrightarrow{TF} X(f).H(f)$$

$$x(t).h(t) \xrightarrow{TF} X(f) \otimes H(f)$$

**h) TF d'un signal conjugué :**

$$f(t) \xrightarrow{TF} F(f)$$

$$f^*(t) \xrightarrow{TF} F^*(-f)$$

**IV.5. Transformée de Fourier des signaux élémentaires :**

Le signal : $s(t)$	Transformée de Fourier du signal : $S(f)$
Constante $A \forall t$	$Au(f)$
$u(t)$	<b>1</b>
Peigne de Dirac $\sum_n u(t-nT)$	$\sum_n \frac{1}{T} u\left(f - \frac{n}{T}\right)$
$u(t-\dagger)$	$e^{-j2\pi f \dagger}$
Echelon unité $U(t)$	$\frac{1}{2}u(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$A.rect\left(\frac{t}{\dagger}\right)$	$A\dagger.sinc(f\dagger)$
$A.tri\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT.sinc^2(fT)$
$e^{-j2\pi f_0 t}$	$u(f+f_0)$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$u(f-f_0)$

**Application :**

Calculer et représenter la transformée de Fourier d'un signal sinusoïdale  $s(t)$  d'amplitude  $S$  et de fréquence  $f_0$  telle que :  $s(t) = S.\cos(2\pi f_0 t)$ .



$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2f f_0 t} dt = S \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2f f_0 t) e^{-j2f f_0 t} dt$$

Or  $\cos(2f f_0 t) = \frac{e^{j2f f_0 t} + e^{-j2f f_0 t}}{2}$

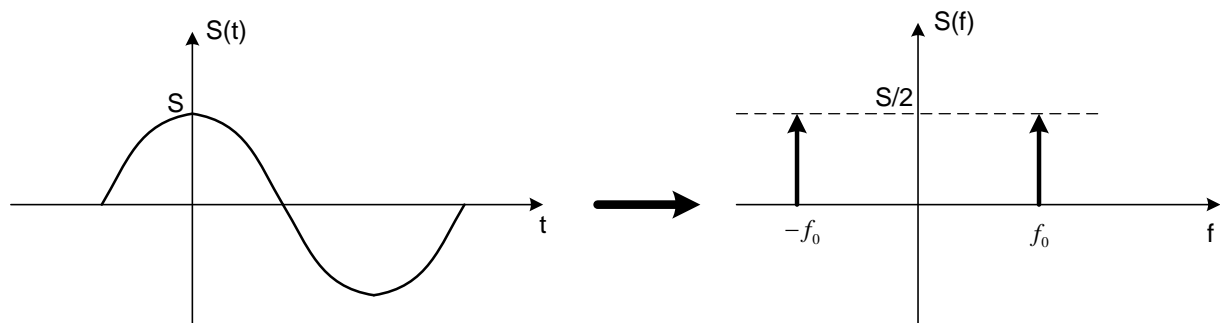
$$S(f) = S \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{e^{j2f f_0 t} + e^{-j2f f_0 t}}{2} \right) e^{-j2f f_0 t} dt = \frac{S}{2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2f f_0 t} \cdot e^{-j2f f_0 t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2f f_0 t} \cdot e^{-j2f f_0 t} dt \right]$$

$$= \frac{S}{2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2f(f_0-f)t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2f(f_0+f)t} dt \right] = \frac{S}{2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2f(f-f_0)t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2f(f_0+f)t} dt \right]$$

Sinon sans calculer l'intégrale, en utilisant le tableau de transformation de Fourier ci-dessus.

$$S(f) = \frac{S}{2} [u(f - f_0) + u(f + f_0)]$$

$$TF [S \cdot \cos(2f f_0 t)] = \frac{S}{2} [u(f - f_0) + u(f + f_0)]$$



**Remarque :**

La transformée de Fourier d'une fonction cosinus de fréquence  $f_0$  et d'amplitude  $S$ , est la somme de deux impulsions de Dirac centrée sur les fréquences  $-f_0$  et  $+f_0$  ; et d'amplitude la moitié de celle du signal :  $S/2$ .

La transformée de Fourier d'une fonction sinus de fréquence  $f_0$  et d'amplitude  $S$ , est la somme de deux impulsions de Dirac centrée sur les fréquences  $-f_0$  avec une amplitude  $S/2$  et sur  $+f_0$  avec une amplitude  $-S/2$ .

**IV. 6. Produit d'une fonction périodique par un signal à énergie finie :**

Soit  $x(t)$  un signal à énergie finie et soit  $y(t)$  un signal périodique

$$x(t) \rightarrow E.f$$

$$y(t) = y(t + nT)$$

$$z(t) = x(t) \cdot y(t)$$

$$z(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

Puisque  $y(t)$  est un signal périodique alors on peut le décomposer en S.F.

$$y(t) = \sum_n C_n e^{j\frac{n}{T}2\pi f t} \xrightarrow{TF} Y(f) = \sum_n C_n u\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$\begin{aligned} Z(f) &= X(f) \otimes \sum_n C_n u\left(f - \frac{n}{T}\right) \\ &= \sum_n C_n \left[ X(f) \otimes u\left(f - \frac{n}{T}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{Z(f) = \sum_n C_n X\left(f - \frac{n}{T}\right)}$$

**Conclusion :**

On peut dire que le spectre d'un signal temporel obtenu à partir du produit d'un signal à énergie finie avec un signal périodique est :

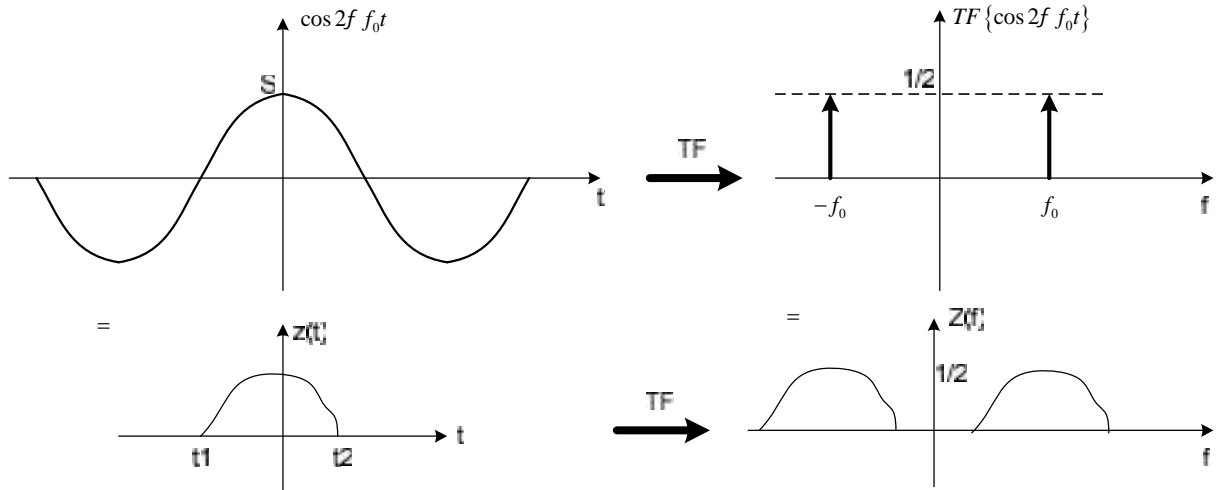
- Un signal d'énergie
- Une combinaison entre les deux signaux avec  $x(t)$  décalé par un pas régulier de  $\frac{n}{T}$  sur l'axe des fréquences.

**Application :**

Soit un signal à énergie finie  $x(t)$  et soit un signal périodique  $y(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

$$z(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

$$Z(f)??$$



$$A \cos(2f_0 t) = A \left[ \frac{e^{j2f_0 t} + e^{-j2f_0 t}}{2} \right] = \frac{A}{2} [e^{j2f_0 t} + e^{-j2f_0 t}]$$

$$\cos(2f_0 t) = \frac{1}{2} [e^{j2f_0 t} + e^{-j2f_0 t}] \xrightarrow{TF} \frac{1}{2} [u(f - f_0) + u(f + f_0)]$$

$$Z(f) = X(f) \otimes \frac{1}{2} [u(f - f_0) + u(f + f_0)]$$

$$Z(f) = \frac{1}{2} [X(f) \otimes u(f - f_0) + X(f) \otimes u(f + f_0)]$$

$$Z(f) = \frac{1}{2} [X(f - f_0) + X(f + f_0)]$$

## **Chapitre V**

# **TRANSFORMEE DE LAPLACE**

**V.1. Introduction :**

La transformée de Laplace est une technique très utilisée dans la résolution des problèmes d'engineering comme pour la transformée de Fourier. Cette transformation permet d'associer, à toute fonction  $f(t)$ , une fonction  $F(p)$  d'une variable complexe  $P = \sigma + j\omega$ . Elle permet de remplacer les opérations analytiques de dérivation et d'intégration par des opérations algébriques. Cette propriété facilite la résolution des équations différentielles.

**V.2. Définition de la transformée de Laplace :**

Pour remédier à l'inexistence de la TF de certaines fonctions, l'idée pour rendre l'intégrale convergente, c'est de multiplier la fonction  $x(t)$  par une fonction correctrice  $\exp(-\sigma t)$  avec comme condition l'existence d'une valeur réel  $\sigma$  telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) \cdot e^{-\sigma t}| dt < \infty \tag{V.1}$$

$\sigma$  : est appelé abscisse de convergence c'est une grandeur réelle et positive.

$$\begin{aligned} TL\{x(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \end{aligned} \tag{V.2}$$

Si on pose  $p = \sigma + j\omega$

$$\boxed{TL\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt = X(p)} \tag{V.3}$$

La variable  $p$  est appelé fréquence complexe et des fois elle est notée  $s$

**Remarque importante :**

Cette équation représente la transformée de Laplace bilatérale (intégration de  $-\infty$  à  $+\infty$ )

Ce que nous appelons mono latérale c'est  $X(p) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt$

La TL trouve sont intérêt dans l'étude des régimes transitoires des signaux physiquement réalisables qui justement sont nuls pour  $t < 0$ .

La TL est un outil très utilisé par les physiciens et les mécaniciens.

**Exemple 1**

Calculer la TL de l'échelon unité :  $x(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$

$$TL\{u(t)\} = \int_0^{+\infty} 1e^{-pt} dt = \left[ \frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

$$\boxed{U(p) = \frac{1}{p}}$$

**Exemple 2**

Soit à calculer  $TL\{f'(t)\}$  connaissant  $TL(f(t))$ .

On a  $TL\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$

En utilisant l'intégration par partie, on aura :

$$u = f(t) \qquad dv = e^{-pt} dt$$

$$du = f'(t) dt \qquad v = \frac{e^{-pt}}{-p} \qquad \text{Or : } (uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$$

$$\Rightarrow F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \left[ f(t) \frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t) dt$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{f(0)}{p} + \frac{1}{p} TL\{f'(t)\}$$

$$TL\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$$

Si la condition initiale est nulle ( $f(0) = 0$ ), alors :

$$TL\{f'(t)\} = pF(p)$$

De même, si toutes les conditions initiales sont nulles ( $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = 0$ ), alors :

$$TL\{f^n(t)\} = p^n F(p)$$

Dans ce cas là, l'équation différentielle (pour un système linéaire) liant l'entrée  $e(t)$  à la sortie  $s(t)$  est :

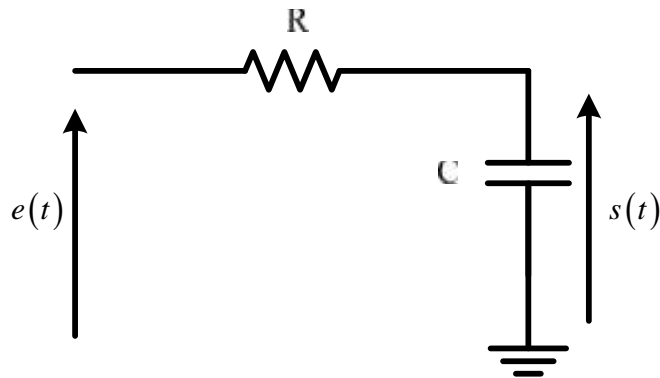
$$a_n \frac{d^n}{dt^n} s(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} s(t) + a_0 s(t) = b_k \frac{d^k}{dt^k} e(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} e(t) + b_0 e(t) \quad \text{s'écrit, en utilisant la}$$

transformée de Laplace :

$$a_n p^n S(p) + \dots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_k p^k E(p) + \dots + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{b_k p^k + \dots + b_0}{a_n p^n + \dots + a_0} E(p)$$

avec  $S(p) = TL\{s(t)\}$   
 $E(p) = TL\{e(t)\}$



$$S(p) = \frac{1/jC\check{S}}{\frac{1}{jC\check{S}} + R} E(p)$$

**V.3. Domaine de convergence (Dp) :**

Si la valeur complexe  $p$  appartient au domaine de convergence  $Dp$ , cela indique que  $X(p)$  existe.

Si  $p \in Dp \Rightarrow X(p)$  existe

Définition :

1) On dit que l'intervalle de Laplace converge si :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} |x(t)e^{-pt}| dt = \int_0^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty}$$
(V.4)

Si  $t \rightarrow \infty, |x(t)|e^{-\sigma t} \rightarrow 0$ , l'intégrale de Laplace est convergente (ce si est vrais sous certaine condition de  $x(t)$ )

2) Fonction d'ordre exponentiel :

On dit que  $x(t)$  est d'ordre exponentiel s'il existe un nombre réel  $\dagger_0$  et un nombre positif finie  $M$  tel que :

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| e^{-\dagger_0 t} < M}$$
(V.5)

Toute fonction bornée est une fonction d'ordre exponentiel (tous les signaux physiques sont d'ordre exp).

**V.4. Propriétés usuelles de la transformée de Laplace**

**a) Linéarité :**

Si  $a$  et  $b$  sont constants, on a :

$$\left. \begin{aligned} TL\{f(t)\} &= F(p) \\ TL\{g(t)\} &= G(p) \end{aligned} \right\} TL\{af(t)+bg(t)\} = aF(p)+bG(p)$$

$$\text{Car : } \int_0^{+\infty} e^{-pt} \{af(t)+bg(t)\} dt = a \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt + b \int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t) dt$$

En particulier :

$\begin{aligned} TL\{f(t)+jg(t)\} &= TL\{f(t)\} + jTL\{g(t)\} \\ \text{et } TL\{Kf(t)\} &= K.TL\{f(t)\} \end{aligned}$	(V.6)
--	-------

**b) Dérivation :**

Voir l'exemple 2, ci-dessus

$$TL\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$$

$f(0)$ , représente la valeur de  $f(t)$  lorsque  $t \rightarrow 0$  par valeur positive puisque  $f(t)$  n'est pas définie pour  $t < 0$ .

D'une manière générale, on peut écrire :

$$TL\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = p^n F(p) - \sum_{r=n+1}^{r=2n} p^{2n-r} f^{(r-n-1)}(0)$$

$$\text{Avec : } f^{(r-n-1)}(0) = \left. \frac{d^{(r-n-1)} f(t)}{dt^{(r-n-1)}} \right|_{t=0}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} TL\left\{\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right\} &= p^2 F(p) - pf(0) - f'(0) \\ TL\left\{\frac{d^3}{dt^3} f(t)\right\} &= p^3 F(p) - p^2 F(0) - pf'(0) - f''(0) \end{aligned}$$



**c) Intégration :**

Soit à calculer  $TL\left\{\int_0^t f(t) dt\right\} = TL\{P(t)\}$ ,  $P(t)$  désignant une primitive de  $f(t)$  pour  $t > 0$ .

On a :  $TL\{P(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} P(t) dt$

En utilisant l'intégration par partie, on aura :

$$\begin{aligned}
 u &= P(t) & dv &= e^{-pt} dt \\
 du &= P'(t) dt & v &= \frac{e^{-pt}}{-p} dt & (uv)' &= u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow TL\{p(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} p(t) dt = \left[ p(t) \frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} p'(t) dt$$

$$\Rightarrow TL\{p(t)\} = \frac{p(0)}{p} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

$$\Rightarrow TL\{p(t)\} = \frac{1}{p} TL\{f(t)\} + \frac{p(0)}{p}$$

En général :

$$TL\left\{\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t) dt^n\right\} = \frac{1}{p^n} TL\{f(t)\} \tag{V.7}$$

En posant nulles toutes les primitives de  $f(t)$  quand  $t \rightarrow 0$  par valeurs positives.

**d) Changement d'échelle :**

Un changement de l'échelle des temps se traduit par le changement de la variable "

$t = kt$  ou  $t = k/t$  " .

On a :

$$TL\{f(kt)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} k(k t) dt$$

Posant :  $kt = u \Rightarrow du = k dt \Rightarrow dt = \frac{du}{k}$

Donc :

$$TL\{f(kt)\} = \frac{1}{k} \int_0^{+\infty} e^{-p \frac{u}{k}} f(u) du = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right)$$

$$f(t) \xrightarrow{TL} F(p)$$

$$f(at) \xrightarrow{TL} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{a}t\right) \xrightarrow{TL} aF(ap)$$

**e) Translation temporelle :**

$$f(t) \xrightarrow{TL} F(p)$$

$$f(t-T) \xrightarrow{TL} F(p)e^{-pT}$$

**f) Translation fréquentielle (complexe) :**

$$F(p) \xrightarrow{TL^{-1}} f(t)$$

$$F(p+a) \xrightarrow{TL^{-1}} f(t)e^{-at}$$

**V.5. Tableau des transformées de Laplace :**

$f(t)$ (causal)	$F(p)$	$Dp$
$u(t)$	1	$]-\infty, +\infty[$
$U(t)$	$\frac{1}{p}$	$]0, +\infty[$
$e^{-at}U(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$]-\operatorname{Re}(a), +\infty[$
$tU(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$]0, +\infty[$
$t^n U(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$]0, +\infty[$
$\sin(\check{S}_0 t).U(t)$	$\frac{\check{S}_0}{p^2 + \check{S}_0^2}$	$]0, +\infty[$
$\sin(\check{S}_0 t).e^{-at}U(t)$	$\frac{\check{S}_0}{(p+a)^2 + \check{S}_0^2}$	$]-\operatorname{Re}(a), +\infty[$
$\cos(\check{S}_0 t).U(t)$	$\frac{p}{p^2 + \check{S}_0^2}$	$]0, +\infty[$
$\cos(\check{S}_0 t).e^{-at}U(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \check{S}_0^2}$	$]-\operatorname{Re}(a), +\infty[$

**V.6. Transformée inverse de Laplace :**

Dans le cas d'un problème de système mécanique ou électrique, on se trouve généralement en présence d'un système d'équations différentielles le plus souvent linéaire à coefficient constant portant sur les fonctions réelles du temps.

Les entrées  $e(t)$  représentent les actions par exemple différence de potentiel, courant, force... agissants sur le système.

Les sorties  $y(t)$  sont des fonctions mesurées résultantes de la présence des entrées et de la constitution du système.

Grâce à la TL, on passe d'un problème portant sur le domaine temporelle à un problème portant sur le domaine de la variable complexe  $p$ , après avoir obtenu la solution du problème. Il est nécessaire d'inverser cette transformation pour obtenir la solution ayant pour domaine de temps. C'est la transformée de Laplace inverse. On la note  $TL^{-1}$  ou  $L^{-1}$ . Toute la complication est de déterminer la  $TL^{-1}$ .

Si  $F(p)$  est la Transformée de Laplace d'une fonction  $f(t)$ , on a :

$$f(t) = TL^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{j2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(p)e^{pt} dp \quad (t \geq 0)$$

Cette méthode est difficile à utiliser et on préfère généralement :

- soit recourir aux tables de Transformées de Laplace. Dans ce cas,  $F(p)$  est immédiatement reconnaissable dans la table,
- soit, lorsque la fonction  $F(p)$  n'apparaît pas dans la table, décomposer  $F(p)$  en fractions partielles et écrire  $F(p)$  en termes de fonctions simples de  $p$  pour lesquels la Transformée de Laplace est toujours connue.

A noter que cette manière simple de trouver la transformée inverse est basée sur le fait qu'il existe une correspondance unique entre la fonction temporelle et sa transformée inverse de Laplace du fait de la continuité de la fonction temporelle.

Soit  $F(p) = TL\{f(t)\}$

Si  $F(p)$  peut être décomposée en termes distincts :  $F(p) = F_1(p) + F_2(p) + \dots + F_n(p)$  et Si les transformées inverses sont disponibles,

**Alors :**

$$\begin{aligned} TL^{-1}\{F(p)\} &= TL^{-1}\{F_1(p)\} + TL^{-1}\{F_2(p)\} + \dots + TL^{-1}\{F_n(p)\} \\ &= f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t) \end{aligned}$$

**V.6.1. Détermination de la TL<sup>-1</sup> par décomposition en éléments simples :**

Cette technique est très utilisée par les physiciens, car elle permet d'utiliser la table de transformation.

$$S(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \begin{cases} n \geq m \\ a_n = 1 \end{cases}$$

Cette technique est basée sur trois étapes essentielles :

**a) 1<sup>ère</sup> étape calcule les racines du polynôme  $X(p)$**

Résoudre l'équation  $\sum_{i=0}^n a_i p^i = 0$  pour déterminer les racines

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i = \prod_{i=1}^L (p - r_i)^{n_i}$$

$r_i$  : sont les racines du polynôme

$n_i$  : c'est le nombre de racine égale a  $r_i$  (racine simple, double)

$L$  : c'est le nombre totale des racines.

$$S(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\prod_{i=1}^L (p - r_i)^{n_i}}$$

**b) 2<sup>ème</sup> étape : les tables de décomposition :**

*Cas des racines simples :*

$$S(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\prod_{i=1}^L (p - r_i)^{n_i}} \quad n \geq m$$

$$= b_n + \frac{A_{11}}{(p - r_1)} + \frac{A_{21}}{(p - r_2)} + \frac{A_{31}}{(p - r_3)} + \dots + \frac{A_{L1}}{(p - r_L)}$$

$A_{Li}$  : sont les inconnues à trouver.

Remarque :

Dans le cas où le degré de  $B(p) >$  degré de  $A(p)$  dont  $F(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$ , il faut alors diviser le numérateur par dénominateur, ensuite appliquer la méthode des fractions partielles.

**Exemple :**

Trouver la Transformée Inverse de  $F(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)}$  2 pôles distincts :  $p = -1, p = -2$

**Cas des racines doubles :**

$$S(p) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\prod_{i=1}^L (p-r_i)^{n_i}} \quad n \geq m \quad \text{On suppose que la deuxième racine est double}$$

$$= b_n + \frac{A_{11}}{(p-r_1)} + \frac{A_{21}}{(p-r_2)} + \frac{A_{22}}{(p-r_2)^2} + \frac{A_{31}}{(p-r_3)} + \dots + \frac{A_{Li}}{(p-r_L)}$$

**c) 3<sup>ème</sup> étape : calcul de  $TL^{-1}$  :**

Grâce à la table de transformation.

Pour terminer nous dirons que toute la difficulté réside dans la première étape surtout comme l'ordre de l'équation est supérieur à 4, pour cela plusieurs méthodes de résolution dite numériques peuvent être envisagées :

**Exemple :**

$$S(p) = \frac{p^2 + 2p + 2}{p^2 + 3p + 2}$$

Trouver  $s(t)$  ?

1<sup>er</sup> étape :

$$X(p) = p^2 + 3p + 2$$

$$X(p) = 0 \Rightarrow p^2 + 3p + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = -2 \end{cases}$$

2<sup>ème</sup> étape :

$$S(p) = b_n + \frac{A_{11}}{(p+1)} + \frac{A_{21}}{(p+2)} \quad \begin{cases} A_{11} = ? \\ A_{21} = ? \end{cases}$$

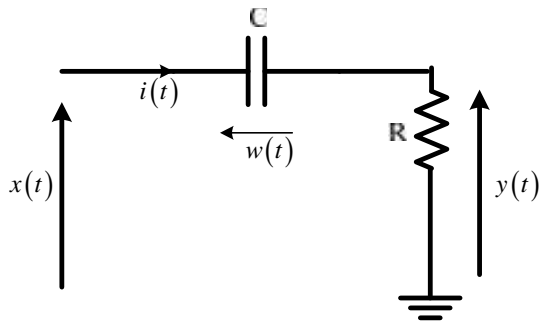
$$S(p) = \frac{b_n(p+1)(p+2) + A_{11}(p+2) + A_{21}(p+1)}{(p+1)(p+2)} = \frac{p^2 + 2p + 2}{(p+1)(p+2)}$$

$$A_{11} = 1$$

$$A_{21} = -2$$

$$S(p) = 1 + \frac{1}{p+1} - \frac{2}{p+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} s(t) = u(t) + e^{-t} - 2e^{-2t}$$

Exemple d'un circuit électrique :



Etablir l'équation différentielle qui lie \$y(t)\$ à \$x(t)\$

Si \$x(t) = 2e^{-t}\$, déterminer \$y(t)\$

$$R = 1M\Omega, C = 1\mu F, V_{co} = 1V$$

$$\begin{cases} x(t) = y(t) + w(t) \\ y(t) = Ri(t) \end{cases}$$

$$w(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$\begin{cases} x(t) = y(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + V_{co} \\ y(t) = Ri(t) \Rightarrow i(t) = \frac{y(t)}{R} \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t)} \xrightarrow{\mathcal{L}} pX(p) - x(0) = pY(p) - y(0) + \frac{1}{RC} Y(p)$$

$$x(t) = 2e^{-t} \rightarrow X(p) = \frac{2}{1+p}$$

$$x(0) = \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = 2V$$

$$y(0) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ x(t) - \frac{1}{C_0} \int_0^t i(\ddagger) d\ddagger - V_{co} \right]$$

$$= x(0) - V_{co} = 1V$$

$$Y(p) = \frac{2p}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1}$$

$$= \frac{A_{11}}{p+1} + \frac{A_{12}}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} \quad \begin{cases} A_{11} = 2 \\ A_{12} = -2 \end{cases}$$

$$\boxed{y(t) = -2t e^{-t} + e^{-t}}$$

🌈 La Table des principales transformées de Laplace et leurs propriétés est présentée dans l'Annexe A.

## **Chapitre VI**

# **L'ECHANTILLONNAGE**



## VI. 1. Introduction :

La plupart des signaux physiques porteurs d'information sont de nature analogique (amplitude et temps continus) qui exigent un traitement spécifique.

De nos jours et avec les progrès de l'électronique numérique conversion analogique numérique (C.A.N) et conversion numérique analogique (C.N.A) des fonctions complexes telle que le filtrage, la corrélation, la convolution... sont réalisables sous forme de carte autonome à base de D.S.P (digital signal processing) grâce à un micro-ordinateur. Ce type de traitement donne des résultats plus fiables que le traitement à base de signal analogique. De ce fait il faut discrétiser le signal c'est l'opération d'échantillonnage.

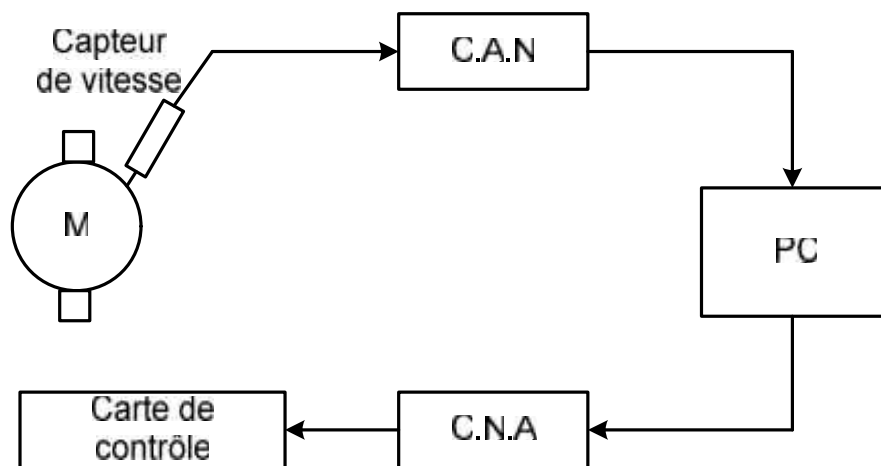


Figure VI.1. Chaîne de mesure et de contrôle.

## VI.2. Principe de l'échantillonnage :

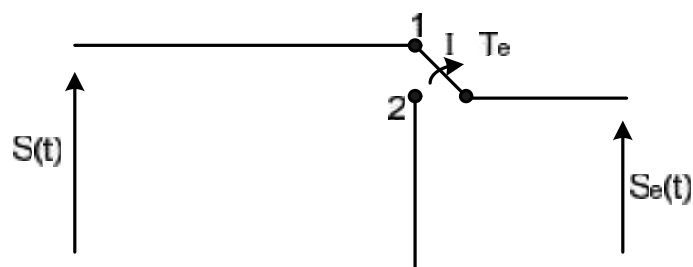


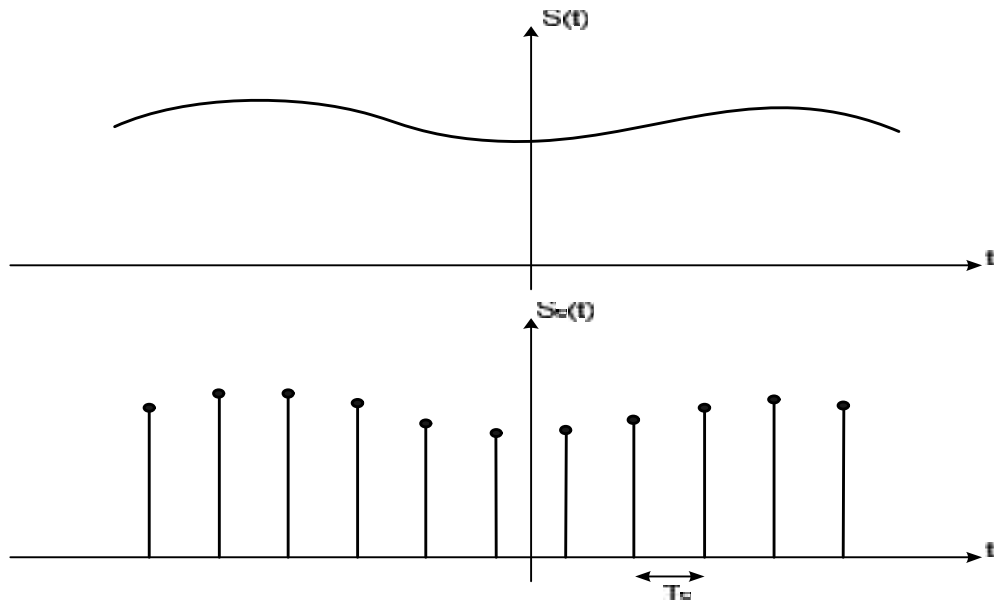
Figure VI.2. Schéma de principe d'un échantillonneur.

$$I = 1 \Rightarrow s_e(t) = s(t)$$

$$I = 2 \Rightarrow s_e(t) = 0$$

Principe de base d'un échantillonneur est réalisé comme le montre la figure (VI.2). Cet interrupteur s'ouvre et se ferme périodiquement à la fréquence  $f_e = \frac{1}{T_e}$

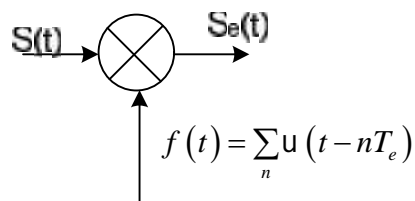
L'opération d'échantillonnage peut engendrer des déformations du signal (perte d'information)  $s(t)$  et  $s_e(t)$  doivent contenir la même information.



$s_e(t)$  Est une suite d'impulsion périodique d'une période  $T_e$ .

### VI.3. Echantillonnage idéal d'un signal analogique :

D'après le principe de l'échantillonnage on peut le schématiser comme suit :



$f(t)$  : fonction d'échantillonnage.

Dans le cas d'un échantillonnage idéal  $f(t)$  n'est qu'une suite d'impulsion de Dirac qui représente l'ouverture et la fermeture d'interrupteur.

$$\begin{aligned}
 s_e(t) &= s(t) \odot \sum_n u(t - nT_e) \\
 &= \sum_n s(nT_e) u(t - nT_e)
 \end{aligned}
 \tag{VI.1}$$

Echantillonnage idéal est caractérisé par une suite d'impulsions de Dirac périodique ( $T_e$  échantillonnage régulier) dont l'aire de chaque impulsion est égal à l'amplitude du signal analogique  $s(t)$  à l'instant d'échantillonnage.

**VI.4. La transformée de Fourier d'un signal échantillonné :**

Echantillonnage temporelle  $\xrightarrow{TF}$  ?

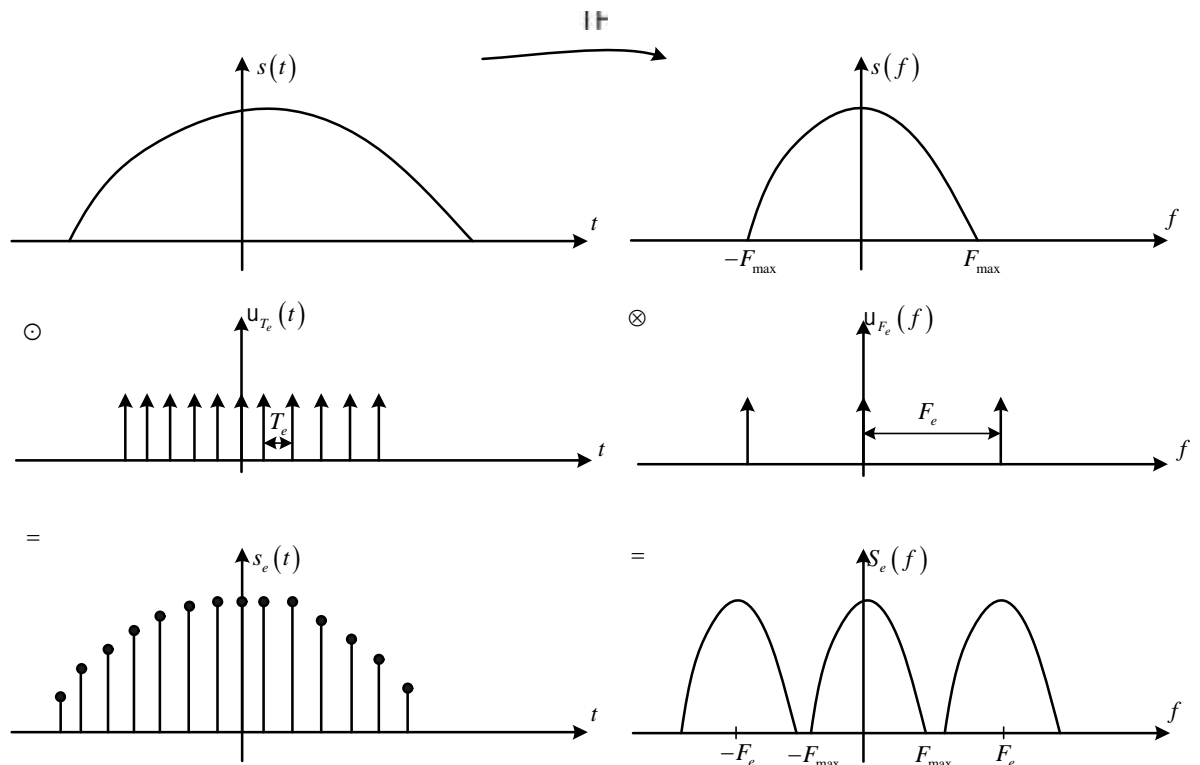
$$s_e(t) = s(t) \cdot \sum_n u(t - nT_e) \tag{VI.2}$$

$$\xrightarrow{TF} S_e(f) = S(f) \otimes \sum_n \frac{1}{T_e} u\left(f - \frac{n}{T_e}\right) \tag{VI.3}$$

$$F_e = \frac{1}{T_e}$$

$$S_e(f) = F_e S(f) \otimes \sum_n u(f - nF_e) \tag{VI.4}$$

$$\boxed{S_e(f) = F_e \sum_n S(f - nF_e)} \tag{VI.5}$$



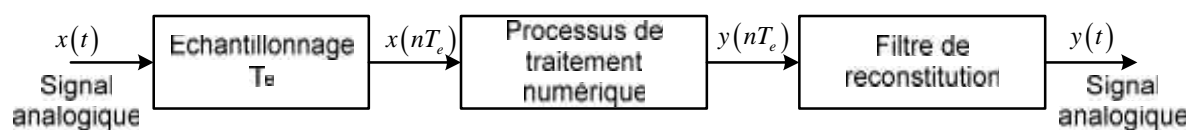
Echantillonnage Temporel  $\xrightarrow{TF}$  périodicité du spectre

Le spectre de  $X_e(f)$  est celui de  $X(f)$  ‘‘périodisé’’ avec une période fréquentielle  $F_e$

L’échantillonnage dans le domaine temporel se traduit par une ‘‘périodisation’’ de période  $F_e$  dans le domaine fréquentiel.

Le spectre du signal échantillonné est formé par une suite du spectre du signal analogique (le spectre du signal analogique se répète périodiquement sur l’axe des fréquences avec une période  $F_e = \frac{1}{T_e}$ ).

**VI.5. Problème d’échantillonnage :**



En étudiant le schéma bloqué d’une chaîne de traitement et de commande, on s’aperçoit que deux questions peuvent se poser.

- 1) Quelle doit être la valeur de  $T_e$  pour avoir un signal échantillonné représentant le plus fidèlement le signal  $x(t)$ .
  - 2) Comment doit être choisi le filtre de reconstitution pour obtenir un signal analogique  $y(t)$  le plus représentatif possible.
- Pour ce qui est pour la première question, la solution a été donnée par le théorème **Shannon**, il faut respecter la condition  $F_e \geq 2F_{\max}$ ,  $T_e \leq \frac{1}{2}T_{\max}$ .

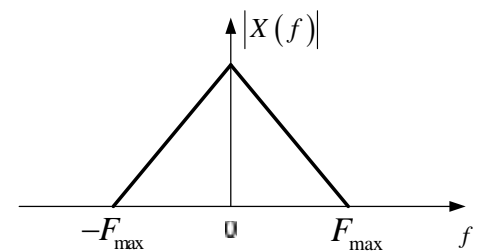
$F_{\max}$  : étant la fréquence maximal de signal analogique.

### VI.6. Echantillonnage et recouvrement du spectre :

Le signal doit posséder un spectre borné pour qu'on puisse le reconstituer à partir de sa version échantillonnée à condition que la fréquence  $F_e \geq 2F_{\max}$

On considère que  $x(t)$  est un signal réel dont le spectre est borné en fréquence, de fréquence maximale  $F_{\max}$ .

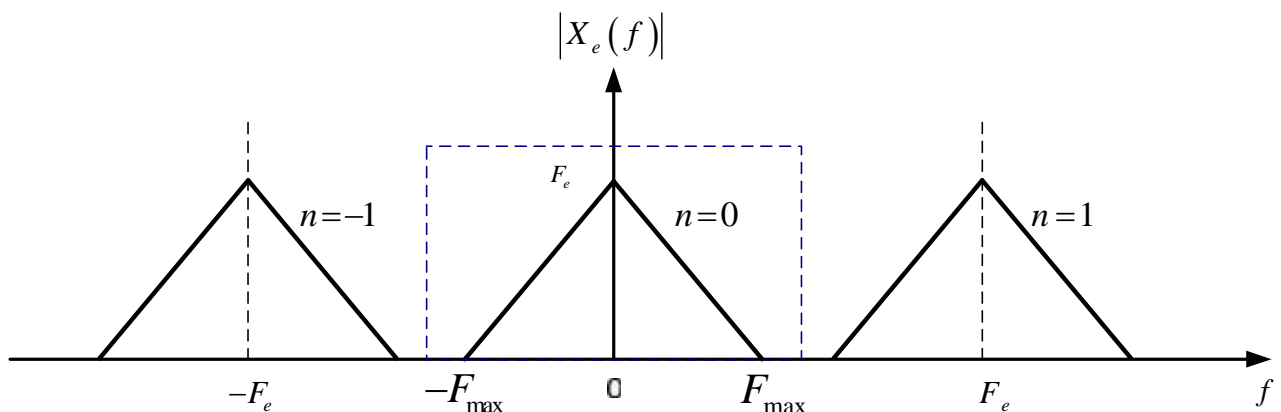
$$\forall |f| > F_{\max}, |X(f)| = 0$$



Question : que devient le spectre  $X_e(f)$  en fonction de  $F_e$  ?

$$X_e(f) = F_e \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X(f - nF_e) \tag{VI.6}$$

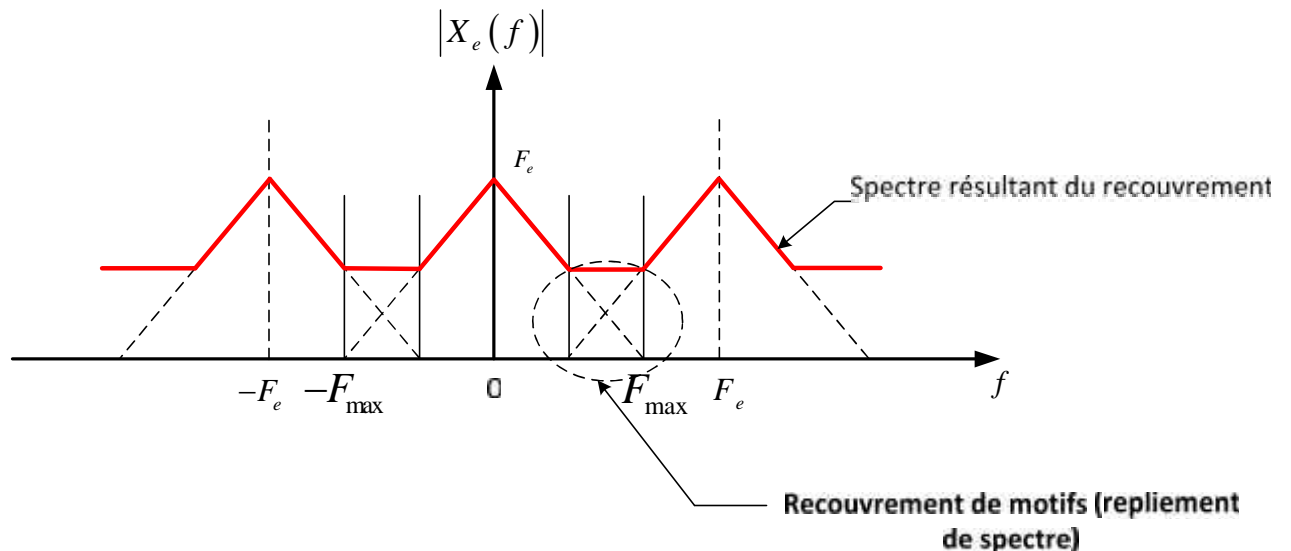
**Cas 1** :  $F_e \geq 2F_{\max}$



Les motifs élémentaires de  $|X_e(f)|$  sont disjoints (pas de recouvrement des motifs)

Le motif principal ( $n = 0$ ) est égal au spectre de  $x(t)$ . Comme les motifs sont disjoints, on peut extraire  $X(f)$  grâce à un filtre passe-bas idéal et donc reconstituer intégralement le signal  $x(t)$  à partir de la connaissance de son échantillonné  $x_e(t)$ .

**Cas 2** :  $F_e < 2F_{\max}$



Les motifs élémentaires de  $|X_e(f)|$  se recouvrent. On parle de **repliement de spectres**.

A cause du chevauchement des motifs élémentaires constituant le spectre  $X_e(f)$  du signal échantillonné, il n'est pas possible de récupérer le spectre  $X(f)$  par un filtrage approprié (le recouvrement empêche de trouver le signal d'origine). Il n'est donc pas possible de reconstruire le signal initial  $x(t)$  à partir de la connaissance de son échantillonné  $x_e(t)$ .

**Question** : quelle est la condition sur  $F_e$  pour qu'à partir du signal échantillonné  $x_e(t)$ , on puisse reconstruire intégralement  $x(t)$  ?

$F_e \geq 2F_{\max}$  pas de recouvrement de spectre  $\rightarrow$  extraction de  $X(f)$  par filtrage passe-bas idéal

$F_e < 2F_{\max}$  repliement de spectre  $\rightarrow$  impossibilité de récupérer  $X(f)$  par filtrage

Par conséquent, pour que la répétition périodique du spectre de  $x_e(t)$  ne déforme pas le spectre  $X(f)$  répété, il faut et il suffit que  $F_e \geq 2F_{\max}$  (appliquer le **théorème de Shannon**)

**Conclusion :**

Le signal doit posséder un spectre borné pour qu'on puisse le reconstituer à partir de sa version échantillonnée, à condition que la fréquence  $F_e \geq 2F_{\max}$

**VI.7. Enoncé du théorème de Shannon :**

La condition nécessaire et suffisante pour échantillonner un signal sans perte d'information est que la fréquence d'échantillonnage  $F_e$  soit supérieure ou égale au double de la fréquence maximale du signal. Plus précisément, si on note  $F_{\max}$  la fréquence maximale du signal, il faut et il suffit que :  $F_e \geq 2F_{\max}$ .

**VI.7.1. Echantillonnage idéal :**

L'échantillonnage idéal suppose l'utilisation d'une impulsion infiniment brève permettant d'extraire la valeur instantanée  $x(nT_e)$  à l'instant  $nT_e$ .

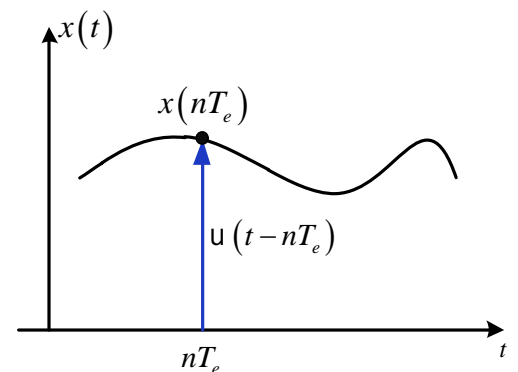
C'est donc l'application de la distribution  $u(t - nT_e)$  au signal continu  $x(t)$  :

Par définition : 
$$x_e(nT_e) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\dagger) \cdot u(\dagger - nT_e) d\dagger$$

On remarque que : 
$$x(t) \otimes u(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\dagger) \cdot u(\dagger - t) d\dagger$$
 on

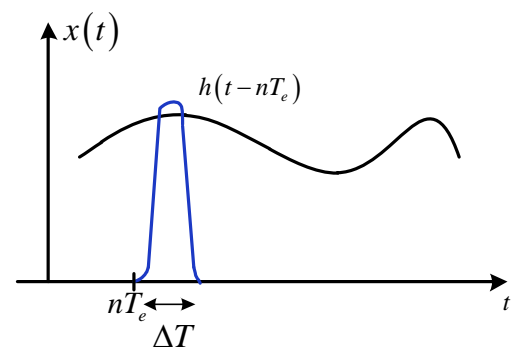
déduit alors 
$$x_e(nT_e) = x(t) \otimes u(-t) \Big|_{t=nT_e}$$

L'échantillonneur est assimilable à un filtre de réponse impulsionnelle  $u(-t)$



**VI.7.2. Echantillonnage réel :**

En pratique, on n'a pas une impulsion infiniment brève et l'échantillonneur est assimilable à un filtre de réponse impulsionnelle  $h(-t)$ .



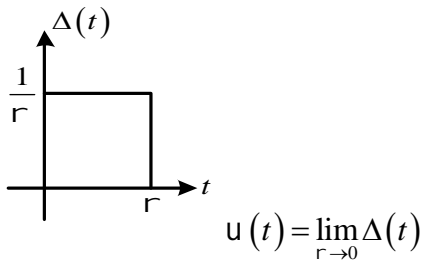
**VI.7.2.1. Expression d'un échantillon réel :**

$$\begin{aligned}
 x_e(nT_e) &= x(t) \otimes h(-t) \Big|_{t=nT_e} \\
 x_e(nT_e) &= [x(t) \otimes h(-t)] u(t - nT_e)
 \end{aligned}
 \tag{VI.7}$$

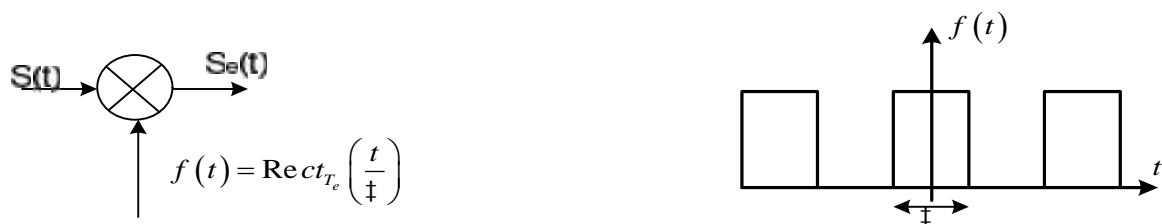
D'où l'expression du signal échantillonné réel :

$$x_e(t) = [x(t) \otimes h(-t)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(t - nT_e)
 \tag{VI.8}$$

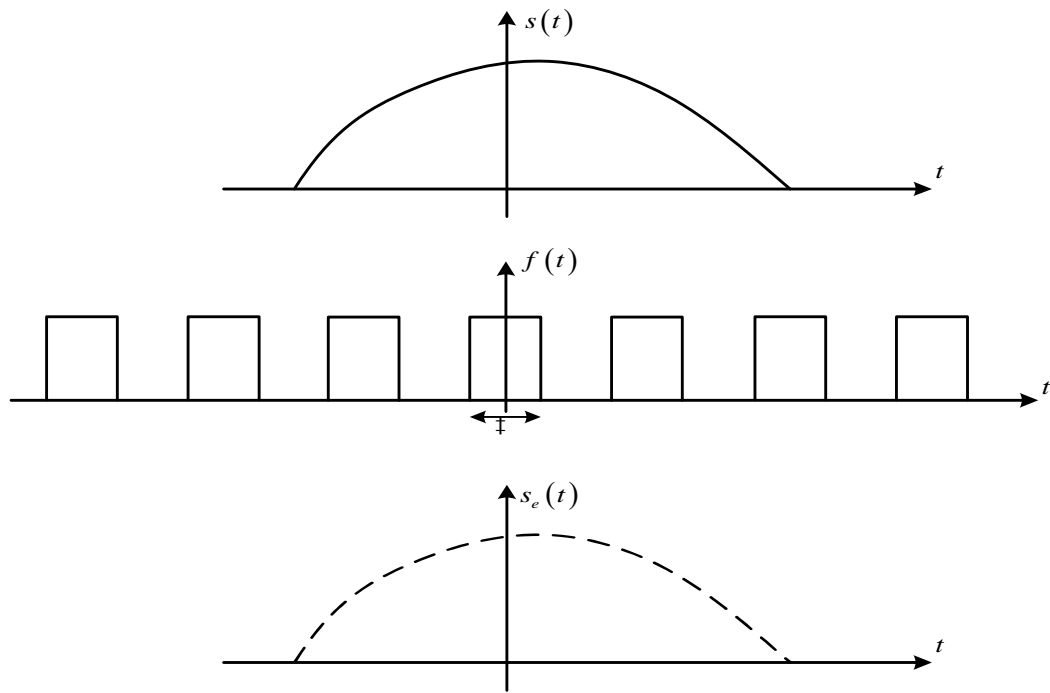
Sachant que le peigne de Dirac n'est pas une fonction physiquement réalisable. Ce la veut dire qu'un échantillonnage avec ce type de fonction ne peut être réalisable. Par contre on sait qu'une Dirac peut être assimilée à :



Un échantillonnage réel périodique d'un signal analogique  $s(t)$  est obtenu, en multipliant se signal par une fonction d'échantillonnage  $f(t)$  périodique de période  $T_e$  d'impulsion rectangulaire d'amplitude unité et de durée  $\dagger$  .







$$s_e(t) = s(t) \cdot \text{Rect}_{T_e} \left( \frac{t}{T} \right) \tag{VI.9}$$

$$s_e(t) = s(t) \cdot \left[ \text{Rect} \left( \frac{t}{T} \right) \otimes \sum_n u(t - nT_e) \right]$$

$$\xrightarrow{TF} S_e(f) = S(f) \otimes \left[ T \text{sinc}(fT) \odot F_e \sum_n u(f - nF_e) \right] \tag{VI.10}$$

$$S_e(f) = F_e T S(f) \otimes \sum_n \text{sinc}(nF_e T) u(f - nF_e)$$

$$\boxed{S_e(f) = F_e T \sum_n \text{sinc}(nF_e T) S(f - nF_e)} \tag{VI.11}$$

Le spectre d'un signal échantillonné réellement, est constitué d'une suite de motif  $S(f)$  qui se répète périodiquement sur l'axe de fréquence avec une période  $F_e$ . Ces motifs spectraux sont pondérés par un facteur qui dépend de la densité d'impulsion ( $F_e T$ ) et qui varie en fonction de  $n$  selon une loi en *sinc*.

### VI.8. Quantification :

L'opération de quantification consiste à attribuer un nombre binaire à toute valeur prélevée au signal lors de l'échantillonnage.

C'est le CAN (convertisseur analogique numérique) qui réalise cette opération.

Chaque niveau de tension est codé sur  $p$  bits, chaque bit pouvant prendre deux valeurs (0 ou 1).  
Donc un convertisseur à  $p$  bits possède  $2^p$  niveaux de quantification.

Considérons un CAN 4 bits, il n'y a donc que  $2^4 = 16$  valeurs possibles attribuables à toutes les valeurs prélevées lors de l'échantillonnage.

L'opération se fait donc avec une perte d'information d'autant plus grande que  $p$  est petit.

Le schéma ci-dessous représente une partie de la caractéristique de transfert d'un convertisseur 4 bits ; à tous les niveaux de tension d'un même palier, le convertisseur fait donc correspondre un seul et même nombre binaire :

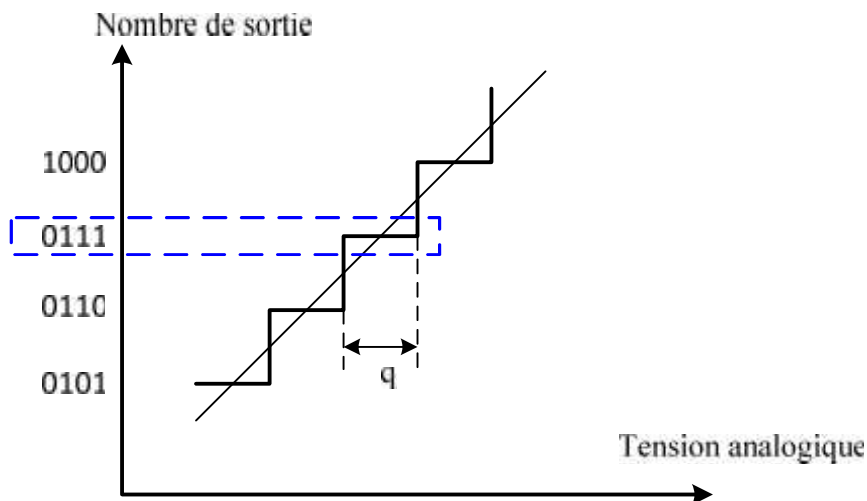


Figure VI.3. Caractéristique de transfert d'un CAN- Quantification à 4 bits.

$q$  est le pas de quantification : il correspond à la plus petite variation de tension que le convertisseur peut coder. On voit bien que plus  $q$  est faible, meilleure sera la précision de codage.

Pour une quantification par défaut, où  $x_n = nq$  si  $x$  est compris entre  $nq$  et  $(n+1)q$ , l'erreur commise appelée bruit de quantification est donnée sur le graphe ci-dessous :

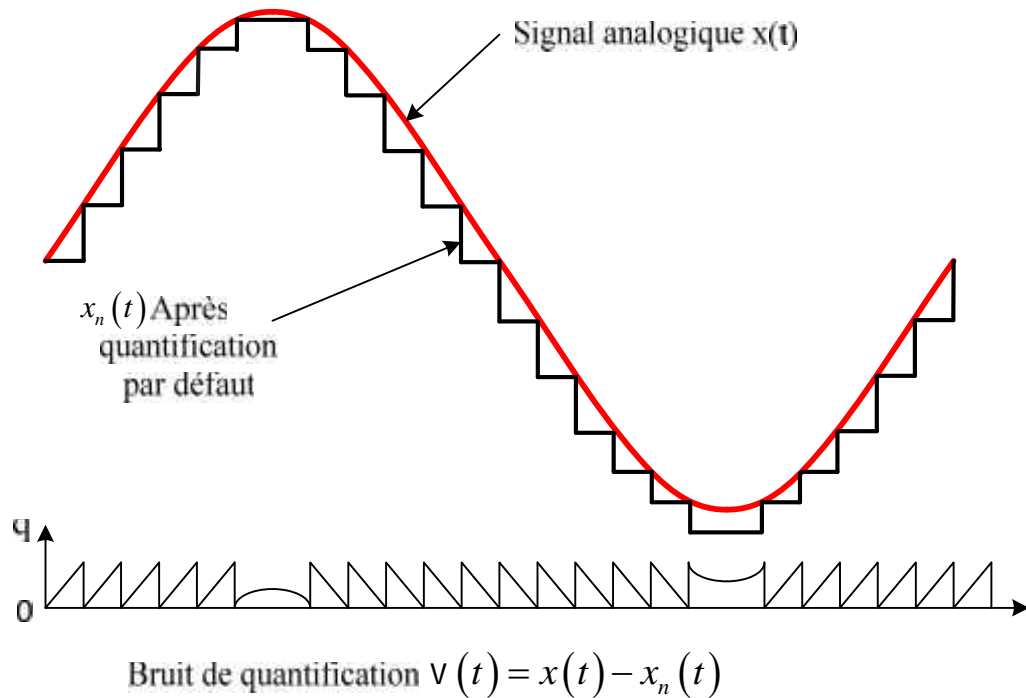


Figure VI.4. Bruit de quantification d'un signal échantillonné.

## VI.9. Transformée de Fourier Discrète :

### VI.9.1. Passage de la TF a la TFD :

Il suffit de savoir que tout signal analogique  $x(t)$  est acquis à un rythme régulier dicté par la période d'échantillonnage  $T_e$  et qu'il est stocké en mémoire d'ordinateur. Ces signaux  $x[n]$  sont des signaux numériques obtenus à l'aide d'un convertisseur analogique-numérique (figure 3.1) et tels que :

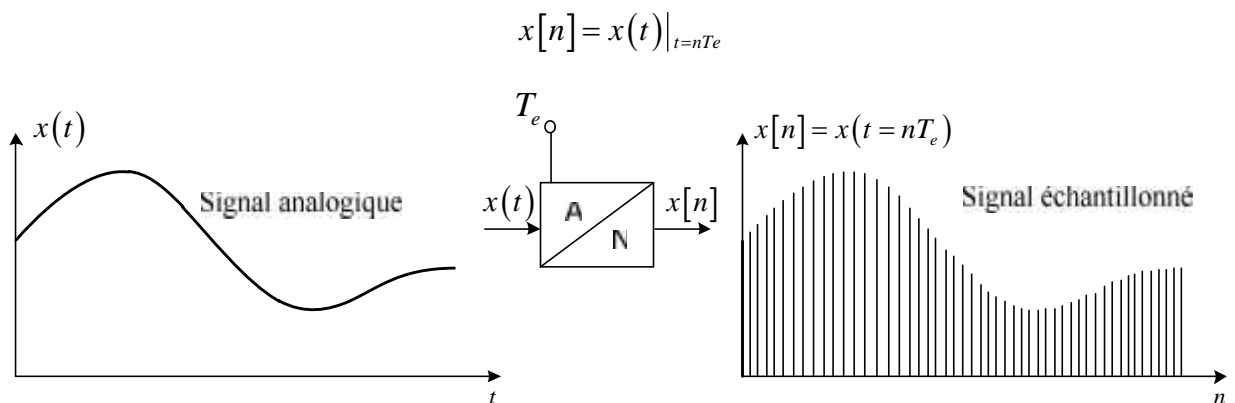


Figure VI.5. Acquisition numérique d'un signal analogique.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (\text{VI.12})$$

1) on numérise  $x(t) \rightarrow x(n)$

2) on prend une durée d'observation du signal

Soit  $n \in (0 \text{ à } N-1)$

$$3) X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi fn}$$

$$4) \text{ soit } f = \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \frac{3}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$$

$$f = \frac{k}{N}$$

$$X\left(\frac{k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

Par normalisation, on note :

$$\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}} \quad k \in [0, N-1] \quad (\text{VI.13})$$

La TFD inverse est donnée par :

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N} kn}} \quad n \in [0, N-1] \quad (\text{VI.14})$$

On note  $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

L'équation (VI.13) devient :

$$\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}} \quad , X : \text{vecteur}, x : \text{vecteur}, W : \text{matrice}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}} \quad (\text{VI.15})$$

Notation matricielle :

$$X = W x \text{ et } x = W^{-1} X$$

Remarque : la matrice  $W$  possède des propriétés très intéressantes qui permettent de vérifier une méthode de calcul de la TFD. Cette méthode est appelée transformée de Fourier rapide FFT (Fast Fourier transform).

**Exemple :**

Calculer la DFT du signal suivant :  $x[n] = \{1, 2, 1, 0\}$

Dans ce cas-ci, on a  $N = 4$ , et donc selon la définition de la TFD,  $e^{-j2fkn/N} = e^{-jfk n/2}$ . On calcule les valeurs :

$$k = 0: X_{DFT}[0] = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{0} = 1 + 2 + 1 + 0 = 4$$

$$k = 1: X_{DFT}[1] = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-jfn/2} = 1 + 2e^{-jf/2} + e^{-jf} + 0 = -j2$$

$$k = 2: X_{DFT}[2] = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-jfn} = 1 + 2e^{-jf} + e^{-j2f} + 0 = 0$$

$$k = 3: X_{DFT}[3] = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j3fn/2} = 1 + 2e^{-j3f/2} + e^{-j3f} + 0 = j2$$

$$X_{FTD} = \{4, -j2, 0, j2\}$$

**VI.9.2. Transformée de Fourier rapide FFT (Fast Fourier transformer) :**

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \text{ avec } W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \text{ et } x(n), n \in [0, N-1]$$

Le calcul directe exige un nombre d'opérations élevé, c'est pour cette raison qu'on à recourt a l'algorithme de la FFT.

Le nombre de multiplication :  $N.N = N^2$ .

Le nombre d'addition :  $N(N-1)$  addition complexe.

La découverte de la transformée rapide de Fourier en 1965 par Cooley et Tukey a été d'une importance majeure pour le traitement du signal car elle a permis d'envisager l'analyse spectrale numérique de signaux de longue durée en des temps raisonnablement courts. L'algorithme de Cooley et Tukey a très vite été connu sous le nom de transformation rapide de Fourier.

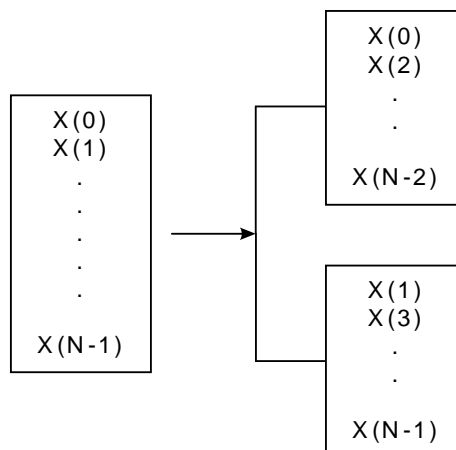
Il ne faut pas se méprendre sur la signification de la FFT : l'algorithme FFT n'est pas une nouvelle transformation. Ce n'est rien d'autre qu'un moyen rapide d'obtenir les mêmes résultats que ceux fournis par la TFD.

**VI.9.3. Principe de la FFT :**

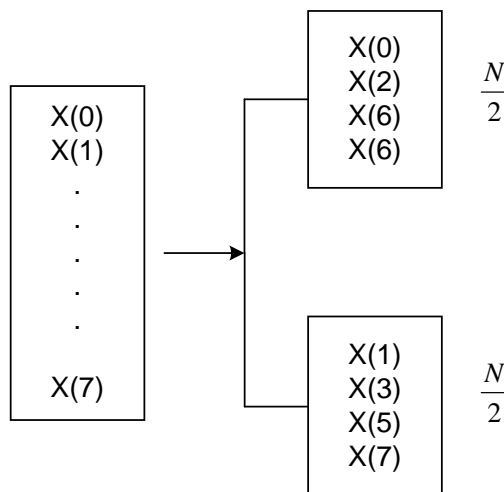
On prend les échantillons  $x(n)$  et on les divise en 2 parties :

$x(2n) \rightarrow$  Échantillons de rang pair.

$x(2n+1) \rightarrow$  Échantillons de rang impair



Exemple N=8



$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)W_N^{(2n+1)k}$$

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k)$$

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = X_1\left(k + \frac{N}{2}\right) + W_N^{k+\frac{N}{2}} X_2\left(k + \frac{N}{2}\right)$$

A la fin pour  $N=8$

Méthode directe : il faut  $N^2=64$  multiplications et  $N(N-1)=56$  additions

Méthode de FFT nécessite que  $\frac{N}{2} \log_2 N = 12$  multiplications et  $N \log_2 N = 24$  additions

## **Chapitre VII**

# **LA TRANSFORMEE EN Z**



**VII.1. Introduction :**

La transformé en Z est utilisée pour simplifier les opérations des équations de différence.

Elle est utilisée comme un outil dans l’analyse et la conception des systèmes échantillonnés discrets, elle permet de simplifier la solution d’un problème de système discret par la conversion des équations de différence d’un système en équation algébriques et la convolution en une multiplication.

Elle joue le même rôle que la transformée de Laplace pour les systèmes continus.

**VII.2. Définition 1:**

Soit la séquence causale  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  sa transformée en Z est définit :

$$X(z) = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots x_n z^{-n} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}$$

La variable  $z^{-1}$  est un opérateur de retard

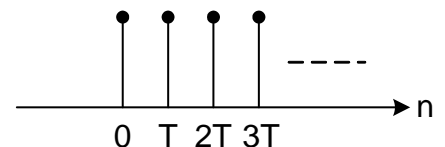
$T$  : temps d’échantillonnage

**VII.3. Définition 2:**

Soit le train d’impulsions représentant un signal discret :

$$x(t) = x_0 u(t) + x_1 u(t - T) + x_2 u(t - 2T) + \dots x_n u(t - nT) + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x_n u(t - nT)$$



Sa transformée de Laplace :

$$X(s) = x_0 + x_1 e^{-sT} + x_2 e^{-2sT} + \dots x_n e^{-nsT} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x_n (e^{-sT})^n$$

L’opération z est définit par :

$$z = e^{sT}$$

**VII.4. La transformée en z des signaux discrets standards :**

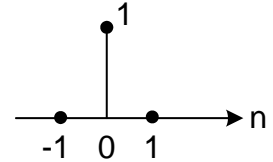
Les identités suivantes vont être utilisées pour définir les transformées en z des signaux discrets standards :

$$\sum_{n=0}^k a^n = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}; \quad a \neq 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}; \quad |a| < 1$$

**VII.4.1. Impulsion unitaire (Dirac) :**

$$x(n) = u(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



En utilisant la Définition 1

$$X(z) = 1 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + \dots = 1$$

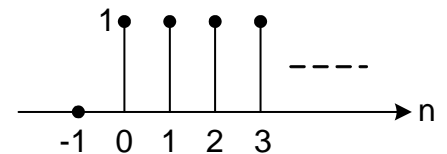
$$x(t) = u(t) \rightarrow \text{transformée de Laplace } X(s) = 1$$

**VII.4.2. Echelon échantillonné :**

Soit la séquence :  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$

En utilisant la définition 1

$$\begin{aligned} U(z) &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-n} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \end{aligned}$$



En utilisant les identités déjà vu :

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}} \\ &= \frac{z}{z-1} \quad \text{si } |z| < 1 \end{aligned}$$

**VII.4.3. Exponentiel :**

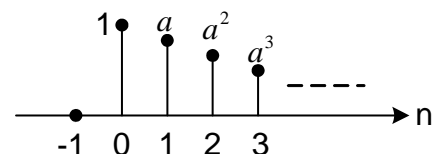
$$x(t) = e^{-\gamma t} u(t)$$

$$x(n) = e^{-\gamma nT} = (e^{-\gamma T})^n$$

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad \text{avec } a = e^{-\gamma T}$$

$$X(z) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots + a^n z^{-n} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$



En utilisant les identités déjà établies :

$$U(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

### VII.5. Propriétés de la transformée en Z :

#### VII.5.1. Linéarité :

$$Z\{r f_1(n) + s f_2(n)\} = r F_1(z) + s F_2(z)$$

#### Exemple :

Soit la séquence causale :

$$f(n) = 2 \times 1(n) + 4u(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} F(z) &= Z\{2 \times 1(n) + 4u(n)\} = 2Z\{1(n)\} + 4Z\{u(n)\} \\ &= \frac{2z}{z-1} + 4 = \frac{6z-4}{z-1} \end{aligned}$$

#### VII.5.2. Retard temporel :

$$\begin{aligned} Z\{f(n-k)\} &= z^{-k} F(z) \\ &= z^{-k} \sum_{m=-k}^{\infty} f(m)z^{-m} = z^{-k} \left[ f(-k)z^k + \dots + \sum_{m=0}^{\infty} f(m)z^{-m} \right] \\ &= z^{-k} \left[ f(-k)z^k + \dots + F(z) \right] \end{aligned}$$

Dans le cas où  $f(-k) = \dots = 0 \Rightarrow Z\{f(n-k)\} = z^{-k} F(z)$

#### Exemple 1:

$$f(n) = \begin{cases} 4, & n = 2, 3, \dots \\ 0, & n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(z) &= Z\{4 \times 1(n-2)\} = 4z^{-2} Z\{1(n)\} \\ &= z^{-2} \frac{4z}{z-1} = \frac{4}{z(z-1)} \end{aligned}$$

**Exemple 2:**

$$\begin{aligned} Z\{y(n-2)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} y(n-2)z^{-n} \\ &= z^{-2} \sum_{m=-2}^{\infty} y(m)z^{-m} \\ &= z^{-2} \left[ y(-2)z^2 + y(-1)z^1 + \sum_{m=0}^{\infty} y(m)z^{-m} \right] \end{aligned}$$

Dans le cas ou  $y(-2) = y(-1) = 0 \Rightarrow Z\{y(n-2)\} = z^{-2} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} y(m)z^{-m} \right] = z^{-2}Y(z)$

**VII.5.3. Avance temporel :**

$$\begin{aligned} Z\{f(n+1)\} &= zF(z) - zf(0) \\ Z\{f(n+k)\} &= z^k F(z) - z^k f(0) - z^{k-1} f(1) - \dots - zf(k-1) \\ Z\{f(n+1)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)z^{-n} \\ &= z \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)z^{-(n+1)} \end{aligned}$$

On additionne et on soustrait la condition initiale  $f(0)$

$$Z\{f(n+1)\} = z \left\{ \left[ f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)z^{-(n+1)} \right] - f(0) \right\}$$

On change l'indice de la sommation à  $m = n + 1$ , et on réécrit la transformée en Z :

$$\begin{aligned} Z\{f(n+1)\} &= z \left\{ \left[ \sum_{m=0}^{\infty} f(m)z^{-m} \right] - f(0) \right\} \\ &= zF(z) - zf(0) \end{aligned}$$

**Exemple :**

La séquence causale :

$$\{f(n)\} = \{4, 8, 16, \dots\}$$

La séquence peut être écrite :

$$\{f(n)\} = 2^{n+2} = g(n+2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Où  $g(n)$  est une fonction exponentielle :  $g(n) = 2^n, n = 0, 1, 2, \dots$

En utilisant la propriété de l'avance temporelle :

$$\begin{aligned}
 F(z) &= z^2 G(z) - z^2 g(0) - zg(1) \\
 &= z^2 \frac{z}{z-2} - z^2 - 2z = \frac{4z}{z-2}
 \end{aligned}$$

**VII.5.4. Multiplication avec un exponentiel :**

$$Z\{a^{-n} f(n)\} = F(az)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} f(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) (az)^{-n} = F(az)$$

**Exemple :**

Soit la séquence exponentielle :

$$g(n) = e^{-r n T}, n = 0, 1, 2, \dots$$

La transformée en Z d'un échelon échantillonné :

$$F(z) = (1 - z^{-1})^{-1} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Et  $g(n) = (e^{rT})^{-n} \times 1$

En appliquant la propriété de la multiplication par un exponentiel :

$$Z\{(e^{rT})^{-n} f(n)\} = \left[1 - (e^{rT} z)^{-1}\right]^{-1} = \frac{z}{z - e^{-rT}}$$

**VII.5.5. Différence complexe :**

$$Z\{n^m f(n)\} = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^m F(z)$$

Exemple : Trouver la transformée en Z de la séquence d'une rampe échantillonné.

$$g(n) = n, n = 0, 1, 2, \dots$$

La transformée en Z d'un échelon échantillonné.

$$f(n) = 1 \Rightarrow F(z) = \frac{z}{z-1}$$

Or  $g(n) = n \times 1$

Si on applique la propriété de la différence complexe :

$$Z\{n \times 1\} = \left(-z \frac{d}{dz}\right) \left(\frac{z}{z-1}\right) = -z \frac{(z-1) - z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

### VII.6. Transformée inverse en Z :

Pour revenir au domaine temporel, on utilise la transformée inverse en Z

#### VII.6.1. Décomposition en fraction :

**Exemple :**

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2 + 0.3z + 0.02}$$

En va prendre en premier  $F(z)/z$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z+1}{z(z^2 + 0.3z + 0.02)}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+0.1} + \frac{C}{z+0.2}$$

$$A = z \frac{F(z)}{z} \Big|_{z=0} = F(0) = \frac{1}{0.02} = 50$$

$$B = (z+0.1) \frac{F(z)}{z} \Big|_{z=-0.1} = \frac{1-0.1}{(-0.1)(0.1)} = -90$$

$$C = (z+0.2) \frac{F(z)}{z} \Big|_{z=-0.2} = \frac{1-0.2}{(-0.2)(-0.1)} = 40$$

$$\text{Ainsi : } F(z) = \frac{50z}{z} - \frac{90z}{(z+0.1)} + \frac{40z}{z+0.2}$$

En utilisant la table :

$$F(n) = \begin{cases} 50u(n) - 90(-0.1)^n + 40(-0.2)^n & ; n \geq 0 \\ 0 & ; n \leq 0 \end{cases}$$

Il est à noter que  $F(0) = 50 - 90 + 40 = 0$

Donc on peut écrire :  $F(n) = \begin{cases} -90(-0.1)^n + 40(-0.2)^n & ; n \geq 1 \\ 0 & ; n \leq 1 \end{cases}$

**VII.6.2. Cas des racines multiples :**

Pour une fonction  $F(z)$  avec des racines multiples

$$F(z) = \frac{N(z)}{(z-z_1)^r \prod_{j=r+1}^n (z-z_j)} = \sum_{i=1}^r \frac{A_{1i}}{(z-z_1)^{r+1-i}} + \sum_{j=r+1}^n \frac{A_j}{(z-z_j)}$$

Les coefficients pour des racines multiples sont données par :

$$A_{1,i} = \frac{1}{(i-1)!} \left. \frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} (z-z_1)^r F(z) \right|_{z \rightarrow z_1}, i = 1, 2, \dots, r$$

**Exemple :**

$$F(z) = \frac{1}{z^2(z-0.5)}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z^3(z-0.5)} = \frac{A_{11}}{z^3} + \frac{A_{12}}{z^2} + \frac{A_{13}}{z} + \frac{A_4}{z-0.5}$$

Où :

$$A_{11} = z^3 \left. \frac{F(z)}{z} \right|_{z=0} = \left. \frac{1}{z-0.5} \right|_{z=0} = -2$$

$$A_{12} = \frac{1}{1!} \left. \frac{d}{dz} z^3 \frac{F(z)}{z} \right|_{z=0} = \left. \frac{d}{dz} \frac{1}{z-0.5} \right|_{z=0} = \left. \frac{-1}{(z-0.5)^2} \right|_{z=0} = -4$$

$$A_{13} = \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2}{dz^2} z^3 \frac{F(z)}{z} \right|_{z=0} = \left. \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \frac{-1}{(z-0.5)^2} \right|_{z=0} = \left. \frac{1(-1)(-2)}{2(z-0.5)^3} \right|_{z=0} = -8$$

$$A_4 = (z-0.5) \left. \frac{F(z)}{z} \right|_{z=0.5} = \left. \frac{1}{z^3} \right|_{z=0.5} = 8$$

$$\text{Ainsi : } F(z) = \frac{1}{z^2(z-0.5)} = \frac{8z}{z-0.5} - 2z^{-2} - 4z^{-1} - 8$$

$$f(n) = \begin{cases} 8(0.5)^n - 2u(n-2) - 4u(n-1) - 8u(n); & n \geq 0 \\ 0; & n < 0 \end{cases}$$

Evaluation de  $f(n)$  pour  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$f(0) = 8 - 8 = 0$$

$$f(1) = 8(0.5) - 4 = 0$$

$$f(2) = 8(0.5)^2 - 2 = 0$$

Donc on peut écrire :

$$f(n) = \begin{cases} (0.5)^{n-3}; & n \geq 3 \\ 0; & n < 0 \end{cases}$$

On peut utiliser le théorème de retard  $Z\{g(n-k)\} = z^{-k}g(z)$ , en écrivant :

$$F(z) = \frac{z}{z-0.5} z^{-3}$$

### VII.7. La convolution et la transformée en Z :

$$y[n] = x[n] \otimes h[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k]$$

$$\begin{aligned} Y[z] &= \sum_{k=0}^M h[k](z^{-k}X(z)) \\ &= \left( \sum_{k=0}^M h[k]z^{-k} \right) X(z) = H(z)X(z) \end{aligned}$$

$$\boxed{y[n] = x[n] \otimes h[n] \xrightarrow{Z} Y(z) = H(z)X(z)}$$

**Exemple :**

Soit :

$$x[n] = 2u[n] - 3u[n-2] + 4u[n-3]$$

$$h[n] = u[n] + 2u[n-1] + u[n-2]$$



Calculer  $y[n] = x[n] \otimes h[n]$

La transformée en Z de  $x[n]$  et  $h[n]$

$$X(z) = 2 - 3z^{-2} + 4z^{-3}$$

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$$


On calcule  $Y(z)$  par une multiplication directe :

$$\begin{aligned} Y(z) &= (2 - 3z^{-2} + 4z^{-3})(1 + 2z^{-1} + z^{-2}) \\ &= 2 + 4z^{-1} - z^{-2} - 2z^{-3} + 5z^{-4} + 4z^{-5} \end{aligned}$$

On peut maintenant déduire  $y[n]$  facilement :

$$\begin{aligned} y[n] &= 2u[n] + 4u[n-1] - u[n-2] \\ &\quad - 2u[n-3] + 5u[n-4] + 4u[n-5] \end{aligned}$$

La **multiplication** polynomiale peut être utilisée pour remplacer la **convolution** de séquence, lorsque nous travaillons dans le domaine Z.

 Le tableau de la transformée en Z et le tableau des opérations sur les transformées en Z, sont présentés dans l'annexe B.

## **Chapitre VIII**

# **LES FILTRES ANALOGIQUES**

### VIII.1. Introduction :

Un filtre est un système ou un programme dont le rôle est de modifier le contenu spectral des signaux le traversant. Le but peut être d'extraire une partie de l'information contenue dans le signal ou d'éliminer des parasites le perturbant...

Un filtre analogique est plus souvent un sélecteur de fréquences alors que les filtres numériques ont comme but plus général de transformer le signal (sélecteur de fréquences, fabrication d'échos, transformation de la voix...).

Nous intéresserons dans ce cours qu'au filtrage analogique passif, basse fréquence ou haute fréquence. On rencontre ces filtres dans de nombreux domaines :

- radiocommunication : sélection de bande...
- analyse spectrale
- élimination de bruit
- sélecteur de fréquences en sortie de mélangeur, oscillateur ou autre circuit non linéaire
- ...etc

Les technologies utilisées en filtrage analogique sont très nombreuses et dépendent en général de la gamme de fréquences concernée.

- En dessous de quelques MHz, les filtres actifs utilisant des amplificateurs opérationnels (AOP) sont très utilisés. Ils ont l'avantage de ne pas nécessiter de bobine dont le prix, l'encombrement ou le poids sont importants à fréquence basses.

- En haute fréquence, au-delà de quelques MHz, les filtres passifs utilisant des condensateurs et des bobines deviennent intéressants. En hyperfréquence, de 1 à 100 GHz, c'est pratiquement la seule technologie utilisable. A ces fréquences, les composants peuvent être soudés sur des circuits imprimés.

On se concentre dans ce chapitre sur une analyse des quatre types de filtres : passe-bas, passe-haut, bande passante, et filtre coupe-bande. On verra aussi une méthode pour tracer la réponse de ces filtres en fonction de la fréquence, soit le diagramme de Bode.

### VIII.2. Caractéristiques de base :

On présente ici certaines caractéristiques de base des filtres. Pour accomplir ceci, on se sert de la fonction de transfert du circuit, où on considère l'entrée et la sortie comme étant des tensions. On

cherche donc la fonction de transfert  $H(s) = \frac{V_s}{V_e}$  du circuit.

**VIII.2.1. Bande passante :** C'est l'étendue des fréquences entre lesquelles un signal à l'entrée passe à la sortie.

**VIII.2.2. Bande atténuée :** C'est l'étendue de fréquences où l'amplitude d'un signal est atténuée de sorte qu'il n'apparaît pas à la sortie.

Les filtres sont caractérisés selon leur réponse en fréquence. La variation de l'amplitude en fonction de la fréquence est le critère le plus important. On peut voir les différents types de filtres à la figure (VIII.1) et (VIII.2).

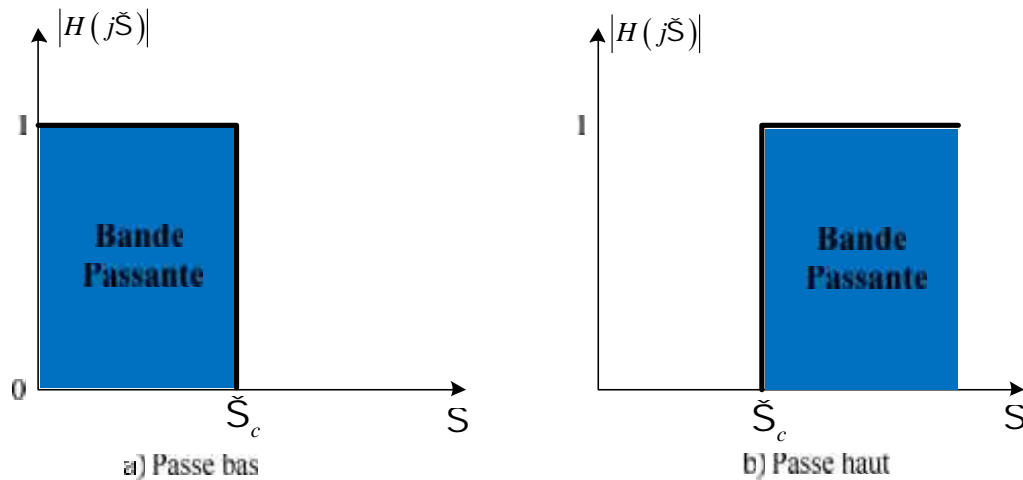


Figure VIII.1. Filtre passe bas et passe haut.

Les courbes idéales de la figure (VIII.1) précédente montrent les deux premiers types de filtres principaux, le filtre passe-bas et le filtre passe-haut, qui ont tous deux une bande passante et une bande atténuée. La fréquence qui sépare les deux bandes est appelée la fréquence de coupure  $\check{S}_c$ . Le nom de ces filtres vient de la région dans laquelle les fréquences passent de l'entrée à la sortie : pour un passe-bas, ce sont les fréquences les plus faibles que la fréquence de coupure qui passent, tandis que pour le passe-haut, ce sont les fréquences les plus élevées qui passent. Les termes bas et haut, ils ne font référence qu'à la fréquence de coupure.

Les deux autres types de filtres de la figure (VIII.2), ont deux fréquences de coupure. Le filtre passe-bande permet de passer seulement les fréquences entre les deux fréquences de coupure ; le filtre à rejet (ou filtre coupe-bande) laisse passer tout sauf ce qui est entre les deux fréquences de coupure.

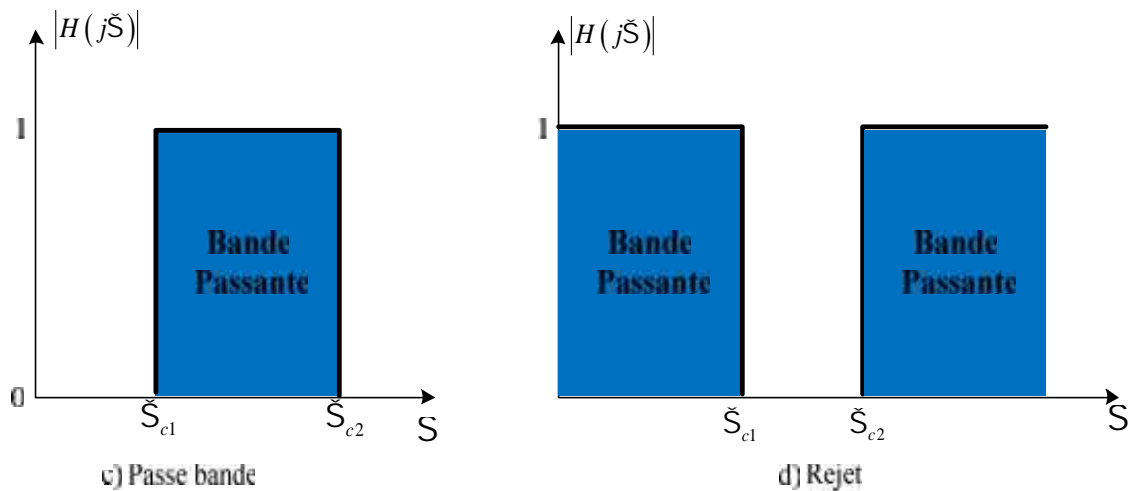


Figure VIII.2. Filtre passe bande et rejet.

### VIII.3. Filtres passe-bas :

Un filtre passe bas laisse passer les basses fréquences et arrête les fréquences élevées. La figure (VIII.3) montre la réponse d'un filtre passe bas idéal, c'est la courbe qui représente le gain en tension  $H = \frac{V_s}{V_e}$  en fonction de la fréquence.  $f_c$  s'appelle la fréquence de coupure. La bande passante est l'intervalle de fréquence  $[0, f_c]$  La bande coupée est constituée de toutes les fréquences supérieures à  $f_c$ . Toute onde sinusoïdale à l'entrée du filtre et dont la fréquence se situe dans la bande passante apparaîtra à la sortie du filtre. Mais toute onde sinusoïdale dont la fréquence est supérieure à  $f_c$  est complètement atténuée par le filtre.

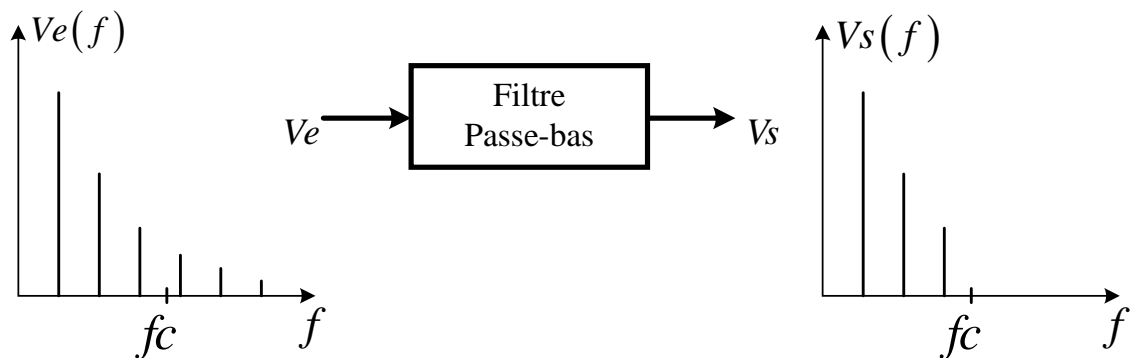
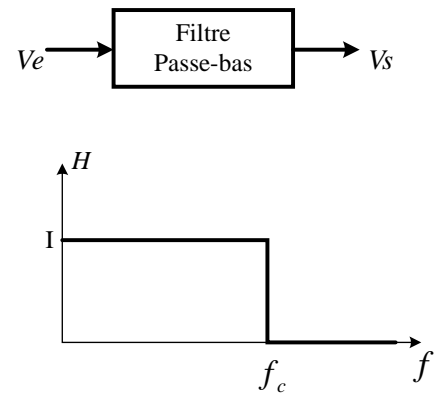


Figure VIII.3. Spectres des signaux d'entrée et de sorties d'un filtre passe-bas.

Les filtres réels ont une réponse semblable à celle représentée sur la figure (VIII.4). Par définition la fréquence de coupure est la fréquence à laquelle l'amplitude de sortie est à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  de la valeur maximale:

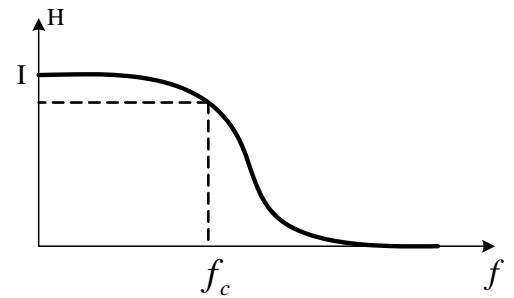


Figure VIII.4. Filtre passe-bas.

$$|H(j\tilde{S}_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{\max} \quad (\text{VIII.1})$$

Le plus souvent, on préfère représenter la réponse du filtre par le gain en dB  $G_{dB} = 20 \text{Log}_{10} H$  avec une échelle logarithmique pour l'axe des fréquences. La fréquence de coupure correspond alors à une chute du gain de 3dB.

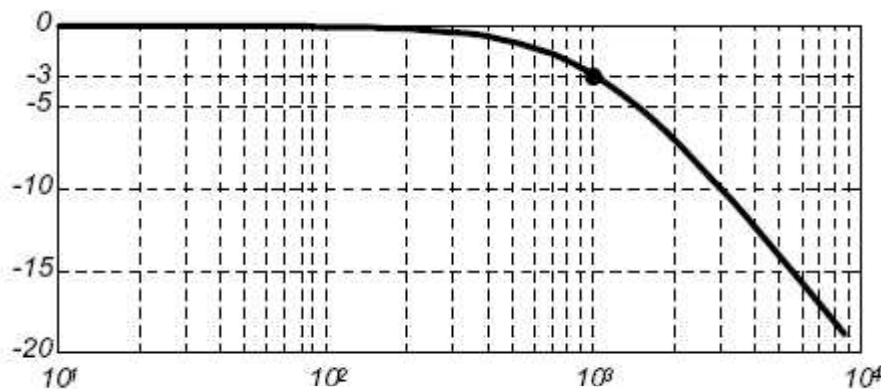


Figure VIII.5. Diagramme de Bode d'un Filtre passe-bas.

On analysera ici deux filtres passifs, soit le filtre RL série et RC série.

### VIII.3.1. Circuit RL série :

Le circuit du filtre RL série est montré à la figure (VIII.6). L'entrée du circuit est une tension sinusoïdale de fréquence variable. La sortie du circuit est la tension aux bornes de la résistance.

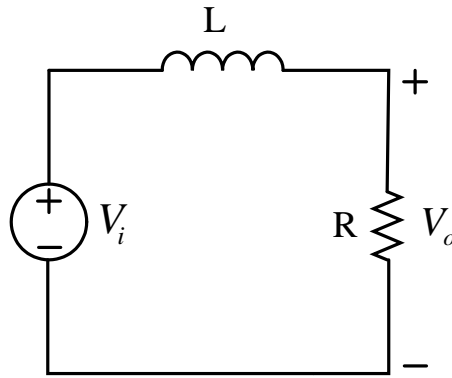


Figure VIII.6. Filtre passe-bas (RL série).

On peut maintenant analyser le circuit RL série pour déterminer sa fréquence de coupure. On cherche alors la fonction de transfert du filtre:

$$V_i(t) = L \frac{di(t)}{dt} + V_o(t)$$

$$V_o(t) = R.i(t) \Rightarrow i(t) = \frac{V_o(t)}{R} \quad (\text{VIII.2})$$

$$V_i(t) = \frac{L}{R} \cdot \frac{dV_o(t)}{dt} + V_o(t)$$

$$V_i(p) = \frac{L}{R} \cdot p.V_o(p) + V_o(p) \quad (\text{VIII.3})$$

$$\frac{V_o(p)}{V_i(p)} = \frac{1}{1 + \frac{L}{R} \cdot p} \quad (\text{VIII.4})$$

$$H(p) = \frac{V_o(p)}{V_i(p)} = \frac{R/L}{p + R/L} \quad (\text{VIII.5})$$

$$H(p) = \frac{R/L}{p + R/L} \quad (\text{VIII.6})$$

Pour étudier la réponse en fréquence, on fait la substitution  $p = j\check{S}$  :

$$H(j\check{S}) = \frac{R/L}{j\check{S} + R/L} \quad (\text{VIII.7})$$

On sépare cette dernière équation en deux parties : une pour l'amplitude, et l'autre pour la phase.

$$|H(j\check{S})| = \frac{R/L}{\sqrt{\check{S}^2 + (R/L)^2}} \quad (\text{VIII.8})$$

$$\angle H(j\check{S}) = -\tan^{-1}\left(\frac{\check{S}L}{R}\right)$$

A l'aide de l'équation (VIII.1), on peut calculer la fréquence de coupure de ce filtre:

$$|H(j\check{S})| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1) = \frac{R/L}{\sqrt{\check{S}^2 + (R/L)^2}} \quad (\text{VIII.9})$$

Et on résout pour obtenir :

$$\check{S}_c = \frac{R}{L} \quad (\text{VIII.10})$$

Cette équation donne un résultat important: on peut choisir la fréquence de coupure qu'on veut en faisant un choix approprié de R et L.

### VIII.3.2. Circuit RC série :

Un circuit RC série peut aussi servir de filtre passe-bas. Dans ce cas-ci, la sortie est sur la capacitance et non la résistance, contrairement au circuit RL série. Le circuit est montré à la figure (VIII.7).

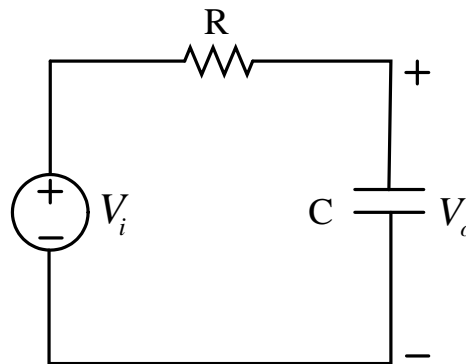


Figure VIII.7. Filtre passe-bas (RC série).

$$V_i(t) = R.i(t) + V_o(t)$$

$$V_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t).dt \Rightarrow i(t) = C \frac{dV_o(t)}{dt} \quad (\text{VIII.11})$$

$$V_i(t) = R.C. \frac{dV_o(t)}{dt} + V_o(t)$$

$$V_i(p) = R.C.p.V_o(p) + V_o(p) \quad (\text{VIII.12})$$

$$\frac{V_o(p)}{V_i(p)} = \frac{1}{1 + R.C.p} \quad (\text{VIII.13})$$

$$H(p) = \frac{V_o(p)}{V_i(p)} = \frac{1/RC}{p + 1/RC} \quad (\text{VIII.14})$$

On fait la substitution  $p = j\check{S}$  pour obtenir l'amplitude de la fonction de transfert:



$$|H(j\check{S})| = \frac{1/RC}{\sqrt{\check{S}^2 + (1/RC)^2}} \quad (\text{VIII.15})$$

Si on compare la fonction de transfert obtenue pour le circuit RL et pour le circuit RC, on obtient la forme générale suivante :

$$H(p) = \frac{\check{S}_c}{p + \check{S}_c} \quad (\text{VIII.16})$$

N'importe quel circuit ayant une fonction de transfert de la même forme que l'équation précédente agira comme un filtre passe-bas.

Une autre relation importante à propos des deux filtres présentés est la relation entre la fréquence de coupure et la constante de temps. En effet, si on compare la constante de temps des circuits RL et RC série et leur fréquence de coupure, on obtient :

$$\dagger = \frac{1}{\check{S}_c} \quad (\text{VIII.17})$$

### VIII.3.3. Les courbes de Bode :

Les courbes de Bode d'un filtre sont tout simplement les courbes illustrant la variation en fonction de la fréquence du module et de la phase de la fonction de transfert.

Pour le gain  $G$ , on préfère tracer le gain en décibel  $G_{dB} = 20 \log(H)$  avec une échelle logarithmique sur l'axe des fréquences. Le tracé de cette courbe est rendu très simple par le comportement asymptotique de  $G_{dB}$  quand  $f \rightarrow 0$  et quand  $f \rightarrow \infty$  et aussi par la connaissance de  $G_{dB}$  au point  $f = f_c$

Si on prend  $H_o = 1$  pour faciliter l'écriture :

$$H(j\check{S}) = \frac{1}{1 + j \frac{\check{S}}{\check{S}_c}} \quad \text{Avec : } \check{S}_c = \frac{1}{RC}$$

$$H(\check{S}) = |H(j\check{S})| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\check{S}}{\check{S}_c}\right)^2}} \quad (\text{VIII.18})$$

On définit le gain en décibel :  $G_{dB} = 20 \log |H(j\check{S})|$

$$G_{dB} = 20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\check{S}}{\check{S}_c}\right)^2}} \right) = -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\check{S}}{\check{S}_c}\right)^2} = -10 \log(1 + u^2) \quad (\text{VIII.19})$$

Avec  $u = \frac{\check{S}}{\check{S}_c} = \frac{f}{f_c}$

On représente le gain en décibel non pas en fonction de  $\frac{\check{S}}{\check{S}_c}$  (ou  $S$  ou  $f$ ) mais en fonction de

$\log \frac{\check{S}}{\check{S}_c}$  (la plage de fréquence pouvant s'étendre de quelques Hz à  $10^6$  Hz et plus)

Si  $S$  petit devant  $\check{S}_c$  alors  $G_{dB} \approx 0$

Si  $S$  grand devant  $\check{S}_c$  alors  $G_{dB} \approx -20 \log \frac{\check{S}}{\check{S}_c}$  droite de pente  $-20dB$  par décade.

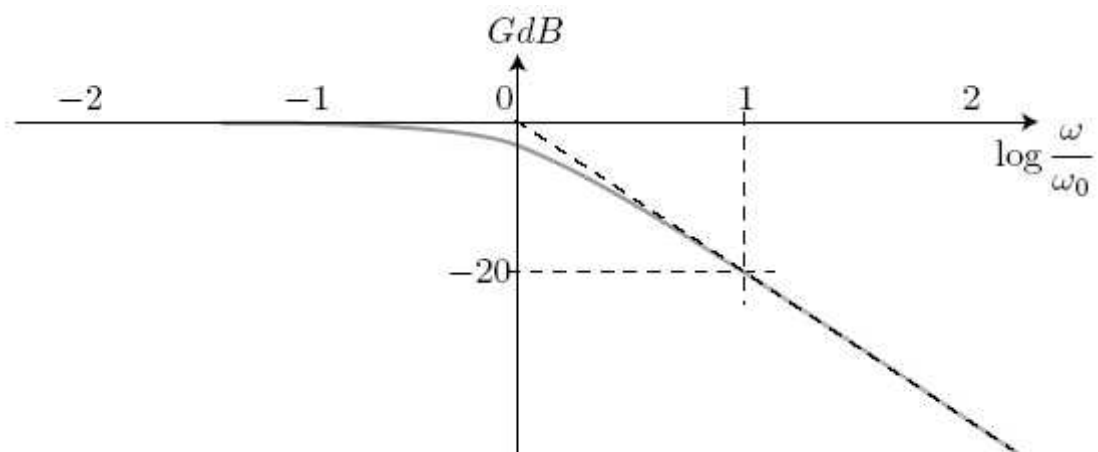


Figure VIII.8. Courbe de réponse  $G_{dB}$  d'un Filtre passe-bas (RC série).

Les deux asymptotes se coupent pour  $0 = -20 \log \frac{\check{S}}{\check{S}_c}$  c'est-à-dire pour  $\check{S} = \check{S}_c$  ;

Pour  $\check{S} = \check{S}_c$ ,  $H(\check{S}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $G_{dB} = -20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3dB$ .

La pulsation de coupure à  $-3dB$  du filtre est par définition la pulsation telle que :

$$G_{dB}(\check{S}_c) = -3dB$$

Les signaux de pulsations  $\check{S} < \check{S}_c$  sont transmis en sortir avec une atténuation inférieure à 3 dB ;

Les signaux de pulsations  $\check{S} > \check{S}_c$  sont transmis en sortir avec une atténuation supérieure à 3 dB ;

Idéalement, on considérera que le filtre laisse passer une pulsation  $S$  si l'atténuation en sortie est inférieure à 3 dB.

La Bande passante de ce filtre, c'est-à-dire l'ensemble des pulsations qu'il laisse passer, est donc  $[0, \check{S}_c]$ .

**Représentation de la courbe de phase :**

L'argument de la fonction de transfert est appelé phase

$$\boxed{\{\check{S}\} = \arg H(j\check{S})}$$

$$= 0 - \arg\left(1 + j\frac{\check{S}}{\check{S}_c}\right) = -\arctan\left(\frac{\check{S}}{\check{S}_c}\right) \quad (\text{VIII.20})$$

On présente la phase non pas en fonction de  $\frac{\check{S}}{\check{S}_c}$  (ou  $S$  ou  $f$ ) mais en fonction de  $\log \frac{\check{S}}{\check{S}_c}$  (la

plage de fréquence pouvant s'étendre de quelques  $Hz$  à  $10^6 Hz$  et plus)

Si  $S$  petit devant  $\check{S}_c$  alors  $\{\check{S}\} \approx 0$

Si  $S$  grand devant  $\check{S}_c$  alors  $\{\check{S}\} \approx -\frac{f}{2}$

Si  $\check{S} = \check{S}_c$  alors  $\{\check{S}\} \approx -\frac{f}{4}$

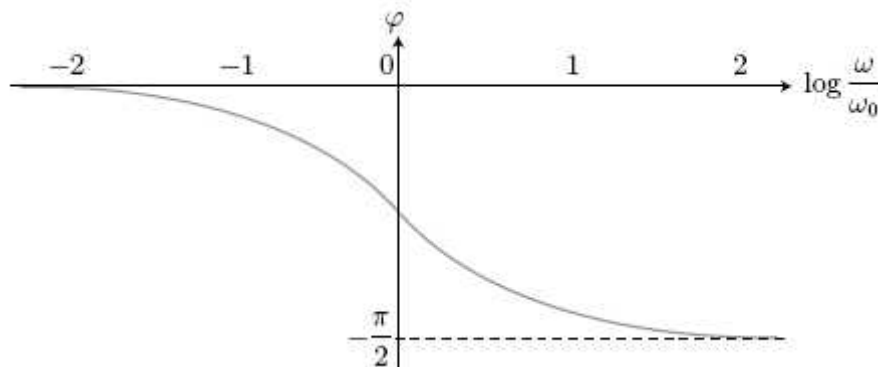


Figure VIII.9. Courbe de phase d'un Filtre passe-bas (RC série).

**VIII.4. Filtres passe-haut :**

Le premier filtre passe-haut étudié est le filtre RC série, illustré par la figure ci-dessous. La configuration est presque la même que le filtre passe-bas, sauf qu'on a échangé la résistance et la capacitance.

La sortie est sur la résistance.

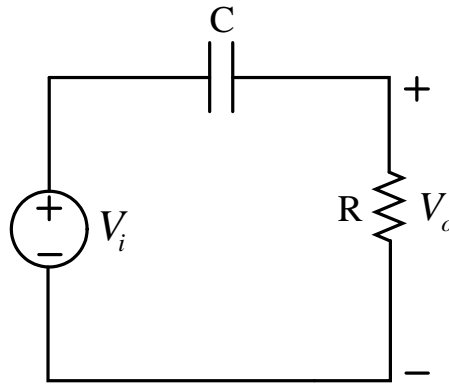


Figure VIII.10 Filtre passe-haut RC série).

On fait la même analyse qualitative de ce circuit : à basses fréquences, la capacitance agit comme un circuit ouvert, et donc aucune tension n'apparaît pas sur la résistance; à hautes fréquences, la capacitance agit comme un court-circuit, et donc toute la tension apparaît à la résistance.

La fonction de transfert du circuit de la figure (VIII.10) est :

$$H(p) = \frac{p}{p + 1/RC} \quad (\text{VIII.21})$$

Ce qui donne, en termes de fréquence,

$$H(j\check{S}) = \frac{j\check{S}}{j\check{S} + 1/RC} \quad (\text{VIII.22})$$

L'amplitude de la fonction de transfert est :

$$|H(j\check{S})| = \frac{\check{S}}{\sqrt{\check{S}^2 + (1/RC)^2}} \quad (\text{VIII.23})$$

Si on résout l'équation de l'amplitude pour obtenir la fréquence de coupure, on obtient :

$$\check{S}_c = \frac{1}{RC} \quad (\text{VIII.24})$$

$$|H(j\check{S})| = \frac{\check{S}/\check{S}_c}{\sqrt{1 + (\check{S}/\check{S}_c)^2}} \quad (\text{VIII.25})$$

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log |H(j\check{S})| \\ &= 20 \log \frac{\check{S}}{\check{S}_c} - 10 \log \left( 1 + \left( \frac{\check{S}}{\check{S}_c} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{VIII.26})$$

Si  $S$  petit devant  $\check{S}_c$  alors  $G_{dB} \approx 20 \log \frac{\check{S}}{\check{S}_c}$

Si  $S$  grand devant  $\check{S}_c$  alors  $G_{dB} \approx 20 \log \frac{\check{S}}{\check{S}_c} - 10 \log \left( \frac{\check{S}}{\check{S}_c} \right)^2 = 0$

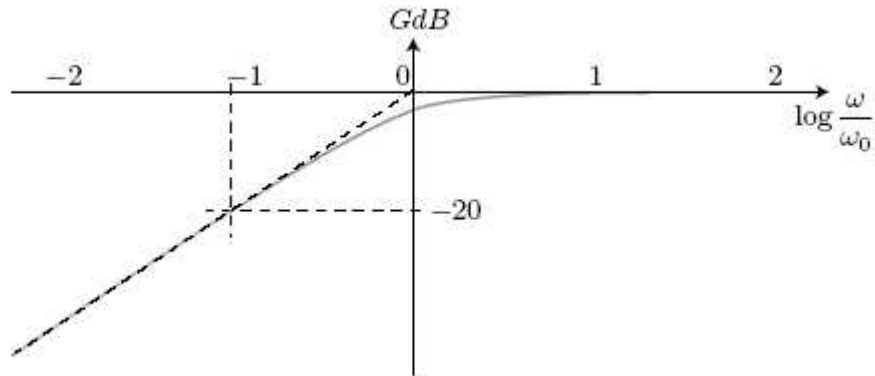


Figure VIII.11. Courbe de réponse  $G_{dB}$  d'un Filtre passe-haut (RC série).

Les deux asymptotes se coupent pour  $0 = 20 \log \frac{\check{S}}{\check{S}_c}$  c'est-à-dire pour  $\check{S} = \check{S}_c$  pulsation de coupure à  $-3dB$ .

La bande passante de ce filtre, c'est-à-dire l'ensemble des pulsations qu'il laisse passer, est donc  $[\check{S}_c, \infty[$ .

**Représentation de la courbe de phase :**

$$\boxed{\{\check{S}\} = \arg H(j\check{S})}$$

$$= \arg \left( j \frac{\check{S}}{\check{S}_c} \right) - \arg \left( 1 + j \frac{\check{S}}{\check{S}_c} \right) = \frac{f}{2} - \arctan \frac{\check{S}}{\check{S}_c} \quad (\text{VIII.27})$$

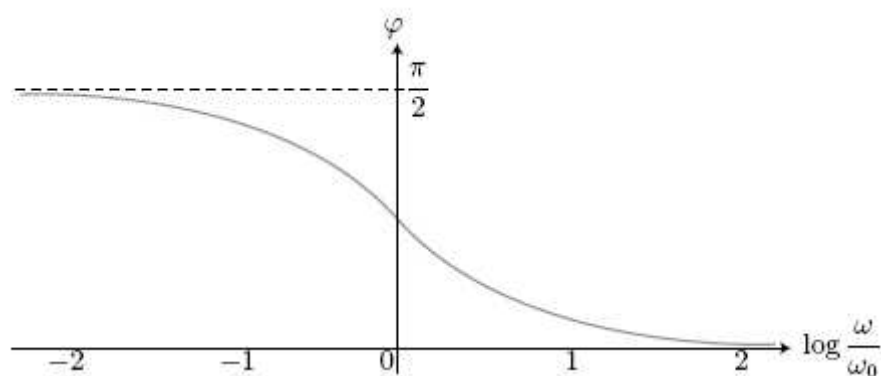


Figure VIII.12. Courbe de phase d'un Filtre passe-haut (RC série).

**VIII.5. Filtres passe-bande :**

Un filtre passe-bande est un filtre ne laissant passer qu'une bande ou intervalle de fréquences compris entre une fréquence de coupure basse et une fréquence de coupure haute du filtre. Ce genre de filtre est un peu plus complexe que les autres filtres, c'est une association en cascade d'un passe-haut et d'un passe-bas.

Les filtres passe-bande sont constitués de deux parties :

Une partie qui fait chuter la tension de sortie à basse fréquence,

Une partie qui fait chuter la tension de sortie à haute fréquence.

**VIII.5.1. Caractéristiques :**

Les filtres passe-bande ont quelques caractéristiques additionnelles comparativement aux filtres passe-bas et passe-haut. Ces paramètres sont :

**a. Fréquence centrale  $\check{S}_0$  :** C'est la fréquence à laquelle la fonction de transfert du filtre est purement réelle. On l'appelle aussi la fréquence de résonance. La fréquence centrale est la moyenne géométrique des fréquences de coupure,  $\check{S}_0 = \sqrt{\check{S}_{c1}\check{S}_{c2}}$ . Pour un filtre passe-bande, l'amplitude de la fonction de transfert est maximale à la fréquence centrale.

**b. Largeur de bande  $S$  :** C'est la largeur de la bande passante.

**c. Facteur de qualité  $Q$  :** C'est le rapport entre la fréquence centrale et la largeur de bande. Le facteur de qualité est une mesure de la largeur de la bande passante, indépendamment de la fréquence centrale.

**VIII.5.2. Circuit RLC série :**

Le filtre passe-bande RLC série. Comme les autres types de circuits, on peut faire une analyse qualitative en premier pour vérifier le fonctionnement de ce circuit.

Noter que la sortie du filtre est aux bornes de la résistance.

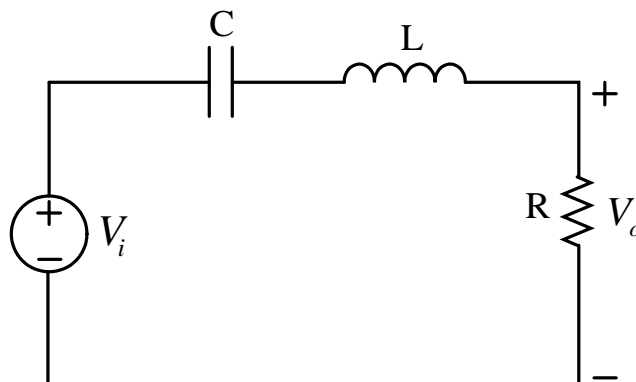


Figure VIII.13. Filtre passe-bande RLC série

La fonction de transfert de ce circuit est :

$$H(p) = \frac{p(R/L)}{p^2 + p(R/L) + 1/LC} \quad (\text{VIII.28})$$

Comme d'habitude, on remplace  $p = j\check{S}$  pour obtenir l'amplitude en fonction de la fréquence :

$$H(j\check{S}) = \frac{\check{S}(R/L)}{\sqrt{(1/LC - \check{S}^2)^2 + (\check{S}(R/L))^2}} \quad (\text{VIII.29})$$

Et le déphasage est :

$$\varphi(j\check{S}) = 90^\circ - \tan^{-1} \left( \frac{\check{S}(R/L)}{1/LC - \check{S}^2} \right) \quad (\text{VIII.30})$$

La figure suivante montre la réponse typique d'un filtre passe-bande. Les fréquences de coupure sont définies par les points où l'amplitude atteint 0.707 de la valeur maximale.

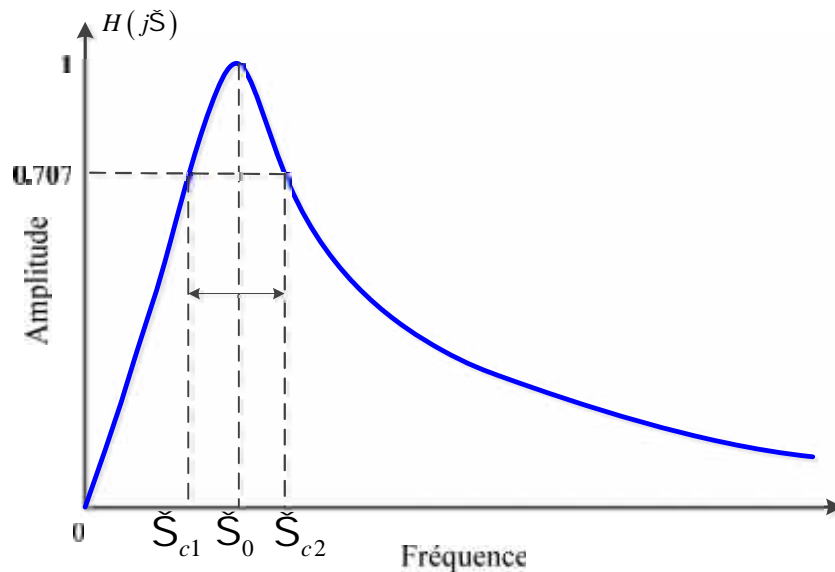


Figure VIII.14. Réponse en fréquence d'un filtre passe-bande RLC serie

On peut maintenant calculer les cinq paramètres qui caractérisent le filtre passe-bande. En premier, la fréquence centrale est définie comme étant la fréquence où la fonction de transfert est purement réelle. Ceci se produit au point où l'impédance de la capacitance annule celle de l'impédance, soit

$$j\check{S}L - \frac{j}{\check{S}C} = 0 \quad (\text{VIII.31})$$

On résout pour obtenir :

$$\check{S}_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{VIII.32})$$

Les fréquences de coupure sont calculées de la même façon que d'habitude, on calcule S pour  $H(j\check{S}) = 1/\sqrt{2}$ .

Les deux fréquences de coupure sont :

$$\check{S}_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}$$

$$\check{S}_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} \quad (\text{VIII.33})$$

La largeur de bande du filtre est la différence entre  $\check{S}_{c2}$  et  $\check{S}_{c1}$ . On trouve donc :

$$s = \check{S}_{c2} - \check{S}_{c1} = \frac{R}{L} \quad (\text{VIII.34})$$

### VIII.6. Filtres coupe-bande :

Le dernier type de filtre étudié est le filtre coupe-bande. Ce genre de filtre permet de tout passer à la sortie sauf certaines fréquences. Un exemple d'application est un filtre qui permet d'éliminer un canal TV d'une transmission.

#### VIII.6.1. Filtre coupe-bande RLC série :

Le premier circuit étudié est le circuit RLC série, montré à la figure (VIII.15) Il s'agit du même circuit que le passe-bande, sauf que la sortie est prise aux bornes de l'inductance et la capacitance en série.

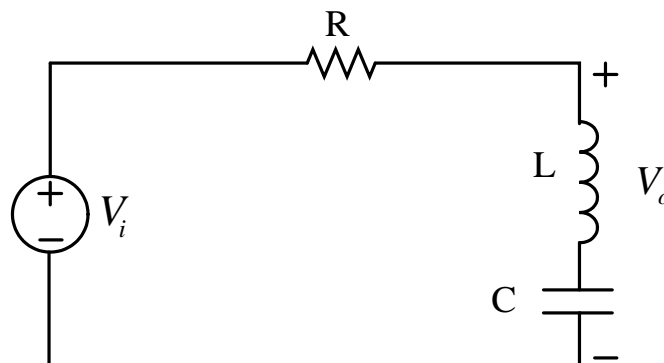


Figure VIII.15. Filtre à élimination de bande RLC série.



La fonction de transfert de ce circuit est :

$$H(p) = \frac{pL + 1/pC}{R + pL + 1/pC} = \frac{p^2 + 1/LC}{p^2 + p(R/L) + (1/LC)} \quad (\text{VIII.35})$$

Et on obtient l'amplitude en remplaçant  $p = j\check{S}$  :

$$|H(j\check{S})| = \frac{|1/LC - \check{S}^2|}{\sqrt{(1/LC - \check{S}^2)^2 + (\check{S}(R/L))^2}} \quad (\text{VIII.36})$$

Et le déphasage,

$$\varphi(j\check{S}) = -\tan^{-1}\left(\frac{\check{S}(R/L)}{1/LC - \check{S}^2}\right) \quad (\text{VIII.37})$$

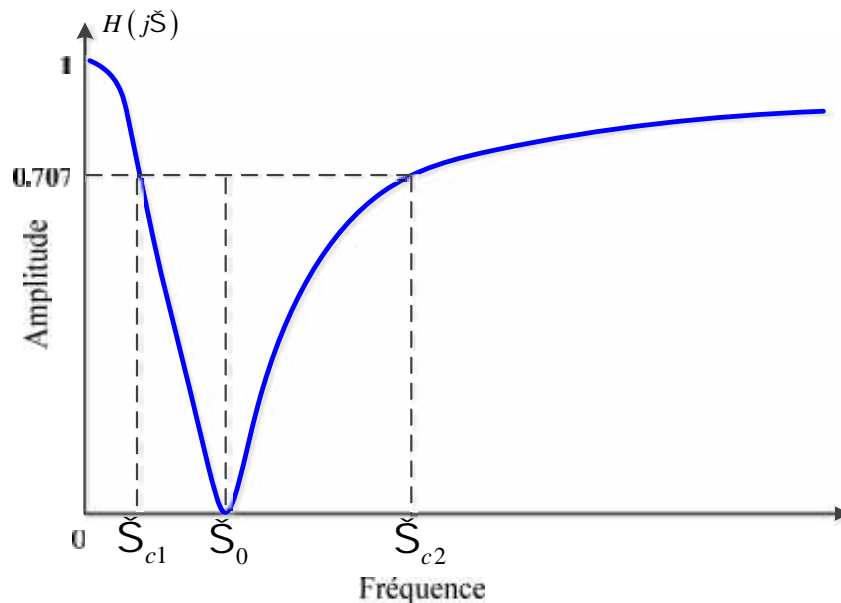


Figure VIII.16. Réponse typique d'un filtre à élimination de bande RLC série.

La fréquence centrale du filtre est la même que celle du filtre passe-bande,

$$\check{S}_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{VIII.38})$$

Les fréquences de coupure sont les mêmes que celle du filtre passe-bande. Les deux fréquences de coupure sont :

$$\check{S}_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}$$

$$\check{S}_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)} \quad (\text{VIII.39})$$

La largeur de bande du filtre est la différence entre  $\check{S}_{c2}$  et  $\check{S}_{c1}$ . On trouve donc :

$$S = \check{S}_{c2} - \check{S}_{c1} = \frac{R}{L} \quad (\text{VIII.40})$$

La forme générale d'un filtre coupe-bande est :

$$H(p) = \frac{p^2 + \check{S}_0^2}{p^2 + pS + \check{S}_0^2} \quad (\text{VIII.41})$$

# **ANNEXES**

Annexe A : Table des principales transformées de Laplace et leurs propriétés

Table des Transformées de Laplace		Propriétés des Transformées de Laplace	
$f(t) \ (t \geq 0)$	$F(p) = TL\{f(t)\}$	$f(t) \ (t \geq 0)$	$F(p) = TL\{f(t)\}$
$u(t)$	$\mathbf{1}$	$f(t)$	$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$
$U(t)$	$\frac{1}{p}$	$\} _1 f_1(t) + \} _2 f_2(t)$	$\} _1 F_1(p) + \} _2 F_2(p)$
$t$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0)$
$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$
$e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$p^n F(p) - \sum_{r=n+1}^{r=2n} p^{2n-r} \cdot \frac{d^{(r-n-1)} f(0)}{dt^{(r-n-1)}}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t) dt^n$ (Avec conditions initiales nulles)	$\frac{F(p)}{p^n}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	$f(kt)$	$\frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right)$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$	$f\left(\frac{t}{k}\right)$	$k.F(kp)$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$	$e^{-at} f(t)$	$F(p+a)$
$\sin(\check{S}t)$	$\frac{\check{S}}{p^2 + \check{S}^2}$	$f(t - \dagger)$ Pour $(t \geq \dagger)$	$e^{-p\dagger} . F(p)$
$\cos(\check{S}t)$	$\frac{p}{p^2 + \check{S}^2}$	$\int_0^t f_1(t - \dagger) . f_2(\dagger) d\dagger$	$F_1(p) . F_2(p)$
$t . \sin(\check{S}t)$	$\frac{2p\check{S}}{(p^2 + \check{S}^2)^2}$	$t . f(t)$	$-\frac{d}{dp} F(p)$
$t . \cos(\check{S}t)$	$\frac{p^2 - \check{S}^2}{(p^2 + \check{S}^2)^2}$	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>f(t)</math> fonction périodique de période T</li> <li><math>f_1(t)</math> fonction définie sur la 1<sup>ère</sup> période de <math>f(t)</math></li> </ul> $F(p) = \frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT}}$	
$e^{-at} . \sin(\check{S}t)$	$\frac{\check{S}}{(p+a)^2 + \check{S}^2}$		
$e^{-at} . \cos(\check{S}t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \check{S}^2}$		

Annexe B1 : Tableau de la Transformée en Z

$x(n)$	$X(z)$ en $z^{-1}$	$X(z)$ en $z$
$u(n)$	1	1
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\frac{z}{z-1}$
$nu(n)$	$\frac{1}{(1-z^{-1})^2}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$a^n \cdot u(n)$	$\frac{1}{(1-az^{-1})}$	$\frac{z}{(z-a)}$
$na^n \cdot u(n)$	$\frac{a}{(1-az^{-1})^2}$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$\cos(\check{S}_0 n)u(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\check{S}_0)}{1-2z^{-1}\cos(\check{S}_0)+z^{-2}}$	$\frac{z^2-z\cos(\check{S}_0)}{z^2-2z\cos(\check{S}_0)+1}$
$\sin(\check{S}_0 n)u(n)$	$\frac{z^{-1}\sin(\check{S}_0)}{1-2z^{-1}\cos(\check{S}_0)+z^{-2}}$	$\frac{z\sin(\check{S}_0)}{z^2-2z\cos(\check{S}_0)+1}$
$a^n \cos(\check{S}_0 n)u(n)$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\check{S}_0)}{1-2az^{-1}\cos(\check{S}_0)+a^2z^{-2}}$	$\frac{z^2-az\cos(\check{S}_0)}{z^2-2az\cos(\check{S}_0)+a^2}$
$a^n \sin(\check{S}_0 n)u(n)$	$\frac{az^{-1}\sin(\check{S}_0)}{1-2az^{-1}\cos(\check{S}_0)+a^2z^{-2}}$	$\frac{az\sin(\check{S}_0)}{z^2-2az\cos(\check{S}_0)+a^2}$

**Annexe B2 : Tableau des opérations sur les transformées en Z**

Opération sur les suites	Opération sur la transformée en z
$ax(n) + by(n)$	$aZ\{x(n)\} + bZ\{y(n)\}$
$Z\{x(n-k)\}$	$z^{-k}Z\{x(n)\}$
$Z\{x(n+k)\}$	$z^k Z\{x(n)\} - \sum_{j=0}^{k-1} x(j)z^k$
$Z\{x(n) * y(n)\}$	$Z\{x(n)\} Z\{y(n)\}$
$Z\{a^n x(n)\}$	$Z\{x(n)\}(z/a)$
$Z\{nx(n)\}$	$-z \frac{d}{dz} Z\{x(n)\}$
$Z\{n^k x(n)\}$	$\left(-z \frac{d}{dz}\right)^k Z\{x(n)\}$

# **BIBLIOGRAPHIES**

**BIBLIOGRAPHIES**

- [1] F. Cottet, “Traitement des signaux et acquisition de données : Cours et exercices corrigés”, 3ème édition, Dunod Édition, 2009.
- [2] Y. Duroc, “L'essentiel en théorie et traitement du signal - Signaux déterministes et aléatoires, continus et discrets”, Ellipses Marketing 2011.
- [3] A. Palamides, A. Veloni, “Signals and Systems Laboratory with MATLAB”, Taylor & Francis Group, CRC Press 2011.
- [4] B. Boulet, “Fundamentals of Signals and Systems”, Copyright 2006 Career & Professional Group, a division of Thomson Learning.
- [5] M. Hayes, “Schaum’s Outline of Digital Signal Processing”, Mc Graw-Hill, New York, 1999.
- [6] F. Auger, “Introduction à la théorie du signal et de l'information: Cours et exercices”, Editions Technip, Collection Sciences et technologies, 2000.
- [7] J. Max, J. L. Lacoume, “Méthodes et techniques de traitement du signal”, Dunod; édition : 5, Sciences Sup collection, 2004.
- [8] P. Courmontagne, “Ingénierie du signal : Théorie et pratique”, Ellipses Marketing édition, Technosup collection, 2005.
- [9] E. Tisserand, J. F. Pautex, P. Schweitzer, “Analyse et traitement des signaux, Méthodes et applications au son et à l'image”, Dunod 2ème édition, Sciences Sup Collection, 2009.
- [10] M. Bellanger, P. Aigrain, “Traitement numérique du signal : Théorie et pratique”, Dunod; 8e édition, Sciences Sup Collection, 2006.
- [11] D. Coulon, “Théorie et traitement des signaux”, édition : Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR), Collection : P U Polytec Rom, 2000.
- [12] A. Yger, “Théorie et analyse du signal : Cours et initiation pratique via MATLAB et SCILAB”, Editeur : Ellipses Marketing Collection : Universités mathématiques, 1999.
- [13] S. Radhakrishnan Practicing, “Signals and Systems Laboratory using MATLAB: Signals and Systems Introduction and implementation using MATLAB”, LAP Lambert Academic Publishing, 2011.
- [14] G. Binet, T. Ahmed Ali , “Traitement du Signal Représentation des Signaux et Systèmes Continus”, Ellipses Marketing édition, Références sciences Collection, 2016.



- [15] P. Nayman , “Bases et techniques avancées en traitement du signal - Du capteur à la mesure”, Ellipses Marketing édition, Collection : Formations & Techniques, 2017.
- [16] M. Benidir, “Théorie et traitement du signal, tome 2 : Méthodes de base pour l'analyse et le traitement du signal”, Dunod édition, Collection : Sciences Sup, 2004.