# Cours d'algèbre

avec Exercices corrigés

Dr. Hamid BEDDANI

ESG2E ORAN

# Préface

Ce polycopié est un ouvrage, principalement destiné aux étudiants de la première année Génie Electrique et Energétique, mais aussi à tous les étudiants de la première année des filières technologiques et scientifiques, Au cours de la première année du programme d'algèbre.
Les leçons sont présentées de manière claire avec des exemples qui permettent à l'étudiant de comprendre le programme.
Enfin, des exercices sont présentés avec des solutions détaillées.

# Contents


**1 La logique mathématique.** . . . . . 6

**1.1 Assertion "proposition mathématique"** 6

**1.2 Les connecteurs logiques** 6

1.2.1 Négation, conjonction, disjonction . . . . . 6

1.2.2 Implication, équivalence . . . . . 7

1.2.3 Règles . . . . . 8

1.2.4 Propriétés des opérations logiques . . . . . 8

**1.3 Les quantificateurs mathématiques** 9

1.3.1 Quantificateurs simples . . . . . 9

1.3.2 Règles de négation d'une assertion quantifiée . . . . . 10

1.3.3 Règles importantes . . . . . 10

**1.4 Les différents types de démonstration en mathématique** 10

1.4.1 Raisonnement par contraposée . . . . . 10

1.4.2 Raisonnement par l'absurde . . . . . 11

1.4.3 Raisonnement par contre-exemple . . . . . 11

1.4.4 Raisonnement par récurrence . . . . . 11

**1.5 Exercices résolus** 12

**2 Ensembles** . . . . . 14

**2.1 Concepts généraux** 14

**2.2 Opérations dans ensemble des parties** 14

2.2.1 Recouvrement, partition . . . . . 16

2.2.2 Propriétés des opérations dans $\mathscr{P}(E)$ . . . . . 16

2.2.3 Produit des ensembles . . . . . 17

**2.3 Exercices résolus** 17

3 Applications . . . . . . . . . . 18
3.1 Définitions: 18
3.2 Restriction, prolongement 19
3.3 Composition des applications 19
3.4 Injections, surjections, bijections 19
3.4.1 Application Injective . . . . . . . . . . 19
3.4.2 Application Surjective . . . . . . . . . . 20
3.4.3 Application bijective . . . . . . . . . . 21
3.5 Images directes et images réciproques 22
3.6 Exercices résolus 23
4 Structure Algébriques . . . . . . . . . . 26
4.1 Lois de composition interne 26
4.1.1 Propriétés . . . . . . . . . . 26
4.1.2 Unicité de l'inverse (du symétrique) . . . . . . . . . . 27
4.2 Structure de Groupes 27
4.2.1 Groupes . . . . . . . . . . 27
4.2.2 Sous-Groupes . . . . . . . . . . 28
4.3 Structure d'Anneaux 28
4.3.1 Anneaux . . . . . . . . . . 28
4.3.2 Sous-Anneaux . . . . . . . . . . 29
4.4 Structure de Corps 29
4.4.1 Corps . . . . . . . . . . 29
4.4.2 Sous-corps . . . . . . . . . . 30
4.5 Exercices résolus 30
5 POLYNOMES . . . . . . . . . . 33
5.1 Polynômes 33
5.1.1 Opérations sur $\mathbb{K}[S]$ . . . . . . . . . . 33
5.1.2 Degré d'un polynôme . . . . . . . . . . 34
5.2 Division des polynômes 34
5.2.1 Divisions euclidienne et division suivant les puissances décroissantes . . . . . . . . . . 34
5.2.2 Division suivant les puissances croissantes . . . . . . . . . . 34
5.3 Plus grand commun diviseur (p.g.c.d) 35
5.3.1 Algorithme d'Euclide . . . . . . . . . . 35
5.4 Polynômes premiers entre eux 36
5.5 Racines d'un polynôme 36
5.6 Polynômes irréductibles 36
5.7 Factorisation en polynômes irréductibles 37
5.8 Exercices résolus 38
6 Fractions rationnelles . . . . . . . . . . 40
6.1 Fractions rationnelles de $\mathbb{K}$(S ) 40
6.1.1 Zéros et pôles d'une fraction rationnelle . . . . . . . . . . 40
6.2 Décomposition en éléments simples 40
6.2.1 La forme et la méthode générale de décomposition . . . . . . . . . . 40
6.2.2 Séparation des pôles . . . . . . . . . . 41
6.2.3 Décomposition d'une partie polaire . . . . . . . . . . 43

**6.3 Décomposition en éléments simples de première espèce** **43**
6.3.1 Pratique de la décomposition . . . 44
**6.4 Décomposition en éléments simples de seconde espèce** **45**
6.4.1 Pratique de la décomposition dans $\mathbb{R}(S)$ . . . 45
6.4.2 Méthodes pratiques de décomposition . . . 46
**6.5 Exercices résolus** **46**

# Chapter 1

# La logique mathématique.

## 1.1 Assertion "proposition mathématique"

**Définition 1.1.1** Une assertion mathématique est une affirmation que nous pouvons juger vraie (1) ou fausse (0), Mais pas les deux à la fois.

Dans ce polycopié,on va noter les assertion mathématique (par exemple $U, V, W$).

■ **Exemples 1.1 :**

- L'assertion « 24 est un multiple de 2 » est V(1) et « 19 est un multiple de 2 » est une assertion fausse(0).
- $20-6 = 14$ est une assertion vraie(1).
- $2 \times 7 = 11$ est une assertion fausse(0).
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|z| = 1$ est une assertion fausse(0).

**Définition 1.1.2** On appelle propositions(assertion mathématique) mathématique dans un ensemble $G$ si qui contenant des lettres appelées variables tel que quand on remplace chacune de ces variables par un élément de cet ensemble,

Une proposition mathématique contenant la variable $s$ sera noté $U(s)$ pour marquer la dépendance de sa valeur de vérité par rapport à la variable $s$ considérée. Il est clair qu'une assertion peut s'interprèter comme une proposition sans variable, c'est-àdire comme une proposition toujours vraie ou toujours fausse, ce qui nous autorise à ne faire référence par la suite qu'à la notion de prédicat, englobant ainsi celle d'assertion.

•. Comme nous l'avons mentionné, l'énoncé $U(s)$ défini par « $s$ est un multiple de 2 » est une proposition sur $\mathbb{N}$.

Il devient une assertion quand on donne une valeur entière à $s$. Par exemple,

- l'assertion $U(10)$ définie par « 10 est un multiple de 2 » obtenue en remplaçant $s$ par 10 est vraie ;
- l'assertion $U(17)$ définie par « 17 est un multiple de 2 » obtenue en remplaçant $s$ par 17 est fausse.

## 1.2 Les connecteurs logiques

$U, V, \ldots$ on dits propositions composés dont on peut déterminer la valeur de vérité par des valeurs de vérité de $U, V, W, \ldots$ Les 5 connecteurs usuels sont « non », « et "$\wedge$" », « ou "$\vee$" », « $\Longrightarrow$ » et « $\Longleftrightarrow$ ».

### 1.2.1 Négation, conjonction, disjonction

**Définition 1.2.1** La négation de la propposition mathématique $U$ est la proposition noté $\overline{U}$ ou $non(U)$ qui est vraie lorsque $U$ est fausse, et est fausse lorsque $U$ est vraie.

On obtient la table de vérité suivante:

| $U$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| $\overline{V}$ | 0 | 1 |

■ **Exemples 1.2 :**

1. Considérons la proposition $U$ défini par « 76 est un multiple de 4 ». Il s'agit d'une assertion vraie. Sa négation est« 36 n'est pas un multiple de 2 ».Il s'agit donc d'une assertion fausse.

2. À partir de la proposition « $s \in A$ », on définit la proposition « $\overline{s \in A}$ » qui s'écrit « $s \notin A$ ». Par exemple, l'assertion « $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ » est vraie car l'assertion « $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ » est fausse.

3. De même, à partir de la proposition $U(G)$ défini par

« E est un ensemble ayant un nombre infini d'éléments »,

alors $\overline{U(G)}$, il est donné par

« G est un ensemble ayant un nombre fini d'éléments ».

**Définition 1.2.2** • La conjonction de $U$ et $V$,( $U \wedge V$) est une proposition mathématique « $U$ et $V$ »,qui est vrai lorsque $U$ et $V$ sont vrais simultanément, et faux si non. ».

• La disjonction de $U$ ou $V$,( $U \vee V$) est une proposition mathématique « $U$ ou $V$ »,qui est vraie lorsque l 'un au moins des deux propositions $U$ et $V$ est vraie, et fausse si non.».

Tables de vérités des conjonction et disjonction :

| $U$ | $V$ | $U \wedge V$ | $U \vee V$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

Il est à noter que le « ou » du langage courant a un sens exclusif traduisant l'alternative entre $U$ et $V$: ou bien $U$ est vraie (et $V$ est fausse), ou bien $U$ est vraie (et $U$ fausse), mais $U$ et $V$ ne peuvent être vrais simultanément. En revanche, le « ou » logique n'est pas exclusif.

■ **Exemples 1.3 :**

1. La proposition $U$ définie par « 10 est divisible par 2 » (c'est une assertion) est vrai. La proposition $V$ défini par« 10 est divisible par 3 » (c'est aussi une assertion) est faux. Ainsi, « $U \wedge V$ » (c'est encore une assertion) est faux. En revanche, « $U \vee V$ » est vrai.

2. On considère la proposition mathématique $U(s)$ défini par « $s \leq 3$ » et la proposition mathématique $V(s)$ défini par«$s \geq 5$ » où $s$ désigne un nombre réel. Alors, la proposition« $U(s) \vee V(s)$ » est défini par« $s \leq 3$ ou $s \geq 5$ ».Il est vraie si $s \in ]-\infty, 3] \cup [5, +\infty[$ et fausse si $s \in ]3, 5[$. En revanche, la proposition« $U(s) \wedge V(s)$ » défini par« $s \leq 3$ et $s \geq 5$ » est fausse pour tout $s \in \mathbb{R}$.

### 1.2.2 Implication, équivalence

**Définition 1.2.3** "$U \Longrightarrow V$", on lit $U$ implique $V$ , est une proposition qui est fausse lorsque $U$ est vraie et $V$ fausse, et vraie si non

"$U \Longleftrightarrow V$", on lit $U$ equivaut à $V$ , est une proposition qui est vraie lorsque $U$ et $V$ sont vrais ou faux, et faux si non.

Tables de vérités des « $\Longrightarrow$ » et «$\Longleftrightarrow$» :

| $U$ | $V$ | $U \Longrightarrow V$ | $U \Longleftrightarrow V$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |

La définition de ces deux connecteurs appellent quelques commentaires. Observons que l'implication de $U$ vers $V$, telle qu'elle est définie ci-dessus, englobe la notion d'implication du langage courant : « Si $U$ alors $V$ ». En effet, si $U \Longrightarrow V$ est vraie, et si $U$ vraie, alors $V$ est Vvraie (ce qui correspond à la première ligne de la table de vérité de $U \Longrightarrow V$).

■ **Exemples 1.4 :**

1. $\sqrt{s} \leq 4 \Rightarrow 0 \leq s \leq 16$ est Vraie
2. $5+2=4 \Longrightarrow 4=9$ est Vraie
3. Pour $s,t \in \mathbb{R}$, l'équivalence « $st=0 \Longleftrightarrow (s=0$ ou $t=0)$ » est vraie.

**Proposition**

1. $U \Longrightarrow V$ réciproque de $U \Longrightarrow V$.
2. $U \Longleftrightarrow \overline{\overline{U}}$
3. $(U \Longleftrightarrow V) \Longleftrightarrow \left(\overline{U} \Longleftrightarrow \overline{V}\right)$

### 1.2.3 Règles

1.$\overline{P \wedge V} \Longleftrightarrow \overline{U} \vee \overline{V}$,

2.$\overline{U \vee V} \Longleftrightarrow \overline{U} \wedge \overline{V}$,

**Preuve:**

Par table de vérité, montrons (1)

| $U$ | $V$ | $U \wedge V$ | $\overline{U \wedge V}$ | $\overline{U}$ | $\overline{V}$ | $\overline{U} \vee \overline{V}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

alors $\overline{U \wedge V}$ et $\overline{U} \vee \overline{Q}$ ont les mêmes valeurs de vérité, donc elles sont équivalentes.

### 1.2.4 Propriétés des opérations logiques

$U, V$ et $W$ 3 propositions mathématiques. Alors

1.$\overline{U \Longrightarrow V} \Longleftrightarrow U \wedge \overline{V}$,

2.$(U \Longleftrightarrow V) \Longleftrightarrow (U \Longrightarrow V) \wedge (V \Longrightarrow U)$,

3. $(U \Longleftrightarrow V) \Longleftrightarrow \left(\overline{U} \Longleftrightarrow \overline{V}\right)$,

4. $[U \Longrightarrow V \wedge V \Longrightarrow W] \Longrightarrow [U \Longrightarrow W]$,

5. $U \wedge (V \wedge W) \Longleftrightarrow U \wedge (V \wedge W)$, (Associativité),

6. $U \vee (V \vee W) \Longleftrightarrow U \vee (V \vee W)$, (Associativité)

7. $U \wedge (V \vee W) \Longleftrightarrow (U \wedge V) \vee (U \wedge W)$, (la distribution de $\wedge$sur $\vee$),

8. $U \vee (V \wedge W) \Longleftrightarrow (U \vee V) \wedge (U \vee W)$, (la distribution de $\vee$ sur $\wedge$)

**Preuve :** (par table de vérité)

1)

| $U$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $U \Longrightarrow V$ | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $\overline{U \Longrightarrow V}$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $\overline{V}$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $U \wedge \overline{V}$ | 0 | 1 | 0 | 0 |

Alors $\overline{U \Longrightarrow V}$ et $U \wedge \overline{V}$ ont les mêmes valeurs de vérité, donc elles sont équivalentes.
4)

| $U$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $W$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $U \Longrightarrow V$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $V \Longrightarrow W$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $U \Longrightarrow W$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $U \Longrightarrow V \wedge V \Longrightarrow W$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $[U \Longrightarrow V \wedge V \Longrightarrow W] \Longrightarrow [U \Longrightarrow W]$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Alors $[U \Longrightarrow V \Longrightarrow W] \Longrightarrow [U \Longrightarrow W]$ toujours vraie.

## 1.3 Les quantificateurs mathématiques

### 1.3.1 Quantificateurs simples

Sur un ensemble $G$, on construite de nouvelles assertions est dit assertions quantifiées (il existe »et «quel que soit») (par exemple $U(s)$ défini sur un ensemble $G$).
-Le quantificateur «quel que soit ( pour tout) » noté par $\forall$ . l 'assertion quantifiée est « $\forall s \in G : U(s)$ ». Vraie si tous les élé ments $s$ de $G$ vérifient $U(s)$.
-Le quantificateur «il existe », noté par $\exists$. l 'assertion quantifiée «$\exists s \in G : U(s)$ ». Vraie pour (au moins) un élément $s$ appartenant à $F$ vérifiant l ' énoncé $U(s)$

Le quantificateur «quel que soit »est qualifié d' universel et le quantificateur «il existe »d'existentiel.

▪ **Exemples 1.5 :** 1. L'assertion quantifiée « $\forall n \in \mathbb{N} : (4-n)n < 0$ » est fausse puisque qu'il existe un élément $n$ de $\mathbb{N}$ (prendre $n = 0, n = 1, n = 2$, ou $n = 3$) pour lequel l'énoncé « $(4-n)n < 0$ » est fausse.

2. L'énoncé « Si le carré d'un entier naturel est pair alors cet entier est pair » s'écrit : « $\forall n \in \mathbb{N}$ ($n^2$ pair $\Longrightarrow n$ pair) ». Il est vrai.

3. L'assertion quantifiée « $\exists s \in \mathbb{R} : s^4 = 81$ » est vraie car il existe (au moins) un élément de $\mathbb{R}$ qui vérifie $s^4 = 81$. C 'est le cas des deux réels $-3$ et 3.

**1** Suivant l'expression « Qui peut le plus, peut le moins », il est clair que l'assertion quantifiée «$\exists s \in G : U(s)$ » est automatiquement vérifiée dès lorsque
l'assertion quantifiée « $\forall s \in G : U(s)$ » l 'est . Par exemple, l'assertion quantifiée
« $\exists s \in [-3,3] : s^2 - 9 \leq 0$ » est vraie puisque l'assertion quantifiée « $\forall s \in [-3,3] : s^2 - 9 \leq 0$ » est vraie.

**2**. Lorsqu'il existe un élément de $G$ vérifiant $U(s)$ , cela n'exclut en aucun cas la possibilité qu'il en existe plusieurs . S 'il en existe un et un seul, on pourra écrire :

$$\exists! s \in G : U(s)$$

et on dira qu'il existe un unique élément $s$ de $G$ vérifiant $U(s)$

### 1.3.2 Règles de négation d'une assertion quantifiée

1. $\overline{\forall t \in F : P(t)} \Longleftrightarrow \exists t \in F : \overline{P(t)}$
2. $\overline{\exists x \in F : P(t)} \Longleftrightarrow \forall t \in F : \overline{P(t)}$
3. $\overline{\exists ! t \in F : P(t)} \Longleftrightarrow \overline{\exists t \in F : P(t) \wedge t \text{ est unique}} \Longleftrightarrow \overline{\exists t \in F : P(t)} \vee \overline{t \text{ est unique}}$

### 1.3.3 Règles importantes

1. $\forall t \in E, \forall y \in F : P(t,s) \Longleftrightarrow \forall s \in F, \forall t \in E : P(t,s)$
2. $\exists t \in E, \exists s \in F : P(t,s) \Longleftrightarrow \exists s \in F, \exists t \in E : P(t,s)$
3. $\forall t \in E, \exists s \in F : P(t,s) \not\Leftrightarrow \exists s \in F, \forall t \in E : P(t,s)$

■ **Exemples 1.6 :**

Soient $f$ et $g$ deux suites

1. $\forall e \in \mathbb{N} : f_e = g_e$. nier est $\exists e \in \mathbb{N} : f_e \neq g_e$.
2. $\exists ! e \in \mathbb{N} : f_e = g_0$. nier est:
   $\forall e \in \mathbb{N} : f_e \neq g_0$ ou $\exists (e_1, e_2) \in \mathbb{N}^2 : f_{e_1} = g_0 \wedge f_{e_2} = g_0$
3. $\forall e \in \mathbb{N}, \exists s \in \mathbb{N} : f_e \leq g_s$. nier est: $\exists e \in \mathbb{N}, \forall s \in \mathbb{N} : f_e > g_s$

## 1.4 Les différents types de démonstration en mathématique

### 1.4.1 Raisonnement par contraposée

Il sert à prouver qu'une implication « $U \Longrightarrow V$ » est vraie. Il s'appuie sur l'équivalence logique suivante

$$(U \Longrightarrow V) \Longleftrightarrow (\overline{V} \Longrightarrow \overline{U})$$

Au lieu de montrer que l'implication « $U \Longrightarrow V$ » est vraie, le raisonnement par contraposée consiste à montrer que l'implication « $\overline{V} \Longrightarrow \overline{U}$ » est vraie. On fait donc l'hypothèse que l'énoncé $\overline{V}$ est vrai et on montre que ceci implique que l'énoncé $\overline{U}$ est vrai.

■ **Exemples 1.7 :**

Montrons en utilisant un raisonnement par contraposée l'assertion suivante :
$\forall s \in \mathbb{N} : s^2\text{pair} \Longrightarrow s$ pair.

Pour cela, prouvons que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \overline{s \text{ pair}} \Longrightarrow \overline{s^2 \text{ pair}},$$

autrement dit que

$$s \text{ impair} \Longrightarrow s^2\text{impair}.$$

Soit $n$ un entier naturel. Supposons $s$ impair. Cela signifie qu'il existe $p$ appartenant à $\mathbb{N}$ tel que $s = 2e + 1$. On a alors :

$$s^2 = (2e+1)^2 = 2(2e^2 + 2e) + 1$$

On a ainsi écrit $s^2$ sous l a forme $s^2 = 2q + 1$ avec $q = 2e^2 + 2e$ dans N. Le nombre $s^2$ est donc impair et le résultat est démontré

### 1.4.2 Raisonnement par l'absurde

Afin de prouver la validité de P, il suffit on suppose que $\overline{U}$ est fausse et on en obtient la contradiction.

■ **Exemples 1.8 :**

1. Soient $s,t \in \mathbb{Q}$. Montrons l 'équivalence :

$$s+t.\sqrt{3}=1 \Longleftrightarrow (s=1 \text{ et } t=0).$$

Montrons dans un premier temps que « $s+t.\sqrt{3}=1 \Longrightarrow (s=1 \text{ et } t=0)$ » en utilisant un raisonnement par l'absurde. Supposons d'une part que

$$s+t.\sqrt{3}=1,$$

et d'autre part que $s \neq 1$ ou $t \neq 0$. Supposons d'abord $t \neq 0$. Alors, de (1) il vient :

$$\sqrt{3}=\frac{1-s}{y}.$$

Puisque $s,t \in \mathbb{Q}$, il est clair que $\frac{1-s}{t} \in \mathbb{Q}$. L'égalité (1) signifie ainsi que $\sqrt{3}$ est égal à un nombre rationnel, ce qui est absurde puisqu'il a été démontré plus haut que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. L'hypothèse $t \neq 0$ est donc fausse, ce qui signifie que $t$ est nul. Supposer $s \neq 1$ (avec $t=0$) est bien évidemment en contradiction avec (1), ce qui termine la démonstration de l'implication « $s+t.\sqrt{3}=1 \Longrightarrow (s=1 \text{ et } t=0)$ ». Sa réciproque, l'implication « $(s=1 \text{ et } t=0) \Longrightarrow s+t.\sqrt{3}=1$ » est immédiate. L'équivalence est donc démontrée.

### 1.4.3 Raisonnement par contre-exemple

Si nous voulons démontrer la validité de la proposition suivante::

$$\forall t \in G : U(t)$$

Il faut prouver $U(t)$ toujours vrai pour chaque $t$ dans $G$. Si on veut prouver qu'il est toujours faux, il suffit de trouver $t$ dans $G$ pour que $U(t)$ soit faux.

### 1.4.4 Raisonnement par récurrence

Pour revenir en arrière sur la validité du cas $\forall \in \mathbb{N} : U(s)$ ». Nous nous appuyons sur le principe suivant

- La propriété $U(s)$ est vraie pour $s=0$ ;

- Puis prouver que si la propriété $U(s)$ est vraie alors $P(s+1)$ est vraie. Alors la propriété $U(s)$ supposée vraie pour tout $s$

■ **Exemples 1.9 :**

Prouver que par récurrence : $\forall s \in \mathbb{N}^* \, (1+2+\cdots+s)^2 = 1^3+2^3+\cdots+s^3$.

posons $P$: $(1+2+\cdots+s)^2 = 1^3+2^3+\cdots+s^3$.

1) $P(1)$ est vraie car $1^2=1^3$; Soit $s \in \mathbb{N}^*$. et démontrons que l'implication « $U(s) \Longrightarrow U(s+1)$ » est vraie. Supposons que $U$ vraie au rang $s$ et montrons qu'elle est vraie au rang $s+1$, c-à-d montrons que

$$(1+2+\cdots+s)^2 = 1^3+2^3+\cdots+s^3$$

Posons $W=1+2+\cdots+s$. On a :

$$(1+2+\cdots+n+(n+1))^2=(W+(n+1))^2=W^2+2(n+1)W+(n+1)^2.$$

et, $W$, qui est la somme des $s$ premiers entiers, vaut aussi $\frac{s(s+1)}{2}$ et, par ailleurs, d'après l'hypothèse de récurrence, $W^2=1^3+2^3+\cdots+s^3$ . On a donc :

$$\begin{aligned}(1+2+\cdots+s+(s+1))^2 &= 1^3+2^3+\cdots+s^3+\left[s(s+1)^2+(s+1)^2\right]\\ &= 1^3+2^3+\cdots+s^3+(s+1)^3.\end{aligned}$$

alors d'affirmer que l'égalité

$$(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+\cdots+n^3$$

est vraie pour tout $n>0$ .

## 1.5 Exercices résolus

**Exercise 1.5.1** Répondez par vrai ou faux ?

**1)** $\forall t\in\mathbb{R} : t^4<0 \Longrightarrow t<0$.

**2)** La négation de $(R\Longrightarrow M)$ est $(\overline{M}\Longrightarrow\overline{R})$.

**3)** $(P\cup Q)\cap C = P\cup(Q\cap C)$ .

**4)** Soit $k\in F^E$ . pour tout élément $t$ de $E$.

$$k(t)\in k(R)\Longrightarrow t\in\mathbb{R}.$$

**Solution:**

**1)** Vraie;

**2)** Fausse;

**3)** Fausse;

**4)** Fausse; $k(t)$ peut avoir un antécédent dans $E$, autre que $t$.

**Exercise 1.5.2** Mettez au bon endroit: $\Longleftrightarrow,\Longrightarrow,\Longleftarrow$

1 $\forall t\in\mathbb{R}\ \ t^2=16\cdots t=4$

2 $\forall t\in\mathbb{R}\ \ t\in\mathbb{Z}\ldots t^2\in\mathbb{Z}$

3 $\forall t\in\mathbb{C}s, =\overline{s}\ldots\ldots s\in\mathbb{R}$

**Solu:**

1 $\forall t\in\mathbb{R}\ \ t^2=16\Longleftarrow t=4$

2 $t\in\mathbb{R}\ \ t\in\mathbb{Z}\Longrightarrow t^2\in\mathbb{Z}$

3 $\forall s\in\mathbb{C}s, =\overline{s}\Longleftrightarrow s\in\mathbb{R}$

**Exercise 1.5.3** Soient les 4 assertions suivantes:

1 $\exists t\in\mathbb{R}\ \ \forall s\in\mathbb{R}\ \ t+s>0$;

2 $\forall t\in\mathbb{R}\ \ \exists s\in\mathbb{R}\ \ t+s>0$;

3 $\forall t\in\mathbb{R}\ \ \forall s\in\mathbb{R}\ \ t+s>0$;

4 $\exists t\in\mathbb{R}\ \ \forall s\in\mathbb{R}\ \ s^2>t$;

Sont elles fausses ou vraies ? Quel est leur négation.

**Solution:**

1. est faux car si un tel $t$ existe, il suffit de prendre $s=-t-1$ pour que $t+s>0$ soit faux, en effet $t+(-t-1)=-1<0$.

2. est vrai, car pour un $t$ fixé, on choisit $s=-t+1$ de façon à ce que $t+(-t+1)=1>0$.

3. est faux car si on prend $t=s=-1$ alors $t+s=-2$ est faux et donc on n'a pas $t+s>0$.

4. Il suffit de prendre $t=-1$, ainsi pour tout $s\in\mathbb{R}$, $s^2>-1$ , l'assertion est vraie.

La négation:

1 $\forall t\in\mathbb{R}\ \ \exists s\in\mathbb{R}\ \ t+s\leq 0$;

2 $\exists t\in\mathbb{R}\ \ \forall s\in\mathbb{R}\ \ t+s\leq 0$;

3 $\exists t \in \mathbb{R} \;\; \exists s \in \mathbb{R} \;\; t+s \leq 0$;
4 $\forall t \in \mathbb{R} \;\; \exists s \in \mathbb{R} \;\; s^2 \leq t$;

**Exercise 1.5.4** Prouver que et donnez ensuite son la négation de l'assertion suivante

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A \in \mathbb{N} \;\; \text{tel que} \;\; s \geq A \Longrightarrow 2-\varepsilon < \frac{2s+1}{s+2} < 2+\varepsilon.$$

**Solution:**

1) **Preuve:** Remarquons d'abord que pour $s \in \mathbb{N}$, $\frac{2s+1}{s+2} < 2$ car $2s+1 \leq 2(s+2)$. Étant donné $\varepsilon > 0$, nous avons donc

$$\forall s \in \mathbb{N} \;\; \frac{2s+1}{s+2} < 2+\varepsilon$$

Maintenant nous cherchons une condition sur $s$ pour que l'inégalité

$$2-\varepsilon < \frac{2s+1}{s+2}$$

soit vraie.

$$\begin{aligned} 2-\varepsilon \quad &< \quad \frac{2s+1}{s+2} \Longleftrightarrow (2-\varepsilon)(s+2) < 2s+1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 3 < \varepsilon(s+2) \\ &\Longleftrightarrow \quad s > \frac{3}{\varepsilon} - 2 \end{aligned}$$

Ici $\varepsilon$ nous est donné, nous prenons un $A \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{3}{\varepsilon} - 2$, alors pour tout s nous avons $s \geq N > \frac{3}{\varepsilon} - 2$ et par conséquent: $2-\varepsilon < \frac{2s+1}{s+2}$.

Conclusion : étant donné $\varepsilon > 0$, nous avons trouvé un $A \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $s \in \mathbb{N}$ on ait $2-\varepsilon < \frac{2s+1}{s+2}$ et $\frac{2s+1}{s+2} < 2+\varepsilon$.

En fait nous venons de prouver que la limite de la suite de terme $\frac{(2s+1)}{(s+2)}$ tend vers 2 quand $N$ tend vers $+\infty$.

2)

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall N \in \mathbb{N} \;\; \text{tel que} \;\; (s \geq N) \wedge \left(2+\varepsilon < \frac{2s+1}{s+2} \;\; \text{ou} \;\; \frac{2s+1}{s+2} < 2-\varepsilon\right).$$

# Chapter 2

# Ensembles

## 2.1 Concepts généraux

La description de l'ensemble $G$ doit être claire, c'est-à-dire que ses éléments peuvent être identifiés, par rapport à tout élément $t$ présent dans $G$. Ou il n'y a pas d'élément ($t \notin G$). Autrement dit, l'ensemble vide, on dit que $H$ est inclus dans $G$ si, et seulement si, tous les éléments de $H$ appartiennent aussi à $G$. On note $H \subset G$. et $H$ est une partie de $G$, ou que $G$ contient $H$. L'ensemble des parties de $G$ se note $P(G)$. Dire que $A \in P(G)$ signifie que $A \subset G$.

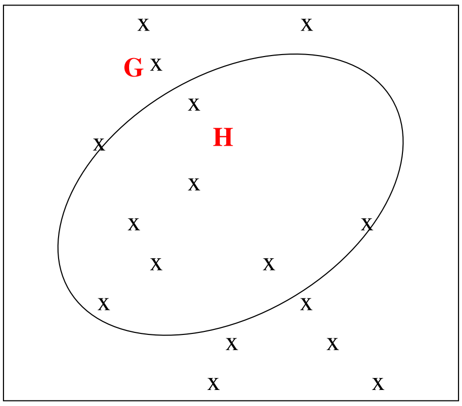



Figure 2.1:

**Définition 2.1.1** Un ensemble $G$ est une collection de choses qu'on appelle éléments.
le nombre d'éléments de l'ensemble $G$ s'appelle $CardG$ . $a \in G$ on lit que a est un élément a appartient à $G$.

■ **Exemples 2.1 :**

1- Soit l'ensemble: $G = \{0, 6, b, k, \alpha, \beta\}$ $CardG = 6$

## 2.2 Opérations dans ensemble des parties

Soient $M$ un ensemble, $R, G \subset M$, on définit:

• Complémentaire de $R$ dans $M$ : $\overline{R} = R^c = C_M^R = \{T \in M; T \notin R\}$;

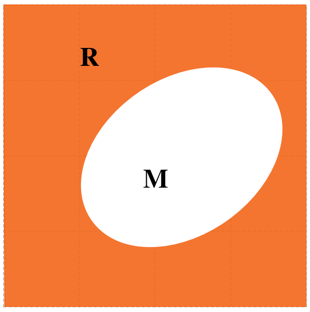



Figure 2.2:

• L'intersection de $R$ et de $G$ : $R \cap G = \{t \in M; t \in R \wedge t \in G\}$; Si $R \cap G = \varnothing$, c'est-à-dire s'il n'existe aucun élément commun à $R$ et $G$, on

dit que les parties $R$ et $G$ sont disjointes;

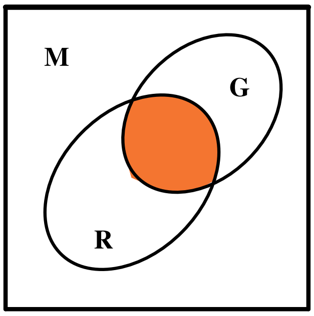



Figure 2.3:

• La réunion de $R$ et de $G$: $R \cup G = \{t \in M; t \in R \vee t \in G\}$. Ce « $\vee$ » a un sens inclusif c'est-à-dire que $R \cup G$ est l'ensemble des éléments $t$ de $M$ qui appartiennent à l'une au moins des parties $R$ et $G$.

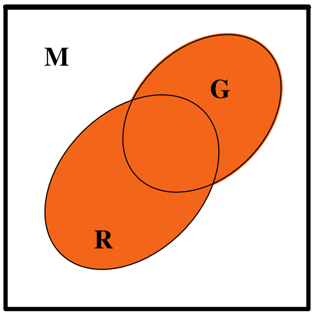



Figure 2.4:

– la différence: $R \backslash G = R - G = \{t \in M; t \in R \wedge \notin G\} = R \cap \overline{G}$.

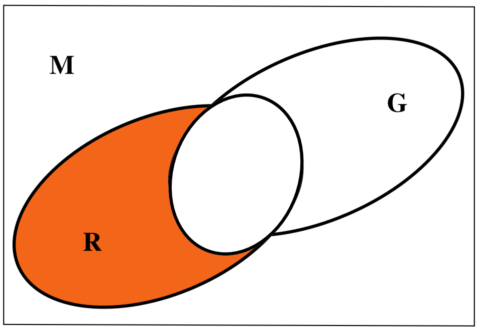



Figure 2.5:

– la différence symétrique: $R\Delta G=(R\cup G)\backslash(R\cap G)=(R\cap\overline{G})\cup(\overline{R}\cap G)$. $R\Delta G$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à une, et une seule, des parties $R$ et $G$.

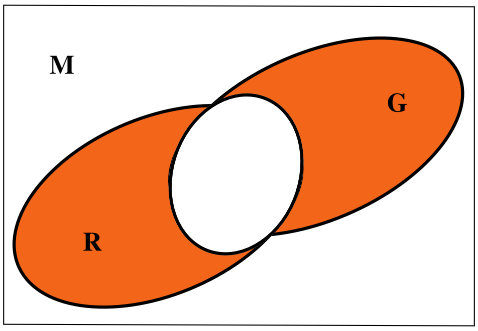



Figure 2.6:

### 2.2.1 Recouvrement, partition

Un recouvrement d'une partie $R$ de $M$ est une famille de parties de $M$ dont la réunion contient $R$.

Une partition d'un ensemble $M$ est une famille de parties non vides de $M$, deux à deux disjointes, et dont la réunion est $M$.

■ **Exemples 2.2 :**

Soient les ensembles: $R=[0,6]\,,G=[-3,5[$, alors

1. $C_G^R=[-3,0[$
2. $R\cap G=[0,5[$
3. $R\cup G=[-3,6]$
4. $R\Delta G=[-3,0[\cup[5,6]$
5. $R\backslash G=[5,6]$

### 2.2.2 Propriétés des opérations dans $\mathscr{P}(E)$

Soient des parties $R,G$ et $H$ de $M$, alors on a les propriétés suivents.

1) $\overline{M}=\varnothing$ ; $\overline{\varnothing}=M$ ; $\overline{\overline{R}}=R$ ; si $R\subset G$ alors $\overline{G}\subset\overline{A}$. 2) $\overline{R\cap G}=\overline{R}\cup\overline{G}$ ; $\overline{R\cup G}=\overline{R}\cap\overline{G}$. 3) $R\cup G=G\cup R$ ; $R\cup(G\cup H)=(R\cup G)\cup H$ $R\cup R=R$ ; $R\cup\varnothing=R$ ; $R\cup M=M$ . 4) $R\cap G=G\cap R$ ; $R\cap(G\cap H)=(R\cap G)\cap H$; $R\cap R=R$ ; $R\cap\varnothing=\varnothing$. $\bigcup_{i\in I}R_i=\{t\in M,\forall i\in I\quad t\in R_i\}$**Réunion et intersection** $R\cap(G\cup H)=(R\cap G)\cup(R\cap H)$; $R\cup(G\cap H)=(R\cup G)\cap(R\cup H)$. $\bigcap_{i\in I}R_i=\{t\in M,\exists i\in I\quad t\in R_i\}$

**APPLICATION:**
Soientt $R,G,H$ 3 parties d'un même ensemble $E$. Démontrer que:

$$(R\cap G)\cup(H\cap R^c)\subset(R\cap H^c)\cup(R^c\cap G^c)\cup(G\cap H)$$

Soit $t\in(R\cap G)\cup(H\cap R^c)$

1- Si $t\ \in(R\cap G)$ : $\begin{cases} t\in H\Longrightarrow t\in G\cap H \\ t\notin H\Longrightarrow t\in R\cap H^c \end{cases}$

2- Si $t\ \in(H\cap R^c)$ : $\begin{cases} t\in G\Longrightarrow t\in G\cap H \\ t\notin G\Longrightarrow t\in R^c\cap G^c \end{cases}$

Dans tous les cas:
$t\in(R\cap H^c)\cup(R^c\cap G^c)\cup(G\cap H)$

### 2.2.3 Produit des ensembles

Le produit des ensembles (s'appelle produit cartésien) $R$ et $G$ est l'ensemble, noté $R\times G$, des couples $(t,s)$ où $t\in R$ et $s\in G$.

**Remarques 2.1** Le produit des ensembles n'est pas commutative.

Plus généralement, le produit des $n$ ensembles $R_j$ est: $R_1\times\cdots\times R_n=\{(t_1,\dots,t_n);t_1\in R_1,\dots,t_n\in R_n\}$ .
Si $R_1=\ldots=R_n=R$, on le note $R^n$

## 2.3 Exercices résolus

**Exercise 2.3.1** Soient $R=\{t,e,s,9\}$ et $G=\{0,t,n\}$
Calculer $R\cap G,R\cup G,A\backslash G,R\times G$ et $G^2$.

**Solution:**
$R\cap G=\{t\}$.
$R\cup G=\{t,e,s,9,0,n\}$.
$R\backslash G=\{e,s,9\}$.
$R\times G$=$\{(t,0),(t,t),(t,n),(e,0),(e,t),(e,n),(s,0),(s,n),(9,0),(9,t),(9,n),(s,t)\}$.
$G^2=G\times G=\{(0,0),(0,t),(0,n),(t,0),(t,t),(t,n),(n,t),(n,n),(n,0)\}$.

**Exercise 2.3.2** Démontrer que pour toutes ensembles $R,G$ et $H$ de $R$ :

$$(A\cap G\subset R\cap H)\ \text{ et }\ (R\cup G\subset R\cup H)\Longrightarrow G\subset H$$

**Solution:**
On suppose $(R\cap G\subset R\cap H)$ et $(R\cup G\subset R\cup H)$
Soit $t\in G$. En distinguant suivant que $t\in R$ ou $t\notin R$, montrer que dans les deux cas $t\in H$ .

# Chapter 3

# Applications

## 3.1 Définitions:

– Une application $a : G \longrightarrow H$ est une relation entre un ensemble $G$ et un ensemble $H$ pour laquelle chaque élément $t \in G$ possède une image unique $a(t) \in H$. C'est à dire :

$$\forall t \in G,\ \exists! s \in H : s = a(t).$$

• $G$ : Ensemble de départ de l'application.
• $H$ : Ensemble d'arrivée de l'application.
• $(t, a(t)) \in \Gamma$, $\Gamma$ est appelé **graphe** de l'application.
• $s$ Image de $t$ par l'application $a$ ( $s = a(t)$.
• $t$ est un **antécédent** de $s$ (mais ce n'est pas le leseul...).

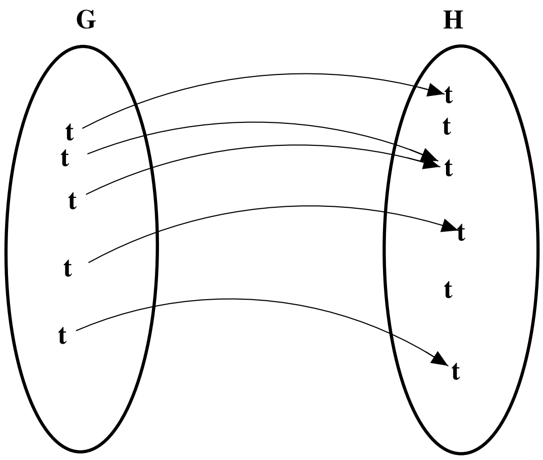
1. 


Figure 3.1:

• **Notation :**

$$\begin{array}{llll} a : & G & \longrightarrow & H \\ & t & \longmapsto & s = a(t) \end{array}$$

– **Égalité** : Soient $a, b : G \longrightarrow H$ deux applications sont égaux si et seulement si

$$\forall t \in G : a(t) = b(t).$$

$\mathscr{F}(G,H)$ ensemble des applications de $G$ dans $H$.
$Id_G$ L'application identité de $G$ dans $G$ définie par $t \longmapsto t$.

## 3.2 Restriction, prolongement

Soient $a : A \longrightarrow H$ et $b : B \longrightarrow H$ deux applications et si, pour tout $t$ de $A$, on a $a(t) = b(t)$ .Si $A \subset B$ on dit que $a$ est une restriction de $b$, ou que $b$ est un prolongement de $a$.

■ **Exemples 3.1 :**

On considère l'application :

$$a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\sin t}{t} \end{array}$$

Un prolongement $\widetilde{f}$ de $a$ à $\mathbb{R}$ est la donnée de $\widetilde{a}(0)$. En analyse, il existe un unique prolongement de continu sur tout $\mathbb{R}$: il est défini par

$$\widetilde{a}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

## 3.3 Composition des applications

Soientt $R, G, H$ trois ensembles, $a : R \longrightarrow G$ et , $b : G \longrightarrow H$ deux applications . La composée de $a$ et de $b$ est l'application de $R$ dans $H$ définie par:

$$t \longmapsto b\,(a(t)) = (b \circ a)(t).$$

$$\begin{tikzcd} t \in R \arrow[r, "a"] \arrow[rr, bend left, "b \circ a"] & a(t) \in G \arrow[r, "b"] & b[a(t)] \in H \end{tikzcd}$$

■ **Exemples 3.2 :**

$$a : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t+\sqrt{t} \end{array} ; \quad b : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,+\infty[ \\ t & \longmapsto & t^2 \end{array} \Longrightarrow \quad b \circ a : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[ & \longrightarrow & [0,+\infty[ \\ t & \longmapsto & \left(t+\sqrt{t}\right)^2 \end{array}.$$

## 3.4 Injections, surjections, bijections

### 3.4.1 Application Injective

Une application $a$ de $G$ dans $H$ est dite injective (injection) si elle vérifie la propriété é suivante:

1. $$\forall t, t' \in G : a(t) = a(t') \Longrightarrow t = t'$$

Voici le graphe d'une fonction injective.

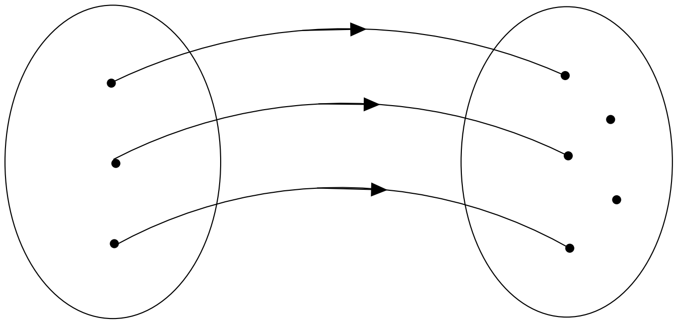


Figure 3.2:

■ **Exemples 3.3 :**

1) L'application $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ $t \longmapsto t^2$ est injective.

2). $t \longmapsto \sin t$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ car $\frac{\pi}{2} \neq \frac{5\pi}{2}$ mais $\sin\frac{\pi}{2} = \sin\frac{5\pi}{2} = 1$

3). $x \longmapsto x^2$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ car $(1)^2 = (-1)^2$ mais $-1 = 1$

4). $a : ]-1,+\infty[ \longrightarrow ]-1,+\infty[$ et $a(t) = \frac{1}{t+1}$

Soient $t, t' \in ]-1,+\infty[$, on a

$$a(t) = a(t') \Longleftrightarrow \frac{1}{t+1} = \frac{1}{t'+1} \Longleftrightarrow t+1 = t'+1 \Longleftrightarrow t = t'$$

Donc $a$ est injective.

### 3.4.2 Application Surjective

Une application $a$ de $G$ dans $H$ est dite surjective (surjection) si tout élément $s$ de $H$ est l'image d'au moins un élément $t$ de $G$, soit :

$$\forall s \in H\ ,\ \exists t \in G :\ s = a(t)$$

Autrement dit, $a(G) = H$.

Voici le graphe d'une fonction surjective.

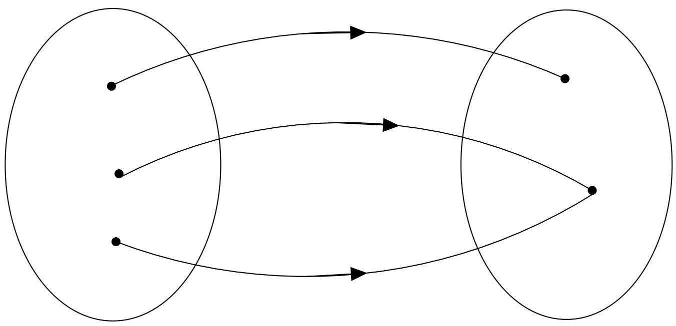


Figure 3.3:

■ **Exemples 3.4 :**

1) L'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ $t \longmapsto t^2$ est surjective.

2. $x \longmapsto \cos t$ n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$ car 2 n'a pas d'antécédent.

3. $a : ]-1,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}^*$ et $a(t) = \frac{1}{t+1}$

Soit $s \in \mathbb{R}^*$ :

$$s = a(t) \Longleftrightarrow s = \frac{1}{t+1} \Longleftrightarrow t = \left(\frac{1}{s} - 1\right)$$

Alors $\forall s \in \mathbb{R}^*$ , $\exists t = \left(\frac{1}{s} - 1\right) \in ]-1, +\infty[ :\ s = a(t)$

Donc $a$ est surjective.

### 3.4.3 Application bijective

$a$ est une application bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective, autrement dit

$$\forall s \in H\ ,\ \exists! t \in G :\ s = a(t).$$

l'existence: vient de la surjectivité,
l'unicité: vient de l'injectivité.

Voici le graphe d'une fonction bijective

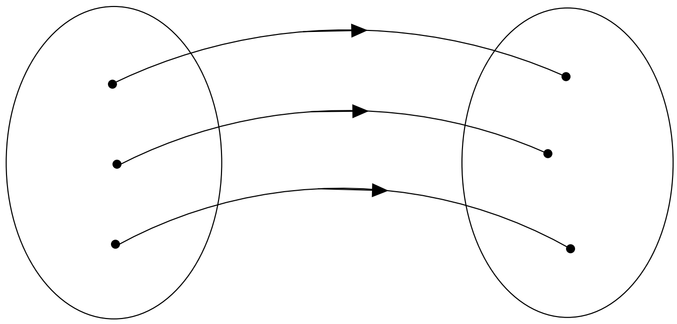


Figure 3.4:

■ **Exemples 3.5 :**

1) L'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ $t \longmapsto t^2$ est bijective.

2) $a : \mathbb{R} \longrightarrow ]0, +\infty[$ et $f(x) = e^x$

Soient $t, t' \in \mathbb{R}$, on a

$$a(t) = a(t') \Longleftrightarrow e^t = e^{t'} \Longleftrightarrow t = t'$$

Donc $a$ est injective, d'autre part soit $s \in ]0, +\infty[$ :

$$s = a(t) \Longleftrightarrow s = e^t \Longleftrightarrow t = \ln s$$

Donc $a$ est surjective, ainsi elle est bijective.

**Corollary 3.4.1** 1) Une application $a$ de $G$ dans $H$ est bijective, dans ce cas, tout élément $s$ de $H$ est l'image d'un, et un seul, élément $t$ de $G$.

Soit $a^{-1}$ est la bijection réciproque de $a$. on a donc:

$$t = a^{-1}(y) \Longleftrightarrow s = a(t),$$

et $a \circ a^{-1} = Id_H$ et $a^{-1} \circ a = Id_G$.

2) Soit $a$ une application de $G$ dans $H$, et $b$ une application de $H$ dans $G$. Alors on a :

– Si $a$ et $b$ sont injectives $\Longrightarrow b \circ a$ est injective.
– Si $b \circ a$ est injective $\Longrightarrow a$ est injective.
– Si $a$ et $b$ sont surjectives $\Longrightarrow b \circ a$ est surjective.
– Si $b \circ a$ est surjective $\Longrightarrow b$ est surjective.
– Si $a$ et $b$ sont bijectives $\Longrightarrow b \circ a$ est bijective, et $(b \circ a)^{-1} = a^{-1} \circ b^{-1}$.

## 3.5 Images directes et images réciproques

Soient $K \subset G$ et $L \subset H$.
1. On appelle image de $K$ par $A$, l'ensemble des images des éléments de $K$ noté:

$$a(K) = \{a(t), t \in K\} \subset H$$

$a(K)$ est une partie de $H$,

▪ **Exemples 3.6 :**

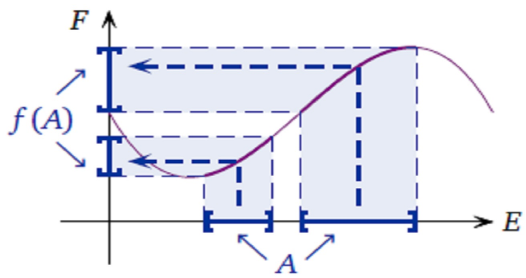



Figure 3.5: name of image

2. On appelle image réciproque de $L$ par $a$, l'ensemble des antécédents des éléments de $M$, noté

$$a^{-1}(L) = \{t \in G, a(t) \in M\} \subset G$$

$a^{-1}(L)$ est une partie de $G$,

▪ **Exemples 3.7 :**

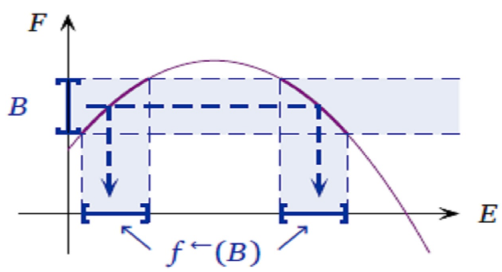



Figure 3.6: name of image

Formellement on a:

$$\forall s \in H, (s \in a(K) \Longleftrightarrow \exists t \in K, s = a(t))$$

$$\forall t \in G, \left(t \in a^{-1}(L) \Longleftrightarrow a(t) \in L\right)$$

**Proposition 3.5.1** Soient $a : G \longrightarrow H$, $K, L \subset G$ et $U, V \subset H$, alors
1.$K \subset L \Longrightarrow a(K) \subset a(L)$
2. $V \subset U \Longrightarrow a^{-1}(V) \subset a^{-1}(U)$

3.$a(K\cup L)=af(K)\cup a(L)$
4. $a(K\cap L)\subset a(K)\cap a(L)$
5. $a^{-1}(U\cup V)=a^{-1}(U)\cup a^{-1}(V)$
6. $a^{-1}(U\cap V)=a^{-1}(U)\cap a^{-1}(V)$
7. $a^{-1}\left(C_H^U\right)=C_G^{a^{-1}(U)}$

**Remarque**: Les ensembles $C_H^{a(K)}$ et $a\left(C_G^K\right)$ ne sont pas toujours comparables.

■ **Exemples 3.8 :**

$a:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $a(t)=t^2$

1. $a([0,3])=\{a(t),x\in[0,3]\}=\left\{t^2,t\in[0,3]\right\}$

$$\begin{aligned} t &\in [0,3]\Longleftrightarrow 0\leq t\leq 3\\ &\Longleftrightarrow 0\leq t\leq 3\\ &\Longleftrightarrow 0\leq t^2\leq 9 \text{ ($a$ est croissante)}\\ &\Longrightarrow a([0,3])=[0,9]\end{aligned}$$

2. $a([0,3])=\{a(t),t\in[-3,3]\}=\left\{t^2,t\in[-3,3]\right\}$

$$\begin{aligned} t &\in [-3,3]\Longleftrightarrow t\in[-3,0]\cup[0,3]\\ &\Longleftrightarrow (-3\leq x\leq 0)\vee(0\leq t\leq 3)\\ &\Longleftrightarrow \left(0\leq t^2\leq 9\right)\vee\left(0\leq t^2\leq 9\right).\\ &\Longrightarrow a([-3,3])=[0,9]\end{aligned}$$

3. $a^{-1}([1,4])=\{t,a(t)\in[1,4]\}=\left\{t,t^2\in[1,4]\right\}$

$$\begin{aligned} t^2 &\in [1,4]\Longleftrightarrow (1\leq t\leq 2)\vee(-2\leq t\leq -1)\\ &\Longleftrightarrow t\in[-2,-1]\cup[1,2]\\ &\Longrightarrow a^{-1}([1,4])=[-2,-1]\cup[1,2]\end{aligned}$$

## 3.6 Exercices résolus

**Exercise 3.6.1** Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & t & \longmapsto & \sin 2t\end{array}$$

Donner

1. $a(\mathbb{R}^+)$ , $a(]-\pi,\pi[)$ et $a\left(\left]\frac{-\pi}{2},5\right[\right)$
2. $a^{-1}(]-\infty,-3])$ , $a^{-1}(\mathbb{R}^+)$ et $a^{-1}\left(\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$

**Solution:**

1. $a(\mathbb{R}^+)=[-1,1]$ , $a(]-\pi,\pi[)=]-1,1[$ et $a\left(\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right[\right)=]0,1[$
2. $a^{-1}(]-\infty,-3])=\varnothing$ , $a^{-1}(\mathbb{R}^+)=a^{-1}([-1,1])=\mathbb{R}$ et $a^{-1}\left(\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)=\mathbb{R}-\left\{-\frac{(2n+1)\pi}{4},n\in\mathbb{N}\right\}$

**Exercise 3.6.2** Soit $a:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $a(t;s) = (t+s;3t+3s)$.

L'application $a$ ainsi définie est elle bijective?

**Solution:**

Il suffit de remarquer par exemple que $a$ est symétrique

$$a(t,s) = a(s,t),$$

donc par exemple $a(5,7) = a(7,5)$ mais $(5,7) \neq (7,5)$ alors $a$ n'est pas injective, donc $a$ n'est pas bijective.

**Exercise 3.6.3** Soit l'application $a$ définie par:

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\} \\ & t & \longmapsto & \frac{t+1}{4t-1} \end{array}$$

1. $a$ ainsi définie est-elle injective? surjective?
2. $(a\circ a)(t) =?$.
3. Par deux méthodes différentes , retrouver l'expression de $a^{-1}(t)$.

**Solution:**

1) Injectivité: Soient $e,r \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}$, tels que $a(e) = a(r)$

$$\begin{aligned} a(e) &= a(r) \Longrightarrow \frac{e+1}{4e-1} = \frac{r+1}{4r-1} \\ &\Longrightarrow 4er+4e-r-1 = 4er+4r-e-1 \\ &\Longrightarrow e = r \end{aligned}$$

alors $a$ est injective

2) Surjectivité: soit$s \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}, s = a(t)$

$$\begin{aligned} s &= a(t) \Longrightarrow s = \frac{t+1}{4t-1} \\ &\Longrightarrow s(4t-1) = s+1 \\ &\Longrightarrow t = \frac{s+1}{4s-1} \end{aligned}$$

Observons que $t = \frac{s+1}{4s-1} = \frac{1}{4} \Longrightarrow -1 = 4$ ce qui est impossible, donc $t \neq \frac{1}{4}$

En conclusion $\forall s \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}, \exists t = \frac{s+1}{4s-1} \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}$ tel que $s = a(t)$, et par suite $f$ est surjective.

3) Il est essentiel de noter que $(a\circ a)$ est bien définie, car l'ensemble d'arrivée de $a$ est égal à son ensemble de départ.

$$(a\circ a)(t) = a(a(t)) = \frac{\frac{t+1}{4t-1}+1}{4\frac{t+1}{4t-1}-1} = t$$

4) -1$^{ère}$ méthode: on a déjà prouvé que $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}$on a $(a\circ a)(t) = t$, en d'autres termes $(a\circ a)(t) = I_{\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}}$. Grâce à un théorème traité en cours nous pouvons conclure que $a$ est bijective et de plus $a^{-1} = a$.

-2$^{ème}$ méthode: la méthode $\forall s \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}, \exists s \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}, a(t) = s = \frac{t+1}{4t-1}$ donc $t = \frac{s+1}{4s-1}$, par un changement d'inconnue $s = a^{-1}(t) = \frac{t+1}{4t-1} = a(t)$.

**Exercise 3.6.4** Soit $b$ l'application de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $[-1,1]$ définie par $b(t) = \sin(\pi t)$.

1) L'application est-elle injective? est-elle surjective ? est-elle bijective ?

2) Prouver que la restriction $\chi$ de $b$ à $\left]\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right[$ est une bijection de $\left]\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right[$ sur $]-1,1[$.

3) Soit $c : \mathbb{R} \longrightarrow ]-1,1[$ d´efinie par $c(t) = \frac{t}{1+|t|}$

Prouver $c$ est bijective et déterminer sa réciproque.

**Solution:**

1) Comme $b(0) = a(1) = 0$, l'application $b$ n'est pas injective. Par contre $b(\mathbb{R}) = [-1,1]$ c-'a-d. que $b$ est surjective.

2) La restriction $\chi$ de $a$ à l'intervalle $I = \left]\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right[$ est bijective car pour tout $s \in ]-1,1[$, l'equation $\sin(\pi t) = s$ admet une solution unique $t \in I$.

3) Si $s = b(t) = \frac{t}{1+|t|}$ la réciproque $c^{-1}$ de $c$ est telle que $t = c^{-1}(s) = \frac{s}{1-|s|}$ qui est une application de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$.

# Chapter 4

# Structure Algébriques

## 4.1 Lois de composition interne

La loi de composition interne $(L.C.I)$ $*$ est une application de $G\times G$ dans $G$.

$$\begin{array}{rccc} *: & G\times G & \longrightarrow & G \\ & (t,s) & \longmapsto & t*s \end{array}$$

■ **Exemples 4.1 :**

1. Soit $\mathscr{P}(G)$ l'ensemble des parties de $G$ muni par la loi $\cap$ :

$$\begin{array}{rccc} \cap: & \mathscr{P}(G)\times\mathscr{P}(G) & \longrightarrow & \mathscr{P}(G) \\ & (U,V) & \longmapsto & U\cap V \end{array}$$

$U\cap V\in\mathscr{P}(G)$, alors $\cap$ est une loi de composition interne

2. On définit sur $\mathbb{N}$ la loi $\top$ par $n\top m = n+e^m$

$\top$ n'est pas une loi de composition interne car $n+e^m\notin\mathbb{N}$

### 4.1.1 Propriétés

– La $(L.C.I)$ $*$ sur $G$ est :

• Associative si :

$$\forall t,s,r\in G \quad (t*s)*r = t*(s*r);$$

• Commutative si :

$$\forall t,s\in G \quad t*s = s*t;$$

• Elément neutre $e$ existe si :

$$\exists e\in G \quad \forall t\in G \quad t*e = e*t = t.$$

Si $e$, il est unique.

• Un élément $t$ est symétrisable (symétrique) dans $G$, s'il existe $t'\in G$ tel que:

$$t'*t = t*t' = e$$

• Si $*$ et $\top$ sont deux lois de composition interne de $G$, on dit que $*$ est distributive par rapport à $\top$, si l'on a toujours:

$$t*(s\top r) = (t*s)\top(t*r) \quad \text{et} \quad (s\top r)*t = (t*s)\top(t*r).$$

■ **Exemples 4.2 :**

. On définit sur $\mathbb{Z}$ la L.C.I $\top$ par $t \top s = t + s - 3$

-$\top$ est associative

$(t \top s) \top r = (t + s - 3) \top r = t + s - 3 + r - 3 = t + s + r - 6$,

$t \top (s \top r) = t \top (t + r - 3) = t + s + r - 3 - 3 = t + s + r - 6$.

-$\top$ est commutative $t \top s = t + s - 3 = t + s - 3 = s \top t$

-$\top$ admet un élément neutre $e = 3 : t + e - 3 = t \Longrightarrow e = 3$

- L'élement symétrique de $t$ par rapport à $\top$ est $t' = 6 - t : t + t' - 3 = 3 \Longrightarrow t' = 6 - t$

### 4.1.2 Unicité de l'inverse (du symétrique)

**Corollary 4.1.1** 1) Soit $*$ une L.C.I dans $G$, associative et admettant un élément neutre $e$. Si un élément $t \in G$ admet $t'$ un inverse (ou symétrique) à droite et $t''$ un inverse (ou symétrique) à gauche, alors $t'$ et $t''$ sont identiques. 2) Soient $t, s \in G$ deux éléments inversibles, alors

$$(t * s)^{-1} = s^{-1} * t^{-1}$$

**Proof :**

1Soient $t'$ un inverse ( à droite de $t$ et $t''$ un inverse ( à gauche de $t$, alors

$$t * t' = e \quad \text{et} \quad t'' * t = e$$

donc

$$t' = e * t' = (t'' * t) * t' = t'' * (t * t') = t'' * e = t''$$

2)

$$(t * s) * (s^{-1} * t^{-1}) = (t * (s * s^{-1})) * t^{-1} = (t * e) * t^{-1} = a * t^{-1} = e$$

Par même methode on montre que

$$(s^{-1} * t^{-1}) * (t * s) = e$$

Alors on obtient que $(t * s)$ est inversible et que

$$(s^{-1} * t^{-1}) = (t * s)^{-1}$$

## 4.2 Structure de Groupes

### 4.2.1 Groupes

Tout ensemble munie d'une L.C.I (par exemple "$*$"),s'appelle groupe , si et seulement si

1. $*$ est associative,
2. $*$ admet un élément neutre,
3. chaque élément de $G$ est inversible par rapport à $*$ (admet un symétrique).

On note $(G, *)$ groupe.

Si L.C.I est commutative, alors on dit $(G, *)$ est groupe **abélien**.

š

### 4.2.2 Sous-Groupes

soit $K \subset G$ avec $K \neq \varnothing$ tel que $(G,*)$ un groupe avec e élément neutre . On dit que $(K,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$, si et seulement si

$$\begin{cases} 1).e \in K, \\ 2).\forall s,t \in K, \quad t*s \in K, \\ 3).\forall s \in G, \quad a \in K \Longrightarrow t^{-1} \in K. \end{cases}$$

■ **Exemples 4.3 :**

$(\{e\},*)$ est sous groupes.

**Proposition 4.2.1** $K$ s.g de $G \Longleftrightarrow \begin{cases} K \neq \varnothing \\ \forall t,s \in H, \quad t*s^{-1} \in K, \end{cases}$

**Corollary 4.2.2** Soient $(G,*)$ un groupe et $H \subset G$, alors

$$K \text{ est un s.g de } G \Longleftrightarrow \begin{cases} e \in K \\ \forall s,t \in H, \quad t*s^{-1} \in K, \end{cases}$$

■ **Exemples 4.4 :**

Soit $K = \{t \in G; (\forall s \in G, t*s = s*t)\}$, alors $K$ est un s.g de $G$. En effet,

i) $e \in K$ car : $\forall s \in G, \quad e*s = s*e = s$

ii) Soient $s,t \in K$, alors

$$\begin{aligned} \forall r \in G, (t*s^{-1})*r &= (t*s^{-1})*(r^{-1})^{-1} \\ &= r*(s^{-1}*(r^{-1})^{-1}) \quad \text{car} * \text{estassociative} \\ &= t*(r^{-1}*s)^{-1} \\ &= t*(s*r^{-1})^{-1} \quad \text{car} \quad s \in K \\ &= t*((r^{-1})^{-1}*s^{-1}) \\ &= t*(r*s^{-1}) \\ &= (t*r)*s^{-1} \quad \text{car} * \text{estassociative} \\ &= (r*t)*s^{-1} \quad \text{car} \quad t \in K \\ &= r*(t*s^{-1}) \quad \text{car} * \text{estassociative} \end{aligned}$$

ce qui montre que $t*s^{-1} \in K$.

De i) et ii) on déduit que $K$ est un s.g de $G$.

## 4.3 Structure d'Anneaux

### 4.3.1 Anneaux

Soit $A$ un ensemble munie de 2 lois de composition internes $*$.et $\top$ On dit que $(A,*,\top)$ est un anneau si et seulement si

1. $(A,*)$ est un groupe abélien,
2. $\top$ est associative,
3. $\top$ est distributive sur $*$,

4. $\top$ admet un élément neutre.
Si $\top$ est de plus commutative, alors $(A,*,\top)$ est dit anneau commutatif.

■ **Exemples 4.5 :**

1. $(\mathbb{R},+,\times)$ et $(\mathbb{C},+,\times)$ sont des anneaux.
2. Soit $G$ un ensemble non vide. $(\mathscr{P}(G),\cap,\cup)$ n'est pas un anneau.

•. $(A,*)$ étant un groupe, alors pour tous les éléments de $A$ sont inversibles et noter $-t$ le inverse d'un élément $t \in A$.
•. Si $\top$ admet un élément neutre, $1_A$ et on dit que l'anneau $(A,*,\top)$ est unitaire .
•. Dans un tel anneau, $t$ est un élément inversible par rapport à la deuxième loi $\top$ et son inverse noté par $t^{-1}$.
Soit $(A,*,\top)$ un anneau commutatif. alors $s \in A-\{0_A\}$ est un diviseur de $t \in A$, si

$$\exists\, r \in A-\{0_A\},\ \ t = s \top r.$$

Si $0_A$ n'admet pas un diviseur dans A, on dit que $(A,*,\top)$ est un anneau intègre .

### 4.3.2 Sous-Anneaux

Soit $(A,*,\top)$ un anneau avec $0_A$ est l'élément neutre de $*$ et $1_A$ est l'élément neutre de $\top$. Soit $H$ un sous ensemble de $A$. On dit que $(H,*,\top)$ est un sous-anneau de $(A,*,\top)$ si et seulement si

1. $(H,*)$ est un sous-groupe de $(A,*)$,
2. $\forall s,t \in H,\ \ t \top s \in H$,
3. $1_A \in H$

■ **Exemples 4.6 :**

1. $(\mathbb{Q},+,\times)$ est un sous-anneau $(\mathbb{R},+,\times)$.
2. $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un sous-anneau $(\mathbb{Q},+,\times)$.

**Proposition 4.3.1** Un sous ensemble $H$ de $A$ est un sous anneau si et seulement si :

1. $H \neq \varnothing$,
2. $\forall s,t \in H,\ \ (s*t) \in H$
3. $\forall s,t \in H,\ \ (s \top t) \in H$.

**Proof :**
On sait que $H$ est est un sous groupe de $(A,*)$ si et seulement si

$$(H \neq \varnothing) \wedge (\forall x,y \in H,\ \ (x*y) \in H),$$

donc pour que $H$ soit un sous anneau de $A$, il suffit de voir si la restriction de la deuxième loi $\top$ est interne dans $H$, ce qui revient à dire que $(\forall s,t \in H,\ \ (s \top t) \in H)$, ce qui termine la preuve de notre proposition.

## 4.4 Structure de Corps

### 4.4.1 Corps

**Définition 4.4.1** On dit que $(\mathbb{K},*,\top)$ est un corps ssi $(\mathbb{K},*,\top)$ est un anneau unitaire et si tout élément non nul de $\mathbb{K}$ est inversible. Si de plus la deusième loi est commutative, on dit que $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

■ **Exemples 4.7 :**

1. $(\mathbb{R},+,\times),(\mathbb{Q},+,\times)$ et $(\mathbb{C},+,\times)$ sont des anneaux.
2. Soit $E$ un ensemble non vide. $(\mathscr{P}(E),\cap,\cup)$ n'est pas un anneau.

**Proposition 4.4.1** Tout corps est un anneau intègre.

### 4.4.2 Sous-corps

Soit $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$, on dit $(\mathbb{K}',*,\top)$ est un sous corps, d'un corps $(\mathbb{K},*,\top)$, ssi

1. $\mathbb{K}' \neq \varnothing$,
2. $\forall s,t \in \mathbb{K}',\ (s*t),(s\top t) \in \mathbb{K}'$.

## 4.5 Exercices résolus

**Exercise 4.5.1** On munit de $\mathbb{R}_+$ la l.c.i $*$ définie par :

$$\forall s,t \in \mathbb{R}_+ \ \ s*t = \sqrt{s^4+t^4}$$

Démontrer que $*$ est commutative, associative, et que 0 est élément neutre. Montrer que aucun élément de $\mathbb{R}_+$ n'a de symétrique pour $*$.

**Solution:**

$$s*t = \sqrt{s^4+t^4} = \sqrt{t^4+s^4} = t*s$$

D'où $*$ est commutative.

$$\begin{aligned} 1)Associativit\,(s*t)*r &= \sqrt{s^4+t^4}*r = \sqrt{(s^4+t^4)+r^4} \\ &= \sqrt{s^4+(t^4+r^4)} = s*\sqrt{t^4+r^4} \\ &= s*(t*r) \end{aligned}$$

2) Elément netre

$$0*s = s*0 = \sqrt{s^4+0^4} = |s| = s \ \text{ car s} \geq 0$$

alors 0 est l'élément neutre.
3) Supposons $s$ que admette un symétrique $t$

$$s*t = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{s^4+t^4} = 0 \Longleftrightarrow s = t = 0$$

Or $s>0$ et $t>0$ donc $s*t=0$ est impossible, pour tout $s>0$, $s$ n'a pas de symétrique.

**Exercise 4.5.2** Soit $G = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ muni par deux lois définies par :

$$\begin{aligned} (s,t)+(s',t') &= (s+s',t+t') \ \text{et} \\ (s,t)*(s',t') &= (ss',st'+s't) \end{aligned}$$

1. Prouver que $(G,+)$ est un groupe commutatif.

2.a) Montrer que la loi $*$ est commutative.

b) Prouver que $*$ est associative

c) Déterminer l'élément neutre de pour la loi $*$.

d) Prouver que $(G,+,*)$ est un anneau commutatif.

**Solution:**

1. $(s,t)+(s',t') = (s+s',t+t') \in G$ donc la loi est interne.

$$\begin{aligned}(s,t)+\left[\left(s',t'\right)+\left(s'',t''\right)\right] &= (s,t)+\left(s'+t'',t'+t''\right)=\left(s+\left(s'+s''\right),t+\left(t'+t''\right)\right)\\ &= \left(\left(s+s'\right)+s'',\left(t+t'\right)+t''\right)=\left(s+s',t+t'\right)+\left(s'',t''\right)\\ &= \left[(s,t)+\left(s',t'\right)\right]+\left(s'',t''\right)\end{aligned}$$

D'où $+$ est associative

$$\begin{aligned}(s,t)+\left(s',t'\right) &= \left(s+s',t+t'\right)\\ &= \left(s'+s,t'+t'\right)\\ &= (s',t')+(s,t)\end{aligned}$$

D'où $+$ est commutative
Soit $(e,r)$ tel que $(s,t)+(e,r)=(s,t)$, il est clair que $(e,r)=(0,0)$ est l'unique élément neutre.
Soit $(s',t')$ tel que $(s,t)+(s',t')=(0,0)$ cela équivaut à

$$\left(s+s',t+t'\right)=(0,0)\Longleftrightarrow\begin{cases}s+s'=0\\ t+t'=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}s'=-s\\ y'=-y\end{cases}$$

Donc le symétrique de $(s,t)$ est $(-s,-t)$.
Donc $(G,+)$ est un groupe commutatif.
2. a) $(s,t)*(s',t')=(ss',s't+st')=(s',t')*(s,t)$ donc $*$ est commutative.
b)

$$\begin{aligned}\left[(s,t)*\left(s',t'\right)\right]*\left(s'',t''\right) &= \left(ss',st'+s't\right)*\left(s'',t''\right)=\left(ss's'',ss't''+s''\left(st'+s't\right)\right)\\ &= \left(ss's'',ss't''+s''st'+s''s't\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(s,t)*\left[\left(s',t'\right)*\left(s'',t''\right)\right] &= (s,t)*\left(s's'',s't''+s''t'\right)=\left(ss's'',s\left(s't''+s''t'\right)+s's''t\right)\\ &= \left(ss's'',ss't''+s''st'+s''s't\right)\end{aligned}$$

D'où $*$ est associative.
c) soit $(e,r)$ tel que pour tout $(s,t)\in G,(s,t)*(e,f)=(s,t)$, $e$ et $r$ vérifient:

$$\begin{cases}se=s\\ sr+te=t\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}e=1\\ sr+te=t\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}e=1\\ r=0\end{cases}$$

$(1,0)\in G$ est l'élément neutre de $G$ pour la loi $*$.

d) Toutes les propriétés pour qu'un ensemble muni de deux lois soit un anneau sont dans les questions précédentes sauf la distributivité de $*$ par rapport à l'addition (à gauche ou à droite puisque la loi $*$ est commutative, c'est d'ailleurs cette commutativité qui rend l'anneau commutatif).

$$\begin{aligned}(s,t)*\left[\left(s',t'\right)+\left(s'',t''\right)\right] &= (s,t)*\left(s'+s'',t'+t''\right)\\ &= \left(s\left(s'+s''\right),s\left(t'+t''\right)+\left(s'+s''\right)t\right)\\ &= \left(ss'+ss'',st'+st''+s't+s''t\right)\\ &= \left(ss'+ss'',st'+s't+st''+s''t\right)\\ &= \left(ss',st'+s't\right)+\left(ss'',st''+s''t\right)\\ &= \left(ss's'',ss't''+s''st'+s''s't\right)\\ &= (s,t)*\left(s',t'\right)+(s,t)*\left(s'',t''\right)\end{aligned}$$

Alors, $(G,+,*)$ est un anneau commutatif.

**Exercise 4.5.3** Soit $(G,*)$ un groupe, et $e$ soit son élément neutre.

1. Soient $x,y \in G$, déterminer $(x*y)^{-1}$ .

On suppose que pour tout $h \in G$ , $h^2 = h*h = e$

2. Soient $x,y \in G$, déterminer $x^{-1}$ et $y^{-1}$.
3. En déduire que $(G,*)$ est commutatif.

**Solution:**

1. $(x*y)^{-1} = y^{-1}*x^{-1}$.
2. $x*x = e \Longrightarrow x^{-1} = x$ de même $y^{-1} = y$.
3. $x*y = (x*y)^{-1} = y^{-1}*x^{-1}$ d'après 1., puis $x*y = y*x$ d'après 2.

**Exercise 4.5.4** Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la l.c.i. $*$ par :

$$(s,t)*(s',t') = (s+s', te^{s'} + t\prime e^{-s})$$

Montrer que ($\mathbb{R}^2$, $*$) est un groupe. Est-il abélien ?

**Solution:**

Il s'agit bien d'une loi interne dans $\mathbb{R}^2$. Vérifier soigneusement l'associativité. $(0,0)$ est élément neutre. Tout couple $(s,t)$

admet pour symétrique le couple $(-t,-y)$. $(\mathbb{R}^2,*)$ est bien un groupe; il n'est pas commutative .

# Chapter 5

# POLYNOMES

## 5.1 Polynômes

Dans ce qui vient, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

de la forme Un polynôme est un élément à coefficient dans $\mathbb{K}$ , de la forme

$$N=\sum_{j=n}^{j=0} e_i S^i = e_n S^n + e_{n-1} S^{n-1} + \cdots + e_1 S + e_0,$$

où $n\in\mathbb{N}$ et les coefficients $e_n, e_{n-1}, \cdots, e_1, e_0$ sont des élements de $\mathbb{K}$. Le symbole $S$ est appelé l'indéterminée. On note

$$\mathbb{K}[S] = \{\text{ polynômes à coefficients dans } \mathbb{K}\}.$$

On identifie $\mathbb{K}$ à un sous ensemble de $\mathbb{K}[S]$.

**Exemples 5.1 :**

1) $N_1 = S^6 - S + 8,\ N_2(S) = S^4 + 5S^2 - iS$ sont deux polynômes

2) $M_1 = S^6 - \sqrt{S} + 8,\ M_2(S) = S^4 + 5\sin\left(S^2\right) - \frac{S}{S^2+1}$ ne sont pas de polynômes

### 5.1.1 Opérations sur $\mathbb{K}[S]$

Sur $\mathbb{K}[S]$ on définit les opérations (lois) suivantes, si $N = e_n S^n + e_{n-1} S^{n-1} + \cdots + e_1 S + e_0, M = r_m S^m + r_{m-1} S^{m-1} + \cdots + r_1 S + r_0$, alors:

1) $N = M \Longleftrightarrow e_j = r_j \ \ \forall j \in \{0,1,\ldots,n\}$

2) $N+M = \sum_{i=\max(n,m)}^{j=0} (e_j + r_j) S^j$

3) $\lambda N = \sum_{j=n}^{j=0} \lambda e_j S^j$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$

4) $NM = \sum_{k=n+m}^{k=0} v_k S^k$ tel que $v_k = \sum_{j=k}^{j=0} e_j r_{k-j}.(e_k = 0, \forall k \geq n+1$ et $r_k = 0, \forall k \geq m+1)$

$\mathbb{K}[S]$ est stable pour ces opérations, alors est une algèbre

**Exemples 5.2 :**

$N = S^3 + 1, M = S^5 - S$, alors

• $2N - 3M = -3S^5 + 2S^3 + 3S + 2$

• $NM = \sum_{k=8}^{k=0} v_k S^k = S^8 + S^5 - S^4 - S$, $v_8 = v_5 = 1, v_7 = v_6 = v_3 = v_2 = v_0 = 0$, et $v_1 = -1$.

### 5.1.2 Degré d'un polynôme

Soit $N$ un polynôme non nul, le degré de $N$, est le plus grand indice de ses coefficients non nuls, et on le note $\deg N$. Ainsi $\deg N = n \Longleftrightarrow N = e_nS^n + e_{n-1}S^{n-1} + \cdots + e_1S + e_0$ avec $e_n \neq 0$, $e_n$ s'appelle coefficient dominant de $N$. Si le coefficient dominant est 1, le polynôme est dit **unitaire**. Par convention $\deg 0 = -\infty$.

$$N = e_nS^n + e_{n-1}S^{n-1} + \cdots + e_1S + e_0 \Longleftrightarrow \deg N \leq n.$$

1. $$\deg(N+M) \leq \max(\deg N, \deg M),$$
2. $$\deg(NM) = \deg N + \deg M,$$
   En particulier si $\lambda$, constante non nulle alors:
3. $$\deg(\lambda N) = \deg N.$$

**Proposition 5.1.1** soit $\mathbb{K}[S]$ est intègre :

$$\forall N, M \in \mathbb{K}[S],\ N.M = 0 \Longrightarrow N = 0 \text{ ou } M = 0.$$

**Proposition 5.1.2** Un polynôme $N$ est inversible (c'est à dire qu'il existe un polynôme $M$ tel que $N.M = 0$) ssi $N$ est un polynôme constant non nul.

## 5.2 Division des polynômes

### 5.2.1 Divisions euclidienne et division suivant les puissances décroissantes

Soient $N, M$ deux polynômes non nuls, on dit que $M$ divise $N$ dans $\mathbb{K}[S]$, ou que $N$ est un multiple de $M$, si et seulement si $\exists! L \in \mathbb{K}[S]$tel que $M = NL$ . On note $M \backslash N$. On dit qu'un diviseur de $P$ est trivial s'il est de la forme $\lambda P$ ou bien $\lambda$ avec $\lambda$ un scalaire non nul.

■ **Exemples 5.3 :** 1- Le polynôme $S$ divise le polynôme $S^3 + S$.

2- Le polynôme $S + i$ divise le polynôme $S^3 + S$.

3- Tout polynôme divise le polynôme nul.

**Proposition 5.2.1** Soient $N, M$ et $L$ trois polynômes dans $\mathbb{K}[S]$, alors nous avons

1- $N \backslash M \Longrightarrow \deg N \leq \deg M$.

2- $N \backslash M \wedge M \backslash L \Longrightarrow N \backslash L$.

3- $N \backslash M \wedge M \backslash N \Longrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}$,tel que $N = \lambda M$.

**Theorem 5.2.2** Division euclidienne $\forall N, M \in \mathbb{K}[S]$ tel que $M \neq 0$, $\exists L, H \in \mathbb{K}[S]$ uniques tels que $N = ML + H$ avec $\deg H < \deg M$, où $H = 0$. $L$ s'appelle le quotient de la division euclidienne de $N$ par $M$ et $H$ son reste.

■ **Exemples 5.4 :**

1) $2S^4 - S^3 + S^2 + S - 1 = \left(2S^2 - 3S\right)\left(S^2 + S + 2\right) + (7S - 1)$
2) $2S^3 + 5S^2 + 7S + 8 = \left(S^2 + S + 2\right)(2S + 3) + 2$
3) $S^3 + 2S^2 - S - 2 = \left(S^2 - 4\right)(S + 2) + 3S + 6$
4) $S^4 - 3S^2 - 4 = \left(S^3 + 2S^2 - S - 2\right) + 2S^2 - 8$

### 5.2.2 Division suivant les puissances croissantes

**Theorem 5.2.3** Soient $N$ et $M$ deux polynômes dans $\mathbb{K}[S]$ et $t \in \mathbb{N}^*$ . Alors, il existe $L, H \in \mathbb{K}[S]$ uniques tels que

$$N = ML + S^{t+1}R$$

avec, $\deg L \leq t$, si $L \neq 0$.

▪ **Exemples 5.5 :**

1) $52S + 3S^2 - S^3 = (1 + 2S - S^3)(2S - S^2 + 3S^2 + S^4) + S^{4+1}(-4 - S)$.

2) $-1 + S + S^2 = (-2 + S)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}S - \frac{5}{8}S^2\right) + S^{2+1}\left(\frac{5}{8}\right)$.

## 5.3 Plus grand commun diviseur (p.g.c.d)

**Définition 5.3.1** *p.g.c.d*

Soient $N$ non nul et $M$ non nul 2 polynômes dans $\mathbb{K}[S]$. Alors il existe un unique polynôme $L$ non nul unitaire de plus grand degré qui divise à la fois $N$ et $M$. Ce polynôme s'appelle le plus grand commun diviseur de $N$ et $M$ et on note $pgcd(N;M) = L$.

▪ **Exemples 5.6 :**

$$pgcd\left(S^3 + 3S^2 + 3S + 1, S^3 + 2S^2 + 2S + 1\right) = S + 1$$

**Définition 5.3.2** Si PGCD égale 1 on dit alors les 2 polynômes sont premiers entre eux

### 5.3.1 Algorithme d'Euclide

Soient $N$ non nul et $M$ non nul 2 polynômes tels que $\deg N \geq \deg M$. Alors, l'algorithme d'Euclide consiste à effectuer des divisons euclidiennes jusqu'à obtenir un reste nul, comme suit

$$N = ML_1 + H_1$$

ensuite, on divise $M$ sur $H_1$, on a

$$M = H_1L_2 + H_2.$$

Maintenant, on divise $H_1$ par $H_2$

$$H_1 = H_2L_3 + H_3,$$

On continue les divisions: $H_2$ sur $H_3$, $H_3$ sur $H_4$ $\cdots$ jusqu'à obtenir un reste nul, comme suit

$$H_{v-1} = H_vL_{k+1} + H_{v+1}; \text{ et } H_v = H_{v+1}L_{v+2}.$$

Le p.g.c.d de $N$ et $M$ est $H_{v+1}$, c'est à dire le dernier reste non nul. Comme le p.g.c.d est unique et unitaire, on prend le polynôme unitaire associé au dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide.

▪ **Exemples 5.7 :** $\underbrace{S^4 - 3S^2 - 4}_{N} = \underbrace{\left(S^3 + S^2 - S - 2\right)}_{M}\underbrace{(S-2)}_{L_1} + 2\underbrace{\left(S^2 - 4\right)}_{H_1}$,

$S^3 + S^2 - S - 2 = \left(S^2 - 4\right)\underbrace{(S+2)}_{L_2} + 3\underbrace{(S+2)}_{H_2}$,

$S^2 - 4 = (S+2)\underbrace{(S-2)}_{L_3} + 0$

Alors: $\quad p\gcd\left(S^4 - 3S^2 - 4, S^3 + S^2 - S - 2\right) = H_2 + S + 2$

**Theorem 5.3.1** ( Bézout)

Soient $N$, $M$ deux polynômes dans $\mathbb{K}[S]$. Si $W = pgcd(N,M)$, alors il existe deux polynômes $F$, $G \in \mathbb{K}[S]$ tels que $NF + MG = W$.

■ **Exemples 5.8 :** Voir l'exemple précédent

$$\begin{aligned} M &= H_1L_2 + H_2 \Longleftrightarrow M - H_1L_2 = H_2 \\ &\Longleftrightarrow M - (N - ML_1)L_2 = H_2 \\ &\Longleftrightarrow -L_2N + (1 + L_1L_2)M = H_2 = W \end{aligned}$$

c-à-d que

$$F = -L_2 = -S - 2, \text{ et } G = (1 + L_1L_2) = 1 + (S-2)(S+2) = S^2 - 3$$

## 5.4 Polynômes premiers entre eux

**Theorem 5.4.1** D'près le théorème précdent 2 polynômes $N$ et $M$ sont premiers entre eux ssi il existe 2 polynômes $F$ et $G$ tels que $NF + MG = 1$.

**Theorem 5.4.2** (Gauss) Si un polynôme divise un produit de 2 polynômes et qu'il est premier avec l'un des facteurs, il divise l'autre.

$$(N \backslash MH \quad \text{et} \quad N \wedge M = 1) \Longrightarrow N \backslash H$$

■ **Exemples 5.9 :**

Les polynômes $S - \frac{1}{2}, 2S - 1, -2S + 1$ sont associés.

## 5.5 Racines d'un polynôme

**Définition 5.5.1** Soient $N$ un polynôme dans $\mathbb{K}[S]$ et $r \in \mathbb{K}$. On dit que a est une zéro (racine) de $N$ si $N(r) = 0$.
Un zéro $r$ de $N$ est dit d'ordre $x$, ou de multiplicité $x$ (avec $x \in \mathbb{N}^*$), si $r$ est zéro d'ordre $x$ de l'équation $N(S) = 0$. implique qu'il existe $L \in \mathbb{K}[S]$ tel que $P = (S-r)^x Q$ avec $L(r) \neq 0$.

■ **Exemples 5.10 :**

1) $S^4 - 1$ admet deux racines réelles $1, -1$ et admet quatre racines dans $\mathbb{C}$ $1, -1, i$ et $-i$.

**Proposition 5.5.1** Soient $N \in \mathbb{K}[S]$ et $r \in \mathbb{K}$: $r$ est une racine de $N$ si et seulement $S - r$ divise $N$.

**Démontration:** Effectuons la division euclidienne de $N$ par $S - r$: $N = (S - r)L + H$ où le $\deg H < \deg(S - r)$. Le polynôme $H$ est donc soit le polynôme nul soit le polynôme constant. L'é valuation en a indique que : $H = H(r) = N(r) = 0$. On déduit la proposition.

**Theorem 5.5.2** (Alembert-Gauss)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins un zéro dans $\mathbb{C}$.

## 5.6 Polynômes irréductibles

**Définition 5.6.1** un polynôme $N$ est réductible s'il existe $L, H \in \mathbb{K}[S]$ tels que $N = LH$ et $\deg L \geq 1$, $\deg H \geq 1$.

**Définition 5.6.2** - On dit qu'un polynôme $N$ non nul est irréductible si n'est pas réductible $M = \lambda \in \mathbb{K}$, soit $M = \lambda N, \in \mathbb{K}$.

■ **Exemples 5.11 :**

1. Tous les polynômes de degré "1" ne sont pas réductibles de $\mathbb{R}[S]$ et de $\mathbb{C}[S]$.
2. Les polynômes $S^3 - 1$, $S^2 - 3$ et $S^3 + 1$ sont réductibles de $\mathbb{R}[S]$ et de $\mathbb{C}[S]$. En fait,
$S^3 - 1 = (S-1)(S^2 + S + 1)$, et $S^2 - 3 = \left(S - \sqrt{3}\right)\left(S - \sqrt{3}\right)$.

3. Le polynôme $S^2+1$ est irréductible de $\mathbb{R}[S]$, mais il est réductible de $\mathbb{C}[S]$, car

$$S^2+1=(S-i)(S+i).$$

**Corollary 5.6.1** Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[S]$ sont exactement de degré 1.

## 5.7 Factorisation en polynômes irréductibles

**Theorem 5.7.1** Soit $N\in\mathbb{K}[S]$ un polynôme avec $\deg n\geq$, alors il existe $v\in\mathbb{N}^*$ et des polynômes $N_1,N_2,\cdots,N_v$ irréductibles de $\mathbb{K}[S]$, tels que

$$N=mN_1^{r_1}N_2^{r_2}\cdots N_k^{r_v},$$

où, $m\in\mathbb{K}^*$ et $r_1,r_2,\cdots,\alpha_v\in\mathbb{N}^*$. Les polynômes $N_1,P_2,\cdots,N_v$ sont uniques in $\mathbb{K}[S]$.

■ **Exemples 5.12 :**

$$S^8+S^4+1=(S^4+1)^2-S^4=(S^4+1+S^2)(S^4+1-S^2)$$

$$(S^4+1+S^2)=(S^2+1)^2-S^2=(S^2+1+S)(S^2+1-S)$$

$$(S^4+1-S^2)=(S^2+1)^2-3S^2=(S^2+1+\sqrt{3}S)(S^2+1-\sqrt{3}S)$$

2- Factorisation de $N=S^5+1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.
1- On va chercher les zéros complexes de la forme $e^{i\theta}$ , comme suit

$$\left(e^{is}\right)^5+1=0\Longleftrightarrow e^{i5s}=-1=e^{i(2t+1)\pi},t\in\mathbb{Z}$$

Alors on choisir

$$5s=(2t+1)\pi,t\in\mathbb{Z}\Longleftrightarrow s=\frac{\pi}{5}+\frac{2t\pi}{5}$$

Ce qui implique,

$$r_1=e^{i\frac{\pi}{5}},\ \ r_2=e^{i\frac{3\pi}{5}},\ \ r_3=e^{i\frac{5\pi}{5}}=-1,\ \ r_4=e^{i\frac{7\pi}{5}},\ \ \alpha_5=e^{i\frac{9\pi}{5}},$$

Donc, la factorisation de $S^5+1$ est

$$S^5+1=(S+1)\left(S-e^{i\frac{\pi}{5}}\right)\left(S-e^{i\frac{3\pi}{5}}\right)\left(S-e^{i\frac{7\pi}{5}}\right)\left(S-e^{i\frac{9\pi}{5}}\right).$$

2- Dans $\mathbb{R}$ : D'après la méthode précédente sur $\mathbb{C}$, on a

$$r_1=\overline{r_5},\ \ r_2=\overline{r_4},\ \ r_3=e^{i\pi}=-1,$$

alors

$$\begin{aligned}
S^5+1 &= (S+1)\,(S-\overline{r_5})\,(S-r_5)\,(S-\overline{r_4})\,(S-r_4)\\
&= (S+1)\left(S^2-[r_5+\overline{r_5}]\,S+\overline{r_5}r_5\right)\left(S^2-[r_4+\overline{r_4}]\,S+\overline{r_4}r_4\right)\\
&= (S+1)\left(S^2-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)S-1\right)\left(S^2-2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)S-1\right).\\
&= (S+1)\,(S+c_1)\,(S+c_2)\,(S+c_3)\,(S+c_4)
\end{aligned}$$

avec $c_1, c_2$ racines de $\left(S^2-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)S-1\right)$, et $c_3, c_4$ racines de $\left(S^2-2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)S-1\right)$
Comme $S\in\{-1,c_1,c_2,c_3,c_4\}$ des racines, alors $S^5+1$ est réductible de $\mathbb{R}$.

## 5.8 Exercices résolus

**Exercise 5.8.1** Déterminer tous les polynômes $N$ tels que :

$$N(S^2)=(S^2+1)N(S).$$

**Solution:**
$N=0$ est solution. Si $N$ est non nul de degré $r$, $N(S^2)$ est de degré $2r$ et $(S^2+1)N(S)$ de degré $r+2$, d'où $r=2$. Chercher $N$ sous la forme $aS^2+bS+c$. Solutions: $a(S^2-1)$, $a\in\mathbb{R}$.

**Exercise 5.8.2** Diviser $N$ Sur $M$:

1) $N=2S^4-3S^3+4S^2-5S+6$ ; $M=S^2-3S+1$.
2) $N=2S^5-5S^3-8S$ ; $M=S+3$.
3) $N=S^3-iS^2-S$ ; $M=S-1+i$.

**Solution:**
1) $N=M(2S^2+3S+11)+5(5S-1)$.
2) $N=M(2S^4-6S^3+13S^2-39S+109)-327$.
3) $N=M(S^2+(1-2i)S-2-3i)-5-i$.

**Exercise 5.8.3** Trouver les conditions tels que le polynôme $N=S^4+aS^2+bS+c$ est divisible par $M=S^2+S+1$?

**Solution:**
$S^4+aS^2+bS+c=(S^2+S+1)(S^2-S+a)+((-a+b+1)S-a+c)$.
$M$ divise $N$ ssi $a=c=b+1$.

**Exercise 5.8.4** Soit $N=S^7-S-1$ et $M=S^5+1$. Montrer que $N\wedge M=1$ et trouver les couples $(F,G)\in\mathbb{K}[S]^2$ tels que $NF+MG=1$.

**Solution:**
$(S^7-S-1)(S^4-S^2+S)+(S^5+1)(-S^6+S^4-S^3+S+1)=1$
La solution générale est : $F=S^4-S^2+S+(S^5+1)N$ ,
$G=-S^6+S^4-S^3+S+1-(S^7-S-1)N$ où $N\in\mathbb{K}[S]$.

**Exercise 5.8.5** Trouvez tous polynômes $N$ tels que :

$$\begin{cases} N+1 \text{ est divisible par } S^2+1 \\ N-1 \text{ est divisible par } S^3+1 \end{cases}.$$

**Solution:**

De $N+1=(S^2+1)F$ et $N-1=(S^3+1)G$, on tire:

$$(S^2+1)F-(S^3+1)G=2$$

On en déduit $F$ et $G$, puis :

$$N=-S^4-S^3-S+(S^2+1)(S^3+1)H$$

où $H \in \mathbb{K}[S]$.

**Exercise 5.8.6** Divisez $N=S^4+6S^3+10S^2+3S-6$ SUR $M=S^2+3S$

En déduire la factorisation de $N$ dans $\mathbb{Q}[S]$, puis $\mathbb{R}[S]$ et $\mathbb{C}[S]$.

**Solution:**

$$\begin{aligned} N &= M(S^2+3S+1)-6=M(M+1)-6 \\ &= M^2+M-6=(M+3)(M-2) \end{aligned}$$

dans $\mathbb{Q}[S]$:

$$N=(S^2+3S+3)(S^2+3S-2)$$

dans $\mathbb{R}[S]$:

$$N=(S^2+3S+3)\left(S+\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(S+\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$$

dans $\mathbb{C}[S]$

$$N=\left(S+\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(S+\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(S+\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(S+\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$$

# Chapter 6

# Fractions rationnelles

## 6.1 Fractions rationnelles de $\mathbb{K}(S)$

L'anneau $\mathbb{K}[S]$ étant intègre, c'est un sous-anneau d'un corps. On note $\mathbb{K}(S)$ le plus petit corps contenant $\mathbb{K}[S]$.

Avec

$$\mathbb{K}(S) = \left\{ \frac{N}{M}, (N,M) \in \mathbb{K}[S] \times \mathbb{K}[S]^* \right\}$$

Les éléments de $\mathbb{K}(S)$ sont appelés **fractions rationnelles**.

On dit que le représentant $\frac{N}{M}$ de $H$ est irréductible, si les polynômes $N$ et $M$ sont premiers entre eux. Toute fraction rationnelle admet un représentant irréductible est seul

- **Exemples 6.1 :**

Soit la fraction rationnelle $H = \frac{S^4 - S^2}{S^2 - 3S + 2}$, admet une forme irréductible $H = \frac{S^2}{S-2}$.

### 6.1.1 Zéros et pôles d'une fraction rationnelle

• On appelle zéros de la fraction rationnelle $H = \frac{N}{M}$ les zéros de $N$ (Numérateur) , et pôles les zéros de $M$ (Dénominateur).

• Degré de la fraction rationnelle $H = \frac{N}{M}$ l'entier relatif :

$$\deg\left(\frac{N}{M}\right) = \deg N - \deg M$$

- **Exemples 6.2 :**

La fraction rationnelle $H = \frac{S^4 - S^2}{S^2 - 3S + 2}$, admet les zéros 0,1,-1 et admet les pôles 1,2

## 6.2 Décomposition en éléments simples

### 6.2.1 La forme et la méthode générale de décomposition

Une fraction rationnelle dans sa forme abrégée, $H = \frac{N}{M}$, s'écrit de façon unique, sous la forme :

$$H = G + \tfrac{L}{M} \quad \text{avec } \deg L < \deg M.$$

$G$ est la **partie entière** et $\frac{R}{M}$ la partie fractionnaire de $H$.

- **Exemples 6.3 :**

$$\frac{S^3 + S^2 + 1}{S^2 + 1} = S + 1 + \frac{-S}{S^2 + 1}.$$

### 6.2.2 Séparation des pôles

**Theorem 6.2.1** Soit $H = \frac{L}{M}$ une fraction rationnelle de degré strictement négatif. Supposons que $M = M_1 M_2$ avec $M_1 \wedge M_2 = 1$. Il existe un couple unique $(L_1, L_2)$ de polynômes tels que:

$$H = \frac{L_1}{M_1} + \frac{L_2}{L_2}, \text{ avec } \deg\left(\frac{L_1}{M_1}\right) < 0 \text{ et } \deg\left(\frac{L_2}{M_2}\right) < 0.$$

**Démonstration:**

**1) Existence**

D'après le théorème de Bézout, il existe un couple $(S_1, S_2)$ de polynômes tels que $M_1 S_1 + M_2 S_2 = 1$. En divisant les 2 membres par $M_1 M_2$, on obtient :

$$\frac{S_1}{M_2} + \frac{S_2}{M_1} = \frac{1}{M_1 M_2}.$$

En multipliant par $L$ :

$$H = \frac{LS_1}{M_2} + \frac{LS_2}{M_1} = \frac{L}{M_1 M_2}.$$

Exprimons la partie entière de chaque terme :

$$H = G_1 + \frac{L_1}{M_1} + G_2 + \frac{L_2}{M_2} \text{ avec } \deg\left(\frac{L_1}{M_1}\right) < 0 \text{ et } \deg\left(\frac{L_2}{M_2}\right) < 0.$$

Comme $\deg\left(\frac{L_1}{M_1} + \frac{L_2}{M_2}\right) < 0$, $G_1 + G_2$ est la partie entière de $F$ , c'est-à-dire 0.
On trouve la décomposition cherchée.

**2) Unicité**

Supposons que : $H = \frac{L_1}{M_1} + \frac{L_2}{M_2} = \frac{L_1'}{M_1} + \frac{L_2'}{M_2}$
avec $\deg\left(\frac{L_1}{M_1}\right) < 0$, $\deg\left(\frac{L_2}{M_2}\right) < 0$, $\deg\left(\frac{L_1'}{M_1}\right) < 0$ , et $\deg\left(\frac{L_2'}{M_2}\right) < 0$.
On a $\frac{L_1 - L_1'}{M_1} = \frac{L_2' - L_2}{M_2}$, d'où $(L_1 - L_1')M_2 = (L_2' - L_2)M_1$
$M_1$ divise $(L_1 - L_1')M_2$ et il est premier avec $M_2$ donc il divise $(L_1 - L_1')$.
Comme $\deg(L_1 - L_1') < \deg M_1$, on en déduit $(L_1 - L_1') = 0$; d'où $L_1 = L_1'$, puis $L_2' - L_2$. La décomposition est donc unique.

Par exemple, si $r$ est un pôle d'ordre $v$ de la fraction $\frac{N}{M}$, on peut écrire: $M = (S-r)^v M_2$ où $M_2$ est un polynôme n'admettant pas $r$ pour zéro. Les facteurs $(S-r)^v$ et $M_2$ sont premiers entre eux; on en déduit :

**Corollary 6.2.2** Toute fraction rationnelle de degré strictement négatif admettant un pôle $r$ d'ordre $v$ se décompose de façon unique en:

$$\frac{N}{M} = \frac{L_1}{(S-r)^v} + \frac{L_2}{M_2}$$

avec $\deg(L_1) < v$ et $\deg(L_2) < \deg(M_2)$.

La fraction $\frac{L_2}{M_2}$ n'a pas $r$ pour pôle.

Le terme $\frac{L_1}{(S-r)^v}$ est appelé **partie polaire** de $\frac{N}{M}$ relative au pôle $r$.

**Corollary 6.2.3** Soit $N = \prod_{j=1}^{c} (S - r_J)^{v_j}$ un polynôme. Toute fraction rationnelle de dénominateur $Q$ et de degré strictement négatif se décompose de façon unique en :

$$\frac{N}{M} = \sum_{j=1}^{c} \frac{L_i}{(S-r_j)^{v_i}} \text{ avec } \forall i \in \overline{1,N} \;\; \deg L_j < v_j.$$

**Démonstration:**

Les facteurs $(S-r_j)^{v_i}$ sont premiers entre eux 2 à 2. Il suffit d'appliquer $c-1$ fois le théorème précédent. Le terme $\frac{L_i}{(S-r_j)^{v_j}}$ est appelé **partie polaire** relative au pôle $r_j$.

■ **Exemples 6.4 :**

Cherchons les parties polaires de la fraction rationnelle:

$$H=\frac{S\left(S^2+1\right)^2}{\left(S^2-1\right)^2}$$

Extrayons d'abord la partie entière:

$$\frac{S\left(S^2+1\right)^2}{\left(S^2-1\right)^2}=S+\frac{4S^3}{\left(S^2-1\right)^2}=S+\frac{4S^3}{(S+1)^2(S-1)^2}$$

Appliquons l'algorithme d'Euclide aux polynômes $(S+1)^2$ et $(S-1)^2$:

$$(S+1)^2=(S-1)^2+4S$$
$$(S-1)^2=S(S-2)+1$$

Alors

$$1=(S-1)^2\frac{S+2}{4}-(S+1)^2\frac{S-2}{4}$$

On en déduit

$$\frac{1}{\left(S^2-1\right)^2}=\frac{S+2}{4(S+1)^2}-\frac{S-2}{4(S-1)^2}$$

Puis

$$\frac{4S^3}{\left(S^2-1\right)^2}=\frac{S^4+2S^3}{(S+1)^2}-\frac{S^4-2S^3}{(S-1)^2}$$

En calculant la partie entière des 2 termes:

$$\begin{aligned}
\frac{4S^3}{\left(S^2-1\right)^2} &= \frac{S^4+2S^3+S^2-S^2}{(S+1)^2}-\frac{S^4-2S^3+S^2-S^2}{(S-1)^2}\\
&= \frac{S^2(S+1)^2-S^2}{(S+1)^2}-\frac{S^2(S-1)^2-S^2}{(S-1)^2}\\
&= S^2-\frac{S^2}{(S+1)^2}-S^2+\frac{S^2}{(S-1)^2}\\
&= \frac{S^2}{(S-1)^2}-\frac{S^2}{(S+1)^2}\\
&= \frac{S^2-2S+1+2S-1}{(S-1)^2}-\frac{S^2+2S+1-2S-1}{(S+1)^2}\\
&= 1+\frac{2S-1}{(S-1)^2}-1+\frac{2S+1}{(S+1)^2}\\
&= \frac{2S-1}{(S-1)^2}+\frac{2S+1}{(S+1)^2}
\end{aligned}$$

En définitive :

$$H=S+\frac{2S-1}{(S-1)^2}+\frac{2S+1}{(S+1)^2}.$$

### 6.2.3 Décomposition d'une partie polaire

**Theorem 6.2.4** Soit $\frac{L}{(S-r)^v}$, avec $\deg L < v$, une partie polaire de pôle $r$. Il existe des constantes uniques $(w_1, w_2, \cdots, w_v)$ telles que:

$$\frac{L}{(S-r)^v} = \sum_{j=1}^{v} \frac{w_j}{(S-R)^j}$$

**Démonstration:**

**1) Existence:** Appliquons la formule de Taylor au polynôme $R$

$$L = \sum_{j=1}^{v-1} \frac{L^{(j)}(r)}{j!}(S-r)^j.$$

On en déduit: $\frac{R}{(S-r)^v} = \sum_{j=1}^{v-1} \frac{L^{(j)}(r)}{j!(S-r)^{v-j}}$.
En changeant $j$ en $v-j$, on obtient:

$$\frac{L}{(S-r)^v} = \sum_{j=1}^{v} \frac{L^{(v-j)}(r)}{(v-j)!\,(S-r)^j}.$$

C'est la décomposition cherchée, avec $w_j = \frac{L^{(v-j)}(r)}{(v-j)!}$.

**2) Unicité:**

Si

$$\frac{L}{(S-r)^v} = \frac{w_1}{S-r} + \cdots + \frac{w_j}{(S-r)^j} + \cdots + \frac{w_v}{(S-r)^v},$$

$$L = w_1 (S-r)^{v-1} + \cdots + w_j (S-r)^{v-j} + \cdots + w_v,$$

$w_j$ est le coefficient dominant du reste de la division euclidienne de $L$ par $(S-r)^{v-j+1}$, il est donc est seul.

■ **Exemples 6.5 :**

Décomposons les parties polaires trouvées dans l'exemple précédent:

$$2S+1 = 2(S+1)-1; \;\text{ d'où }\; \frac{2S+1}{(S+1)^2} = \frac{2}{S+1} + \frac{-1}{(S+1)^2}$$

$$2S-1 = 2(S-1)+1; \;\text{ d'où }\; \frac{2S-1}{(S-1)^2} = \frac{2}{S-1} + \frac{1}{(S-1)^2}$$

Alors:

$$H = S + \frac{2}{S-1} + \frac{1}{(S-1)^2} + \frac{2}{S+1} + \frac{-1}{(S+1)^2}.$$

## 6.3 Décomposition en éléments simples de première espèce

Les fractions de la forme $\frac{c}{(S-r)^j}$ sont appelées éléments simples de **première espèce.**

**Theorem 6.3.1** Toute fraction rationnelle dont le dénominateur est scindé admet une décomposition unique de la forme:

$$H = G + \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{v_i} \frac{w_{ij}}{(S-r_i)^j}$$

### 6.3.1 Pratique de la décomposition

■ **Exemples 6.6 :**

même exemple

$$N = \frac{4S^3}{(S^2-1)^2}.$$

On sait que $N$ admet une décomposition de la forme:

$$N = \frac{a}{S+1} + \frac{b}{(S+1)^2} + \frac{c}{S-1} + \frac{d}{(S-1)^2}$$

1) Remarquons que $N$ est impaire et comparons les décompositions de $N(-S)$ et $-N(S)$:

$$N(-S) = -N(S) = \frac{-a}{S-1} + \frac{b}{(S+1)^2} + \frac{-c}{S+1} + \frac{d}{(S-1)^2}$$

L'unicité de la décomposition en éléments simples nous permet d'identifier les coefficients qui se correspondent:

$$\begin{cases} -a = -c \\ b = -d \end{cases}$$

2) Pour isoler $b$, multiplions $N$ par $(S+1)^2$

$$(S+1)^2 N = \frac{4S^3}{(S-1)^2} = a(S+1) + b + \frac{c(S+1)^2}{S-1} + \frac{d(S+1)^2}{(S-1)^2}.$$

En remplaçant $S$ par $-1$, on obtient $b = -1$, d'où $d = 1$.

• Cette méthode permet de trouver le coefficient du terme de plus haut degré de chaque partie polaire.

3) Pour isoler les coefficients $a$ et $c$, multiplions $G$ par $S$:

$$SN(S) = \frac{4S^4}{(S-1)^2} = \frac{aS}{S+1} + \frac{bS}{(S+1)^2} + \frac{cS}{S-1} + \frac{dS}{(S-1)^2}$$

En cherchant la limite de $SN(S)$ en $+\infty$, on obtient :

$$\lim_{s \to +\infty} sG(s) = 4 = a + c, \text{ d'où } a = c = 2.$$

• Cette méthode permet de trouver la somme des coefficients de plus bas degré de toutes les parties polaires.

En définitive, on obtient :$(a,b,c,d) = (2,-1,2,1)$.

$$N = \frac{2}{S-1} + \frac{1}{(S-1)^2} + \frac{2}{S+1} + \frac{-1}{(S+1)^2}.$$

**IMPORTANT**

Ces méthodes ne sont pas systématiques et il peut être difficile de calculer certains coefficients. On a toujours la ressource de donner à S une valeur particulière (différente d'un pôle), mais il ne faut pas en abuser sous peine d'aboutir à un système linéaire important, ce qui ne facilite pas forcément les choses.

■ **Exemples 6.7 :**

Décomposer en éléments simples

$$H = \frac{S^3+1}{(S-2)^4}$$

Divisons successivement par $S-2$:

$$S^3+1=(S-2)(S^2+2S+4)+9, \quad \frac{S^3+1}{(S-2)^4}=\frac{S^2+2S+4}{(S-2)^3}+\frac{9}{(S-2)^4}$$

$$S^2+2S+4=(S-2)(S+4)+12 \quad \frac{S^2+2S+4}{(S-2)^3}=\frac{S+4}{(S-2)^2}+\frac{12}{(S-2)^3}$$

$$S+4=(S-2)+6 \quad \frac{S+4}{(S-2)^2}=\frac{1}{(S-2}+\frac{6}{(S-2)^3}$$

En définitive

$$H=\frac{1}{(S-2}+\frac{6}{(S-2)^3}+\frac{12}{(S-2)^3}+\frac{9}{(S-2)^4}.$$

## 6.4 Décomposition en éléments simples de seconde espèce

Dans $\mathbb{R}(S)$ en revanche, nous pouvons rencontrer des fractions rationnelles dont le dénominateur possède des facteurs irréductibles du second degré. On peut toujours décomposer une telle fraction en éléments simples dans $\mathbb{C}(S)$. En réunissant les éléments simples des pôles conjugués, on obtiendra des termes de la forme:

$$\frac{c}{(S-r)^j}+\frac{\bar{c}}{(S-\bar{r})^j}=\frac{L}{(S^2-2tS+h)^j}$$

où $L$ est un polynôme réel (somme de deux polynômes conjugués) et $S^2-2tS+h$ un polynôme réel irréductible ($t=\mathbf{Re}\,(r)$ , $h=|r|^2$).

Par des divisions euclidiennes successives par $\left(S^2-2tS+h\right)$, on se ramène à une somme de termes de la forme:

$$\frac{dS+e}{(S^2-2tS+h)^j}$$

appelés **éléments simples de seconde espèce**.

### 6.4.1 Pratique de la décomposition dans $\mathbb{R}(S)$

On peut obtenir l'élément simple de plus haut degré relatif à un facteur irréductible $S^2-2tS+h$, en multipliant $H$ par $\left(S^2-2tS+h\right)^\nu$ et en remplaçant $S$ par une racine complexe de ce trinôme, qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter.

■ **Exemples 6.8 :**

$$\begin{aligned} F &= \frac{S-1}{S\,(S+1)\,(S^2+S+2)} \\ &= \frac{a}{S}+\frac{b}{S+1}+\frac{cS+d}{S^2+S+2}, \quad a,b,c,d\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

En multipliant par $S$ et en remplaçant $S$ par 0, on obtient $a=\frac{-1}{2}$, et en multipliant par $S+1$ et en remplaçant $S$ par $-1$, on obtient $b=1$.

$$\left(S^2+S+2\right)H=\frac{S-1}{S^2+S}=\frac{\frac{-1}{2}\left(S^2+S+2\right)}{S}+\frac{\left(S^2+S+2\right)}{S+1}+cS+d$$

Soit $r$ une racine du polynôme $S^2+S+2$. En remplaçant $S$ par $r$, on obtient:

$$\frac{r-1}{r^2+r} = cr+d$$

Comme $r^2+r=-2$, -$\frac{r}{2}+\frac{1}{2}=cr+d.$;
$r$ n'étant pas réel, en identifiant les parties imaginaires, on obtient: $c=\frac{-1}{2}$ puis $d=\frac{1}{2}$, d'où

$$H = \frac{\frac{-1}{2}}{S} + \frac{1}{S+1} + \frac{\frac{-1}{2}S+\frac{1}{2}}{S^2+S+2}$$

■ **Exemples 6.9 :**

$$H = \frac{1}{S\,(S^2+S+2)^2} = \frac{a}{S} + \frac{b}{(S^2+S+2)^2}$$

En multipliant par $S$ et en remplaçant $S$ par 0, on obtient $a=1$.

$$\begin{aligned} H-\frac{1}{S} &= \frac{1-\left(S^2+S+2\right)^2}{S\,(S^2+S+2)^2} = \frac{-S^3-2S^2-3S-2}{(S^2+S+2)^2} \\ &= -\frac{\left(S^2+S+1\right)(S+1)+S+1}{(S^2+S+2)^2} \end{aligned}$$

d'où

$$H = \frac{1}{S} - \frac{S+1}{(S^2+S+2)} - \frac{S+1}{(S^2+S+2)^2}$$

### 6.4.2 Méthodes pratiques de décomposition

**Plan d'étude:**

- On met $H=\frac{N}{M}$ sous forme irréductible en simplifiant par le *PGCD* du numérateur $N$ et du dénominateur $M$.

- On obtient $G$ et $L$ à l'aide de la division euclidienne de $N$ par $M$.

- On factorise $M$ en polynômes irréductibles.

- On écrit la forme littérale de la décomposition en éléments simples de $F$, ou de $\frac{L}{M}$

- On détermine les coefficients à l'aide de diverses méthodes.

## 6.5 Exercices résolus

**Exercise 6.5.1** Vrai ou faux ?

**a)** Une fraction rationnelle a une partie entière nulle si et seulement si son degré est strictement négatif.

**b)** Une fraction rationnelle dont le dénominateur est scindé est la somme de sa partie entière et de ses parties polaires.

**c)** Un élément simple de première espèce est de la forme :

$$\frac{c}{(S-a)^j}$$

**d)** Un élément simple de seconde espèce est de la forme :

$$\frac{c}{(S^2+aS+b)^j}$$

**e)** Une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(S)$ n'a que des éléments simples de première espèce.

**f)** Une fraction rationnelle de $\mathbb{R}(S)$ n'a que des éléments simples de seconde espèce.

g) Si $H = \sum_{j=1}^{c} \frac{w_j}{S-a_j}$ et si $\deg(H) \leq -2$, alors $\sum_{j=1}^{c} w_j$.

**h)** Lorsqu'il n'y a qu'une seule partie polaire, la décomposition en éléments simples s'obtient par des divisions euclidiennes successives.

**Solution:**

**a)** Vrai. **b)** Vrai. **c)** Vrai. **d)** Faux, $\frac{cS+d}{(S^2aS+b)^j}$;

**e)** Vrai. **f)** Faux. **g)** Vrai. **h)** Vrai

**Exercise 6.5.2** Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples :

$$\textbf{a)}\ \frac{S^5+1}{S^2-1},\ \textbf{b)}\ \frac{S^4+S^2+1}{S^3-1},\ \textbf{c)}\ \frac{S^4-S^3-S-1}{S^3-S^2+S-1}$$

**Solution:**

$$\textbf{a)}\ \frac{S^5+1}{S^2-1} = \frac{S^4-S^3+S^2-S+1}{S-1} = S^3+S+\frac{1}{S-1}.$$

$$\textbf{b)}\ \frac{S^4+S^2+1}{S^3-1} = \frac{S^2-S+1}{S-1} = S+\frac{1}{S-1}.$$

$$\textbf{c)}\ \frac{S^4-S^3-S-1}{S^3-S^2+S-1} = \frac{S^2-S-1}{S-1} = S-\frac{1}{S-1}.$$

**Exercise 6.5.3** Simplifier les fractions rationnelles suivantes, puis calculer leur partie entière.

$$\textbf{a)}\ \frac{1}{S^3-S},\quad \textbf{b)}\ \frac{S^3}{(S-1)(S-2)(S-3)},\qquad \textbf{c)}\ \frac{S^3}{(S-1)^3}.$$

**Solution:**

**a)** $\frac{1}{S^3-S} = -\frac{1}{S} + \frac{1}{2(S-1)} + \frac{1}{2(S+1)}$.

**b)** $\frac{S^3}{(S-1)(S-2)(S-3)} = 1 + \frac{1}{2(S-1)} - \frac{8}{S-2} + \frac{27}{2(S-3)}$.

**c)** $\frac{S^3}{(S-1)^3} = 1 + \frac{3}{S-1} + \frac{3}{(S-1)^2} + \frac{2}{(S-1)^3}$.

**Exercise 6.5.4** Décomposer la fraction rationnelle: $H(S) = \frac{S^2+S+1}{S^4+S^2+1}$ dans $\mathbb{R}(S)$

**Solution:**

La partie entière de la fraction rationnelle $H$ est nulle, puisque son degré est $-2$. Le dénominateur se factorise en:

$$S^4+S^2+1 = \left(S^2+S+1\right)\left(S^2-S+1\right)$$

comme ces deux facteurs sont premiers entre eux, on peut écrire:

$$H(S) = \frac{S^2+S+1}{S^4+S^2+1} = \frac{aS+b}{S^2+S+1} + \frac{cS+d}{S^2-S+1}$$

En multipliant par $S^2+S+1$ et en remplaçant $S$ par une racine $r$ de ce trinôme, on obtient :

$$\frac{r^2+r-1}{r^2-r+1} = ar+b$$

d'où, puisque $r^2 = -r-1$ :

$$\frac{1}{r} = ar+b, \quad \mathrm{a}r^2 + br = 1, \quad (b-a)\,r - a = 1$$

comme $r$ n'est pas réel, on a : $b-a=0$ et $-a=1$. D'où: $a=b=-1$.
De même, en multipliant par $S^2-S+1$ et en remplaçant $S$ par une racine $r$ de ce trinôme, on obtient :

$$\frac{\alpha^2+\alpha-1}{\alpha^2+\alpha+1} = c\alpha + d$$

d'où, puisque $r^2 = r-1$ :

$$\frac{2r-2}{2r} = cr+d, \quad 2\mathrm{c}r^2 + 2dr = 2r-2, \quad (c+d)\,r - c = -1$$

comme $r$ n'est pas réel, on a : $c+d=1$ et $-c=-1$. D'où: $c=1, d=0$.
En définitive :

$$H(S) = \frac{-S-1}{S^2+S+1} + \frac{S}{S^2-S+1}$$

# Bibliography


[1] **Stéphane BALAC, Frédéric STURM**. Algèbre et Analyse Cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés. $2^e$ édition revue et augmentée (2009)

[2] **J.M.Arnaudiès, H.Fraysse**. Cours de mathématiques-1 Algèbre Classes préparatoires $1^{er}$cycle universitaire (Dunod université 1992)

[3] **J.QUINET** Cours élémentaire de mathématiques supérieues-1 Algèbre $6^e$ édition Dunod (1976)

[4] **Marie ALLANO-CHEVALIER.** MATHS MPSI $1^{RE}$ANNÉE Cours et exercices avec solutions.

[5] **Daniel FREDON et Myriam MAUMY-BERTRAND** . Mathématiques Algèbre et géométrie en 30 fiches. Dunod, Paris, 2009.