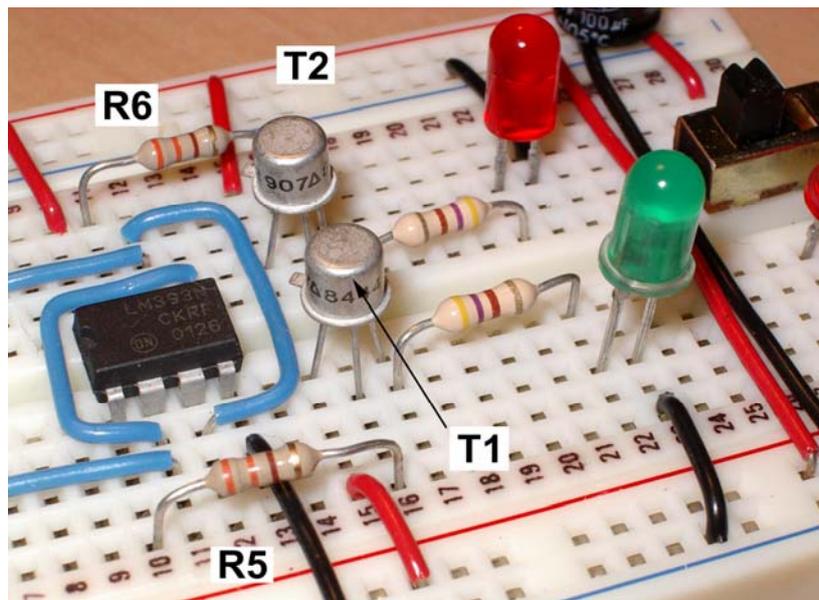


République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ecole Supérieure en Génie Electrique et Energétique d'Oran
المدرسة العليا في الهندسة الكهربائية والطاقة بوهران



SUPPORT DE COURS D'ELECTRONIQUE FONDAMENTALE 2

Préparé par : Dr ALIANE KAMILA



Année Universitaire : 2016 - 2017

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ecole Supérieure en Génie Electrique et Energétique d'Oran
المدرسة العليا في الهندسة الكهربائية والطاقة بوهران



SUPPORT DE COURS
D'ELECTRONIQUE FONDAMENTALE 2

Préparé par : Dr ALIANE KAMILA

Dans le cadre de la préparation de l'Habilitation Universitaire

Année Universitaire : 2016 - 2017

Préface

Einstein a dit un jour : « Faites aussi simple que possible, mais pas simpliste ». Il ne fait aucun doute qu'il pensait aux auteurs de manuels. Beaucoup de cours n'atteignent pas leur but parce qu'ils rendent les choses trop difficiles. D'autres restent superficiels par trop de simplification. Peu gardent le difficile équilibre entre assommer le lecteur ou lui faire perdre son temps. Je crois que ce polycopié est l'un des rares qui trouvent le juste milieu.

Notre cours est destiné aux étudiants des écoles préparatoires en Sciences et Techniques ainsi qu'aux étudiants des classes préparatoires en Sciences et Techniques pour les écoles supérieures, qui auront à suivre des formations variées telles que l'électronique générale, les télécommunications, l'électronique biomédicale... Il a pour but d'enseigner les éléments de base de la physique, de donner des initiations aux semiconducteurs et de présenter leurs applications les plus courantes. Le principal but est la maîtrise des théorèmes fondamentaux de l'électricité qui permettent aux étudiants d'aborder avec aisance les circuits complexes qu'ils auront tout au long de leurs formations.

Ce polycopié est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre, nous étudions les quadripôles d'une manière très détaillée (les matrices d'un quadripôle, les associations de quadripôle, les grandeurs caractérisant le comportement d'un quadripôle dans un montage à savoir l'impédance d'entrée et de sortie, le gain en courant et en tension).

Dans le deuxième chapitre, nous analysons le comportement en fréquence d'un filtre RC et CR (représentation des fonctions de transfert et les courbes de Bode) pour mettre en évidence la propriété filtrante en fréquence de ce type de circuit électrique.

Dans le troisième chapitre, nous présentons les principaux concepts des semiconducteurs et de la jonction PN, en faisant appel à la mécanique quantique.

Le quatrième chapitre approfondit la découverte de la diode. Après l'étude de sa caractéristique, nous envisagerons ses approximations. Elles sont nécessaires car la détermination exacte est très pénible. Ensuite, nous traitons les circuits à diodes : Le redressement simple et double alternance.

Dans le dernier chapitre, nous étudions statiquement le transistor NPN. Ensuite, nous traitons quelques montages qui utilisent les transistors bipolaires.

ALIANE KAMILA

Sommaire

Chapitre 1 : Les quadripôles

1- Généralités	1
1.1- Définitions.....	1
1.2- Représentation.....	1
1.3- Origine	2
1.4- Intérêt de la représentation quadripôle.....	2
1.5- Classification.....	2
2- Description matricielle du quadripôle.....	3
2.1- Matrice de chaîne	3
2.1.1- Matrice de chaîne directe	3
2.1.2- Matrice de chaîne inverse	4
2.2- Matrice impédance	6
2.3- Matrice admittance.....	11
2.4- Matrices hybrides.....	13
2.4.1- Matrices hybrides H.....	13
2.4.2- Matrices hybrides G.....	14
3- Relations entre les différents paramètres	15
3.1- Relation entre les paramètres de chaîne et les paramètres impédances	15
3.2- Relation entre les paramètres impédances et les paramètres admittances	16
4- Cas des quadripôles passifs réciproques	18
4.1- Relation entre les paramètres de chaîne.....	18
4.2- Relation entre les paramètres impédances	20
4.3- Relation entre les paramètres admittances	21
4.4- Relation entre les paramètres hybrides	21
5- Quadripôle symétrique.....	21
5.1- Relation entre les paramètres de chaîne directe	22
5.2- Relation entre les paramètres impédances	22
5.3- Relation entre les paramètres admittances	23
5.4- Relation entre les paramètres hybrides	23

6- Associations de deux quadripôles	24
6.1- Association en chaîne de deux quadripôles	24
6.2- Association en série de deux quadripôles	26
6.3- Association en parallèle de deux quadripôles	27
6.4- Association en série parallèle de deux quadripôles	28
6.5- Association en parallèle série de deux quadripôles	29
7- Grandeurs fondamentales des quadripôles.....	30
7.1- Impédance d'entrée.....	30
7.1.1- Calcul de Z_E en fonction des paramètres Z	30
7.1.2- Calcul de Z_E en fonction des paramètres a	31
7.1.3- Calcul de Z_E en fonction des paramètres Y	32
7.1.4- Calcul de Z_E en fonction des paramètres H	32
7.2- Impédance de sortie	32
7.2.1- Calcul de Z_S en fonction des paramètres Z	32
7.2.2- Calcul de Z_S en fonction des paramètres a	33
7.2.3- Calcul de Z_S en fonction des paramètres Y	33
7.2.4- Calcul de Z_S en fonction des paramètres H	34
7.3- Gain en tension	34
7.3.1- Calcul de G_V en fonction des paramètres Z	34
7.3.2- Calcul de G_V en fonction des paramètres Y	35
7.3.3- Calcul de G_V en fonction des paramètres H	35
7.4- Gain en courant	35
7.4.1- Calcul de G_I en fonction des paramètres Z	35
7.4.2- Calcul de G_I en fonction des paramètres Y	36
7.4.3- Calcul de G_I en fonction des paramètres H	36
7.5- Gains composites	37

Chapitre 2 : Les filtres passifs

1- Introduction.....	38
2- Généralités sur le filtrage	38
2.1- Définition	38
2.2- Types de filtre	38
2.2.1- Le filtre passe-bas	39

2.2.2- Le filtre passe-haut.....	39
2.2.3- Le filtre passe-bande	39
2.2.4- Le filtre coupe-bande	39
2.3- Fréquence de coupure	40
2.4- Caractéristique d'un filtre	41
2.4.1- Fonction de transfert	41
2.4.2- Le gain d'un filtre	41
2.4.3- Diagramme asymptotique et diagramme réel	41
2.4.4- Diagramme de Bode d'un filtre	41
3- Filtre RC passe-bas d'ordre 1	43
3.1- Comportement asymptotique	43
3.2- Fonction de transfert	44
3.3- La fréquence de coupure	45
3.4- Diagramme de Bode	46
3.4.1- Module de transmittance.....	46
3.4.2- Phase de transmittance.....	47
4- Filtre CR passe-haut d'ordre 1	48
4.1- Comportement asymptotique	48
4.2- Fonction de transfert	49
4.3- Les diagrammes de Bode de la phase et de l'amplitude	50
4.3.1- Module de transmittance.....	50
4.3.2- Phase de transmittance.....	52

Chapitre 3 : Notions sur les semiconducteurs

1- Les semiconducteurs.....	53
1.1- Introduction.....	53
1.2- Définition	53
1.3- Rappel de la description simplifiée de la structure des atomes.....	53
1.4- Bandes d'énergie.....	54
1.4.1- Conducteurs	55
1.4.2- Isolants	55
1.4.3- Semiconducteurs	55
1.5- Les semiconducteurs purs ou intrinsèques.....	56

1.6- Les semiconducteurs dopés ou extrinsèques.....	58
1.6.1- Dopage des semiconducteurs	58
1.6.2- Semiconducteur extrinsèque de type N.....	59
1.6.3- Semiconducteur extrinsèque de type P	61
1.6.4- Bandes d'énergie des semiconducteurs dopés	62
1.7- Résumé et conclusions	63
2- Jonction PN.....	63
2.1- Introduction.....	63
2.2- Définition	63
2.3- Jonction PN non polarisée	64
2.3.1- Barrière de potentiel.....	66
2.4- Jonction PN polarisée	67
2.4.1- Polarisation en direct.....	67
2.4.2- Polarisation en inverse	68

Chapitre 4 : La diode à jonction

1- Introduction.....	70
2- Définition	70
3- Polarisation de la diode	71
3.1- Polarisation directe.....	71
3.2- Polarisation inverse	71
4- Caractéristique statique courant-tension de la diode	71
5- Modèles électriques équivalents de la diode.....	72
5.1- Caractéristique de la diode idéale	72
5.2- Caractéristique de diode parfaite.....	73
5.3- Caractéristique de diode réelle.....	74
6- Circuits de redressement	75
6.1- Redressement	75
6.1.1- Redressement simple alternance	76
6.1.2- Redressement double alternance : Montage en pont de Graëtz	77
6.2- Valeur moyenne, valeur efficace et facteur de forme de la tension de sortie	79
6.2.1- Valeur moyenne	79
6.2.2- Valeur efficace	80

6.2.3- Facteur de forme	80
7- Filtrage	81
7.1- Définition	81
7.2- Principe de fonctionnement	82
7.3- Taux d'ondulation	82
7.4- Détermination de la capacité de filtrage	82

Chapitre 5 : Transistor bipolaire en régime statique

1- Introduction.....	84
2- Définition	84
3- Symboles.....	84
4- Relations fondamentales	86
4.1- Relations entre les courants	86
4.2- Relations entre les tensions	87
5- Les zones de fonctionnement du transistor NPN.....	87
5.1- Zone de blocage	88
5.2- Zone de saturation.....	88
5.3- Zone de fonctionnement linéaire.....	88
6- Montage Emetteur commun.....	88
7- Caractéristique statique du transistor NPN	89
7.1- Caractéristiques $I_B = f(V_{BE})$	89
7.2- Caractéristiques $I_C = f(I_B)$	90
7.3- Caractéristiques $I_C = f(V_{BE})$	90
7.4- Caractéristiques $I_C = f(V_{CE})$	91
8- Polarisation du transistor.....	91
8.1- Définition	91
8.2- Polarisation par deux sources de tension	91
8.2.1- Point de fonctionnement	92
8.2.1.1- Droite d'attaque statique	92
8.2.1.2- Droite de charge statique	92
8.2.1.3- Blocage et saturation.....	93
8.3- Polarisation par résistance de base.....	94
8.4- Polarisation par réaction de collecteur	94

8.5- Polarisation par réaction d'émetteur	96
8.6- Polarisation par diviseur de tension	97

Chapitre 1

Les quadripôles

Les quadripôles

1- Généralités :

1.1- Définitions :

Un quadripôle est une partie de réseau qui communique avec les autres circuits du montage par deux paires de bornes. Chacune de ces paires de bornes constitue un dipôle, et le courant qui en sort est égal au courant qui y entre.

Un quadripôle est caractérisé par quatre grandeurs :

- Les grandeurs d'entrée sont : I_1 et V_1 .
- Les grandeurs de sorties sont : I_2 et V_2 .

On distingue 3 types de quadripôles :

- Les quadripôles actifs.
- Les quadripôles passifs.
- Les quadripôles linéaires.

Un quadripôle est linéaire si la variation des grandeurs de sortie V_2 et I_2 , est proportionnelle à la variation des grandeurs d'entrée V_1 et I_1 .

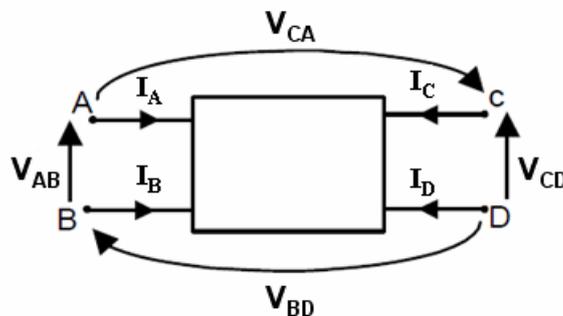
Autrement dit, les grandeurs de sortie et celles d'entrée sont liées par des relations linéaires.

Il ne comporte que des composants (ou dipôles) linéaires.

L'étude des quadripôles linéaires est facilitée par l'usage du calcul matriciel. Cette représentation est également bien adaptée aux méthodes modernes de calcul numériques.

1.2- Représentation :

D'une manière générale, un quadripôle est décrit comme suit :



Pour un quadripôle passif, on a :

$$I_A + I_B + I_C + I_D = 0$$

$$V_{AB} + V_{CA} - V_{CD} + V_{BD} = 0$$

Le quadripôle est représenté par un rectangle avec généralement ses deux bornes d'entrée à gauche et ses deux bornes de sortie à droite. Le courant entrant dans le pôle d'une paire ressort par l'autre pôle de la même paire.

Le schéma de principe pour l'étude d'un quadripôle est le suivant :

Par convention, les sens positifs adoptés pour les courants d'entrée et de sortie sont rentrants.

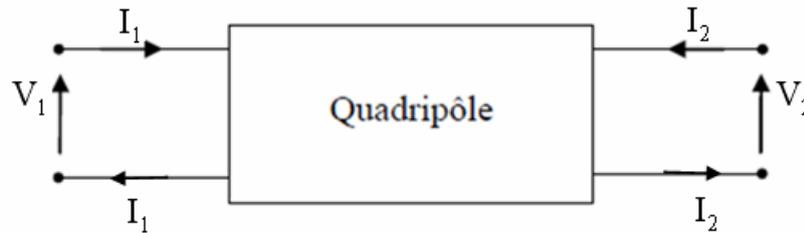


Figure 1 : Représentation d'un quadripôle.

1.3- Origine :

On doit les premières études sur les quadripôles au mathématicien Allemand Franz BREISIG (1868 – 1934) dans les années 1920.

1.4- Intérêt de la représentation quadripôle :

La représentation quadripôle a pour principal intérêt de considérablement simplifier l'étude des circuits électroniques.

1.5- Classification :

Les quadripôles sont classés en deux types : actif et passif.

- 1- Quadripôle actif : C'est un quadripôle qui contient des sources (de tension ou de courant) liées à des grandeurs électriques internes.
- 2- Quadripôles passif : Il ne contient aucune source de tension ou de courant dépendante.

- Un quadripôle sera dit réactif ou non dissipatif s'il contient uniquement des condensateurs et des inductances parfaits.

- Un quadripôle sera dit réciproque s'il vérifie cette condition : Lorsqu'on place une source de tension à son entrée et qu'on mesure le courant de court-circuit à sa sortie, on obtient le même résultat qu'en branchant la source à la sortie et en mesurant le courant de court-circuit à l'entrée.

- Un quadripôle passif (Ne contient aucune source dépendante) est toujours réciproque.

- Un quadripôle sera dit symétrique si on ne peut pas distinguer sa sortie de son entrée; autrement dit, la permutation de l'entrée et de la sortie entre elles ne modifie pas le quadripôle. Cette condition est plus large que la condition de réciprocité.

2- Description matricielle du quadripôle :

Dans un quadripôle linéaire, les quatre grandeurs V_1 , I_1 , V_2 et I_2 sont reliées entre elles par des relations linéaires. Les coefficients de ces relations liant les grandeurs d'entrée et de sortie sont appelés « Paramètres du quadripôle ».

Pour relier les quatre paramètres du quadripôle, il existe quatre représentations matricielles différentes :

- Matrices de chaîne.
- Matrice impédance.
- Matrice admittance.
- Matrices hybrides.

2.1- Matrices de chaîne :

2.1.1- Matrice de chaîne directe :

Cette matrice est très pratique pour la mise en cascade des quadripôles. La matrice de chaîne relie les tension et courant d'entrée aux tensions et courants de sortie. Avec notre convention elle est définie par :

$$(V_1, I_1) = f(V_2, I_2)$$

Les relations définissant la matrice de chaîne sont les suivantes :

$$\begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \end{cases}$$

Sous forme matricielle, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = [a] \times \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

A, B, C et D sont les paramètres de chaîne directe, [a] est la matrice de chaîne directe.

A et D sont sans dimension.

B est une impédance en Ohm et C est une admittance en Ohm^{-1} .

Remarque :

Contrairement aux autres représentations matricielles, pour la matrice de chaîne directe on utilise le courant $-I_2$ (Courant sortant du quadripôle) à la place du courant I_2 (Courant

entrant dans le quadripôle). Ce formalisme permet de simplifier les calculs lorsque nous associerons plusieurs quadripôles en cascade.

Définition des paramètres de chaîne directe :

- $I_2 = 0$ (La sortie est en circuit ouvert) :

$$A = \frac{V_1}{V_2} : \text{Le gain en tension inverse (La sortie en c.o).}$$

$$C = \frac{I_1}{V_2} : \text{L'admittance de transfert inverse (La sortie en c.o).}$$

- $V_2 = 0$ (La sortie est en court-circuit) :

$$B = -\frac{V_1}{I_2} : \text{L'impédance de transfert inverse (La sortie en c.c).}$$

$$D = -\frac{I_1}{I_2} : \text{Le gain en courant inverse (La sortie en c.c).}$$

2.1.2- Matrice de chaîne inverse :

On exprime les grandeurs de sortie en fonction des grandeurs d'entrée. On peut définir la matrice de chaîne inverse telle que :

$$(V_2, I_2) = f(V_1, I_1)$$

Les paramètres de chaîne inverse sont définis de la façon suivante :

$$\begin{cases} V_2 = A_i V_1 - B_i I_1 \\ I_2 = C_i V_1 - D_i I_1 \end{cases}$$

On peut mettre ce système sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{pmatrix} = [a_i] \times \begin{pmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{pmatrix}$$

La matrice de transfert est appelée matrice hybride du quadripôle.

A_i est l'amplification en tension.

D_i est l'amplification en courant.

B_i est une impédance en Ohm, C_i est une admittance en Ohm^{-1} , A_i et D_i sont des nombres.

Remarque :

Il faut noter que $[a_i]$ n'est pas la matrice inverse de $[a]$.

Définition des paramètres de chaîne inverse :

$$\begin{cases} V_2 = A_i V_1 - B_i I_1 \\ I_2 = C_i V_1 - D_i I_1 \end{cases}$$

- $V_1 = 0$ (L'entrée est en court-circuit) :

$$B_i = -\frac{V_2}{I_1} : \text{L'impédance de transfert direct (L'entrée en c.c).}$$

$$D_i = -\frac{I_2}{I_1} : \text{Le gain en courant direct (L'entrée en c.c).}$$

- $I_1 = 0$ (L'entrée est en circuit ouvert) :

$$A_i = \frac{V_2}{V_1} : \text{Le gain en tension direct (L'entrée en c.o).}$$

$$C_i = \frac{I_2}{V_1} : \text{L'admittance de transfert direct (L'entrée en c.o).}$$

Exemple 1 : Quadripôle à une impédance série.

Considérons le quadripôle ne comportant qu'une seule impédance Z présenté sur la figure suivante :

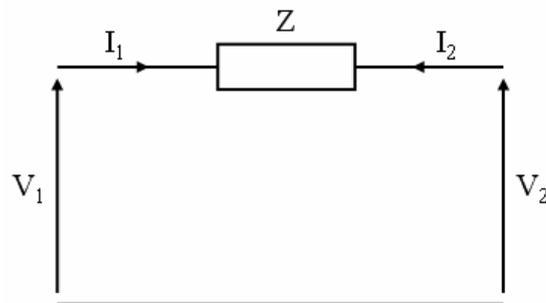


Figure 2 : Impédance série.

La loi des mailles donne :

$$\begin{cases} I_2 = -I_1 \\ V_1 - V_2 = Z I_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_2 = V_1 - Z I_1 \\ I_2 = -I_1 \end{cases}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons donc écrire la matrice de chaîne directe ou la matrice de chaîne inverse :

$$[a] = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [a_i] = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 : Quadripôle à une impédance parallèle.

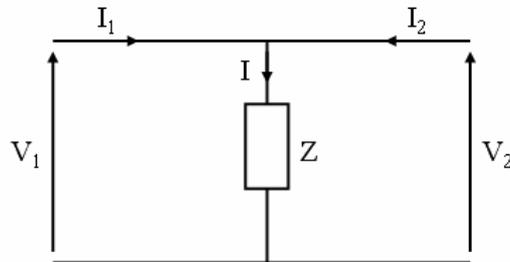


Figure 3 : Impédance parallèle.

En notant I le courant circulant (vers le bas) dans l'impédance Z nous avons :

$$V_2 = V_1 = Z I$$

$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{V_1}{Z} - I_1$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{pmatrix}$$

Ici encore, le déterminant de la matrice est égal à 1.

Nous pouvons donc écrire pour les matrices de chaîne directe et de chaîne inverse :

$$[a] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [a_i] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad Y = \frac{1}{Z}$$

2.2- Matrice impédance :

Elle permet d'exprimer les tensions (Entrée et sortie) en fonction des courants (Entrée et sortie) telle que :

$$(V_1, V_2) = f(I_1, I_2)$$

Les équations caractéristiques de ce quadripôle peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases}$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = [Z] \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

[Z] est la matrice impédance du quadripôle. Les éléments de cette matrice s'appellent les paramètres Z en circuit ouvert ($I_1 = 0$ ou $I_2 = 0$).

Définition des paramètres impédances :

- $I_2 = 0$ (La sortie est en circuit ouvert) :

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} : \text{L'impédance d'entrée (La sortie en c.o.)}$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} : \text{L'impédance de transfert direct ou transimpédance direct (La sortie en c.o.)}$$

- $I_1 = 0$ (L'entrée est en circuit ouvert) :

$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} : \text{L'impédance de transfert inverse ou transimpédance inverse (L'entrée en c.o.)}$$

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} : \text{L'impédance de sortie (L'entrée en c.o.)}$$

On peut alors représenter un quadripôle par un schéma simple qui traduit son comportement avec le reste du circuit auquel il appartient, en fonction de ses paramètres Z.

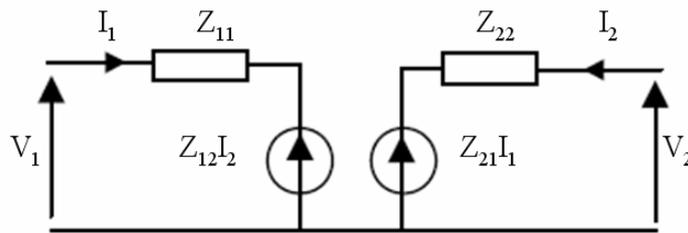


Figure 4 : Schéma équivalent d'un quadripôle en paramètres Z.

Définition 1 :

Un quadripôle est dit réciproque si les termes de la seconde diagonale sont égaux : $Z_{12} = Z_{21}$. Cette propriété est caractéristique des quadripôles composés d'éléments passifs (Sans générateur de courant et de tension).

Définition 2 :

Si les termes de la première diagonale sont égaux : $Z_{11} = Z_{22}$, (C'est à dire que $Z = Z^T$ on dit que le quadripôle est symétrique).

Exemple 1 : Quadripôle en T.

Un quadripôle en T est une structure de trois impédances telle que schématisée sur la figure suivante :

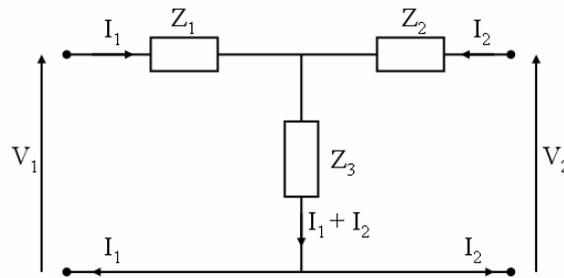


Figure 5 : Quadripôle en T.

Nous avons les deux relations suivantes en appliquant la loi des mailles :

$$V_1 = Z_1 I_1 + Z_3 (I_1 + I_2) = (Z_1 + Z_3) I_1 + Z_3 I_2$$

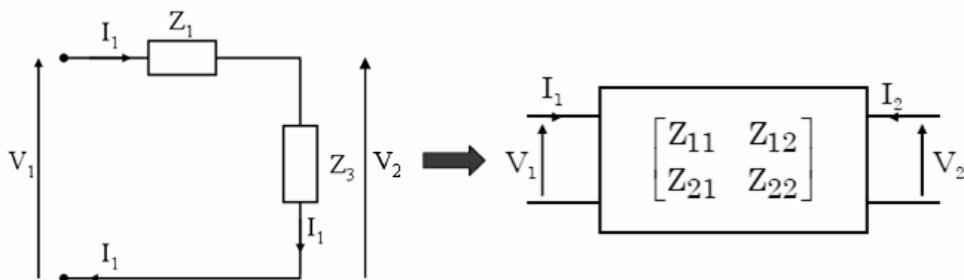
$$V_2 = Z_2 I_2 + Z_3 (I_1 + I_2) = Z_3 I_1 + (Z_2 + Z_3) I_2$$

Ainsi, on a :

$$[Z] = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{pmatrix}$$

Ce quadripôle est réciproque. Il est symétrique à la condition que $Z_2 = Z_1$.

▪ **Cas $I_2 = 0$:**



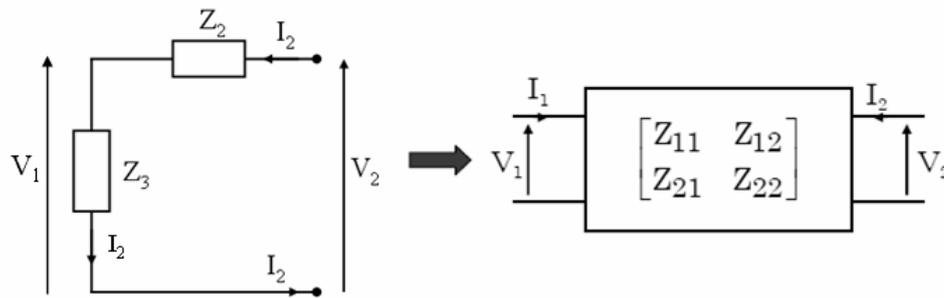
Détermination de Z_{11} : Si $I_2 = 0$ alors $V_1 = Z_{11} \cdot I_1$.

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_1 + Z_3$$

Détermination de Z_{21} : Si $I_2 = 0$ alors $V_2 = Z_{21} \cdot I_1$.

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_3$$

- Cas $I_1 = 0$:



Détermination de Z_{12} : Si $I_1 = 0$ alors $V_1 = Z_{12} \cdot I_2$.

$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_3$$

Détermination de Z_{22} : Si $I_1 = 0$ alors $V_2 = Z_{22} \cdot I_2$.

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_2 + Z_3$$

Nous retrouvons les résultats calculés précédemment.

Exemple 2 : Quadripôle en π .

Considérons le quadripôle présenté sur la figure suivante :

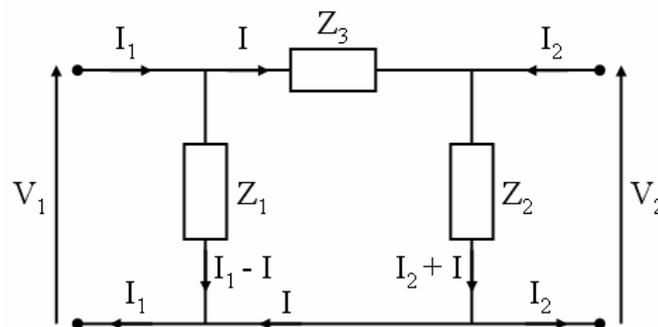
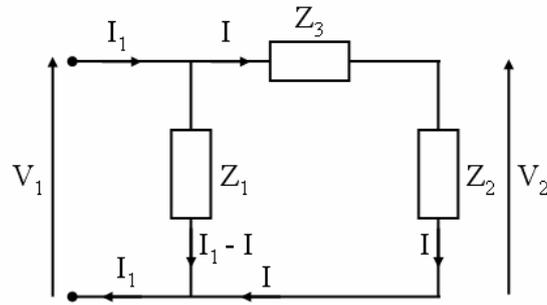


Figure 6 : Quadripôle en π .

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases}$$

Comme dans l'exemple précédent, nous allons considérer successivement les cas ($I_2 = 0$ et $I_1 = 0$).

- Cas $I_2 = 0$:



$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_1 // (Z_2 + Z_3)$$

$$= \frac{Z_1 (Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

Pour déterminer ce coefficient, nous devons calculer la relation entre I et I_1 .

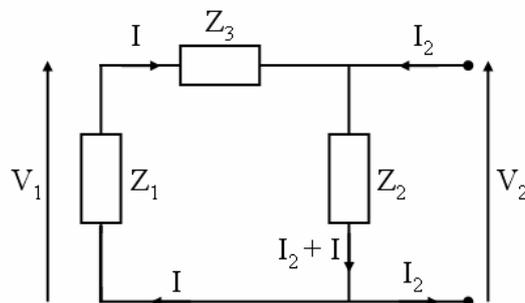
Pont diviseur de courant :

$$I = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_3} I_1$$

D'où :

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{V_2}{I} \frac{I}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

- Cas $I_1 = 0$:



$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_2 // (Z_1 + Z_3)$$

$$= \frac{Z_2 (Z_1 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

Pour déterminer ce coefficient, nous devons calculer la relation entre I et I₂.

Pont diviseur de courant :

$$-I = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3} I_2$$

D'où :

$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = \left. \frac{V_1}{I} \frac{I}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

En résumé, nous avons :

$$[Z] = \begin{pmatrix} \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} & \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \\ \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3} & \frac{Z_2(Z_1 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \end{pmatrix}$$

Le quadripôle est donc réciproque. Il est symétrique si :

$$\begin{aligned} Z_1(Z_2 + Z_3) &= Z_2(Z_1 + Z_3) \\ \Leftrightarrow Z_1 &= Z_2 \end{aligned}$$

2.3- Matrice admittance :

La matrice admittance est l'inverse de la matrice impédance, elle relie les courants aux tensions telle que :

$$(I_1, I_2) = f(V_1, V_2)$$

Les équations caractéristiques de ce quadripôle peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \end{cases}$$

Sous forme matricielle, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = [Y] \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

[Y] est la matrice admittance du quadripôle.

La matrice [Y] est l'inverse de la matrice [Z] : [Y] = [Z]⁻¹.

Les éléments de cette matrice s'appellent les paramètres Y en court-circuit (C'est à dire $V_1 = 0$ ou $V_2 = 0$).

Définition des paramètres admittances :

- $V_2 = 0$ (La sortie est en court-circuit) :

$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} : \text{L'admittance d'entrée (La sortie en c.c.)}$$

$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} : \text{L'admittance de transfert direct (La sortie en c.c.)}$$

- $V_1 = 0$ (L'entrée est en court-circuit) :

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} : \text{L'admittance de transfert inverse (L'entrée en c.c.)}$$

$$Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} : \text{L'admittance de sortie (L'entrée en c.c.)}$$

Le schéma équivalent au quadripôle, en fonction des paramètres Y :

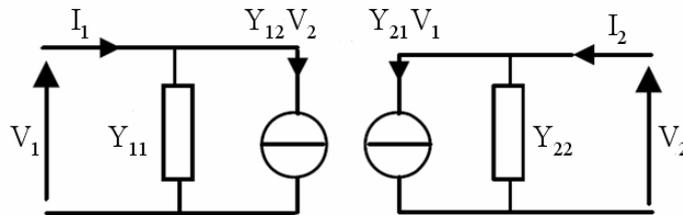
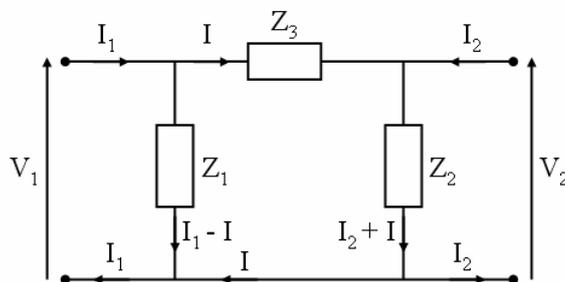


Figure 7 : Schéma équivalent d'un quadripôles en paramètres Y.

Exemple 2 : (Suite) Quadripôle en π .



Soit $Y_1 = \frac{1}{Z_1}$, $Y_2 = \frac{1}{Z_2}$ et $Y_3 = \frac{1}{Z_3}$.

Soit I le courant circulant dans l'admittance Y_3 .

On a $I = Y_3 (V_1 - V_2)$.

Les équations associées à la matrice admittance sont les suivantes :

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_1 V_1 + I = (Y_1 + Y_3)V_1 - Y_3 V_2 \\ I_2 &= Y_2 V_2 - I = -Y_3 V_1 + (Y_2 + Y_3)V_2 \end{aligned}$$

D'où les éléments de la matrice admittance suivants :

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_1 + Y_3 \\ Y_{12} &= Y_{21} = -Y_3 \\ Y_{22} &= Y_2 + Y_3 \end{aligned}$$

2.4- Matrices hybrides :

Il existe deux types de paramètres hybrides : H et G.

2.4.1- Matrices hybrides H :

Les paramètres hybrides, ou paramètres H, relient la tension d'entrée et le courant de sortie au courant d'entrée et à la tension de sortie. Ils sont définis par la relation :

$$(V_1, I_2) = H(I_1, V_2)$$

Dans ce cas, nous exprimons V_1 et I_2 en fonction de I_1 et V_2 ce qui donne :

$$\begin{cases} V_1 = H_{11} I_1 + H_{12} V_2 \\ I_2 = H_{21} I_1 + H_{22} V_2 \end{cases}$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = [H] \times \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

H_{11} , H_{12} , H_{21} et H_{22} sont les paramètres hybrides de la matrice hybride [H].

Ces paramètres sont dits hybrides en raison des dimensions différentes des éléments.

Définition des paramètres hybrides H :

- $V_2 = 0$ (La sortie est en court-circuit) :

$$H_{11} = \frac{V_1}{I_1} : \text{L'impédance d'entrée (La sortie en c.c).}$$

$$H_{21} = \frac{I_2}{I_1} : \text{Le gain en courant direct (La sortie en c.c).}$$

- $I_1 = 0$ (L'entrée est en circuit ouvert) :

$H_{12} = \frac{V_1}{V_2}$: Le gain en tension inverse (L'entrée en c.o).

$H_{22} = \frac{I_2}{V_2}$: L'admittance de sortie (L'entrée en c.o).

Le schéma équivalent au quadripôle, en fonction des paramètres H :

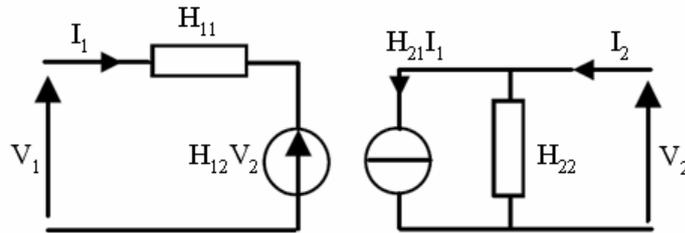


Figure 8 : Schéma équivalent d'un quadripôle en paramètres hybrides H.

2.4.2- Matrices hybrides G :

Les paramètres hybrides inverses G sont définis par la relation :

$$(I_1, V_2) = G(V_1, I_2)$$

On utilise les deux équations suivantes pour décrire le quadripôle :

$$\begin{cases} I_1 = G_{11} V_1 + G_{12} I_2 \\ V_2 = G_{21} V_1 + G_{22} I_2 \end{cases}$$

On peut mettre ce système sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = [G] \times \begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Les relations hybrides inverses G sont très peu utilisées, mais elles existent. Les matrices hybrides sont utilisées en particulier dans l'étude des transistors.

Définition des paramètres hybrides inverses G :

- $I_2 = 0$ (La sortie est en circuit ouvert) :

$G_{11} = \frac{I_1}{V_1}$: L'impédance d'entrée (La sortie en c.o).

$G_{21} = \frac{V_2}{V_1}$: Le gain en tension direct (La sortie en c.o).

- $V_1 = 0$ (L'entrée est en court-circuit) :

$G_{12} = \frac{I_1}{I_2}$: Le gain en courant inverse (L'entrée en c.c).

$G_{22} = \frac{V_2}{I_2}$: L'admittance de sortie (L'entrée en c.c).

Le schéma équivalent d'un quadripôle en paramètres hybrides G :

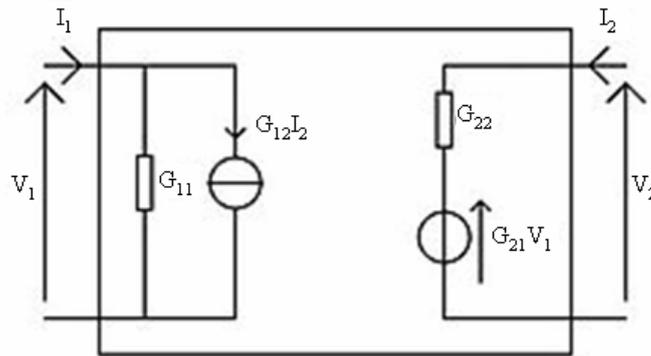


Figure 9 : Schéma équivalent d'un quadripôle en paramètres hybrides G.

Remarque : On utilise plutôt la matrice hybride [H].

3- Relations entre les différents paramètres :

De manière évidente, il existe des relations entre tous les éléments des matrices décrivant un même quadripôle.

3.1- Relation entre les paramètres de chaîne et les paramètres impédances :

Nous pouvons par exemple chercher à exprimer les paramètres de chaîne [a] en fonction des paramètres impédances [Z].

$$\begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases}$$

- Pour $I_2 = 0$:

$$[a] \Rightarrow A = \frac{V_1}{V_2} \text{ et } [Z] \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{Z_{11}}{Z_{21}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{Z_{11}}{Z_{21}}$$

$$[a] \Rightarrow C = \frac{I_1}{V_2} \text{ et } [Z] \Rightarrow \frac{I_1}{V_2} = \frac{1}{Z_{21}}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{Z_{21}}$$

- Pour $V_2 = 0$:

$$[a] \Rightarrow B = -\frac{V_1}{I_2}$$

$$[Z] \Rightarrow I_1 = -\frac{Z_{22}}{Z_{21}} I_2 \Rightarrow V_1 = I_2 \left[Z_{12} - \frac{Z_{11} Z_{22}}{Z_{21}} \right] = -\frac{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}}{Z_{21}} I_2$$

$$\Rightarrow -\frac{V_1}{I_2} = \frac{\Delta Z}{Z_{21}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\Delta Z}{Z_{21}}$$

$$[a] \Rightarrow D = -\frac{I_1}{I_2} \text{ et } [Z] \Rightarrow -\frac{I_1}{I_2} = \frac{Z_{22}}{Z_{21}}$$

$$\Rightarrow D = \frac{Z_{22}}{Z_{21}}$$

3.2- Relation entre les paramètres impédances et les paramètres admittances :

Pour des raisons de simplicité, la détermination de la matrice admittance peut passer par la détermination de la matrice impédance.

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Si on connaît les quatre paramètres impédances d'un quadripôle, les relations ci-dessous nous donnent les quatre paramètres admittances. Les paramètres admittances ne sont pas obtenus en inversant simplement les paramètres impédances :

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{Z_{22}}{\Delta Z} \\ Y_{12} &= -\frac{Z_{12}}{\Delta Z} \\ Y_{21} &= -\frac{Z_{21}}{\Delta Z} \\ Y_{22} &= \frac{Z_{11}}{\Delta Z} \end{aligned}$$

Avec :

$$\Delta Z = Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_{12} \cdot Z_{21}$$

Remarque : Concernant le coefficient delta : ΔZ est le déterminant de la matrice impédance.

Nous pouvons exprimer les paramètres de la matrice admittance en fonction des paramètres de la matrice impédance et vice-versa :

$$\begin{aligned} [Y] &= \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_{12} \cdot Z_{21}} \cdot \begin{pmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{pmatrix} \\ [Z] &= \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{Y_{11} \cdot Y_{22} - Y_{12} \cdot Y_{21}} \cdot \begin{pmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a les relations entre les éléments de la matrice admittance $[Y]$ et la matrice impédance $[Z]$:

$$[Y] = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Z_{22}}{Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_{12} \cdot Z_{21}} & \frac{-Z_{12}}{Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_{12} \cdot Z_{21}} \\ \frac{-Z_{21}}{Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_{12} \cdot Z_{21}} & \frac{Z_{11}}{Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_{12} \cdot Z_{21}} \end{pmatrix}$$

Pour toutes les autres relations entre les différents paramètres, on procède de la même manière. Les conversions d'un paramètre à un autre sont données au tableau suivant :

La conversion d'un type de paramètre à un autre est importante parce que certains paramètres sont meilleurs que d'autres pour analyser des systèmes plus complexes.

Tableau 1 : Equivalences entre éléments des matrices représentatives des quadripôles.

	[a]	[Z]	[Y]	[H]	[G]
[a]	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\Delta Z}{Z_{21}} \\ 1 & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} & -\frac{1}{Y_{21}} \\ \frac{\Delta Y}{Y_{21}} & -\frac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta H}{H_{21}} & -\frac{H_{11}}{H_{21}} \\ \frac{H_{22}}{H_{21}} & -\frac{1}{H_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{G_{21}} & \frac{G_{22}}{G_{21}} \\ \frac{G_{11}}{G_{21}} & \frac{\Delta G}{G_{21}} \end{matrix}$
[Z]	$\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{AD-BC}{C} \\ 1 & \frac{D}{C} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Y_{22}}{\Delta Y} & -\frac{Y_{12}}{\Delta Y} \\ -\frac{Y_{21}}{\Delta Y} & \frac{Y_{11}}{\Delta Y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta H}{H_{22}} & \frac{H_{12}}{H_{22}} \\ -\frac{H_{21}}{H_{22}} & \frac{1}{H_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{G_{11}} & -\frac{G_{12}}{G_{11}} \\ \frac{G_{21}}{G_{11}} & \frac{\Delta G}{G_{11}} \end{matrix}$
[Y]	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & -\frac{AD-BC}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Z_{22}}{\Delta Z} & -\frac{Z_{12}}{\Delta Z} \\ -\frac{Z_{21}}{\Delta Z} & \frac{Z_{11}}{\Delta Z} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{H_{11}} & -\frac{H_{12}}{H_{11}} \\ \frac{H_{21}}{H_{11}} & \frac{\Delta H}{H_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta G}{G_{22}} & \frac{G_{12}}{G_{22}} \\ -\frac{G_{21}}{G_{22}} & \frac{1}{G_{22}} \end{matrix}$
[H]	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{AD-BC}{D} \\ -\frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta Z}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{Y_{11}} & -\frac{Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\Delta Y}{Y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{G_{22}}{\Delta G} & -\frac{G_{12}}{\Delta G} \\ -\frac{G_{21}}{\Delta G} & \frac{G_{11}}{\Delta G} \end{matrix}$
[G]	$\begin{matrix} \frac{C}{A} & \frac{AD-BC}{A} \\ 1 & \frac{B}{A} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{Z_{11}} & -\frac{Z_{12}}{Z_{11}} \\ \frac{Z_{21}}{Z_{11}} & \frac{\Delta Z}{Z_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta Y}{Y_{22}} & \frac{Y_{12}}{Y_{22}} \\ -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} & \frac{1}{Y_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{H_{22}}{\Delta H} & -\frac{H_{12}}{\Delta H} \\ -\frac{H_{21}}{\Delta H} & \frac{H_{11}}{\Delta H} \end{matrix}$	$\begin{matrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{matrix}$

4- Cas des quadripôles passifs réciproques :

Un quadripôle est dit réciproque si, lorsqu'on place une source de tension à son entrée et qu'on mesure le courant de court-circuit à sa sortie, on obtient le même résultat qu'en branchant la source à la sortie et en mesurant le courant de court-circuit à l'entrée.

4.1- Relation entre les paramètres de chaîne :

Considérons le schéma de la figure 10 :

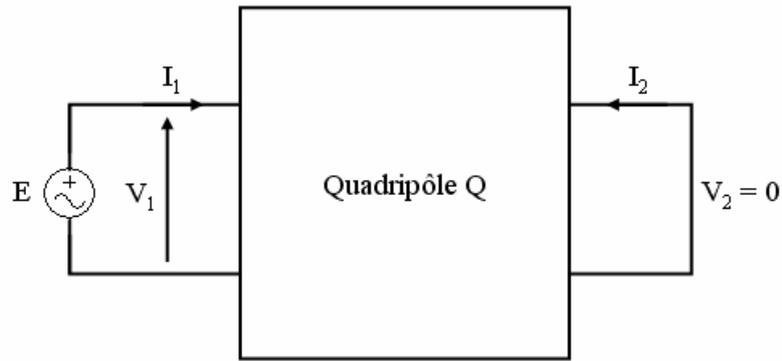


Figure 10 : Réciprocité : Première étape ($V_1 = E$ et $V_2 = 0$).

Les équations générales qui régissent le comportement électrique du quadripôle sont :

$$\begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \end{cases}$$

Dans le cas particulier qui nous intéresse :

$$\begin{cases} V_1 = 0 - BI_2 = E \\ I_1 = 0 - DI_2 \end{cases}$$

D'où on tire :

$$I_2 = -\frac{1}{B}E$$

Le théorème de réciprocité stipule qu'une source de tension identique, placée à l'entrée conduira à un courant I_2 égal au courant I_1 obtenu lorsque la source de tension est placée à la sortie.

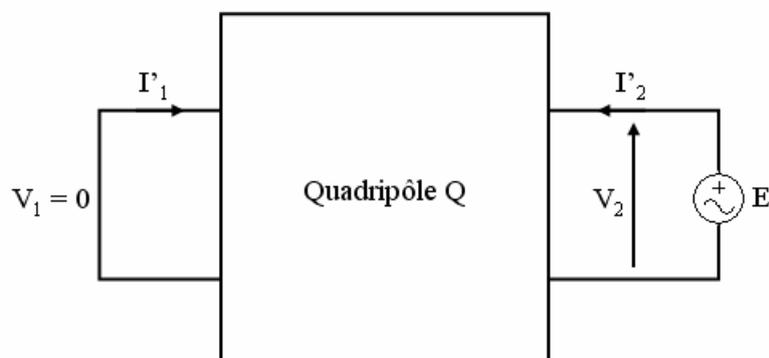


Figure 11 : Réciprocité : Deuxième étape ($V_1 = 0$ et $V_2 = E$).

Ici :

$$\begin{cases} V_1 = AE - BI_2' = 0 \Rightarrow I_2' = \frac{AE}{B} \\ I_1' = CE - DI_2' \Rightarrow I_1' = CE - \frac{AD}{B}E = \frac{BC - AD}{B}E \end{cases}$$

Ce qui conduit à :

$$I_1' = \frac{BC - AD}{B}E = \frac{\Delta a}{B}E$$

Théorème de Maxwell :

$$I_1' = I_2 \Rightarrow \frac{BC - AD}{B}E = -\frac{1}{B}E$$

L'égalité des deux courants conduits à la relation de réciprocité exprimée à partir des paramètres chaîne :

$$\Delta a = 1 \Rightarrow AD - BC = 1$$

Un quadripôle passif réciproque est donc caractérisé par trois paramètres indépendants.

4.2- Relation entre les paramètres impédances :

Figure 10 :

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 = E \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 = 0 \Rightarrow I_1 = -\frac{Z_{22}}{Z_{21}}I_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{21}}I_2 + Z_{21}I_2 = E \Rightarrow I_2 = -\frac{Z_{21}}{\Delta Z}E$$

Figure 11 :

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1' + Z_{12}I_2' = 0 \Rightarrow I_2' = -\frac{Z_{11}}{Z_{12}}I_1' \\ V_2 = Z_{21}I_1' + Z_{22}I_2' = E \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z_{21}I_1' - \frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{12}}I_1' = E \Rightarrow I_1' = -\frac{Z_{12}}{\Delta Z}E$$

$$I_1' = I_2 \Rightarrow Z_{12} = Z_{21}$$

4.3- Relation entre les paramètres admittances :

Figure 10 :

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 = Y_{11} E + 0 = Y_{11} E \\ I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 = Y_{21} E + 0 = Y_{21} E \end{cases}$$

Figure 11 :

$$\begin{cases} I'_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 = 0 + Y_{12} E = Y_{12} E \\ I'_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 = 0 + Y_{22} E = Y_{22} E \end{cases}$$

$$I'_1 = I_2 \Rightarrow Y_{12} = Y_{21}$$

4.4- Relation entre les paramètres hybrides :

Figure 10 :

$$\begin{cases} V_1 = H_{11} I_1 + H_{12} V_2 = H_{11} I_1 + 0 \\ I_2 = H_{21} I_1 + H_{22} V_2 = H_{21} I_1 + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E = H_{11} I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{E}{H_{11}} \\ I_2 = \frac{H_{21}}{H_{11}} E \end{cases}$$

Figure 11 :

$$\begin{cases} V_1 = H_{11} I'_1 + H_{12} V_2 \\ I'_2 = H_{21} I'_1 + H_{22} V_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{11} I'_1 + H_{12} E = 0 \Rightarrow I'_1 = -\frac{H_{12}}{H_{11}} E \\ I'_2 = H_{21} I'_1 + H_{22} V_2 \end{cases}$$

$$I'_1 = I_2 \Rightarrow H_{12} = -H_{21}$$

5- Quadripôle symétrique :

Pour un quadripôle passif symétrique; quand on écrit les équations des paramètres en permutant les grandeurs d'entrée et de sortie, on trouve encore une relation supplémentaire; les équations restent les mêmes.

5.1- Relation entre les paramètres de chaîne directe :

Les paramètres de chaîne directe sont donnés par :

$$\begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ C & -D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$[a]^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -D & B \\ -C & A \end{pmatrix}}{\Delta a} = \begin{pmatrix} D & -B \\ C & -A \end{pmatrix} \quad \text{car : } \Delta a = -1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -B \\ C & -A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} \quad (I)$$

En permutant les grandeurs d'entrée et de sortie, on a :

$$\begin{cases} V_2 = AV_1 - BI_1 \\ I_2 = CV_1 - DI_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ C & -D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} \quad (II)$$

$$(I) \text{ et } (II) \Rightarrow A = D$$

5.2- Relation entre les paramètres impédances :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{21} & Z_{22} \\ Z_{11} & Z_{12} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{22} & Z_{21} \\ Z_{12} & Z_{11} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_2 \\ I_1 \end{pmatrix}$$

Or Q est symétrique : $\Rightarrow \begin{pmatrix} V_2 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_2 \\ I_1 \end{pmatrix}$

Et on sait que : $Z_{12} = Z_{21}$.

$$\Rightarrow Z_{11} = Z_{22}$$

5.3- Relation entre les paramètres admittances :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_2 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{22} & Y_{21} \\ Y_{12} & Y_{11} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_2 \\ V_1 \end{pmatrix}$$

Or Q est symétrique : $\Rightarrow \begin{pmatrix} I_2 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_2 \\ V_1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Y_{11} = Y_{22}$$

5.4- Relation entre les paramètres hybrides :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta H} \begin{pmatrix} H_{22} & -H_{12} \\ -H_{21} & H_{11} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ I_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta H} \begin{pmatrix} H_{11} & -H_{21} \\ -H_{12} & H_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_2 \\ V_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta H} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_2 \\ V_1 \end{pmatrix} \quad (I)$$

Or Q est symétrique : $\Rightarrow \begin{pmatrix} V_2 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_2 \\ V_1 \end{pmatrix} \quad (II)$

$$(I) \text{ et } (II) \Rightarrow \Delta H = 1$$

De même pour G : $\Delta G = 1$.

Tableau 2 :

	Quadripôle passif	Quadripôle passif symétrique
[a]	$AD - BC = 1$	$A = D$
[Z]	$Z_{12} = Z_{21}$	$Z_{11} = Z_{22}$
[Y]	$Y_{12} = Y_{21}$	$Y_{11} = Y_{22}$
[H]	$H_{12} = -H_{21}$	$\Delta H = 1$
[G]	$G_{12} = -G_{21}$	$\Delta G = 1$

6- Associations de deux quadripôles :

L'analyse d'un circuit large et complexe est souvent plus simple si on peut diviser le circuit en blocs plus simples. L'interconnexion de ces circuits permet alors de compléter l'analyse. Si on modélise les sous-circuits par des circuits à deux ports, la synthèse globale implique l'analyse des interconnexions entre les ports.

Il existe cinq façons de connecter les circuits deux-ports : en cascade, en série, en parallèle, en série parallèle et en parallèle série. La figure suivante montre ces connexions :

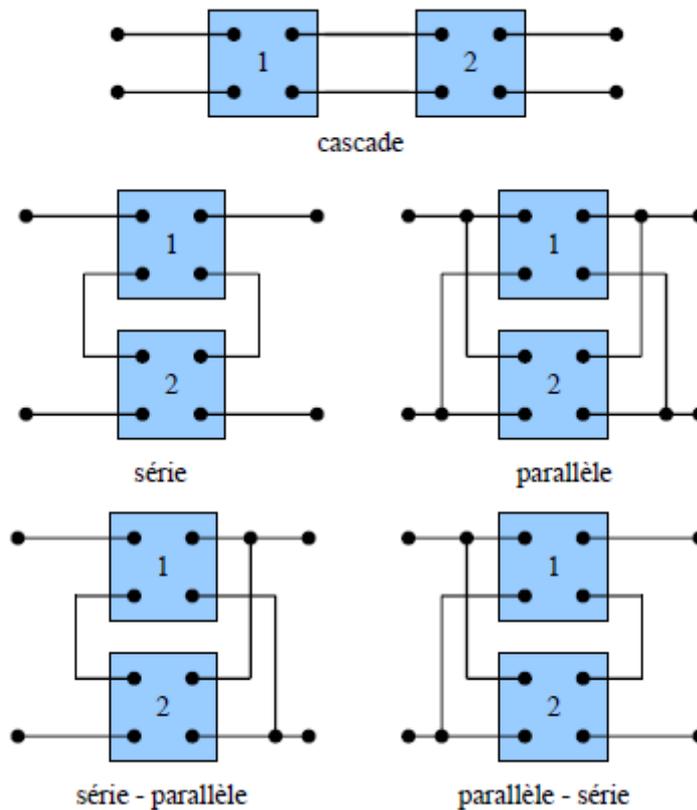


Figure 12 : Connexions de base entre circuits.

6.1- Association en chaîne (en cascade) de deux quadripôles :

On considère l'association de deux quadripôles connectés en cascade. Les deux sorties du premier sont reliés aux deux entrées du deuxième quadripôle.

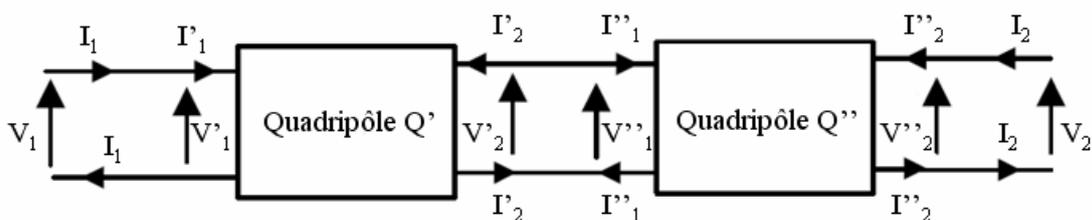


Figure 13 : Quadripôles en chaîne.

Nous allons chercher à déterminer la matrice de chaîne du quadripôle résultant de cette association.

Chaque quadripôle est défini par sa matrice de chaîne :

- Quadripôle Q' :

$$[a'] = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

- Quadripôle Q'' :

$$[a''] = \begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix}$$

Dans cette association, nous avons les relations suivantes entre les courants et entre les tensions :

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1' \\ I_1'' &= -I_2' \\ I_2'' &= I_2 \\ V_1 &= V_1' \\ V_2' &= V_1'' \\ V_2'' &= V_2 \end{aligned}$$

Dans ce cas, la tension de sortie du premier quadripôle est la tension d'entrée du deuxième quadripôle.

On a donc les relations suivantes pour le premier quadripôle :

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1' = A' V_2' - B' I_2' = A' V_1'' + B' I_1'' \\ I_1 &= I_1' = C' V_2' - D' I_2' = C' V_1'' + D' I_1'' \end{aligned}$$

Pour le second quadripôle, nous avons :

$$\begin{aligned} V_2' &= V_1'' = A'' V_2'' - B'' I_2'' = A'' V_2 - B'' I_2 \\ -I_2' &= I_1'' = C'' V_2'' - D'' I_2'' = C'' V_2 - D'' I_2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} V_1 &= A' (A'' V_2 - B'' I_2) + B' (C'' V_2 - D'' I_2) \\ I_1 &= C' (A'' V_2 - B'' I_2) + D' (C'' V_2 - D'' I_2) \end{aligned}$$

Ainsi on en déduit les relations entre V_1 , I_1 , V_2 et I_2 :

$$\begin{aligned} V_1 &= (A' A'' + B' C'')V_2 - (A' B'' + B' D'')I_2 \\ I_1 &= (C' A'' + D' C'')V_2 - (C' B'' + D' D'')I_2 \end{aligned}$$

$$[a] = \begin{pmatrix} A' A'' + B' C'' & A' B'' + B' D'' \\ C' A'' + D' C'' & C' B'' + D' D'' \end{pmatrix}$$

La matrice $[a]$ du quadripôle Q obtenu par la mise en cascade de deux quadripôles Q' et Q'' est égale au produit matriciel des matrices $[a']$ et $[a'']$:

$$[a] = [a'] \times [a'']$$

Toutes ces associations de quadripôles se généralisent à un nombre n de quadripôles.

6.2- Association en série de deux quadripôles :

Comme pour les dipôles, la mise en série signifie que :

- C'est le même courant qui entre et qui sort par les bornes d'entrée.
- La tension aux bornes des deux quadripôles est la somme des tensions aux bornes de chacun d'eux.

On prend les bornes d'entrée (de sortie) de chacun des quadripôles et on les met en série comme si il s'agissait de dipôles. La mise en série de deux quadripôles Q' et Q'' est illustrée à la figure suivante :

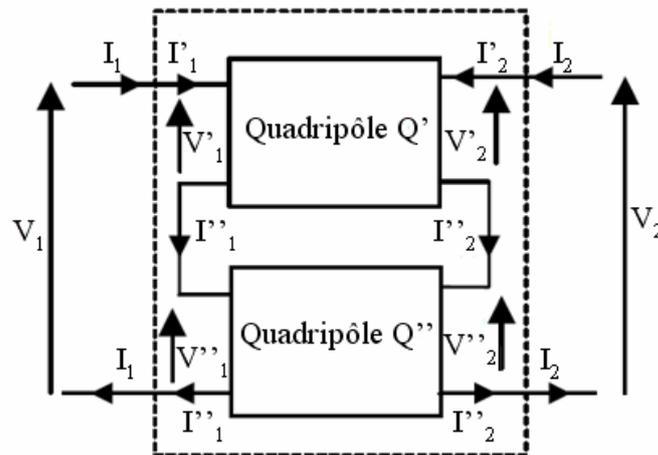


Figure 14 : Mise en série de quadripôles.

Dans ce cas, la tension d'entrée (de sortie) du quadripôle résultant est la somme des tensions d'entrée (de sortie) des quadripôles associés en série :

$$\begin{aligned} V_1 &= V'_1 + V''_1 \\ V_2 &= V'_2 + V''_2 \end{aligned}$$

On a les relations suivantes :

$$\begin{cases} V_1' = Z_{11}' I_1' + Z_{12}' I_2' \\ V_2' = Z_{21}' I_1' + Z_{22}' I_2' \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1'' = Z_{11}'' I_1'' + Z_{12}'' I_2'' \\ V_2'' = Z_{21}'' I_1'' + Z_{22}'' I_2'' \end{cases}$$

Comme $I_1 = I_1' = I_1''$ et $I_2 = I_2' = I_2''$ nous pouvons écrire les relations suivantes pour le quadripôle équivalent :

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 = (Z_{11}' + Z_{11}'') I_1 + (Z_{12}' + Z_{12}'') I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 = (Z_{21}' + Z_{21}'') I_1 + (Z_{22}' + Z_{22}'') I_2 \end{cases}$$

Ainsi sous forme matricielle, la matrice impédance $[Z]$ du quadripôle équivalent est égale à la somme des matrices impédances :

$$[Z] = [Z'] + [Z'']$$

On ajoute terme à terme les éléments de même indice.

6.3- Association en parallèle de deux quadripôles :

En parallèle, on relie les bornes « Jumelles » de chacun des deux quadripôles. La mise en parallèle de deux quadripôles Q' et Q'' est illustrée à la figure suivante :

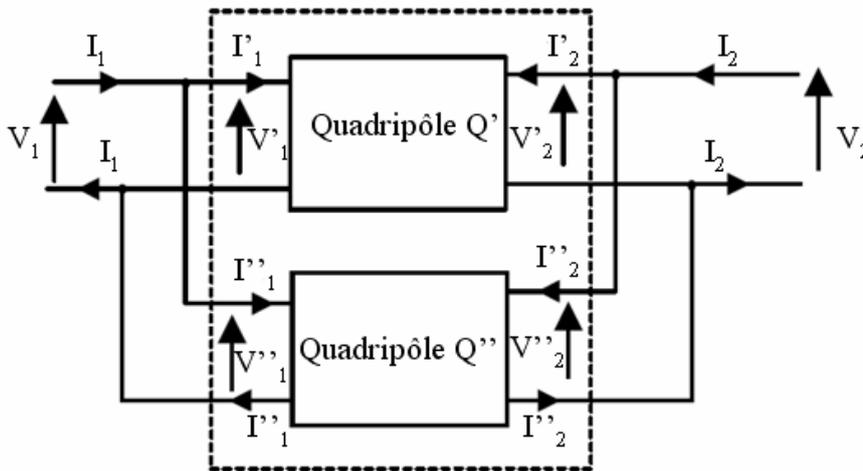


Figure 15 : Mise en parallèle de quadripôles.

Dans ce cas, le courant d'entrée (de sortie) du quadripôle résultant est la somme des courants d'entrée (de sortie) des quadripôles associés en parallèle :

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1' + I_1'' \\ I_2 &= I_2' + I_2'' \end{aligned}$$

On a les relations suivantes :

$$\begin{cases} I_1' = Y_{11}' V_1' + Y_{12}' V_2' \\ I_2' = Y_{21}' V_1' + Y_{22}' V_2' \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1'' = Y_{11}'' V_1'' + Y_{12}'' V_2'' \\ I_2'' = Y_{21}'' V_1'' + Y_{22}'' V_2'' \end{cases}$$

Comme $V_1 = V_1' = V_1''$ et $V_2 = V_2' = V_2''$ nous pouvons écrire les relations suivantes pour le quadripôle équivalent :

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 = (Y_{11}' + Y_{11}'') V_1 + (Y_{12}' + Y_{12}'') V_2 \\ I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 = (Y_{21}' + Y_{21}'') V_1 + (Y_{22}' + Y_{22}'') V_2 \end{cases}$$

Ainsi sous forme matricielle, la matrice admittance $[Y]$ du quadripôle équivalent est égale à la somme des matrices admittances :

$$[Y] = [Y'] + [Y'']$$

On ajoute terme à terme les éléments de même indice.

6.4- Association en série parallèle de deux quadripôles :

Le montage ci-contre montre un groupement série parallèle : Les deux paires de bornes d'entrée sont réunies en série et les deux paires de bornes de sortie sont réunies en parallèle.

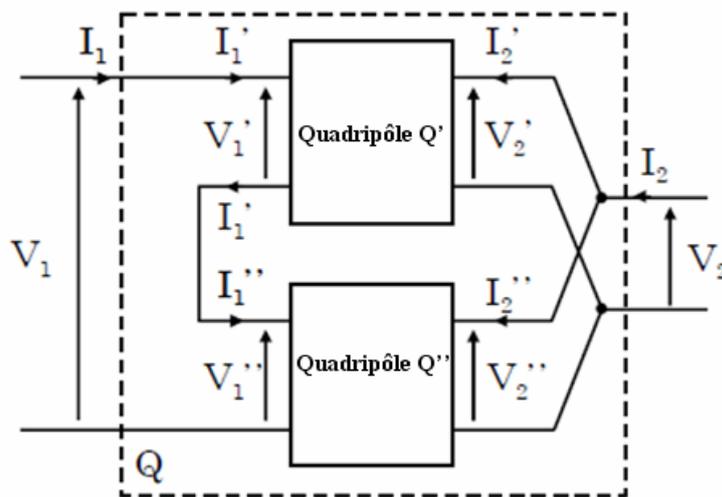


Figure 16 : Quadripôles en série parallèle.

On utilise les matrices hybrides $[H']$ et $[H'']$ des deux quadripôles associés :

$$\begin{pmatrix} V_1' \\ I_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}' & H_{12}' \\ H_{21}' & H_{22}' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1' \\ V_2' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_1'' \\ I_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}'' & H_{12}'' \\ H_{21}'' & H_{22}'' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1'' \\ V_2'' \end{pmatrix}$$

Comme :

$$\begin{cases} I_1 = I_1' = I_1'' \\ V_2 = V_2' = V_2'' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_1 = V_1' + V_1'' \\ I_2 = I_2' + I_2'' \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1' \\ I_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_1'' \\ I_2'' \end{pmatrix} = [H'] \cdot \begin{pmatrix} I_1' \\ V_2' \end{pmatrix} + [H''] \cdot \begin{pmatrix} I_1'' \\ V_2'' \end{pmatrix} = ([H'] + [H'']) \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = [H] \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

La matrice hybride [H] du quadripôle total est obtenue en faisant la somme des matrices hybrides des deux quadripôles constitutifs :

$$[H] = [H'] + [H'']$$

6.5- Association en parallèle série de deux quadripôles :

L'association parallèle série est obtenue de la même façon en reliant les sorties en série et les entrées en parallèle : On obtient donc le même résultat que précédemment à condition de remplacer les matrices [H] par leurs inverses.

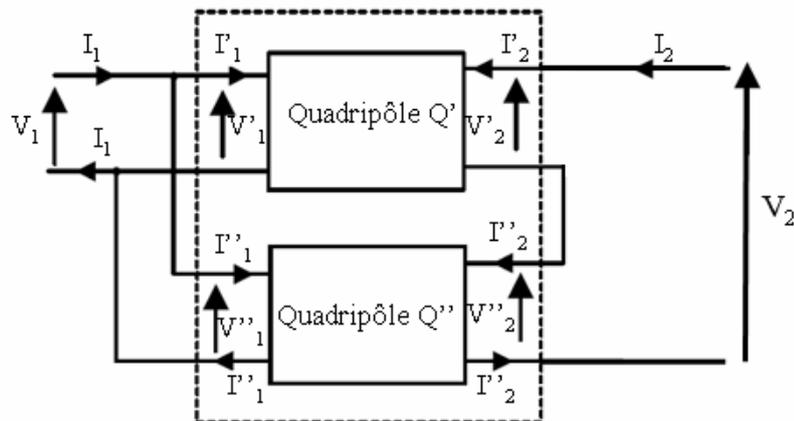


Figure 17 : Quadripôles en parallèle série.

On utilise les matrices hybrides [G'] et [G''] des deux quadripôles associés :

$$\begin{pmatrix} I_1' \\ V_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11}' & G_{12}' \\ G_{21}' & G_{22}' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1' \\ I_2' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_1'' \\ V_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11}'' & G_{12}'' \\ G_{21}'' & G_{22}'' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_1'' \\ I_2'' \end{pmatrix}$$

Comme :

$$\begin{cases} V_1 = V_1' = V_1'' \\ I_2 = I_2' = I_2'' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} I_1 = I_1' + I_1'' \\ V_2 = V_2' + V_2'' \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1' \\ V_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1'' \\ V_2'' \end{pmatrix} = [G'] \cdot \begin{pmatrix} V_1' \\ I_2' \end{pmatrix} + [G''] \cdot \begin{pmatrix} V_1'' \\ I_2'' \end{pmatrix} = ([G'] + [G'']) \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = [G] \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi sous forme matricielle, la matrice hybride $[G]$ du quadripôle équivalent est égale à la somme des matrices hybrides :

$$[G] = [G'] + [G'']$$

7- Grandeurs fondamentales des quadripôles :

Quand le quadripôle est alimenté par un générateur (E_g, Z_g) et qu'il est fermé sur une charge (Z_{ch}), il existe un état électrique du quadripôle qui dépend du générateur et de la charge. Il est possible de définir cet état par les grandeurs caractéristiques suivantes : Les impédances d'entrée et de sortie, et les gains en tension, courant et puissance.

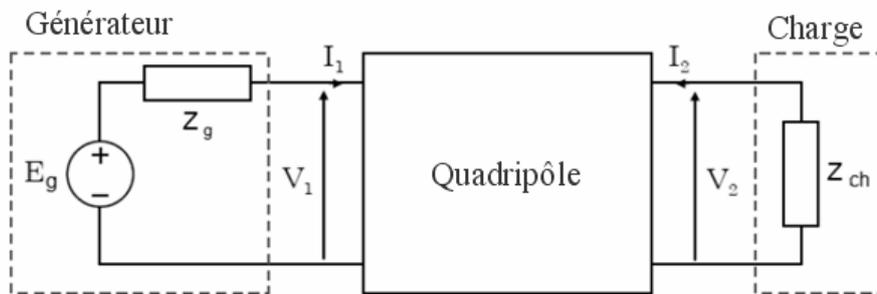


Figure 18 : Quadripôle en charge et attaqué par une source de tension réelle.

7.1- Impédance d'entrée :

C'est l'impédance $Z_E = \frac{V_E}{I_E} = \frac{V_1}{I_1}$ vue à l'entrée quand la sortie est chargée par une impédance Z_{ch} .

7.1.1- Calcul de Z_E en fonction des paramètres Z :

Déterminons dans ce cas la relation liant les grandeurs duales en entrée. En utilisant la matrice d'impédance du quadripôle nous pouvons écrire :

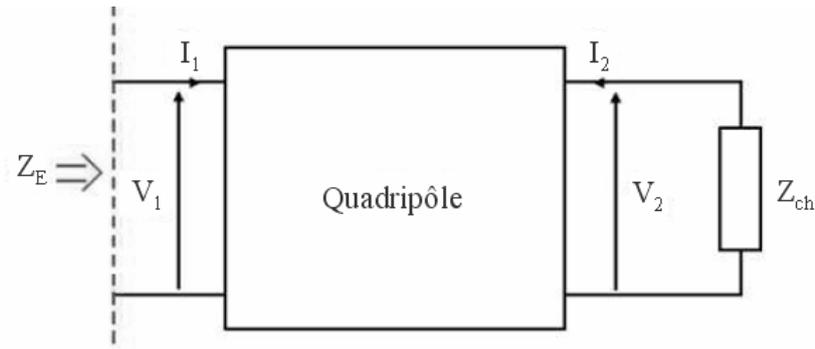


Figure 19 : Impédance d'entrée d'un quadripôle.

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 = -Z_{ch} I_2 \\ I_2 (Z_{22} + Z_{ch}) &= -Z_{21} I_1 \\ I_2 &= -\frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_{ch}} I_1 \\ V_1 &= I_1 \left(Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_{ch}} \right) \end{aligned}$$

En utilisant l'expression de l'impédance d'entrée avec les paramètres de la matrice d'impédance nous avons :

$$Z_E = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_{ch}} = \frac{Z_{ch} Z_{11} + (Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21})}{Z_{22} + Z_{ch}}$$

En posant : $\Delta Z = Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}$ (ΔZ est le déterminant de la matrice impédance $[Z]$).

$$Z_E = \frac{Z_{ch} Z_{11} + \Delta Z}{Z_{22} + Z_{ch}}$$

Si le quadripôle n'est pas chargé ($R_{ch} \rightarrow \infty$) alors $Z_E = Z_{11}$.

7.1.2- Calcul de Z_E en fonction des paramètres a :

En utilisant la matrice de chaîne du quadripôle nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} V_1 &= A V_2 - B I_2 = -(A Z_{ch} + B) \times I_2 \\ I_1 &= C V_2 - D I_2 = -(C Z_{ch} + D) \times I_2 \\ I_2 &= -\frac{I_1}{C Z_{ch} + D} \\ V_1 &= I_1 \times \frac{A Z_{ch} + B}{C Z_{ch} + D} \end{aligned}$$

Si le quadripôle est défini par les paramètres a, il résulte :

$$Z_E = \frac{A Z_{ch} + B}{C Z_{ch} + D}$$

7.1.3- Calcul de Z_E en fonction des paramètres Y :

Si nous utilisons les paramètres Y :

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ I_2 &= Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 = -Y_{ch} V_2 \\ V_2 &= -\frac{Y_{21}}{Y_{22} + Y_{ch}} V_1 \\ I_1 &= V_1 \left(Y_{11} - \frac{Y_{12} Y_{21}}{Y_{22} + Y_{ch}} \right) \end{aligned}$$

Nous avons :

$$Y_E = Y_{11} - \frac{Y_{12} Y_{21}}{Y_{22} + Y_{ch}} = \frac{Y_{11} Y_{ch} + \Delta Y}{Y_{22} + Y_{ch}}$$

7.1.4- Calcul de Z_E en fonction des paramètres H :

$$\begin{aligned} V_1 &= H_{11} I_1 + H_{12} V_2 \\ I_2 &= H_{21} I_1 + H_{22} V_2 = -Y_{ch} V_2 \\ V_2 &= -\frac{H_{21}}{H_{22} + Y_{ch}} I_1 \\ V_1 &= I_1 \left(H_{11} - \frac{H_{12} H_{21}}{H_{22} + Y_{ch}} \right) \end{aligned}$$

Si le quadripôle est défini par les paramètres H :

$$Z_E = H_{11} - \frac{H_{12} H_{21}}{H_{22} + Y_{ch}} = \frac{H_{11} Y_{ch} + \Delta H}{H_{22} + Y_{ch}}$$

Un calcul analogue au précédent donne l'expression de l'impédance d'entrée en fonction des paramètres G :

$$Z_E = G_{11} - \frac{G_{12} G_{21}}{G_{22} + Y_{ch}} = \frac{G_{11} Y_{ch} + \Delta G}{G_{22} + Y_{ch}}$$

7.2- Impédance de sortie :

C'est l'impédance $Z_S = \frac{V_S}{I_S} = \frac{V_2}{I_2}$ vue à la sortie quand l'entrée est fermée par une impédance Z_g qui est l'impédance du générateur.

7.2.1- Calcul de Z_S en fonction des paramètres Z :

Pour déterminer cette impédance, il convient d'annuler le générateur.

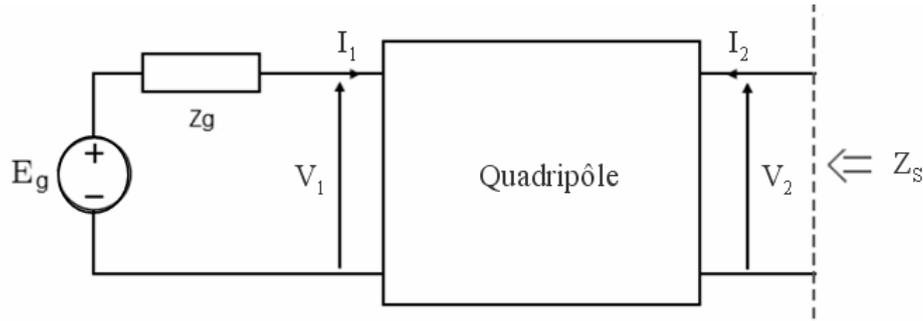


Figure 20 : Impédance de sortie d'un quadripôle.

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 = -Z_g I_1 \\ V_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \\ I_1 &= -\frac{Z_{12}}{Z_{11} + Z_g} I_2 \\ V_2 &= I_2 \left(Z_{22} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{11} + Z_g} \right) \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire :

$$Z_S = Z_{22} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{11} + Z_g} = \frac{Z_g Z_{22} + \Delta Z}{Z_{11} + Z_g}$$

7.2.2- Calcul de Z_S en fonction des paramètres a :

$$\begin{aligned} V_1 &= AV_2 - BI_2 = -Z_g I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{BI_2 - AV_2}{Z_g} \\ I_1 &= CV_2 - DI_2 = \frac{BI_2 - AV_2}{Z_g} \\ V_2 (C \times Z_g + A) &= I_2 (D \times Z_g + B) \end{aligned}$$

L'impédance de sortie en fonction des paramètres de chaîne est donnée par :

$$Z_S = \frac{D \times Z_g + B}{C \times Z_g + A}$$

7.2.3- Calcul de Z_S en fonction des paramètres Y :

Un calcul analogue au précédent donne :

$$Y_S = Y_{22} - \frac{Y_{12} Y_{21}}{Y_{11} + Y_g} = \frac{Y_g Y_{22} + \Delta Y}{Y_{11} + Y_g}$$

7.2.4- Calcul de Z_S en fonction des paramètres H :

$$\begin{aligned} V_1 &= H_{11} I_1 + H_{12} V_2 = -Z_g I_1 \\ I_2 &= H_{21} I_1 + H_{22} V_2 \\ I_1 &= -\frac{H_{12}}{H_{11} + Z_g} V_2 \\ I_2 &= V_2 \left(H_{22} - \frac{H_{12} H_{21}}{H_{11} + Z_g} \right) \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire :

$$Y_S = H_{22} - \frac{H_{12} H_{21}}{H_{11} + Z_g} = \frac{Z_g H_{22} + \Delta H}{H_{11} + Z_g}$$

Un calcul analogue au précédent donne Z_S en fonction des paramètres G :

$$Y_S = G_{22} - \frac{G_{12} G_{21}}{G_{11} + Z_g} = \frac{Z_g G_{22} + \Delta G}{G_{11} + Z_g}$$

7.3- Gain en tension :

C'est le rapport de la tension de sortie par la tension d'entrée quand la sortie est chargée par une impédance Z_{ch} :

$$G_V = \frac{V_2}{V_1} : \text{Ce gain est sans dimension (Réel ou complexe).}$$

7.3.1- Calcul de G_V en fonction des paramètres Z :

Le quadripôle est défini par les paramètres Z, il résulte :

$$\begin{aligned} G_V &= \frac{V_2}{V_1} \\ G_V &= \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2}{Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2} \\ G_V &= \frac{Z_{21} I_1 - Z_{22} \frac{Z_{21}}{Z_{ch} + Z_{22}} I_1}{Z_{11} I_1 - Z_{12} \frac{Z_{21}}{Z_{ch} + Z_{22}} I_1} \end{aligned}$$

Après simplification, nous obtenons :

$$G_V = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_{ch} Z_{21}}{Z_{11} Z_{ch} + \Delta Z}$$

7.3.2- Calcul de G_V en fonction des paramètres Y :

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 = Y_{11} V_1 - Y_{12} Z_{ch} I_2 \quad (I)$$

$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 = Y_{21} V_1 - Y_{22} Z_{ch} I_2 \quad (II)$$

$$(II) \Rightarrow V_1 = \frac{1 + Y_{22} Z_{ch}}{Y_{21}} I_2$$

$$(II) \Rightarrow Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 = -Y_{ch} V_2$$

$$(II) \Rightarrow Y_{21} V_1 = -(Y_{22} + Y_{ch}) V_2$$

Si le quadripôle est défini par les paramètres Y et par l'utilisation des équations (I) et (II), il résulte :

$$G_V = -\frac{Y_{21}}{Y_{22} + Y_{ch}}$$

7.3.3- Calcul de G_V en fonction des paramètres H :

Si nous définissons le quadripôle Q par ses paramètres H :

$$V_1 = H_{11} I_1 + H_{12} V_2 = H_{11} I_1 - H_{12} Z_{ch} I_2 \quad (I)$$

$$I_2 = H_{21} I_1 + H_{22} V_2 = H_{21} I_1 - H_{22} Z_{ch} I_2 \quad (II)$$

$$(II) \Rightarrow H_{21} I_1 = (1 + H_{22} Z_{ch}) I_2$$

$$(II) \Rightarrow I_1 = \left(\frac{1 + H_{22} Z_{ch}}{H_{21}} \right) I_2 = \left(\frac{1 + H_{22} Z_{ch}}{-H_{21} Z_{ch}} \right) V_2$$

Pour trouver la relation qui existe entre la tension V_2 et la tension V_1 , on peut utiliser la relation (I) comme suit :

$$(I) \Rightarrow V_1 = \left(\frac{H_{11} + H_{11} H_{22} Z_{ch}}{-H_{21} Z_{ch}} + H_{12} \right) V_2 = \left(\frac{H_{11} H_{22} Z_{ch} - H_{12} H_{21} Z_{ch} + H_{11}}{-H_{21} Z_{ch}} \right) V_2$$

$$G_V = -\frac{H_{21} Z_{ch}}{\Delta H Z_{ch} + H_{11}} = -\frac{H_{21}}{\Delta H + H_{11} Y_{ch}}$$

7.4- Gain en courant :

Le gain en courant est défini par le rapport du courant de sortie I_2 du quadripôle par le courant d'entrée I_1 :

$$G_I = \frac{I_2}{I_1}$$

7.4.1- Calcul de G_I en fonction des paramètres Z :

Si le quadripôle est défini par les paramètres Z, on obtient :

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 = -Z_{ch} I_2$$

D'où :

$$G_I = \frac{I_2}{I_1} = -\frac{Z_{21}}{Z_{ch} + Z_{22}}$$

On peut observer que le gain en courant dépend de la charge Z_{ch} .

7.4.2- Calcul de G_I en fonction des paramètres Y :

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 = Y_{11} V_1 - Y_{12} Z_{ch} I_2 \quad (I)$$

$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 = Y_{21} V_1 - Y_{22} Z_{ch} I_2 \quad (II)$$

$$(II) \Rightarrow V_1 = \frac{1 + Y_{22} Z_{ch}}{Y_{21}} I_2$$

$$(I) \Rightarrow I_1 = I_2 \left(\frac{Y_{11} + Y_{12} Y_{22} Z_{ch}}{Y_{21}} - \frac{Y_{12} Y_{21} Z_{ch}}{Y_{21}} \right) = I_2 \left(\frac{Y_{11} + \Delta Y Z_{ch}}{Y_{21}} \right)$$

Si nous utilisons les paramètres Y (les équations (I) et (II)), nous obtiendrons :

$$G_I = \frac{Y_{21}}{Y_{11} + \Delta Y Z_{ch}}$$

7.4.3- Calcul de G_I en fonction des paramètres H :

$$V_1 = H_{11} I_1 + H_{12} V_2 = H_{11} I_1 - H_{12} Z_{ch} I_2 \quad (I)$$

$$I_2 = H_{21} I_1 + H_{22} V_2 = H_{21} I_1 - H_{22} Z_{ch} I_2 \quad (II)$$

Pour trouver la relation qui existe entre le courant I_2 et le courant I_1 , on peut utiliser la relation (II) comme suit :

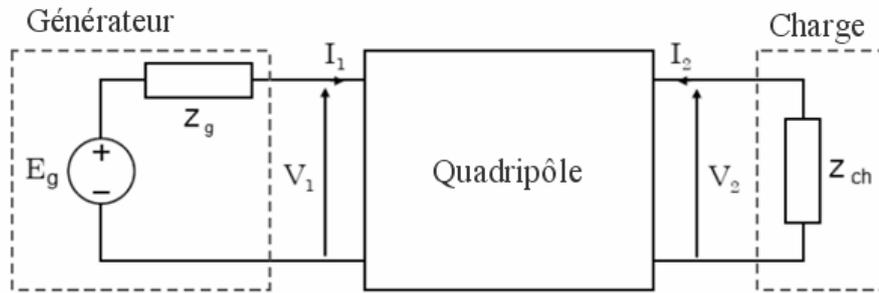
$$(II) \Rightarrow H_{21} I_1 = (1 + H_{22} Z_{ch}) I_2$$

$$(II) \Rightarrow I_1 = \left(\frac{1 + H_{22} Z_{ch}}{H_{21}} \right) I_2$$

Finalement on peut déduire le gain en courant en fonction des paramètres H :

$$G_I = \frac{H_{21}}{1 + H_{22} Z_{ch}}$$

7.5- Gains composites :



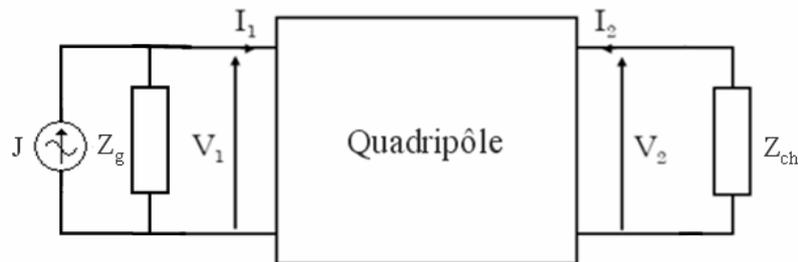
Le gain composite en tension est défini par :

$$G_{VC} = \frac{V_2}{E}$$

$$G_{VC} = \frac{V_2}{V_1} \times \frac{V_1}{E}$$

$$G_{VC} = G_V \times \frac{Z_E}{Z_E + Z_g}$$

Le circuit précédent peut être remplacé par celui-ci :



Le gain composite en courant est défini par :

$$G_{IC} = \frac{I_2}{J}$$

$$G_{IC} = \frac{I_2}{I_1} \times \frac{I_1}{J}$$

$$G_{IC} = G_I \times \frac{Z_g}{Z_E + Z_g} = G_I \times \frac{Y_E}{Y_E + Y_g}$$

Chapitre 2

Les filtres passifs

Les filtres passifs

1- Introduction :

Les filtres sont très utilisés en électronique car ce sont des circuits qui ont pour but essentiel d'éliminer les signaux indésirables dans les signaux. De ce fait il en existe deux types : les filtres actifs et les filtres passifs.

Du fait que notre étude sera basée sur les filtres passifs on aura à faire aux résistances et condensateurs aux montages à quadripôles.

2- Généralités sur le filtrage :

2.1- Définition :

Le filtre est un quadripôle linéaire (Deux bornes d'entrées, et deux bornes de sorties), qui ne laisse passer que les signaux compris dans un domaine de fréquence limité, appelé la bande passante.

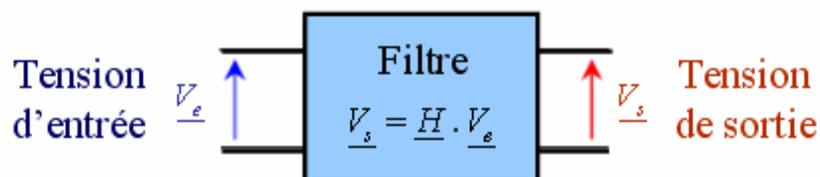


Figure 1 : Représentation d'un filtre.

- **Filtres passifs :**

Les filtres passifs se présentent sous la forme de quadripôle linéaire : Réseau électrique à 4 bornes à base de composants passifs (Résistances, inductances, condensateurs).



Un filtre passif est un circuit linéaire \Rightarrow Si la tension d'entrée est sinusoïdale alors la tension de sortie est sinusoïdale de même fréquence.

2.2- Types de filtre :

On peut distinguer 4 types de filtre idéaux, selon la dépendance du gain en fonction de la fréquence. On parle de filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe-bande.

2.2.1- Le filtre passe-bas :

Le filtre passe-bas, comme son nom l'indique, ne laisse passer que les signaux ayant une fréquence inférieure ou égale à sa fréquence de coupure haute.

Sur le graphe représenté ci-contre (*Figure 2a*), on voit que lorsque la fréquence est inférieure à la fréquence de coupure haute, la transmittance est égale à 1, ce qui signifie que la tension présente en sortie, est identique à celle présente en entrée.

Si la fréquence est supérieure à la fréquence de coupure haute du filtre, la transmittance sera égale à 0, car la tension de sortie sera nulle.

2.2.2- Le filtre passe-haut :

Le filtre passe-haut, quand à lui, ne laisser passer que les signaux dont la fréquence est supérieur ou égale à la fréquence de coupure basse.

Le raisonnement est analogue à celui que nous avons utilisé pour la démonstration du filtre passe-bas.

2.2.3- Le filtre passe-bande :

Le filtre passe-bande, ne laisse passer que les signaux ayant une fréquence comprise entre la fréquence de coupure basse du filtre, et sa fréquence de coupure haute.

Ce dernier est principalement utilisé dans les récepteurs radio. En effet, le filtre sélectionne une plage de fréquence plus ou moins étroite, correspondant à la plage de fréquence que nous voulons écouter sur notre récepteur.

2.2.4- Le filtre coupe-bande :

Le filtre à rejet (ou filtre coupe-bande) laisse passer tout sauf ce qui est entre les deux fréquences de coupure.

Les filtres sont caractérisés selon leur réponse en fréquence. La variation de l'amplitude en fonction de la fréquence est le critère le plus important. Les courbes idéales de la *figure 2* montrent les quatre types de filtres principaux.

Les filtres idéals sont caractérisés par deux zones :

- **Bande passante** : C'est l'étendue des fréquences entre lesquelles un signal à l'entrée passe à la sortie.
- **Bande atténuée** : C'est l'étendue de fréquences où l'amplitude d'un signal est atténuée de sorte qu'il n'apparaît pas à la sortie.

Idéalement, on devrait avoir $|\underline{H}(j\omega)| = 1$ dans la bande passante et $|\underline{H}(j\omega)| = 0$ en dehors.

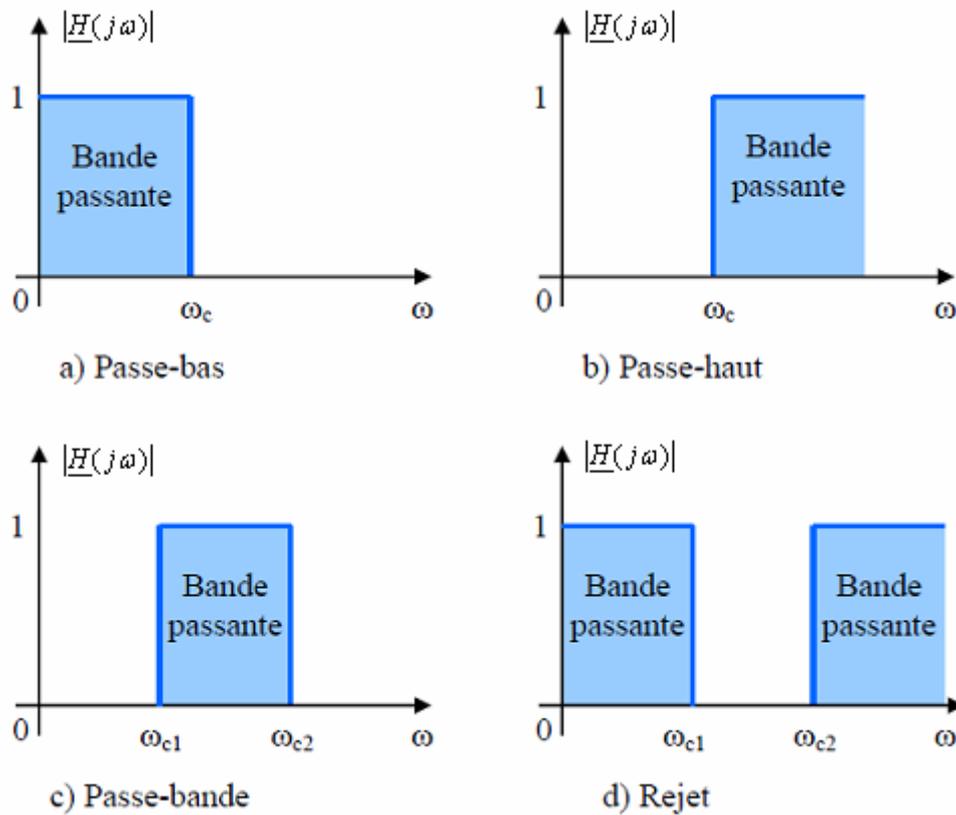


Figure 2 : Classification des filtres.

Tableau 1 : La bande passante pour chaque type de filtre.

Type de filtre	Bande Passante
Passe-bas	BP = $[0, \omega_c]$
Passe-haut	BP = $[\omega_c, +\infty[$
Passe-bande	BP = $[\omega_{c1}, \omega_{c2}]$
Coupe-bande	BP = $[0, \omega_{c1}] \cup [\omega_{c2}, +\infty[$

2.3- Fréquence de coupure :

On définit la *pulsation de coupure* ω_c d'un système comme étant celle pour laquelle le gain maximum en *tension* est divisé par $\sqrt{2}$.

$$G(\omega_c) = \frac{G_{Max}}{\sqrt{2}}$$

Or $\log(\sqrt{2}) = 0,1505 \approx \frac{3}{20}$. On peut donc aussi définir la pulsation de coupure comme la pulsation qui correspond à une diminution de 3 dB du gain maximum.

$$G_{dB}(\omega_c) = G_{dBMax} - 3 \text{ dB}$$

Le décibel (dB) est une unité sans dimension.

2.4- Caractéristique d'un filtre :

2.4.1- Fonction de transfert :

La fonction de transfert ou transmittance d'un filtre est une fonction complexe de la pulsation $\underline{H}(j\omega)$ définie par le rapport entre l'amplitude complexe de la grandeur de sortie et l'amplitude complexe de la grandeur d'entrée, le plus souvent en tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$$

2.4.2- Le gain d'un filtre :

Le gain $G(\omega)$ d'un filtre est défini par le module de sa fonction de transfert :

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$$

Il dépend de la fréquence et donne accès au rapport de l'amplitude de la sortie sur l'amplitude de l'entrée.

2.4.3- Diagramme asymptotique et diagramme réel :

Les diagrammes de Bode peuvent se représenter sous forme de courbes réelles ou de diagrammes asymptotiques :

- **Courbe asymptotique** : C'est la représentation graphique simplifiée des fonctions à l'aide de leurs équivalents aux bornes du domaine de définition ($\omega \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow +\infty$ et $\omega \rightarrow \omega_0$).
- **Courbe réelle** : C'est la représentation graphique des fonctions $G_{dB}(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ en fonction de f ou de ω .

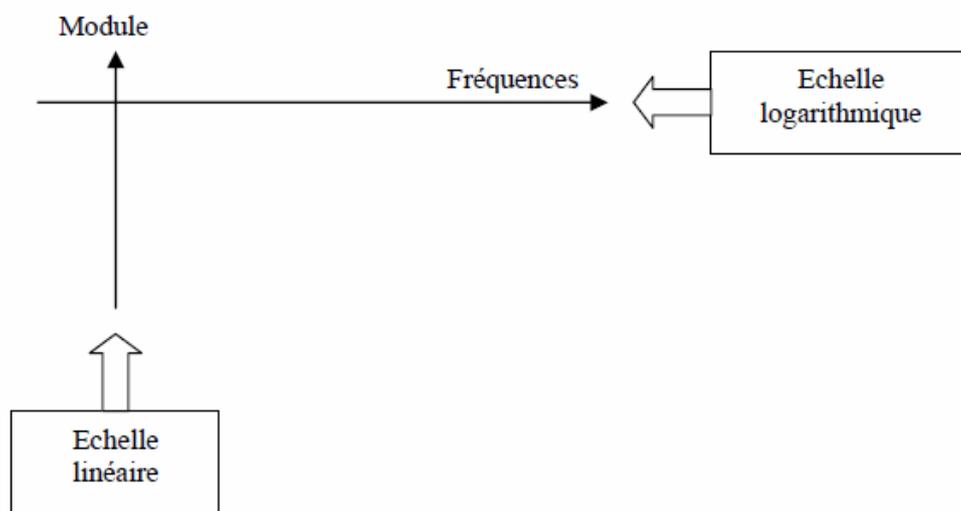
2.4.4- Diagramme de Bode d'un filtre :

Le diagramme de Bode est un *outil graphique* qui permet de visualiser le comportement d'un filtre en fonction de la fréquence.

On appelle représentation dans le plan de Bode d'une fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ l'ensemble des deux diagrammes suivants :

- Une courbe donnant le gain en décibels $G_{dB}(\omega)$ de la fonction de transfert en fonction de la pulsation ω en échelle logarithmique :

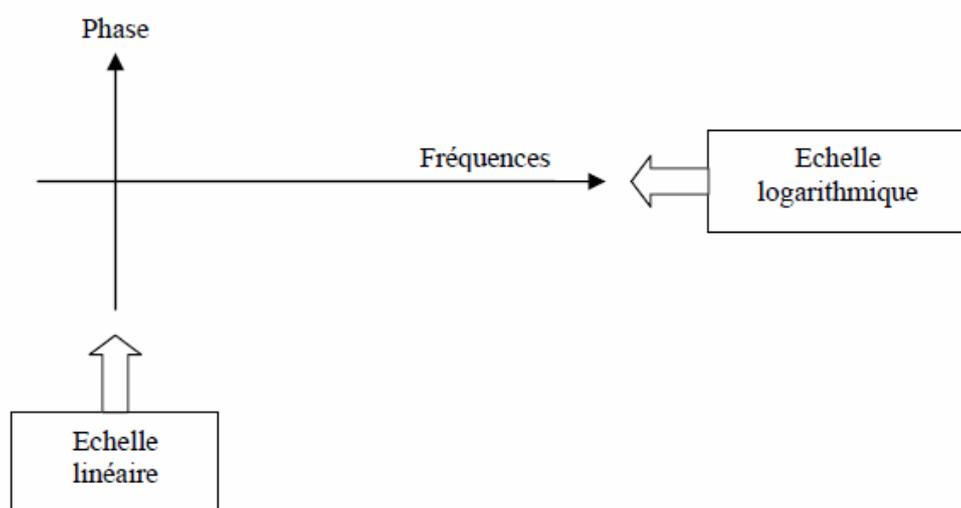
$$G_{dB}(\omega) = 20 \log (G(\omega)) = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|$$



- Une courbe donnant l'argument $\varphi(\omega)$ de la fonction de transfert, en échelle linéaire en fonction de la pulsation ω en échelle logarithmique, appelée courbe de phase :

$$\varphi(\omega) = \arg [\underline{H}(j\omega)] = \arg \left[\frac{V_s}{V_e} \right] = \arg [V_s] - \arg [V_e]$$

Expérimentalement, $\varphi(\omega) = \varphi_s - \varphi_e$ peut être mesurée à l'aide d'un oscilloscope.



- Le tracé d'un diagramme de Bode commence par le tracé des courbes asymptotiques. (On étudie le comportement de G et φ lorsque $\omega \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow +\infty$ et $\omega \rightarrow \omega_0$).

- On complète ensuite par le tracé réel en marquant quelques points aux environs des jonctions entre les courbes asymptotiques.

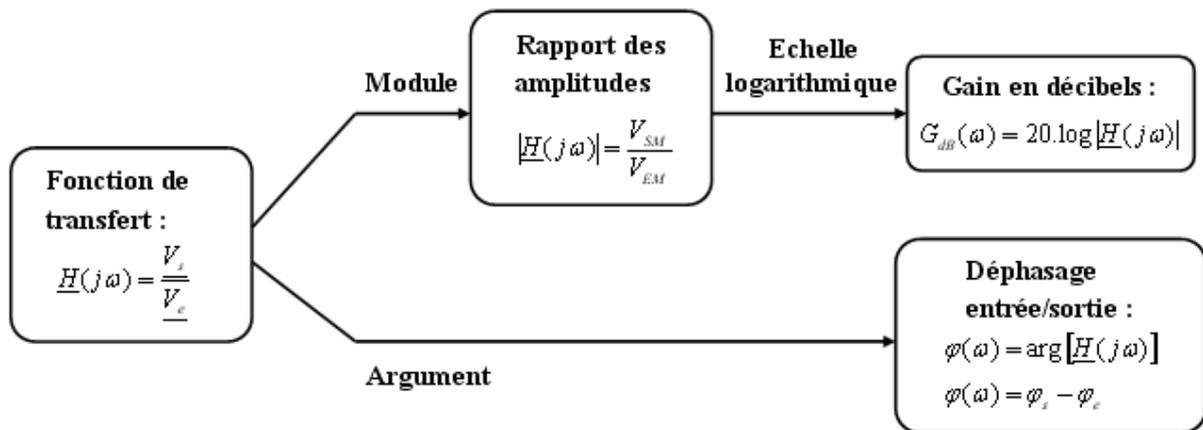


Figure 3 : Détermination du gain et du déphasage.

3- Filtre RC passe-bas d'ordre 1 :

Le circuit est montré à la figure 4.

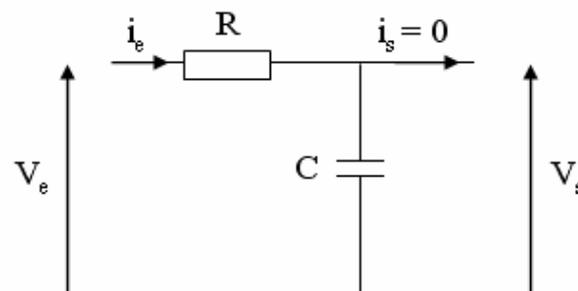


Figure 4 : Filtre passe-bas (RC série).

Source : $v_e = V_e \cos(\omega t + \varphi)$.

Charge : Circuit ouvert ($i_s = 0$).

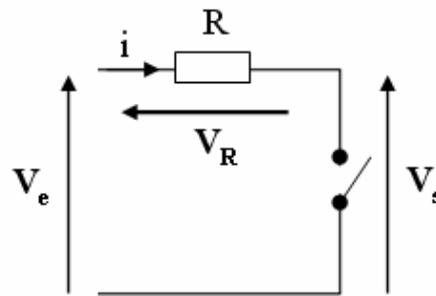
A condition que la sortie ne soit pas chargée, ce circuit est un diviseur de tension idéal.

3.1- Comportement asymptotique :

L'impédance du condensateur vaut :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

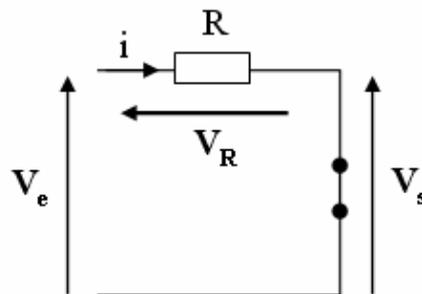
▪ **Analyse Basses Fréquences :**



Si $\omega \rightarrow 0$, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert alors $\underline{Z}_C \rightarrow \infty$ et $\underline{V}_s \rightarrow \underline{V}_e$.

A Basses Fréquences, la tension d'entrée « Passe à travers le circuit » et se retrouve en sortie.

▪ **Analyse Hautes Fréquences :**



Si $\omega \rightarrow \infty$, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé alors $\underline{Z}_C \rightarrow 0$ et $\underline{V}_s \rightarrow 0$.

A Hautes Fréquences, la tension d'entrée « Ne passe pas à travers le circuit ».

La tension d'entrée n'est retrouvée en sortie que pour les basses-fréquences.

\Rightarrow *Le filtre RC est un circuit passe-bas.*

3.2- Fonction de transfert :

La fonction de transfert est définie par :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$$

Avec :

\underline{V}_e : Amplitude complexe de la tension d'entrée d'un signal sinusoïdal.

\underline{V}_s : Amplitude complexe de la tension de sortie.

Par observation sur le schéma, nous voyons que nous pouvons utiliser le diviseur de tension :

$$\underline{V}_s = \underline{V}_e \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C}$$

Sachant que l'impédance de la résistance vaut :

$$\underline{Z}_R = R$$

Et que l'impédance du condensateur vaut :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

On en déduit que la transmittance du filtre passe-bas est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}}$$

On peut maintenant calculer la transmittance :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{1/RC}}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{RC} \rightarrow \text{Pulsation de coupure.} \\ G_{Max} = 1 \rightarrow \text{Gain maximum.} \end{cases}$$

Fonction de transfert du filtre passe-bas du premier ordre s'écrit alors :

$$\underline{H}(j\omega) = G_{Max} \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

3.3- La fréquence de coupure :

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{RC} \Rightarrow 2\pi f_c = \frac{1}{RC} \\ \omega_0 = 2\pi f_c \end{cases}$$

La fréquence de coupure est :

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

3.4- Diagramme de Bode :

3.4.1- Module de transmittance :

Le module de la fonction de transfert est :

$$G(\omega) = \left| \frac{H(j\omega)}{V_e} \right| = \frac{V_s}{V_e} = \left| G_{Max} \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Le gain en décibel est :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \left[\left| \frac{H(j\omega)}{V_e} \right| \right] = 20 \log \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \right] = 20 \log [1] - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$G_{dB}(\omega) = -20 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = -20 \times \frac{1}{2} \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]$$

$$G_{dB}(\omega) = -10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]$$

- Basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$) :

Si $\omega \rightarrow 0$: $G_{dB} = -10 \log [1] = 0 \text{ dB} \Rightarrow$ On a une asymptote horizontale $\log(\omega/\omega_0)$ tend vers $-\infty$.

- Haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$) :

Si $\omega \rightarrow \infty$: $G_{dB} = -10 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = -10 \times 2 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \Rightarrow$ On a une asymptote de pente -20 dB/Décade en $+\infty$.

- Si $\omega = \omega_0$:

$G_{dB}(\omega_0) = -10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_0}\right)^2 \right] = -10 \log [2] = -3 \text{ dB} \Rightarrow$ L'intersection entre les deux asymptotes (La pulsation de coupure).

Le diagramme asymptotique se limite à deux droites de pentes 0 et -20 dB/décade (Figure 5).

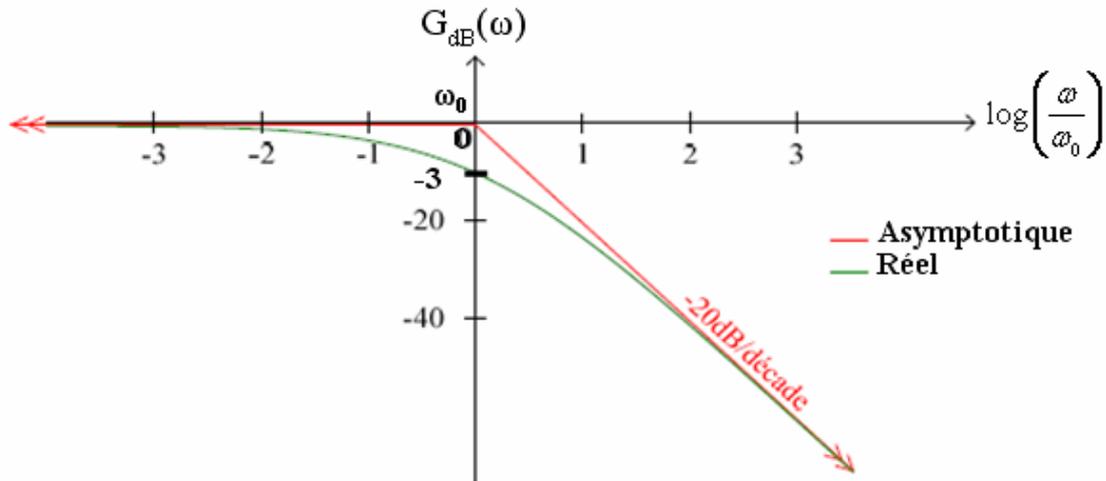


Figure 5 : Courbe réelle et courbe asymptotique du gain.

3.4.2- Phase de transmittance :

La phase de la fonction de transfert est :

$$\varphi(\omega) = \arg [H(j\omega)] = \arg \left[G_{Max} \frac{1}{1 + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)} \right] = \arg [1] - \arg \left[1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \right]$$

$$\varphi(\omega) = \arctg [0] - \arctg \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) = -\arctg \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

Pour la phase, on obtient :

- Basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$) :

Si $\omega \rightarrow 0$: $\varphi = 0 \Rightarrow$ On a une asymptote horizontale en $-\infty$.

- Haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$) :

Si $\omega \rightarrow \infty$: $\varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ On a une asymptote horizontale en $+\infty$.

- Si $\omega = \omega_0$:

$\varphi(\omega_0) = -\arctg \left(\frac{\omega_0}{\omega_0} \right) = -\arctg [1] = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow$ L'intersection entre les deux asymptotes (La pulsation de coupure).

Pour la phase, nous trouvons deux asymptotes : Une asymptote horizontale à 0 et une autre asymptote horizontale à $(-\pi/2)$ (Figure 6).

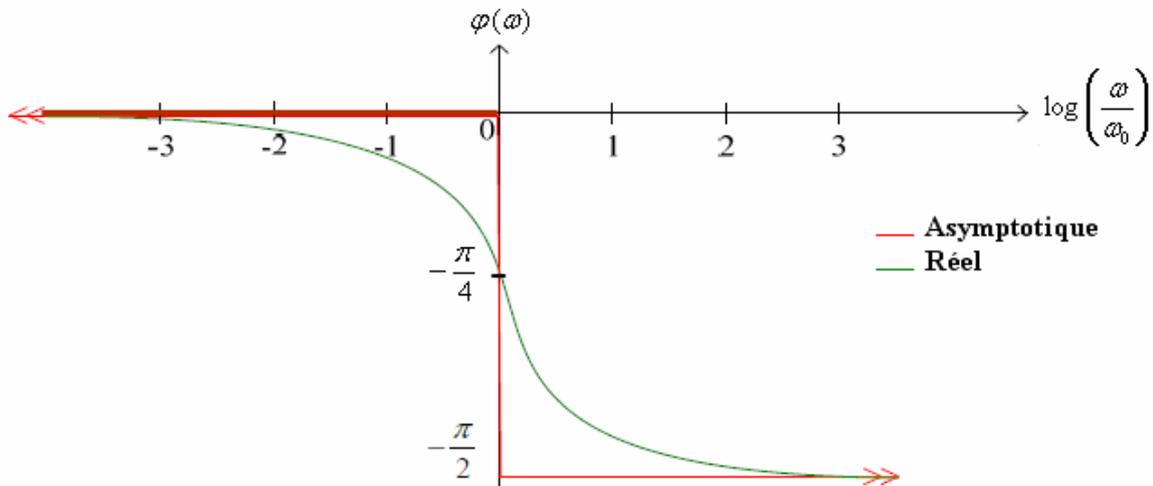


Figure 6 : Courbe réelle et courbe asymptotique de la phase.

4- Filtre CR passe-haut d'ordre 1 :

La configuration est presque la même que le filtre passe-bas, sauf qu'on a échangé la résistance et la capacitance (Figure 7). La sortie est sur la résistance.

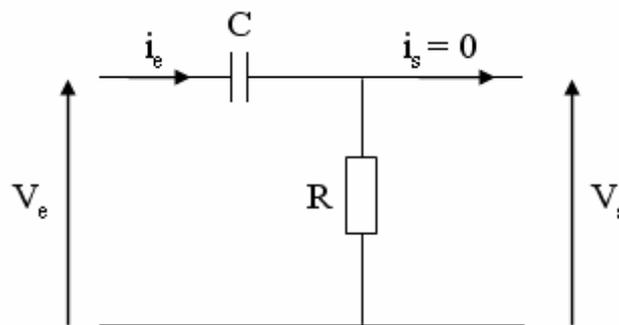


Figure 7 : Filtre passe-haut (CR série).

Source : $v_e = V_e \cos(\omega t + \varphi)$.

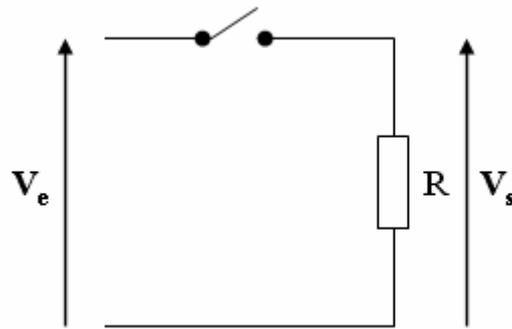
Charge : R_∞ .

4.1- Comportement asymptotique :

L'impédance du condensateur vaut :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

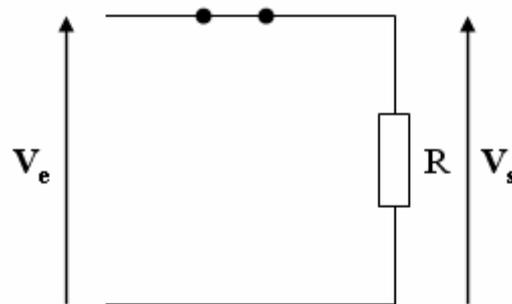
▪ **Analyse Basses Fréquences :**



Si $\omega \rightarrow 0$, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert alors $\underline{Z}_C \rightarrow \infty$ et $\underline{V}_s \rightarrow 0$.

A Basses Fréquences, la tension d'entrée « Ne passe pas à travers le circuit ».

▪ **Analyse Hautes Fréquences :**



Si $\omega \rightarrow \infty$, le condensateur se comporte comme un fil (un court-circuit) alors $\underline{Z}_C \rightarrow 0$ et

$$\underline{V}_s \rightarrow \underline{V}_e.$$

A Hautes Fréquences, la tension d'entrée « Passe à travers le circuit » et se retrouve en sortie.

La tension d'entrée n'est retrouvée en sortie que pour les hautes-fréquences.

⇒ *Le filtre CR est un circuit passe-haut.*

4.2- Fonction de transfert :

La fonction de transfert est définie par :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$$

Avec le diviseur de tension, on obtient :

$$\underline{V}_s = \underline{V}_e \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \underline{V}_e \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j \frac{\omega}{1/RC}}{1 + j \frac{\omega}{1/RC}}$$

En posant : $\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{RC} \rightarrow \text{Pulsation de coupure.} \\ G_{Max} = 1 \rightarrow \text{Gain maximum.} \end{cases}$

La fréquence de coupure est :

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

La transmittance du filtre passe-haut du premier ordre s'écrit alors :

$$\underline{H}(j\omega) = G_{Max} \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

4.3- Les diagrammes de Bode de la phase et de l'amplitude :

4.3.1- Module de transmittance :

Le module de la fonction de transfert (Gain) est :

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \left| G_{Max} \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \right| = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}}$$

Le gain en décibel est :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log [|\underline{H}(j\omega)|] = 20 \log \left[\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \right] = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - 20 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - 20 \times \frac{1}{2} \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]$$

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - 10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]$$

- Basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$) :

Si $\omega \rightarrow 0$: $G_{dB} = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - 10 \log [1] = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \Rightarrow$ On a une asymptote de pente +20 dB/Décade en $-\infty$.

- Haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$) :

Si $\omega \rightarrow \infty$: $G_{dB} = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - 10 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - 10 \times 2 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$

$G_{dB} = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) = 0 \Rightarrow$ On a une asymptote horizontale en $+\infty$.

- Si $\omega = \omega_0$:

$G_{dB}(\omega_0) = 20 \log \left(\frac{\omega_0}{\omega_0} \right) - 10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_0} \right)^2 \right] = 20 \log [1] - 10 \log [2] = -3 \text{ dB} \Rightarrow$ L'intersection entre les deux asymptotes (La pulsation de coupure).

Le diagramme asymptotique se limite à deux droites de pentes 0 et +20 dB/décade (Figure 8).

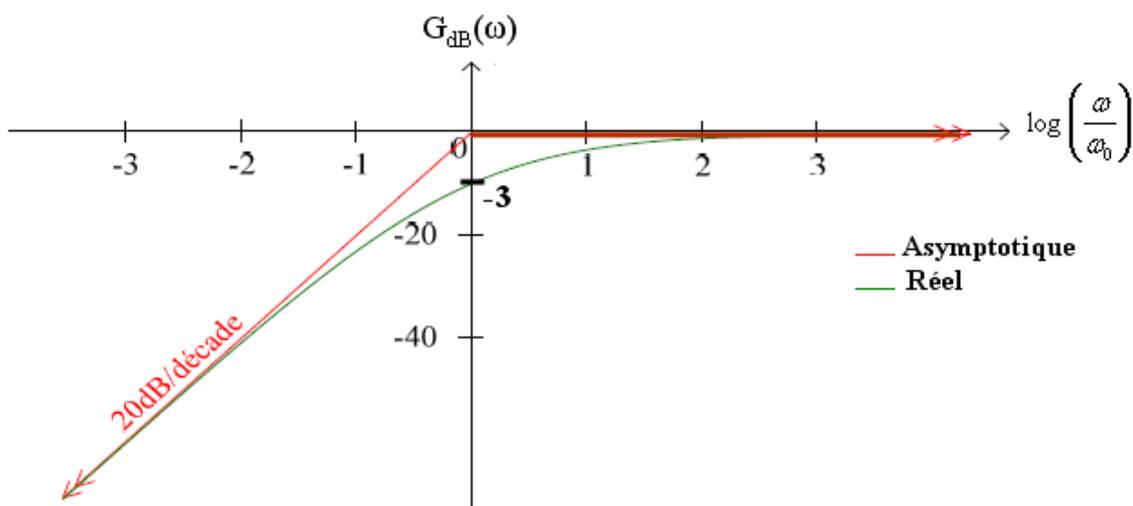


Figure 8 : Courbe réelle et courbe asymptotique du gain d'un filtre passe-haut.

4.3.2- Phase de transmittance :

L'argument de la fonction de transfert (Phase) est :

$$\varphi(\omega) = \arg [H(j\omega)] = \arg \left[G_{Max} \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \right] = \arg \left[j\frac{\omega}{\omega_0} \right] - \arg \left[1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \right]$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

Pour la phase, on obtient :

- Basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$) :

Si $\omega \rightarrow 0$: $\varphi = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ On a une asymptote horizontale en $-\infty$.

- Haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$) :

Si $\omega \rightarrow \infty$: $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow$ On a une asymptote horizontale en $+\infty$.

- Si $\omega = \omega_0$:

$\varphi(\omega_0) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \left(\frac{\omega_0}{\omega_0} \right) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg} [1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ L'intersection entre les deux asymptotes (La pulsation de coupure).

Pour la phase, nous trouvons aussi deux asymptotes : Une asymptote horizontale à $(\pi/2)$ et une autre asymptote horizontale à 0 (Figure 9).

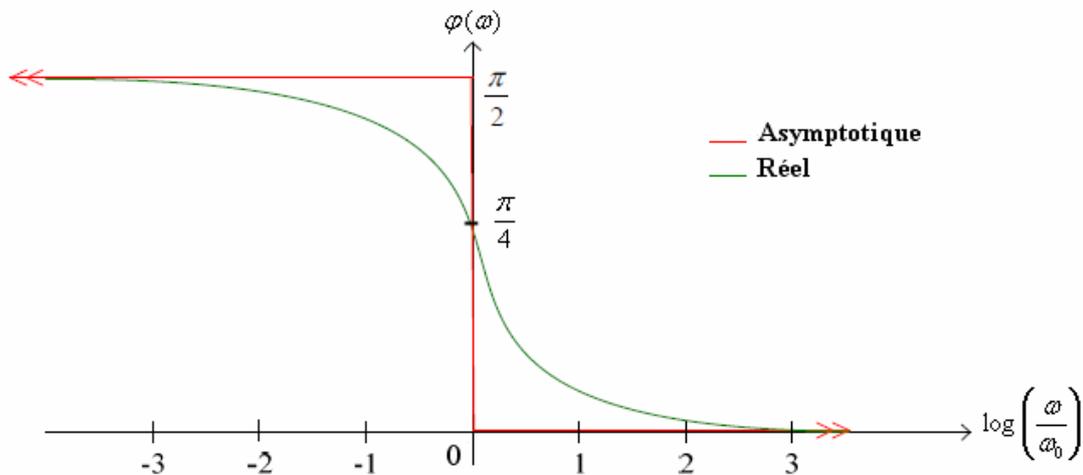


Figure 9 : Courbe réelle et courbe asymptotique de la phase d'un filtre passe-haut.

Chapitre 3

Notions sur les Semiconducteurs

Notions sur les semiconducteurs

Pour comprendre comment les diodes, transistors et circuits intégrés fonctionnent, il faut d'abord étudier les semiconducteurs : matériaux qui ne sont ni conducteurs ni isolants. Ils contiennent des électrons libres mais aussi des trous, ce qui les rend particuliers. Ce chapitre est consacré aux semiconducteurs, la jonction PN et autres thèmes relatifs au sujet.

1- Les semiconducteurs :

1.1- Introduction :

Quand on applique une différence de potentiel entre deux points d'un corps quelconque, celui-ci peut se comporter de diverses façons. Deux cas extrêmes sont l'excellente conduction électrique d'un métal (Résistivité : $1,7 \times 10^{-6} \Omega \text{ cm}$ pour Cu) et l'excellent isolement d'un diélectrique (Résistivité : $2 \times 10^{17} \Omega \text{ cm}$ pour le mica). Entre les cas extrêmes existe une catégorie de corps, les semiconducteurs qui, par certaines propriétés, se rapprochent des isolants, par d'autres des métaux conducteurs, et dont la résistivité varie énormément ($10^6 \Omega \text{ cm}$ à $10^{-4} \Omega \text{ cm}$) en fonction de la température.

1.2- Définition :

- Ils se placent entre les conducteurs et les isolants.
- Ils possèdent une résistivité intermédiaire entre celle des conducteurs et celle des isolants :
- Ils se comportent comme des **isolants** aux basses températures lorsque l'agitation thermique est faible et comme des **conducteurs** aux températures élevées.
- La résistivité d'un semiconducteur diminue quand la température augmente.

1.3- Rappel de la description simplifiée de la structure des atomes :

- Les atomes sont des particules de base constituées d'un noyau autour duquel gravitent des électrons.
- Le noyau est composé de protons, particules élémentaires chargées électriquement à la valeur (+e), et de neutrons, sans charge.
- Les électrons sont des particules chargées électriquement à la valeur (-e). Ils tournent autour du noyau sur des orbites définies et ont une masse négligeable vis à vis des neutrons et protons (qui ont eux environ la même masse).

- La charge électrique élémentaire vaut $e = 1,6 \times 10^{-19} C$ (C pour Coulomb, unité de charge électrique).
- Les orbites des électrons ont des dimensions très grandes vis à vis de celle du noyau, et l'ensemble de l'atome est électriquement neutre, car il comprend autant de protons que d'électrons.
- Les électrons se répartissent sur des orbites différentes qui forment des couches. Les couches sont remplies par les électrons dans un ordre bien déterminé. Dans la mesure du possible, ceux-ci s'assemblent par paires. Quand ce n'est pas possible, ils restent célibataires.
- Quand l'atome possède plusieurs couches d'électrons, les couches profondes contiennent un nombre d'électrons indépendant de l'atome considéré. C'est la couche périphérique qui fait la différence.

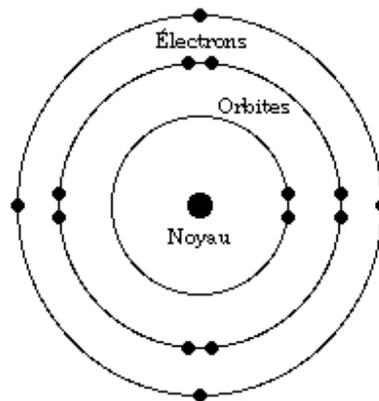


Figure 1 : Structure d'un atome (Silicium).

1.4- Bandes d'énergie :

Dans un *atome isolé*, les électrons occupent des niveaux d'énergie particuliers et distincts. Quand des atomes se rapprochent pour former un solide, le principe d'exclusion de Pauli indique que pas plus de deux électrons dans le solide peuvent avoir la même énergie. Quand *deux* atomes se réunissent pour former une liaison covalente, le même principe de Pauli serait violé si les niveaux énergétiques des deux électrons de la liaison étaient les mêmes. Par conséquent les niveaux énergétiques de ces électrons se *divisent en deux* niveaux d'énergie différents.

Si le *nombre d'atomes augmente*, ces deux niveaux se subdivisent eux mêmes en d'autres niveaux d'énergie très voisins ce qui donne finalement des *bandes d'énergie* (Figure ci-dessous).

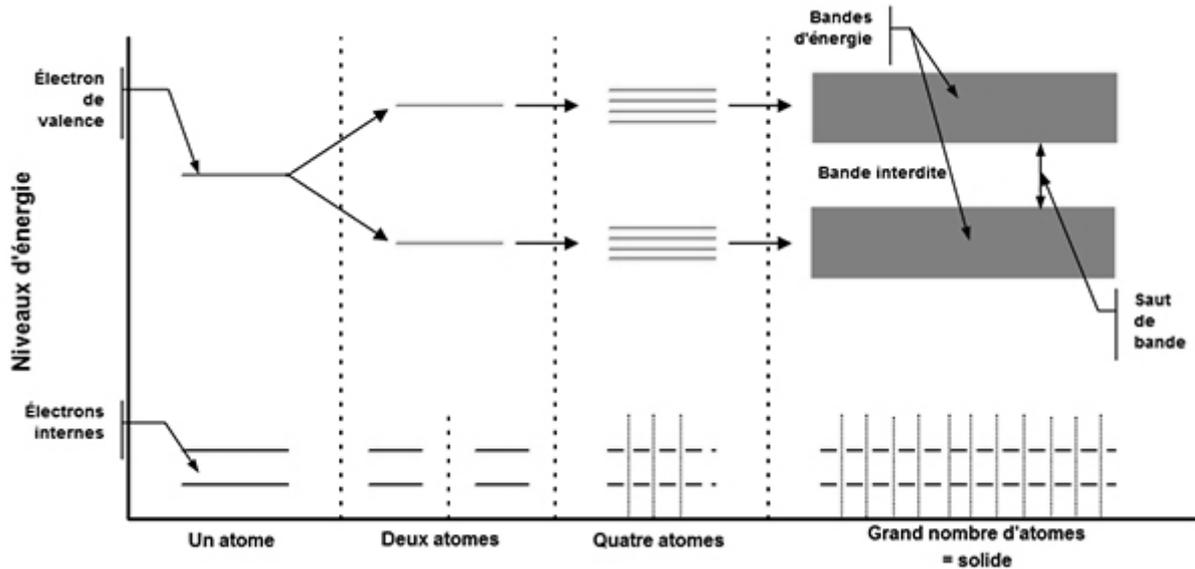


Figure 2 : Des niveaux énergétiques des électrons de valence lorsque le nombre d'atomes rassemblés augmente (Schéma simplifié).

1.4.1- Conducteurs :

Pour les *conducteurs*, la bande de valence et la bande de conduction se *chevauchent*. Les électrons peuvent donc passer directement dans la bande de conduction et *circuler* dans tout le solide. La conductivité est bonne.

1.4.2- Isolants :

Pour les *isolants*, la bande de valence et la bande de conduction sont séparées par un gap (bande interdite) de l'ordre de **6 eV**. Cette valeur est trop élevée pour que les électrons passent dans la bande de conduction.

1.4.3- Semiconducteurs :

Pour les *semiconducteurs*, la bande de valence et la bande de conduction sont séparées par un gap plus faible, compris entre 0,5 et 4 eV, mais le plus souvent voisin de **1 eV**. Si on apporte cette énergie aux électrons, certains pourront passer dans la bande de conduction et circuler dans le matériau. L'apport d'énergie peut se faire par chauffage, par application d'un champ électromagnétique ou par illumination. A température ambiante la conduction est faible, elle *augmente rapidement* avec la température.

Les *bandes d'énergie* correspondent donc aux niveaux d'énergie qui sont **permis**, ou **interdits**, aux électrons des éléments ou des composés formant le matériau solide. La dernière bande remplie est appelée *bande de valence (BV)*, la bande immédiatement supérieure *bande de conduction (BC)*. La bande d'énergie comprise entre ces deux bandes est appelée *bande*

interdite (BI) ou plus simplement « **Gap** ». C'est la valeur de l'énergie de cette bande qui va fixer les propriétés électriques du matériau (Figure ci-dessous) :

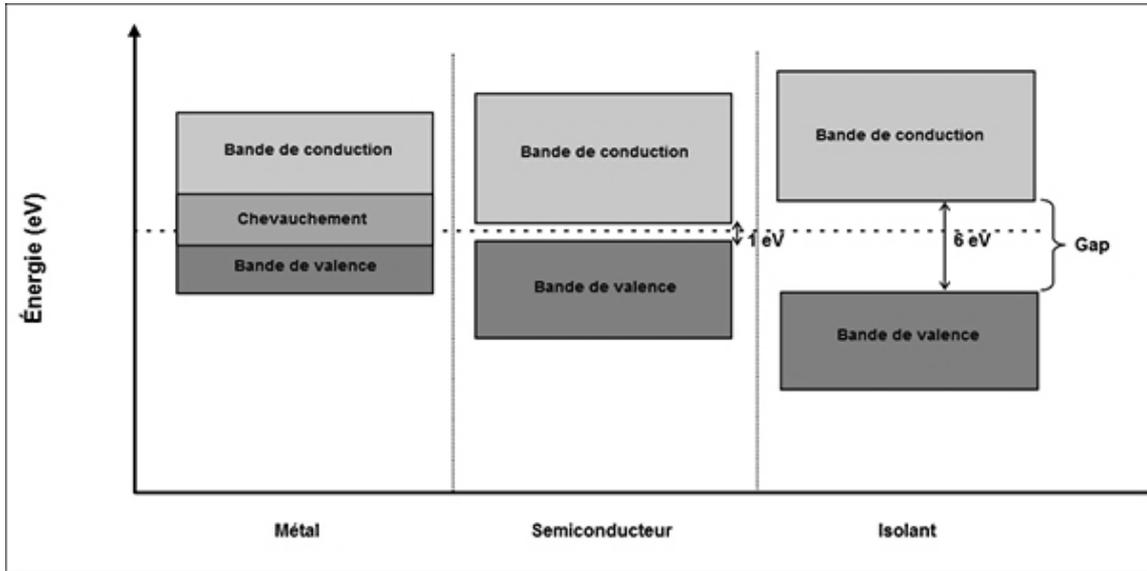


Figure 3 : Position des bandes d'énergie pour un métal, un semiconducteur et un isolant (Schéma simplifié).

1.5- Les semiconducteurs purs ou intrinsèques :

Lorsque le corps est parfaitement pur, il est qualifié d'intrinsèque.

Un semiconducteur est constitué par un réseau cristallin de matériau très pur. On utilise soit des éléments du tableau périodique possédant chacun 4 électrons de valence, soit des combinaisons de matériaux qui possèdent 3 et 5 électrons de valence. Les atomes sont liés entre eux par des liaisons covalentes. Ces liaisons sont robustes, ce qui fait que pour arracher des électrons des atomes, il faut fournir une énergie assez importante (Environ 1 eV, contre 0,1 eV pour les conducteurs et 5 eV pour les isolants).

Exemples : Les trois principaux semiconducteurs utilisés en électronique sont : Silicium (Si), Germanium (Ge), Arseniure de gallium (As Ga).

- Le silicium (Si) : C'est le matériau le plus utilisé actuellement pour la fabrication des composants électroniques.
- Le germanium (Ge) : Il est délaissé (Trop sensible en température : Courants de fuite importants, température de fonctionnement limitée).
- L'arseniure de gallium (As Ga) : Il est très utilisé dans la fabrication de composants opto électroniques, et permet aussi de fabriquer des composants plus rapides que ceux en silicium; ces applications sont cependant relativement rares.

Le matériau semiconducteur actuellement le plus utilisé est le Silicium.

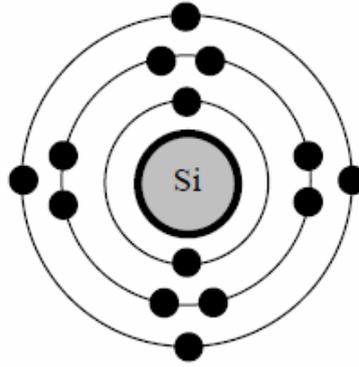


Figure 4 : Atome de Silicium.

Le Silicium est un atome tétravalent : Il possède 4 électrons de valence qui vont se mettre en commun avec d'autres atomes de Silicium pour avoir la forme cristalline (Figure 5).

La liaison covalente entre les atomes de Silicium s'effectue par mise en commun de 2 électrons. Alors chaque atome est entouré de 8 électrons, ce qui est une configuration stable : il y a occupation totale de la bande de valence, et donc le Si est isolant à basse température.

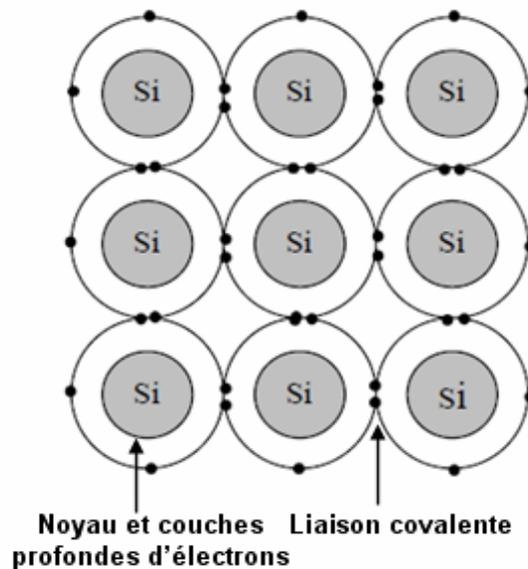


Figure 5 : Liaisons dans un cristal de Silicium.

A la température 0 K toutes les liaisons covalentes sont maintenues. C'est un bon isolant : pas d'électrons libres.

Lorsque la température du cristal augmente, certains électrons de valence quittent leurs places, certaines liaisons covalentes sont interrompues. On dit qu'il y a rupture de la liaison covalente et par conséquent :

- Libération de certains électrons qui vont se déplacer librement \Rightarrow Conduction du courant électrique.

- Il reste une liaison rompue (un ion Si^+) \Rightarrow Naissance d'une paire de charge : Electron libre (charge négative) et trou (charge positive).

Population des porteurs à la température T :

Pour une température différente de 0 K, des électrons peuvent devenir « libres » c'est à dire passer de la bande de valence à la bande de conduction, où leur concentration est notée n. Ces électrons laissent des trous dans la bande de valence (BV) (avec une concentration notée p) eux aussi libres de se déplacer avec, de plus, une égalité entre les concentrations n et p. Pour ce cas particulier, on définit une concentration intrinsèque n_i (égale aux concentrations n et p) qu'elle est donnée par la relation :

$$n = p = n_i(T) = A T^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{E_g}{2 K_B T}\right)$$

$$n \times p = n_i^2 = A^2 T^3 \exp\left(-\frac{E_g}{K_B T}\right)$$

Où :

n, p sont les concentrations à l'équilibre des électrons et trous.

n_i est la concentration intrinsèque.

E_g est l'énergie du gap (ou de bande interdite).

A est constante spécifique du matériau.

$K_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K est la constante de Boltzmann.

Exemple :

Matériau	E_g (eV)	Remarque
C	5,5	Isolant à T = 300 K
Si	1,12	Semiconducteur à 300 K
Ge	0,67	Semiconducteur à 300 K

1.6- Les semiconducteurs dopés ou extrinsèques :

Un semiconducteur dopé peut avoir un excès d'électrons libres ou un excès de trous, c'est pour cela qu'il y a deux types de semiconducteurs dopés.

1.6.1- Dopage des semiconducteurs :

Le dopage est l'introduction dans un semiconducteur intrinsèque de très faible quantité d'un corps étranger appelé **dopeur**.

Pour les semiconducteurs usuels (Si, Ge), les dopeurs utilisés sont :

- Soit **des éléments pentavalents** : Ayant 5 électrons périphériques.

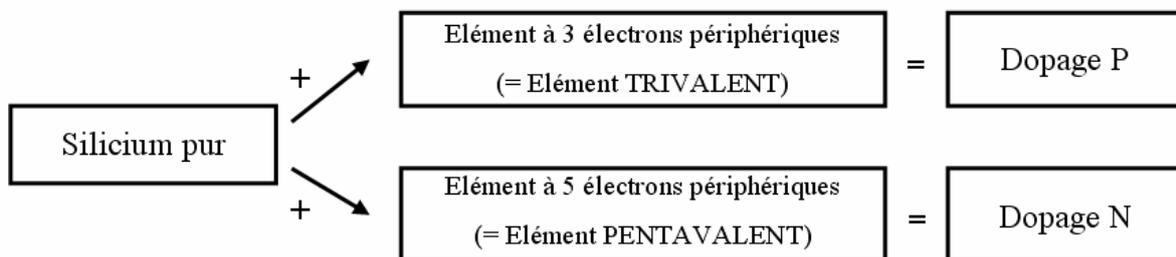
Exemples : l'Arsenic (As), l'Antimoine (Sb), le Phosphore (P),...

- Soit **des éléments trivalents** : Ayant 3 électrons périphériques.

Exemples : le Bore (B), le Gallium (Ga), l'Indium (In),...

Ces dopeurs sont introduits très faible dose (de l'ordre de 1 atome du dopeur pour 10^6 atomes du semiconducteur).

Après le dopage, le semiconducteur n'est plus intrinsèque mais **extrinsèque**.



1.6.2- Semiconducteur extrinsèque de type N :

Le dopeur utilisé appartient à la famille des pentavalents (As, Sb, P,...).

L'atome dopeur s'intègre dans le cristal de semiconducteur, cependant, pour assurer les liaisons entre atomes voisins, 4 électrons sont nécessaires : le cinquième est donc en excès et n'a pas de place pour lui. On dit que le dopeur est un donneur (N) d'électrons (Porteurs de charge Négative). Il faut noter que cet électron lorsqu'il quitte son atome, il laisse à sa place **un ion positif fixe** (Figure 6).

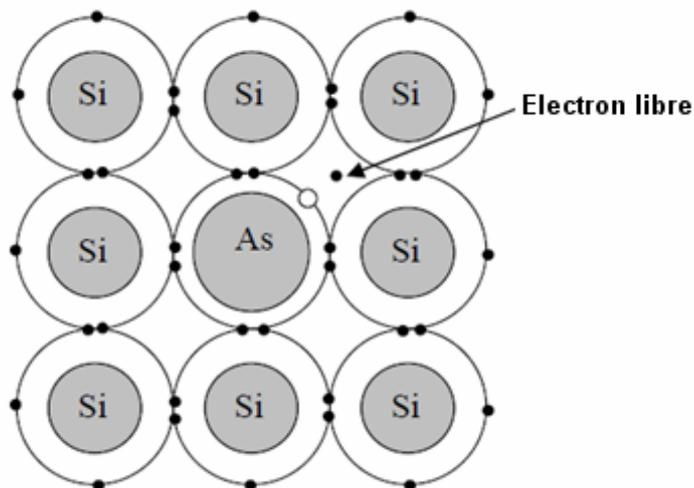


Figure 6 : Un atome d'Arsenic incorporé dans le cristal de semiconducteur.

Représentation simplifiée d'un semiconducteur de type N :

Les dopages courants sont d'environ 10^{16} à 10^{18} atomes par cm^3 . On peut admettre que le nombre volumique des électrons libres est égal au nombre volumique des impuretés et que le nombre volumique des trous (Charges libres positives) est négligeable. Etant données ces considérations, on établit le modèle de semiconducteur représenté ci-dessous dans lequel n'apparaissent que les charges essentielles, à savoir les électrons libres et les donneurs ionisés. Les charges fixes sont entourées d'un cercle.

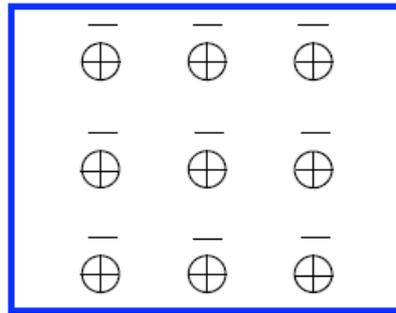


Figure 7 : Semiconducteur de type N (Modèle).

\oplus : Ion positif fixe du dopeur (N_D).

- : Électron libre (Porteur de charge négative).

Exemple d'un dopage de type N (Négatif) :

Concentrations des porteurs de charge à l'équilibre :

Equilibre création-recombinaison de paires \rightarrow Loi d'action des masses.

$$n \times p = n_i^2 = A^2 T^3 \exp\left(-\frac{E_g}{K_B T}\right)$$

Neutralité électrique du semiconducteur : La loi de conservation de la charge impose que la concentration des charges positives soit égale à la concentration des charges négatives, en tout point du semiconducteur.

$$p + N_D = n + N_A$$

N_A et N_D sont les concentrations d'accepteurs et de donneurs.

Dopage de type N avec $N_D \gg n_i$ (En supposant que $N_A = 0$). Equations d'équilibre :

$$\begin{aligned} n \times p &= n_i^2 \\ p + N_D &= n \end{aligned}$$

On s'attend à ce que les électrons, issus des donneurs, soient plus nombreux que les trous, issus de la génération thermique : $p \ll n$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow n &= p + N_D \approx N_D \\ \Rightarrow p &= \frac{n_i^2}{n} \approx \frac{n_i^2}{N_D} \end{aligned}$$

1.6.3- Semiconducteur extrinsèque de type P :

Le dopeur utilisé appartient à la famille des trivalents (B, Ga, In,...).

L'atome dopeur s'intègre dans le cristal de semiconducteur, cependant, pour assurer les liaisons entre atomes voisins, 4 électrons sont nécessaires alors que le dopeur ne porte que 3, il y a donc un trou disponible susceptible de recevoir un électron. Un électron d'un atome voisin peut occuper ce trou.

L'atome du dopeur devient **un ion négatif fixe**. L'atome quitté aura un trou et une charge positive excédentaire. On dit que le dopeur est un accepteur (P) d'électrons. (*Figure 8*).

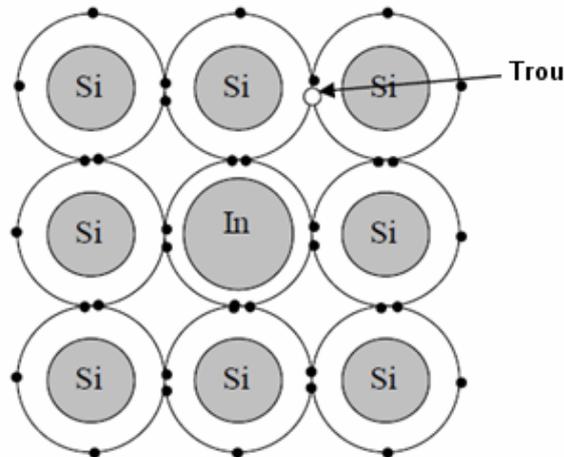


Figure 8 : Un atome d'Indium incorporé dans le cristal de semiconducteur.

Représentation simplifiée d'un semiconducteur de type P :

Le nombre volumique des trous : Il est approximativement égal au nombre volumique des impuretés. Le nombre volumique des électrons libres est alors considéré comme négligeable. Il s'ensuit un modèle, représenté à la figure ci-dessous, dans lequel n'apparaissent que les charges prépondérantes : les trous et les accepteurs ionisés.

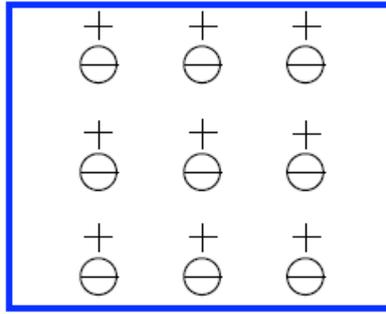


Figure 9 : Semiconducteur de type P (Modèle).

Θ : Ion négatif fixe du dopeur (N_A).

+ : Trou disponible (porteur de charge positive).

Exemple d'un dopage de type P (Positif) :

Dopage de type P avec $N_A \gg n_i$ (En supposant que $N_D = 0$). Equations d'équilibre :

$$\begin{aligned} n \times p &= n_i^2 \\ n + N_A &= p \end{aligned}$$

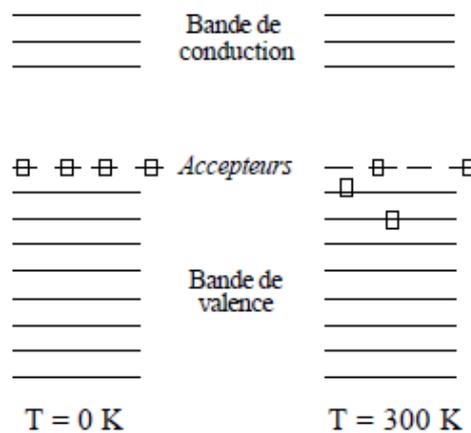
Pour $p \gg n$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow p &= n + N_A \approx N_A \\ \Rightarrow n &= \frac{n_i^2}{p} \approx \frac{n_i^2}{N_A} \end{aligned}$$

1.6.4- Bandes d'énergie des semiconducteurs dopés :

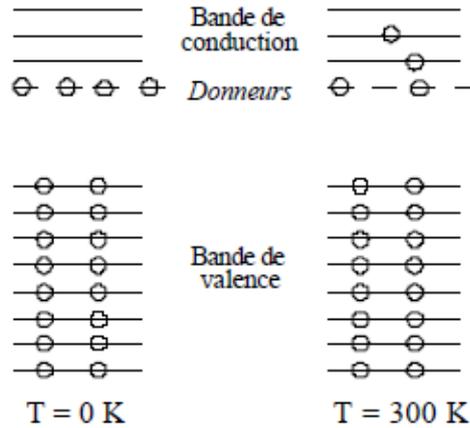
Les atomes de trivalents (Accepteurs), introduisent des trous dans la bande de valence. Si on élève la température, ces trous se comportent comme des charges positives libres.

Type P



Les atomes de pentavalents (Donneurs) introduisent des charges positives dans le réseau, charges qui attirent les électrons en créant ainsi de nouveaux niveaux dont l'énergie est légèrement inférieure à ceux de la bande de conduction du matériau pur. Si on élève la température, ces électrons peuvent passer dans la bande de conduction.

Type N



1.7- Résumé et conclusions :

- Dans un semiconducteur du type P : Les porteurs majoritaires sont les trous, se déplaçant dans un réseau d'ions négatifs fixes.
- Dans un semiconducteur du type N : Les porteurs majoritaires sont les électrons, se déplaçant dans un réseau d'ions positifs fixes.

2- Jonction PN :

2.1- Introduction :

Quand un constructeur dope P sur la moitié du cristal et N sur l'autre moitié, quelque chose de nouveau apparaît.

La frontière entre le type P et le type N est appelée jonction PN. Elle a entraîné beaucoup d'inventions, en particulier les diodes, transistors et circuits intégrés. Comprendre la jonction PN permet de comprendre toutes sortes de composants semiconducteurs.

2.2- Définition :

La *figure 10* représente à gauche un morceau de semiconducteur P où chaque atome trivalent (Cercle avec un signe (-)) génère un trou sur son orbite de valence (Repéré par un (+)).

Symétriquement, à droite il y a un morceau de semiconducteur N où chaque cercle avec un (+) représente un atome pentavalent et le signe (-) son électron libre.

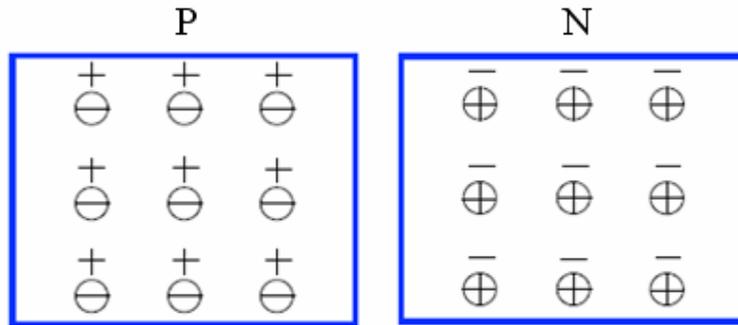


Figure 10 : Deux types de semiconducteurs.

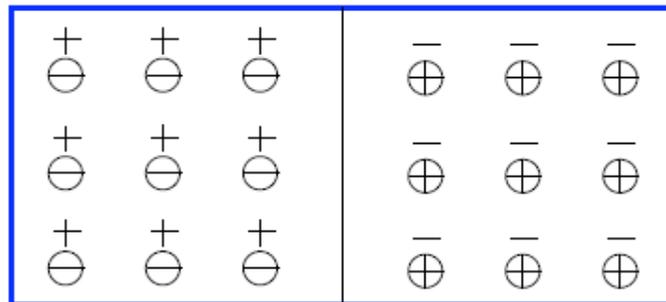


Figure 11 : La jonction PN.

Charges fixes :

\oplus : Ions positifs (N_D).

\ominus : Ions négatifs (N_A).

Charges mobiles :

+ : Trous (P).

- : Electrons (N).

Chaque partie est *électriquement neutre* car le nombre de (+) est égal au nombre de (-).

On sait faire un cristal unique avec un côté P et un côté N, comme le montre la *figure 11*. La jonction PN est la frontière où le type P voisine le type N. La *diode à jonction* est un autre nom donné au *cristal PN*. Le mot *diode* est la contraction de *di* (deux) et *électrodes*.

2.3- Jonction PN non polarisée :

La jonction PN est en équilibre thermique lorsqu'elle n'est soumise à aucune excitation extérieure, qu'elle soit de nature électrique, optique ou thermique, elle est placée dans un environnement où ne règne ni champ électrique, ni champ magnétique.

Au niveau de la jonction PN :

- Les trous majoritaires de la région P diffusent vers la région N.

- Les électrons majoritaires de la région N diffusent vers la région P.

Il y a donc recombinaison électron-trou, et par suite il n'y a plus de porteurs de charges libres. Cependant il reste le réseau des ions formant l'armature du cristal. Comme les électrons dans la région N et les trous dans la région P ont disparu par recombinaison dans la jonction, il reste les charges fixes de ces ions. C'est **la zone de charge d'espace** (ou zone de déplétion).

Dans le cas idéal ce processus de diffusion continue jusqu'à ce que la concentration des porteurs devienne égale de part et d'autre de la jonction.

- Lorsque les trous diffusent vers la région de type N, ils quittent les atomes accepteurs devenant alors ionisés, de densité de charge $-q N_A$ et gardant leurs places dans le réseau cristallin.
- Les électrons qui quittent la région N et diffusent vers le côté P laissent les atomes donneurs ionisés, avec une densité de charge égale à $+q N_D$.

Il en résulte de ce processus l'existence d'un champ électrique. La charge électrique est alors positive à droite et négative à gauche de la jonction.

Le champ ainsi créé est dirigé dans le sens des x négatifs. Ce champ électrique s'oppose donc à la diffusion des trous provenant de la région P et des électrons provenant de la région N.

Entre les deux parties P et N apparaît alors une différence de potentiel appelée aussi **barrière de potentiel** de l'ordre de 0,7 V pour le Silicium, 0,3 V pour le Germanium.

Les figures ci-contre illustrent ces phénomènes :

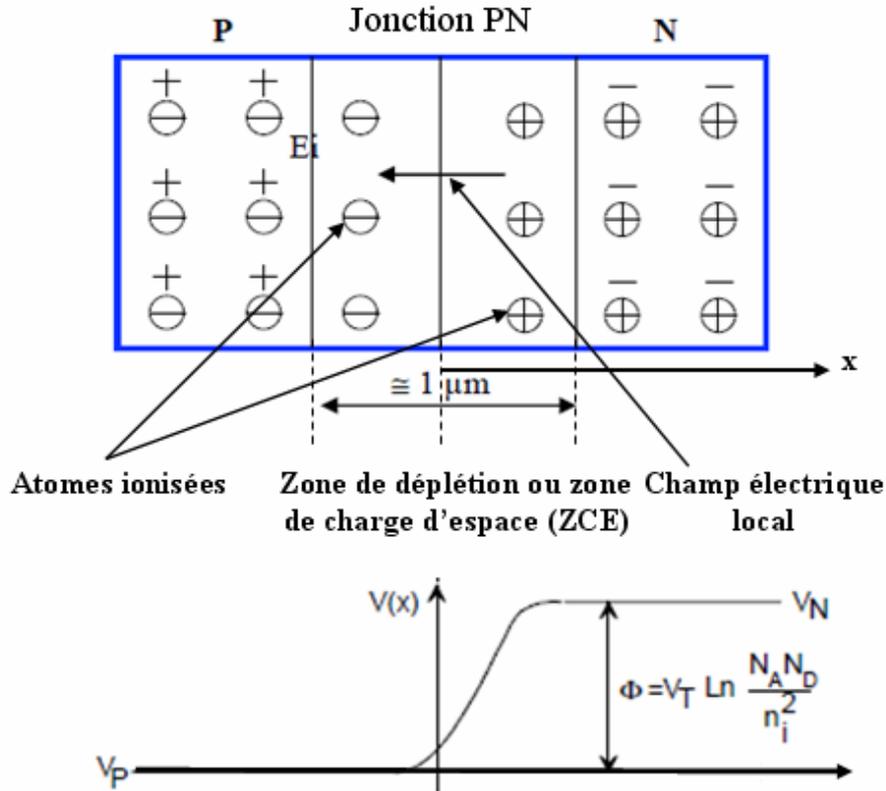


Figure 12 : Représentation d’une jonction PN à l’équilibre thermodynamique.

2.3.1- Barrière de potentiel :

Une jonction est à l’équilibre thermodynamique quand sa température est uniforme et quand aucune perturbation d’origine extérieure, comme la lumière, ou une tension de polarisation, n’agit sur elle. A l’équilibre, les courants de trous et d’électrons sont nuls en tout point de semiconducteur, le niveau de Fermi est le même dans tout l’échantillon.

$$[E_F - E_I]_{Région N} - [E_F - E_I]_{Région P} = K_B T \ln \left[\frac{n_n}{n_i} \right] + K_B T \ln \left[\frac{p_p}{n_i} \right] = q \Phi$$

Où n_p et p_p désignent respectivement les concentrations à l’équilibre des électrons et des trous dans la région P, n_n et p_n celles des électrons et des trous dans la région N, n_i est la concentration des porteurs libres du semiconducteur intrinsèque et E_I correspond à l’énergie au milieu de la bande interdite (Gap).

$$E_I = \frac{E_C - E_V}{2} = \frac{E_g}{2}$$

$$\Phi = \frac{K_B T}{q} \ln \left[\frac{n_n p_p}{n_i^2} \right]$$

Du côté P et loin de la jonction on a :

$$n(-\infty) = n_p = \frac{n_i^2}{N_A} \quad p(-\infty) = p_p = N_A$$

Du côté N et loin de la jonction on a :

$$n(+\infty) = n_n = N_D \quad p(+\infty) = p_n = \frac{n_i^2}{N_D}$$

Donc :

$$\Phi = \frac{K_B T}{q} \ln \left(\frac{N_A N_D}{n_i^2} \right)$$

Avec : $V_T = \frac{K_B T}{q}$.

$$\Phi = V_T \ln \left(\frac{N_A N_D}{n_i^2} \right)$$

Exemple :

Une jonction PN au Silicium dopée du côté P à $N_A = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ et du côté N à $N_D = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. Sachant que la concentration intrinsèque $n_i = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ et que $K_B T = 26 \text{ mV}$ ($T = 300 \text{ K}$).

Alors : $\Phi = 0,026 \cdot \ln \left(\frac{10^{15} \times 10^{15}}{10^{20}} \right) = 0,6 \text{ V}$.

2.4- Jonction PN polarisée :

2.4.1- Polarisation en direct :

On applique une source de tension continue V ($N \rightarrow P$) sur la jonction PN, la borne négative sur le côté N et la borne positive sur le côté P. Cette connexion est *une polarisation directe* (Figure 13). Un champ électrique externe E_{ext} se crée et s'oppose au champ interne E_i , le champ résultant a pour effet de diminuer la hauteur de la barrière de potentiel et par conséquent, le nombre de porteurs majoritaires capables de franchir la jonction augmente.

A partir d'une certaine valeur de tension de seuil V_0 de l'ordre de 0,7 V pour le Silicium, les porteurs de charge peuvent franchir librement la jonction PN, celle-ci devient **passante** et un courant direct s'établit.

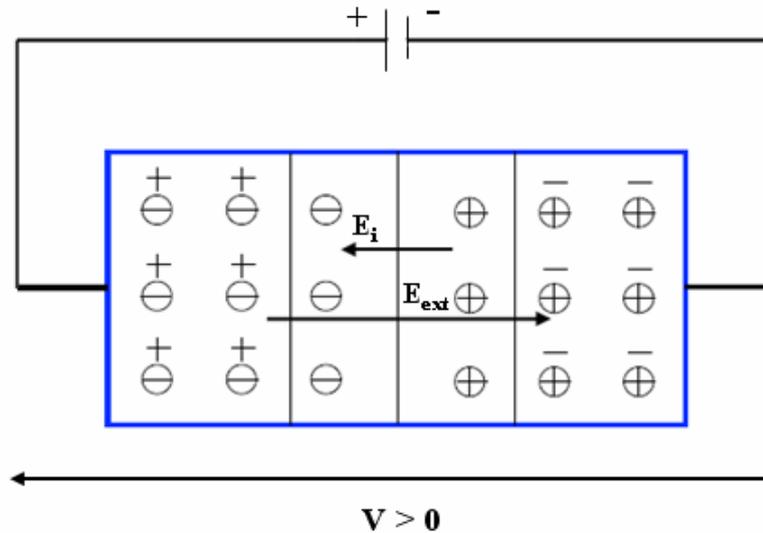


Figure 13 : Jonction PN polarisée en direct.

Le champ électrique externe \vec{E}_{ext} s'oppose au champ électrique interne \vec{E}_i :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\overrightarrow{grad} V \\ \vec{E} &= \vec{E}_{ext} + \vec{E}_i = E_{ext} - E_i \\ \vec{F} &= q \vec{E} \end{aligned}$$

2.4.2- Polarisation en inverse :

Invertissons la source continue V ($P \rightarrow N$) pour obtenir le schéma représenté par la *figure 14*. Maintenant le côté P est relié au pôle négatif et le côté N au pôle positif. Ce type de connexion est *une polarisation inverse*. Un champ électrique externe E_{ext} se crée et s'ajoute au champ interne E_i , le champ résultant a pour effet d'empêcher la circulation des porteurs majoritaires. La jonction est **bloquée**. Le courant inverse est pratiquement nul.

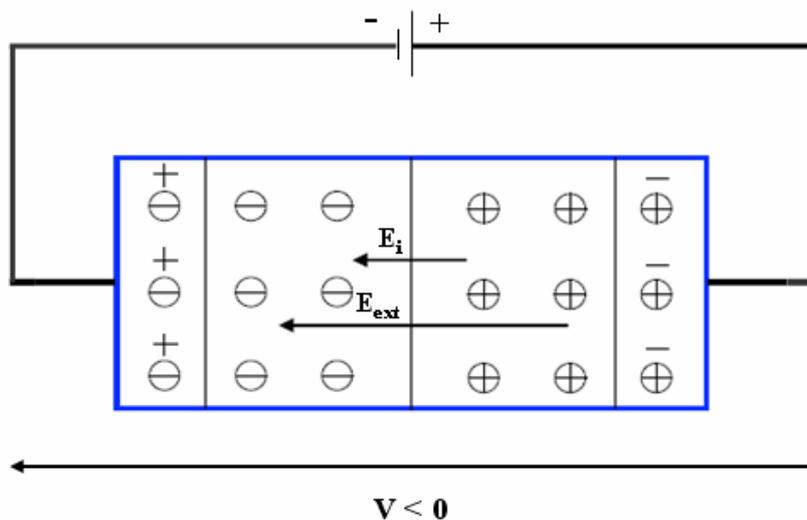


Figure 14 : Jonction PN polarisée en inverse.

Le champ électrique externe \vec{E}_{ext} s'ajoute au champ électrique interne \vec{E}_i :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\overrightarrow{grad} V \\ \vec{E} &= \vec{E}_{ext} + \vec{E}_i = E_{ext} + E_i \\ \vec{F} &= q \vec{E} \end{aligned}$$

La tension V va donc modifier directement la hauteur de la barrière de potentiel au niveau de la jonction de la façon indiquée à la *figure 15*.

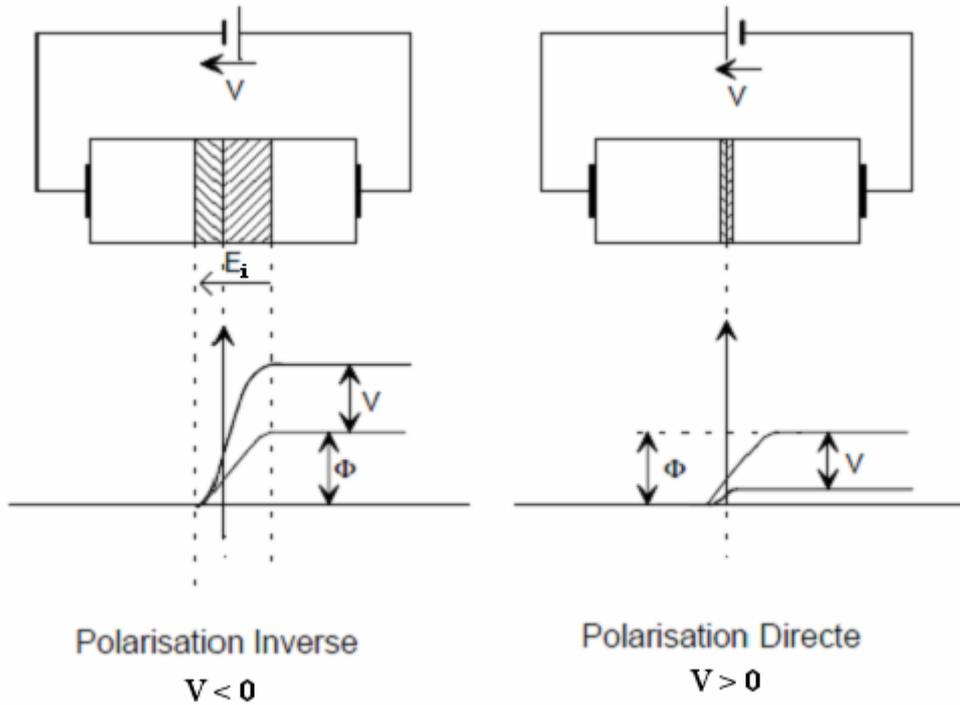


Figure 15 : Répartition du potentiel interne dans une jonction PN polarisée.

Chapitre 4

La diode à jonction

La diode à jonction

1- Introduction :

Si on dope une partie d'un semiconducteur intrinsèque avec des atomes à 5 électrons périphériques (Le semiconducteur devient extrinsèque de type N) et l'autre avec des atomes à 3 électrons périphériques (Extrinsèque de type P), on crée une jonction, qui est la limite de séparation entre les deux parties. Nous avons fabriqué *une diode à jonction*.

2- Définition :

La diode est un composant électronique semiconducteur qui se comporte comme un interrupteur fermé quand elle est polarisée en direct et comme un interrupteur ouvert polarisée en inverse. La diode est *un composant non linéaire*, sa caractéristique courant-tension n'est pas une ligne droite. La barrière de potentiel en est la cause : Si la tension appliquée est plus petite qu'elle, le courant est faible; quand la tension sur la diode dépasse la barrière de potentiel, le courant à travers la diode augmente rapidement.

Symbole :

A la *figure 1*, on a représenté la structure technologique simplifiée d'une diode à jonction ainsi que son symbole.

- La borne qui se trouve du côté du "Triangle" est appelée **Anode**. Elle est généralement désignée par la lettre « A ».
- La borne qui se trouve du côté de la "Barre" est appelée **Cathode**. Elle est généralement désignée par la lettre « K ».

La diode est unidirectionnelle en courant. Le courant circule uniquement de l'anode vers la cathode. C'est donc *un composant polarisé*.

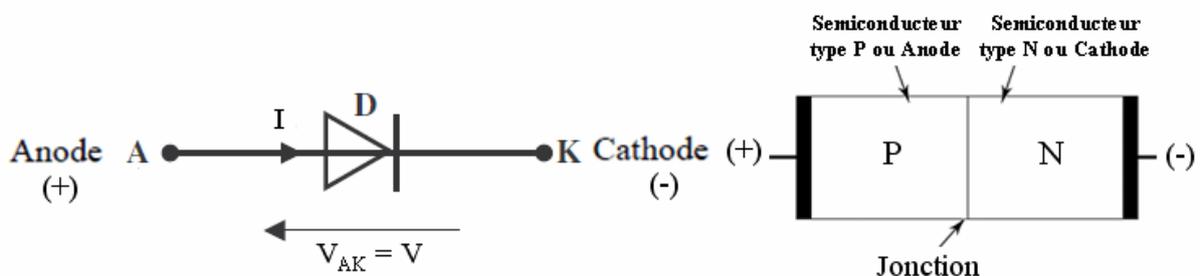
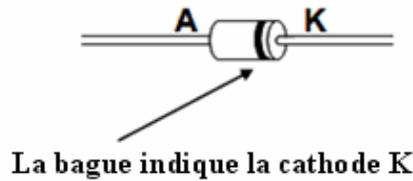


Figure 1 : Constitution et symbole d'une diode à jonction PN.

- L'anode représente la zone P.
- La cathode représente la zone N.

Représentation physique :



3- Polarisation de la diode :

3.1- Polarisation directe :

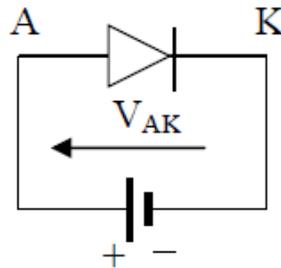


Figure 2 : Polarisation directe de la diode à jonction.

- En polarisation directe, la tension appliquée ($V_{AK} > 0$) permet le passage d'un courant électrique de l'anode vers la cathode appelé **courant direct**.

3.2- Polarisation inverse :

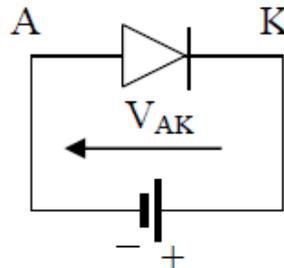


Figure 3 : Polarisation inverse de la diode à jonction.

- En polarisation inverse, la tension appliquée ($V_{AK} < 0$) empêche le passage du courant. Le courant inverse est pratiquement nul.

4- Caractéristique statique courant-tension de la diode :

C'est le graphique qui donne l'intensité du courant qui traverse la diode en fonction de la tension à ses bornes.

La caractéristique courant-tension de la diode est de forme exponentielle son équation est :

$$I_D = I_S \left[\exp \left(\frac{qV_D}{nK_B T} \right) - 1 \right]$$

I_D : Courant dans la diode.

I_S : Courant de saturation de la diode.

q : Charge de l'électron, $q = 1,60219 \times 10^{-19} \text{ C}$.

V_D : Tension aux bornes de la diode.

K_B : Constante de Boltzmann, $K_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1} = 8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$.

T : Température de la jonction en kelvin ($^{\circ}\text{K}$).

n : Coefficient compris entre 1 et 2.

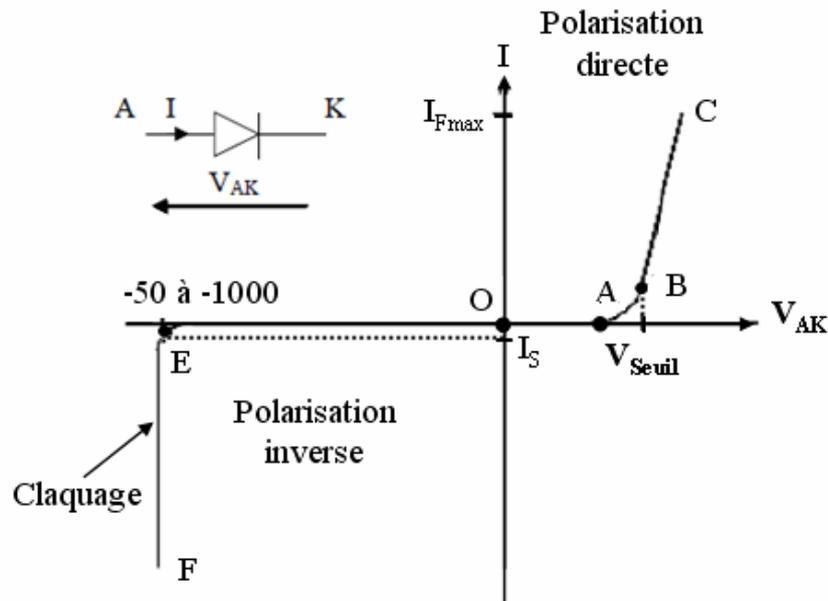


Figure 4 : Caractéristiques statiques courant-tension.

La diode est un composant non linéaire.

- Zone OA : La diode est polarisée dans le sens direct, mais la tension est trop faible pour débloquer la jonction : Zone de blocage direct.
- Zone AB : La tension V_{AK} commence à débloquer la diode, c'est la zone du coude.
- Zone BC : La diode est passante.
- Zone OE : La diode est polarisée en inverse, c'est la zone de blocage inverse.
- Zone EF : L'intensité croît brusquement, c'est la zone de claquage.

5- Modèles électriques équivalents de la diode :

Il existe de nombreux types de diodes qui, chacune, possèdent leurs caractéristiques particulières.

5.1- Caractéristique de la diode idéale (Première approximation) :

C'est un dipôle électrique unidirectionnel dont les bornes sont l'anode (A) et la cathode (K). Elle se comporte comme un interrupteur :

En polarisation directe c'est à dire si $V_A > V_K$ la résistance de la diode est nulle. Elle se comporte alors comme *un interrupteur fermé*. La diode est **passante** ($I > 0$ et $V_{AK} = 0$).

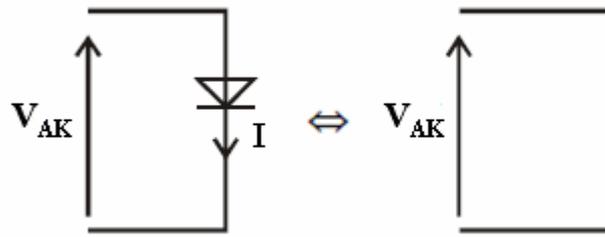


Figure 5 : Schéma équivalent de la diode idéale polarisée en direct.

En polarisation inverse ($V_A < V_K$), on a : $R = \infty$. La diode est équivalente à *un interrupteur ouvert*. La diode est **bloquée** ($I = 0$ et $V_{AK} < 0$).

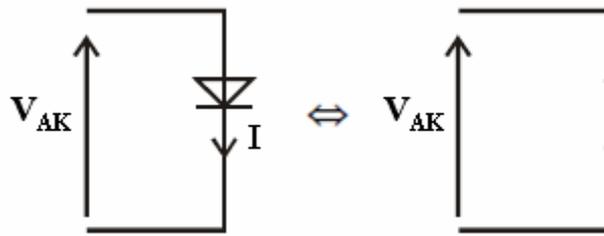


Figure 6 : Schéma équivalent de la diode idéale polarisée en inverse.

Le modèle de la diode idéale consiste à prendre $U_0 = 0$ V.

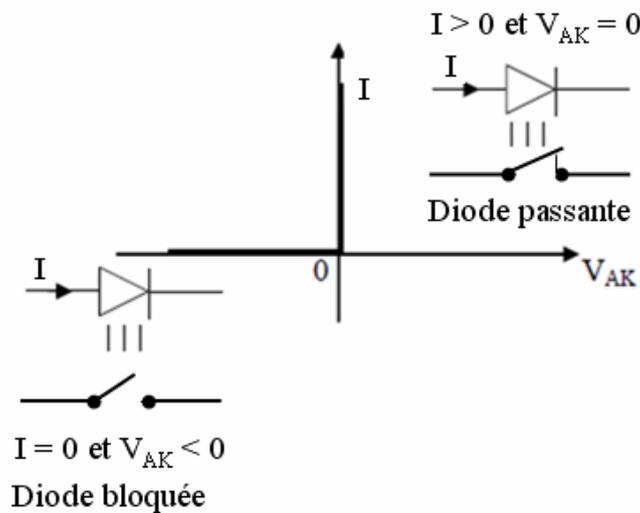


Figure 7 : Modèle d'une diode idéale (Première approximation).

5.2- Caractéristique de diode parfaite (Deuxième approximation) :

La diode se comporte comme un interrupteur en série avec une source de tension U_0 appelée : *la tension de seuil* :

En polarisation directe : Pour $I > 0$ alors $V_{AK} = U_0$ (*Etat passant*).

En polarisation inverse : Pour $V_{AK} < U_0$ alors $I = 0$ (*Etat bloqué*).

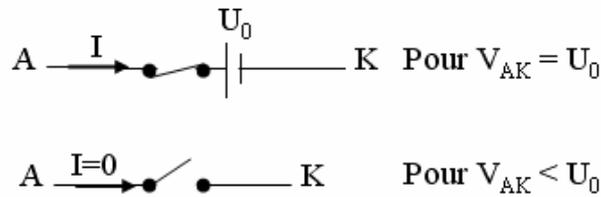


Figure 8 : Schémas équivalents d'une diode parfaite polarisée en direct et en inverse.

La *figure 9* illustre la caractéristique $I = F(V_{AK})$ en deuxième approximation. Il n'existe pas de courant pour des tensions appliquées sur la diode inférieures à $U_0 = 0,7$ V. À cette valeur, la diode conduit et la tension reste constante quel que soit le courant qui la traverse.

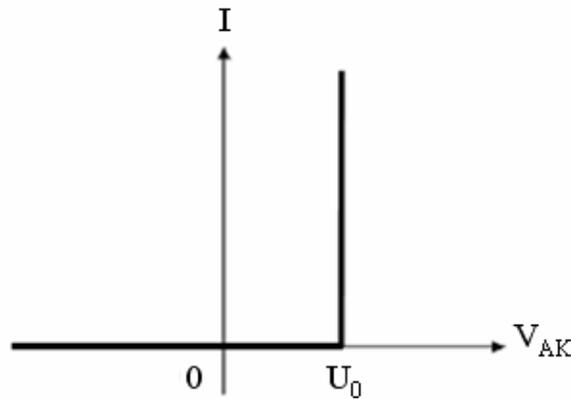


Figure 9 : Modèle d'une diode parfaite (Deuxième approximation).

5.3- Caractéristique de diode réelle (Troisième approximation) :

La diode se comporte comme un interrupteur en série avec une barrière de potentiel U_0 et une résistance interne ($R_d = \Delta V_{AK} / \Delta I$).

En polarisation directe : Pour $I > 0$ alors $V_{AK} = U_0 + R_d \times I$ (*Etat passant*).

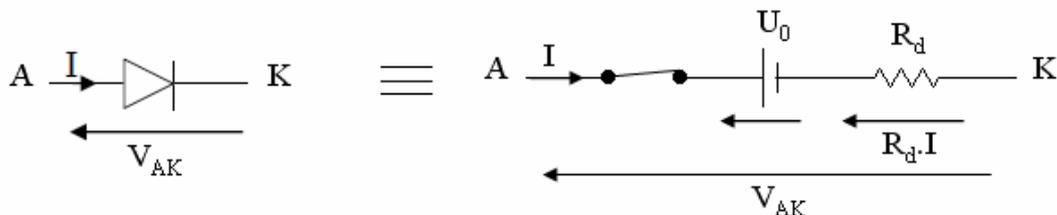


Figure 10 : Schéma équivalent de la diode réelle polarisée en direct.

En polarisation inverse : Pour $V_{AK} < U_0$ alors $I = 0$ (*Etat bloqué*), la diode est équivalente à un interrupteur ouvert.



Figure 11 : Schéma équivalent de la diode réelle polarisée en inverse.

La caractéristique de la diode réelle peut se rapprocher par deux portions de droites :

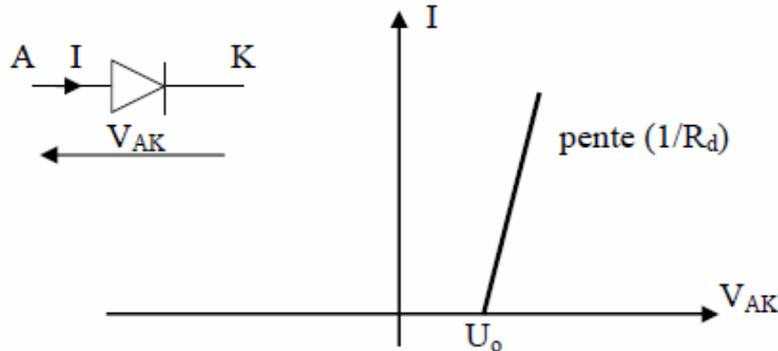


Figure 12 : Modèle d'une diode réelle (Troisième approximation).

U_0 et R_d : Tension de seuil et résistance dynamique de la diode.

6- Circuits de redressement :

La plupart des circuits électroniques ont besoin d'une tension continue pour fonctionner. Puisque la tension de réseau électrique est alternative (AC), on la transforme en une tension continue (DC) par un montage appelé alimentation. Le premier étage de cette alimentation est le redresseur.

6.1- Redressement :

Le redressement est l'opération pour laquelle une tension alternative est convertie en une tension unidirectionnelle.

On trouve cette fonction dans les convertisseurs *alternatif-continu* qui servent à alimenter, à partir du réseau de distribution *alternatif*, des récepteurs demandant une tension d'alimentation continue. Lorsque la tension de sortie n'est pas réglable, on parle de « **Redressement non commandé** ».

On distingue deux types de redresseurs : Simple alternance et double alternance.

Le symbole d'un redresseur alternatif-continu est le suivant :

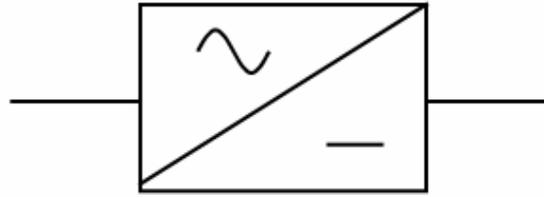


Figure 13 : Symbole de la conversion alternatif-continu.

6.1.1- Redressement simple alternance : (Ou Redresseur demi-onde).

C'est le redressement le plus simple. Il admet l'alternance positive et annule l'alternance négative. Une simple diode en série avec la charge suffit à réaliser cette fonction.

Hypothèse : On suppose que la diode D est idéale.

Soit le montage suivant :

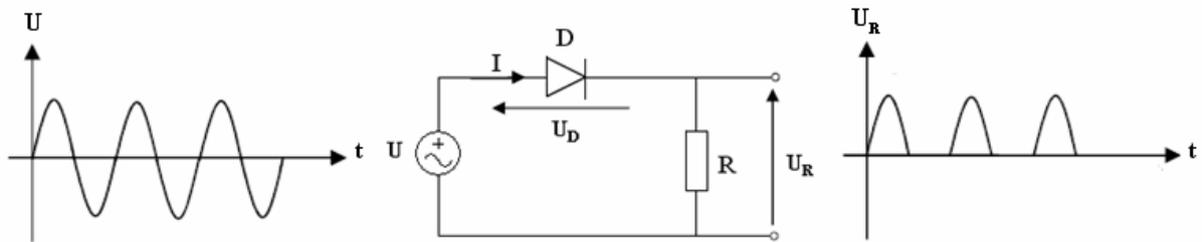


Figure 14 : Redresseur simple alternance (Avec une diode).

La tension U est sinusoïdale : $U = U_{Max} \sin(\omega t)$ et $\omega = 2\pi f$.

- Pendant l'alternance positive de la tension U ($U > 0$) :

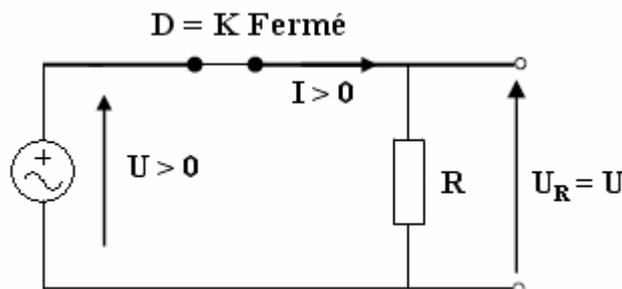


Figure 15 : Alternance positive de U (La diode est passante).

La diode D est polarisée en direct donc elle est passante ($I > 0$ et $U_D = 0$) donc :

$$U_R = U - U_D = U$$

- Pendant l'alternance négative de la tension U ($U < 0$) :

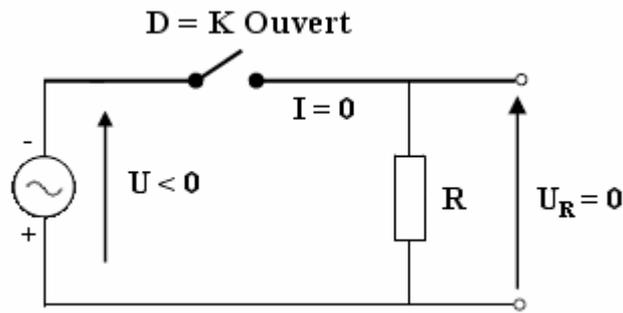


Figure 16 : Alternance négative de U (La diode est bloquée).

La diode D est polarisée en inverse donc elle est bloquée ($I = 0$ et $U_D < 0$) donc :

$$U_R = 0$$

Pendant la demi-période positive, la diode est conductrice; elle est bloquée pendant la demi-période négative. De ce fait, le circuit élimine les demi-cycles négatifs, comme le montre la *figure 17*. On appelle cette forme de signal *un signal simple alternance*; il donne *un courant redressé dans la charge*, ce qui veut dire que le courant ne circule que dans un sens.

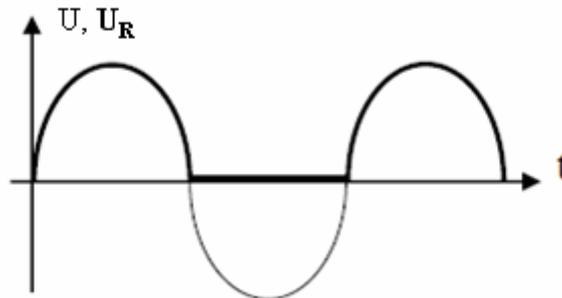


Figure 17 : Allures des tensions U et U_R .

6.1.2- Redressement double alternance : Montage en pont de Graëtz :

La *figure 18* représente un redresseur en pont. Il ressemble au redresseur double alternance car il donne une tension de sortie redressée double alternance.

Le pont de Graëtz est constitué de quatre diodes montées en parallèle deux par deux. Les diodes D_1 et D_2 sont à cathodes communes et les diodes D_3 et D_4 sont à anodes communes.

Le pont est alimenté par une tension alternative sinusoïdale telle que :

$$U = U_{Max} \sin(\omega t)$$

Les diodes D_1 et D_3 conduisent pendant la demi-période positive, et D_2 et D_4 conduisent pendant la demi-période négative. Par conséquent, le courant redressé existe pendant les deux demi-cycles.

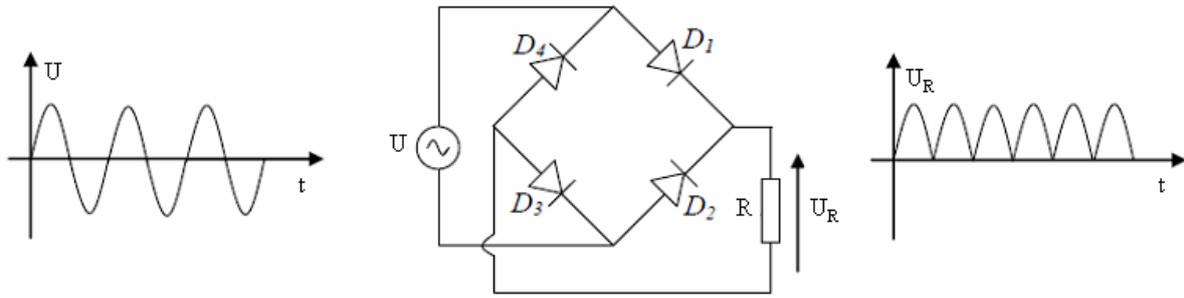


Figure 18 : Redresseur double alternance à pont de Graëtz (Avec 4 diodes).

Hypothèse : Les quatre diodes sont supposées identiques et idéales.

- Pendant l’alternance positive de la tension d’entrée U ($U > 0$) :

Les diodes D_1 et D_3 conduisent, et les diodes D_2 et D_4 sont bloquées. Dans ce cas, un courant positif traverse la diode D_1 , la charge R et la diode D_3 . La tension obtenue aux bornes de la charge R est positive. Le circuit se simplifie comme représenté à la figure ci-dessous.

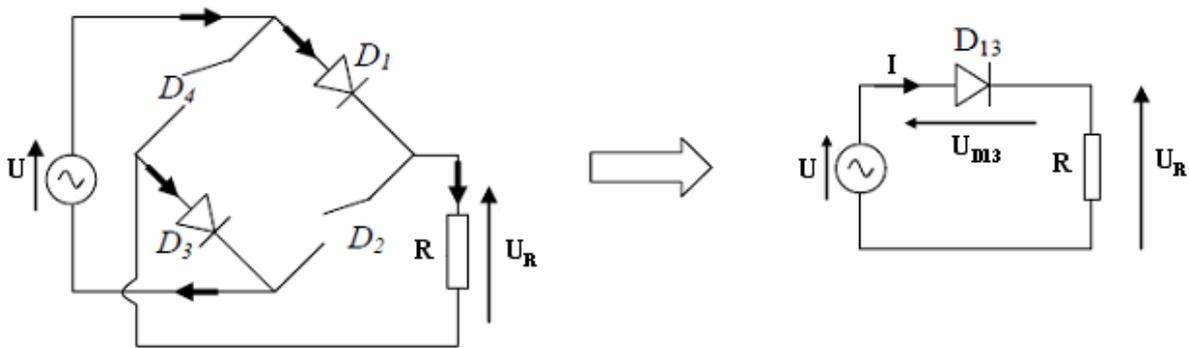


Figure 19 : Circuit équivalent du pont pour l’alternance positive.

L’analyse est la même comme pour le redressement simple alternance, ce qui donne :

$$U_R = U - (U_{D_1} + U_{D_3}) = U$$

Avec : $U_{D_1} = U_{D_3} = 0$ (Les diodes idéales D_1 et D_3 sont équivalentes à des courts-circuits).

- Pendant l’alternance négative de la tension d’entrée U ($U < 0$) :

Les diodes D_2 et D_4 conduisent, et les diodes D_1 et D_3 sont bloquées. Dans ce cas, un courant négatif traverse la diode D_4 , la charge R et la diode D_2 . La tension obtenue aux bornes de la charge R est positive aussi. Le circuit se simplifie comme représenté à la figure ci-dessous.

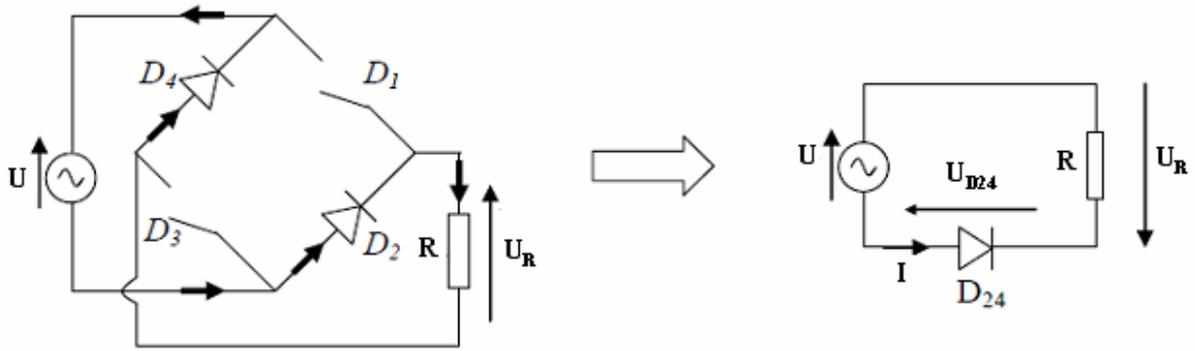


Figure 20 : Circuit équivalent du pont pour l'alternance négative.

L'analyse est aussi la même comme pour le redressement simple alternance, ce qui donne :

$$U_R = -U - (U_{D_2} + U_{D_4}) = -U$$

Avec : $U_{D_2} = U_{D_4} = 0$ (Les diodes idéales D_2 et D_4 sont équivalentes à des courts-circuits).

Pendant les deux demi-périodes, la tension sur la charge présente la même polarité et le courant de sortie le même sens. Le circuit est appelé redresseur double alternance car il transforme la tension AC d'entrée en une tension de sortie ondulée, comme le montre la figure 21.

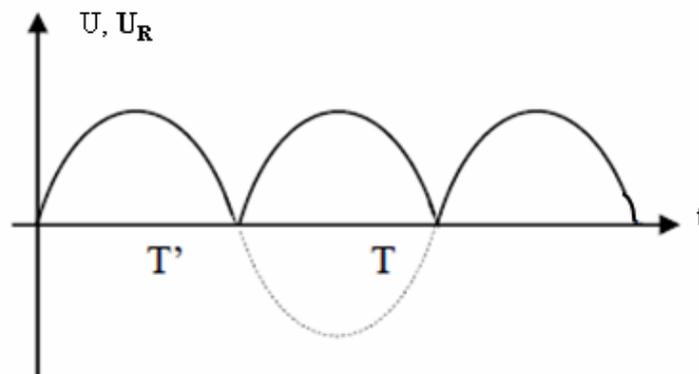


Figure 21 : Allures des tensions U et U_R .

La période d'une tension redressée double alternance est $T' = \frac{T}{2}$.

6.2- Valeur moyenne, valeur efficace et facteur de forme de la tension de sortie :

6.2.1- Valeur moyenne :

La valeur moyenne d'une fonction périodique de période T est donnée par :

$$U_{Moy} = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt$$

6.2.2- Valeur efficace :

La valeur efficace d'une fonction périodique de période T est donnée par :

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2(t) dt}$$

6.2.3- Facteur de forme :

Par définition, le facteur de forme F est :

$$F = \frac{U_{eff}}{U_{Moy}}$$

- *Redressement simple alternance :*

La valeur moyenne U_{Moy} d'une tension de période T, est définie par :

$$U_{Moy} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} U(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_{Max} \sin(\omega t) dt$$

La tension de sortie est nulle entre $\frac{T}{2}$ et T, sa valeur moyenne est donc :

$$U_{Moy} = \frac{U_{Max}}{T} \left[-\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{U_{Max}}{\omega T} \left[-\frac{1}{\omega} \cos\left(\omega \times \frac{T}{2}\right) + \cos(0) \right] = \frac{U_{Max}}{\omega T} [-\cos(\pi) + \cos(0)]$$

$$U_{Moy} = \frac{2U_{Max}}{\omega T} = \frac{2U_{Max}}{2\pi} = \frac{U_{Max}}{\pi}$$

La valeur efficace U_{eff} d'une tension de période T, est définie par :

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} U^2(t) dt} \Rightarrow U_{eff}^2 \times T = \int_0^T U_{Max}^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{U_{Max}^2}{2} \int_0^T [1 - \cos(2\omega t)] dt$$

$$U_{eff}^2 \times T = \frac{U_{Max}^2}{2} \left[t - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t) \right]_0^T = \frac{U_{Max}^2}{2} \left[\frac{T}{2} - \frac{1}{2\omega} \sin\left(2\omega \frac{T}{2}\right) \right] = \frac{U_{Max}^2}{4} \times T$$

$$U_{eff}^2 = \frac{U_{Max}^2}{4} \Rightarrow U_{eff} = \frac{U_{Max}}{2}$$

Le facteur de forme d'une tension redressée mono alternance :

$$F = \frac{U_{eff}}{U_{Moy}} = \frac{U_{Max}}{2} \times \frac{\pi}{U_{Max}} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$$

- *Redressement double alternance* :

La tension moyenne est le double de celle obtenue en redressement simple alternance. On a donc :

$$U_{Moy} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} U(t) dt = \frac{2 \times U_{Max}}{\pi}$$

Calculons la valeur efficace :

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} U^2(t) dt} \Rightarrow U_{eff}^2 \times T = \int_0^T U_{Max}^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{U_{Max}^2}{2} \int_0^T [1 - \cos(2\omega t)] dt$$

$$U_{eff}^2 \times T = \frac{U_{Max}^2}{2} \left[t - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t) \right]_0^T = \frac{U_{Max}^2}{2} \left[\frac{T}{2} - \frac{1}{2\omega} \sin\left(2\omega \frac{T}{2}\right) \right] = \frac{U_{Max}^2}{4} \times T$$

$$U_{eff}^2 = \frac{U_{Max}^2}{4} \times \frac{T}{T} = \frac{U_{Max}^2}{4} \times \frac{T}{T/2} \Rightarrow U_{eff} = \frac{U_{Max}}{\sqrt{2}}$$

Le facteur de forme d'une tension redressée double alternance :

$$F = \frac{U_{eff}}{U_{Moy}} = \frac{U_{Max}}{\sqrt{2}} \times \frac{\pi}{2 \times U_{Max}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11$$

7- Filtrage :

7.1- Définition :

Une tension redressée (Simple ou double alternance) a toujours le même signe mais elle n'est pas continue puisqu'elle varie de 0 à la valeur de crête. Pour obtenir une tension continue, il reste une étape : Le filtrage. *Un condensateur* est placé *en parallèle* à la sortie du pont de redressement (*Figure 22*).

U : Tension sinusoïdale de fréquence f.

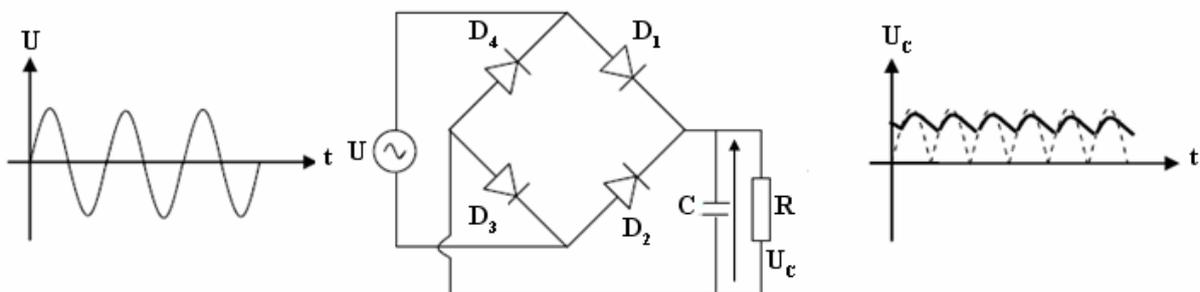


Figure 22 : Redresseur double alternance avec capacité de filtrage.

7.2- Principe de fonctionnement :

Dès la première alternance, le condensateur C se charge puis, dès que la tension à ses bornes devient supérieure à la tension redressée, il se décharge à travers la résistance R.

Sur le graphique du bas de la *figure 23*, on voit en pointillé la tension redressée U_R telle qu'elle serait sans condensateur. En traits pleins épais, on voit la tension filtrée U_C .

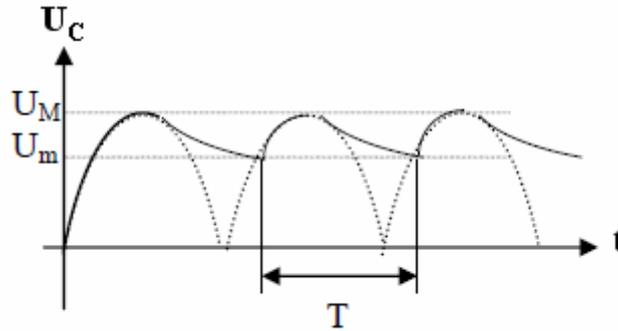


Figure 23 : Allure de la tension filtrée U_C .

7.3- Taux d'ondulation :

C'est le rapport :

$$\theta = \frac{\Delta U_C}{U_{CMoy}}$$

Avec :

ΔU_C : Ondulation de la tension filtrée U_C .

$2\Delta U_C = U_M - U_m$: Ondulation crête à crête.

U_{CMoy} : Tension filtrée moyenne.

Pour les faibles ondulations :

$$U_{CMoy} \cong \frac{U_M + U_m}{2}$$

7.4- Détermination de la capacité de filtrage :

Pendant la charge du condensateur, la tension filtrée passe de U_m à U_M donc :

$$Q = C \times (U_M - U_m)$$

Cette charge va être restituée à la résistance R pendant le temps de décharge t_d soit

$$Q = I_{Moy} \times t_d \text{ avec } I_{Moy} = \frac{U_{CMoy}}{R}.$$

D'où :

$$C = \frac{I_{Moy} t_d}{U_M - U_m} = \frac{U_{CMoy} t_d}{2\Delta U_C R}$$

Si on néglige le temps de charge devant le temps de décharge, alors $t_d \cong T$. On peut écrire donc :

$$C = \frac{U_{CMoy} T}{2\Delta U_C R \theta}$$

La période **T** de la tension filtrée est égale à :

- $\frac{1}{f}$: Pour un redresseur simple alternance.
- $\frac{1}{2f}$: Pour un redresseur double alternance.

Chapitre 5

Transistor bipolaire en régime statique

Transistor bipolaire en régime statique

1- Introduction :

En 1951, William Shockley inventa le premier *transistor à jonction*, un composant semiconducteur qui amplifie les signaux électroniques tels que ceux de la radio ou de la télévision. Le transistor a entraîné l'invention de nombreux autres composants, comme le *circuit intégré* (CI), un petit circuit contenant des milliers de transistors miniaturisés. Grâce à eux, les calculateurs modernes et autres miracles électroniques sont possibles.

Ce chapitre présente le transistor bipolaire, celui qui utilise à la fois les électrons et les trous. Le mot *bipolaire* est l'abréviation de « deux polarités ».

2- Définition :

Le transistor bipolaire (*Bipolar Junction Transistor*) est l'un des dispositifs à semiconducteur les plus utilisés à l'heure actuelle dans les rôles d'amplificateur et d'interrupteur. C'est un élément composé de deux jonctions PN (ou diodes) montées en sens inverse. Selon le sens de montage de ces diodes on obtient deux types de transistors bipolaires :

- Transistor NPN : La base, zone de type P est située entre deux zones de type N.
- Transistor PNP : La base, zone de type N est située entre deux zones de type P.

Les trois électrodes d'un transistor bipolaire se nomment :

- **B** : La base, zone faiblement dopée et de taille très faible (par rapport aux deux autres).
- **C** : Le collecteur, zone très dopée, et d'une taille presque 1,5 fois plus grande que l'émetteur.
- **E** : L'émetteur repéré par la flèche, zone très dopée (Zone extrinsèque).

Le transistor est donc un composant à trois bornes (Pôles) reliées respectivement à l'émetteur, à la base et au collecteur.

Ces transistors sont appelés « Bipolaires » car les deux types de porteurs de charges qui sont les électrons et les trous, participent à la conduction électrique.

3- Symboles :

La représentation schématique, ainsi que les symboles normalisés sont donnés à la *figure 1* et la *figure 2* pour les deux types.

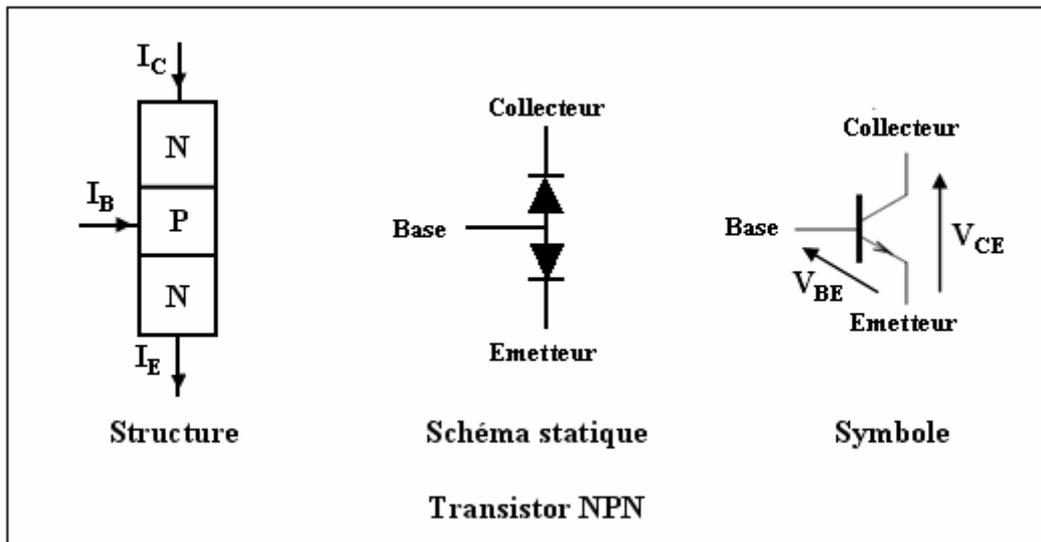


Figure 1 : Représentation schématiques et symbolique du transistor NPN.

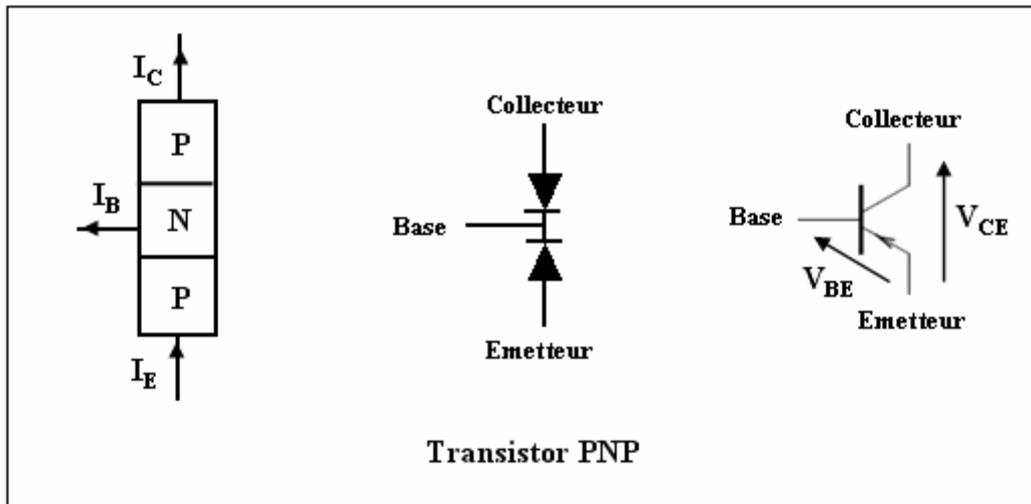


Figure 2 : Représentation schématiques et symbolique du transistor PNP.

La flèche de l'émetteur représente le sens réel de circulation du courant dans le transistor. Le sens de circulation du courant dans ce dernier étant unidirectionnelle.

- Transistor NPN : Le courant est sortant de l'émetteur.
- Transistor PNP : Le courant est entrant dans l'émetteur.

Remarque :

On peut considérer le transistor comme l'association de deux diodes.

Pour polariser correctement un transistor, il faut que :

- La jonction entre B et E soit polarisée dans le sens direct (Conductrice).
- La jonction entre C et B soit polarisée dans le sens inverse (Bloquée).

4- Relations fondamentales :

Nous allons étudier plus particulièrement le transistor NPN (*Figure 3*). Il est constitué d'une jonction NP (Collecteur-Base) et d'une jonction PN (Base-Emetteur).

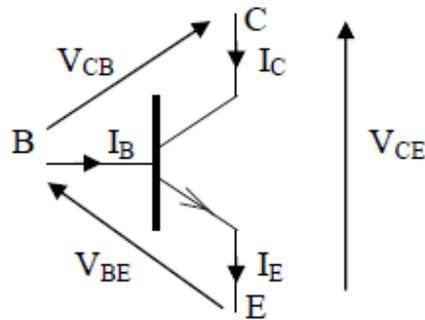


Figure 3 : Transistor NPN et ses grandeurs électriques.

Dans un transistor, il y a trois courants distincts :

I_C : Le courant de Collecteur.

I_B : Le courant de Base.

I_E : Le courant dans l'Emetteur.

Il y a trois tensions :

V_{BE} : La tension entre le point B et le point E (La base et l'émetteur).

V_{CB} : La tension entre le point C et le point B (Le collecteur et la base).

V_{CE} : La tension entre le point C et le point E (Le collecteur et l'émetteur).

4.1- Relations entre les courants :

La loi des noeuds permet d'écrire :

$$I_E = I_C + I_B \quad (1)$$

Le courant émetteur est la somme du courant collecteur et du courant base.

D'autre part il existe une relation entre courant de base et courant collecteur due à l'effet transistor. Cette relation s'écrit :

$$I_C = \beta \times I_B$$

Avec β est le gain en courant du transistor. Il est parfois aussi appelé coefficient d'amplification statique en courant.

Remarques :

- L'effet transistor : C'est tout simplement le fait que le transistor fonctionnent comme un robinet d'électron en effet selon le courant I_B (Donc le courant de la base) le transistor laisse passer un courant I_C , qui est proportionnel a I_B .

- En règle générale β varie de **30** à **300** avec pour valeur courante :

- Transistors dit « Petit signaux » : $100 < \beta < 300$.
- Transistors dit de « Puissance » : $30 < \beta < 100$.

La relation (1) peut alors s'écrire :

$$I_E = \beta \times I_B + I_B = (1 + \beta) \times I_B$$

- Si $\beta \times I_B$ est grand devant I_B (Ce qui est le cas pour les transistors « Petits signaux ») on peut alors écrire :

$$\beta + 1 \approx \beta \Rightarrow I_E \approx I_C$$

Le courant collecteur est approximativement égal au courant émetteur.

4.2- Relations entre les tensions :

Loi de Kirchhoff appliquée au transistor bipolaire :

$$V_{CE} = V_{CB} + V_{BE}$$

La tension à deux indices peut être déduire des tensions à un seul indice :

$$V_{CE} = V_C - V_E$$

$$V_{CB} = V_C - V_B$$

$$V_{BE} = V_B - V_E$$

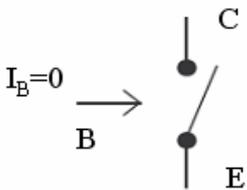
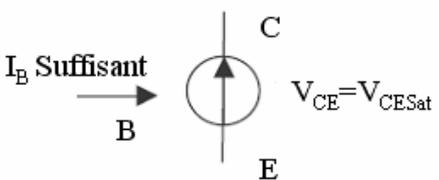
V_B : La tension entre la base et la masse.

V_C : La tension entre le collecteur et la masse.

V_E : La tension entre l'émetteur et la masse.

5- Les zones de fonctionnement du transistor NPN :

Le transistor est un composant commande en courant. Utilisé comme interrupteur commandé, on souhaite un comportement :

D'INTERRUPTEUR OUVERT → on parle d'état bloqué, le courant ne circule pas,	D'INTERRUPTEUR FERME → on parle d'état saturé, le courant circule.
 <p>$I_B = 0$</p> <p>Modèle équivalent d'un transistor bloqué</p>	 <p>I_B Suffisant</p> <p>$V_{CE} = V_{CESat}$</p>

L'électrode de Base constitue la commande, le Collecteur et l'Emetteur laissent ou non circuler le courant électrique.

On distingue trois zones de fonctionnement du transistor : La zone de *blocage*, la zone *linéaire* et la zone *non linéaire* (ou *saturée*).

5.1- Zone de blocage :

Il faut assurer un courant de base nul ($I_B = 0 \text{ A}$) ce qui implique $V_{BE} < V_{BEsat}$.

$$\begin{aligned} I_B = I_C = I_E &= 0 \\ V_{BE} < V_{BEsat} &= 0,7 \text{ V} \end{aligned}$$

En pratique, il est *préférable* de prendre $V_{BE} < 0$.

5.2- Zone de saturation :

Il faut assurer un courant de base suffisant qui dépend :

- De la valeur de la tension V_E appliquée en entrée (Sur la base).
- De la valeur de la résistance (ou des résistances) de base qui permettent de fixer le courant.

$$\begin{aligned} I_C < \beta \times I_B \\ V_{CE} = V_{CESat} \end{aligned}$$

- En réalité, V_{CESat} est de l'ordre de 0,2 à 0,4V.
- En pratique, on prendra donc $V_{CESat} \approx 0 \text{ V}$.

Lorsque le transistor est saturé, on a $V_{BE} = V_{BEsat} = 0,6 \text{ à } 0,7 \text{ V}$ (Silicium).

5.3- Zone de fonctionnement linéaire :

Le transistor est alors, le plus souvent, utilisé dans un montage amplificateur.

$$\begin{aligned} I_C &= \beta \times I_B \\ V_{CE} &> 1 \text{ V} \\ V_{BE} &= 0,7 \text{ V} \end{aligned}$$

6- Montage Emetteur commun :

Soit le schéma du transistor et de ses grandeurs électriques principales.

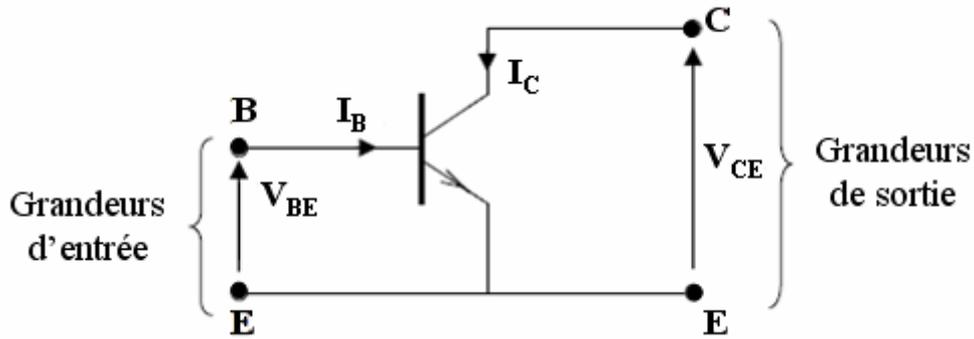


Figure 4 : Schéma du transistor et de ses grandeurs électriques principales.

- Les bornes d'entrée du tripôle sont la base et l'émetteur, les grandeurs d'entrée sont : I_B et V_{BE} .
- La sortie se fait entre le collecteur et l'émetteur, les grandeurs correspondantes sont : I_C et V_{CE} .

7- Caractéristique statique du transistor NPN :

Les caractéristiques sont les courbes qui représentent les relations entre les courants et les tensions du transistor. Elles permettent de délimiter les régions de fonctionnement du transistor de déterminer le point de fonctionnement optimal et les paramètres du transistor.

7.1- Caractéristiques $I_B = f(V_{BE})$:

La caractéristique d'entrée du transistor est donnée par la relation $I_B = f(V_{BE})$ à $V_{CE} = c^{te}$.

En fait, le circuit d'entrée est la jonction base émetteur du transistor, soit une jonction diode.

Cette caractéristique va dépendre très peu de la tension collecteur émetteur : on la donne en général pour une seule valeur de V_{CE} . La courbe est la suivante :

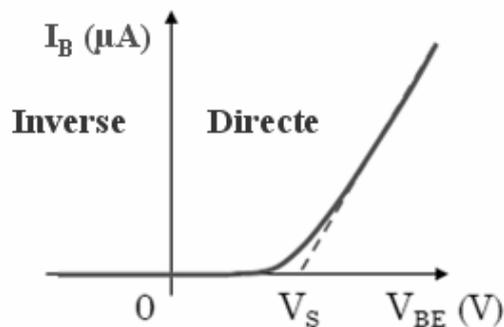


Figure 5 : Caractéristique d'entrée du transistor.

La tension V_{BE} est d'environ 0,7 V pour une polarisation normale du transistor. Cette valeur est donc légèrement supérieure à celle d'une jonction de diode.

7.2- Caractéristiques $I_C = f(I_B)$:

La caractéristique de transfert est définie par la relation $I_C = f(I_B)$ à $V_{CE} = c^{te}$. Le courant d'émetteur est proportionnel au courant de base.

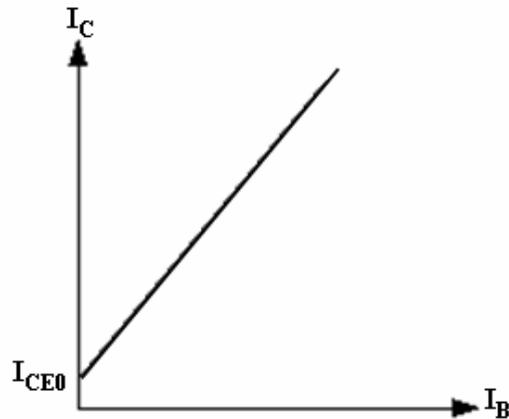


Figure 6 : Caractéristique de transfert du transistor.

La caractéristique de transfert est donc une droite, le transistor est un générateur de courant commandé par un courant.

Si on considère le courant de fuite I_{CE0} , la caractéristique ne passe pas par l'origine, car $I_C = I_{CE0}$ pour $I_B = 0$.

7.3- Caractéristiques $I_C = f(V_{BE})$:

La figure $I_C = f(V_{BE})$ montre que, pour un transistor travaillant dans la zone de saturation, la tension V_{BE} varie fort peu. En dessous de $V_{BE} = 0,65$ V, le transistor ne conduit pas. Lorsqu'on dépasse cette valeur, appelée tension de seuil, le courant collecteur augmente exponentiellement.

En pratique, V_{BE} est généralement compris entre 0,65 V (pour des I_C de quelques mA) et 1 V (pour les transistors de puissance parcourus par un I_C important).

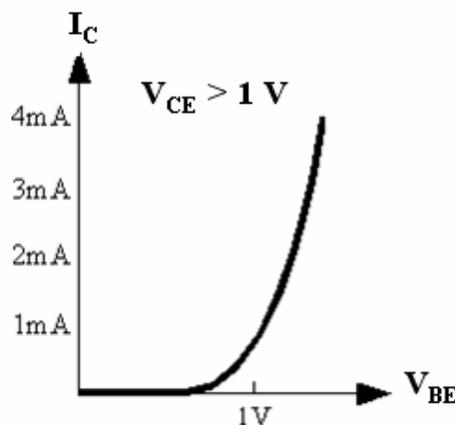


Figure 7 : Caractéristique $I_C = f(V_{BE})$ d'un transistor bipolaire.

7.4- Caractéristiques $I_C = f(V_{CE})$:

La caractéristique principale du transistor bipolaire donne l'évolution du courant de collecteur I_C en fonction de la tension qui existe entre le collecteur et l'émetteur V_{CE} . On présente en général un réseau de caractéristiques $I_C = f(V_{CE})$ pour plusieurs valeurs de I_B . V_{CE} est forcément positif, compte tenu de la polarisation des deux jonctions.

Suivant les valeurs de V_{CE} imposées au composant, nous allons distinguer deux zones de fonctionnement sur le réseau de courbes $I_C = f(V_{CE})$.

Le montage suivant permet le relevé des caractéristiques de sortie $I_C = f(V_{CE})$ à $I_B = c^{te}$.

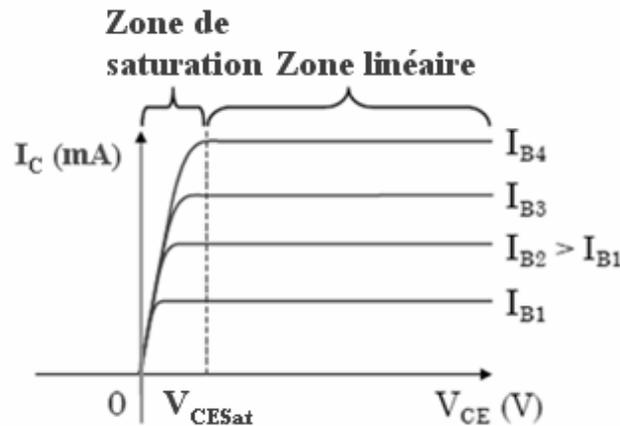


Figure 8 : Caractéristiques de sortie du transistor.

- Si la jonction BC est polarisée en inverse, alors le courant d'électrons peut traverser cette jonction.
- Dans ce cas le courant I_C est indépendant de V_{CE} : Régime linéaire ($I_C = \beta \times I_B$).
- Si $V_{CE} = 0$ alors aucun courant ne circule entre l'émetteur et le collecteur.
- Le basculement entre ces deux fonctionnements se produit à la tension V_{CESat} (Sat pour saturation) : Le courant I_C n'est pas proportionnel à I_B .

8- Polarisation du transistor :

8.1- Définition :

La polarisation consiste à définir le point de fonctionnement statique (Point de repos) du transistor caractérisé par les valeurs V_{BE0} , I_{B0} , I_{C0} et V_{CE0} .

Il existe différents procédés de polarisation :

8.2- Polarisation par deux sources de tension :

D'après la *figure 9*, la borne négative de chaque alimentation est reliée à l'émetteur, le circuit se nomme *émetteur commun*. Il présente deux mailles, la maille de gauche est celle de la base et la maille de droite celle du collecteur.

La polarisation a pour rôle de placer le point de fonctionnement du transistor dans la zone linéaire de ses caractéristiques. Pour cela on applique sur les trois électrodes du transistor des potentiels continus de valeurs convenables.

Le point de fonctionnement est fixé par les valeurs de I_B et V_{BE} (Caractéristiques d'entrée) et les valeurs de I_C et V_{CE} (Caractéristiques de sortie).

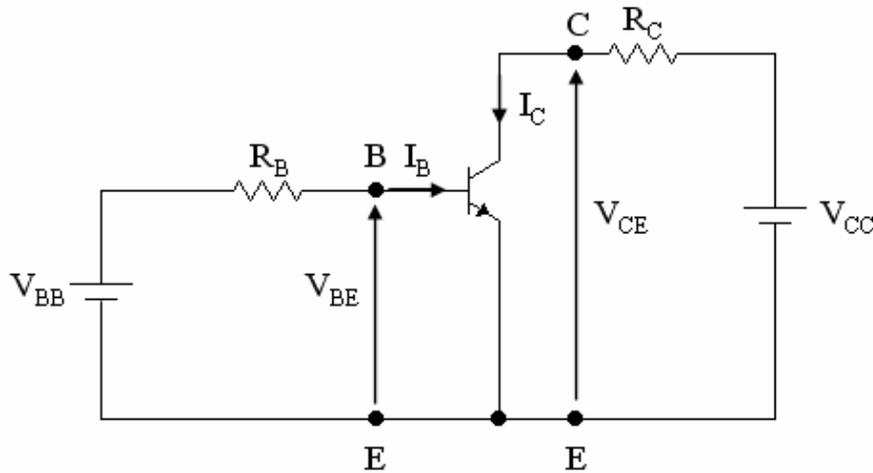


Figure 9 : Polarisation d'un transistor NPN par deux sources de tension.

8.2.1- Point de fonctionnement :

A partir du réseau de caractéristique, on peut déterminer le point de fonctionnement. La connaissance du point de repos à l'entrée N, permet de déduire, via la caractéristique de transfert en courant $I_C = f(I_B)$, la valeur du courant de sortie et donc le point de repos en sortie M.

8.2.1.1- Droite d'attaque statique : $V_{BE} = f(I_B)$

La loi des mailles à l'entrée donne :

$$V_{BB} = V_{BE} + R_B \times I_B$$

C'est l'équation d'une droite que l'on appellera la *droite d'attaque statique*. Le point de fonctionnement N (V_{BE0} , I_{B0}) est défini par l'intersection de la caractéristique d'entrée du transistor $V_{BE} = f(I_B)$ et de la droite d'équation $V_{BE} = V_{BB} - R_B \times I_B$.

8.2.1.2- Droite de charge statique : $V_{CE} = f(I_C)$

La connaissance du point (V_{BE0} , I_{B0}) permet la détermination du courant I_{C0} . L'équation de maille du circuit de sortie nous donne :

$$V_{CE} = V_{CC} - R_C \times I_C$$

La droite représentative de cette équation est appelée *droite de charge statique*. L'intersection de cette droite avec la caractéristique de collecteur du transistor $V_{CE} = f(I_C)$ donne le point de fonctionnement en sortie M caractérisé par les valeurs I_{C0} et V_{CE0} .

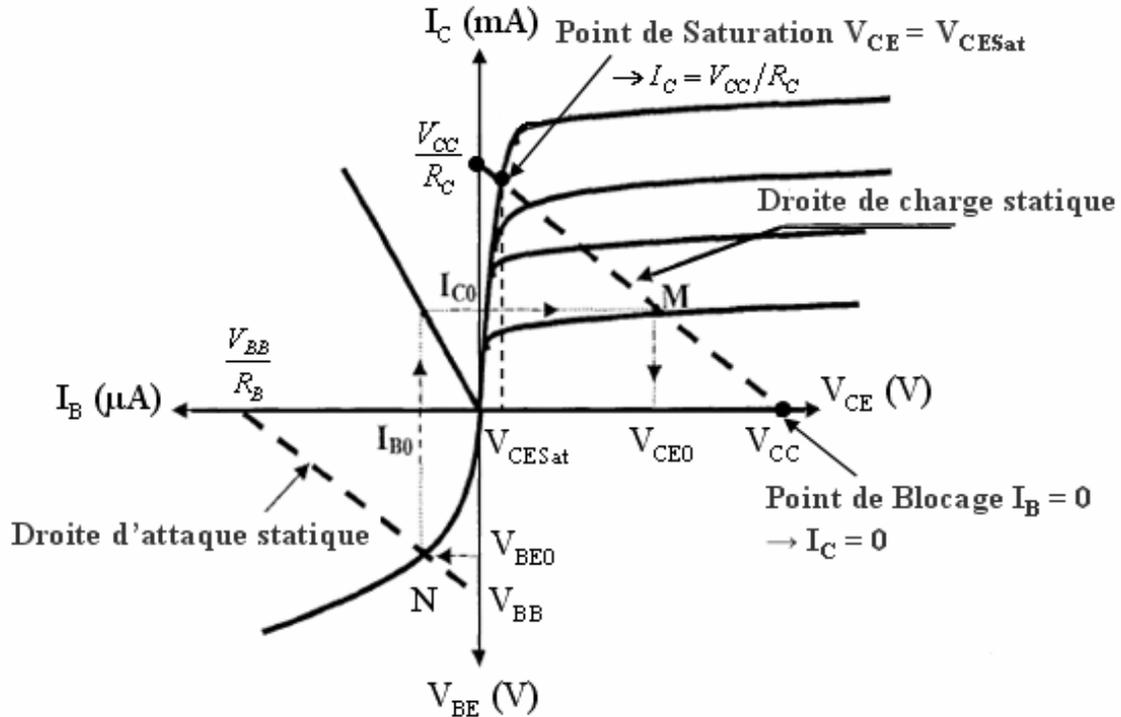


Figure 10 : Effet de la polarisation sur le réseau de caractéristiques d'un transistor NPN.

En conclusion si I_B augmente :

- I_C augmente et tend vers V_{CC}/R_C .
- V_{CE} diminue et tend vers 0.

8.2.1.3- Blocage et saturation :

- Lorsque $V_{BE0} < 0,6$ V, le transistor est bloqué et donc, $I_B = 0$ et $I_C = 0$. Donc :

$$V_{CE} = V_{CC}$$

- Lorsque $V_{CE} < V_{CESat}$ (V_{CESat} variant entre quelques dixièmes de Volt et 1 Volt), on peut donner une excellente approximation de I_C par la formule :

$$I_C \approx \frac{V_{CC}}{R_C}$$

- Tous les points de fonctionnement tels que $V_{CESat} < V_{CE} < V_{CC}$ et $0 < I_C < \frac{V_{CC}}{R_C}$, donc situés entre les points de blocage et de saturation se trouvent dans la *zone active*.

8.3- Polarisation par résistance de base :

Soit le montage de la figure 11 :

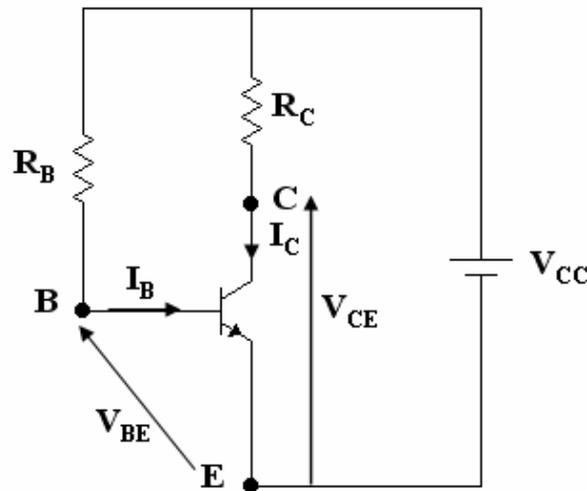


Figure 11 : Polarisation directe par résistance de base.

- *Droite d'attaque statique :*

La loi des mailles à l'entrée permet d'écrire :

$$V_{CC} = R_B \times I_B + V_{BE}$$

Avec : $V_{BE} \approx 0,7 V$.

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B} \approx \frac{V_{CC}}{R_B}$$

- *Droite de charge statique :*

Pour la maille de sortie, on peut écrire :

$$V_{CC} = R_C \times I_C + V_{CE} \Rightarrow I_C = \frac{V_{CC} - V_{CE}}{R_C}$$

Avec : $I_C = \beta \times I_B$.

Ce montage est sensible à la dérive thermique. Ce type de polarisation ne doit jamais être employé pour un transistor utilisé en amplificateur (Il est tolérable en commutation).

8.4- Polarisation par réaction de collecteur :

La *figure 12* représente la polarisation par réaction de collecteur (Aussi appelée polarisation automatique). On ramène la résistance de base au collecteur plutôt qu'à l'alimentation, c'est ce qui diffère la polarisation par réaction de collecteur de la polarisation de base.

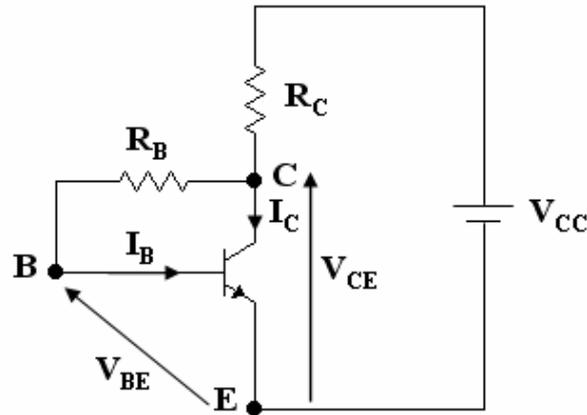


Figure 12 : Polarisation par résistance entre base et collecteur.

- *Droite d'attaque statique :*

L'addition des tensions le long de la maille de la base donne :

$$V_{BE} - V_{CC} + R_B \times I_B + R_C \times (I_C + I_B) = 0$$

Il vient :

$$V_{BE} - V_{CC} + R_B \times I_B + R_C \times I_C \cong 0$$

Avec : $I_C = \beta \times I_B$.

$$V_{BE} = V_{CC} - (R_B + \beta R_C) \times I_B$$

C'est l'équation de la droite d'attaque statique.

- *Droite de charge statique :*

L'addition des tensions le long de la maille du collecteur donne :

$$V_{CE} - V_{CC} + (I_C + I_B) \times R_C = 0$$

I_B étant beaucoup plus petit que le dans la région active, négligeons I_B devant I_C et réarrangeons cette équation sous la forme :

$$I_C = \frac{V_{CC} - V_{CE}}{R_C}$$

On voit immédiatement que l'ordonnée à l'origine de la droite de charge représente un courant de saturation égal à V_{CC}/R_C et l'abscisse à l'origine représente une tension de blocage égale à V_{CC} .

La polarisation par réaction de collecteur est parfois plus efficace que la polarisation par réaction d'émetteur. Bien que le transistor soit encore sensible à la variation de β , on utilise ce type de polarisation. Il offre l'avantage de la simplicité (Seulement deux résistances) et d'une meilleure réponse en fréquence (Etudiée plus loin).

8.5- Polarisation par réaction d'émetteur :

Soit le montage de la figure 13 ci-dessous :

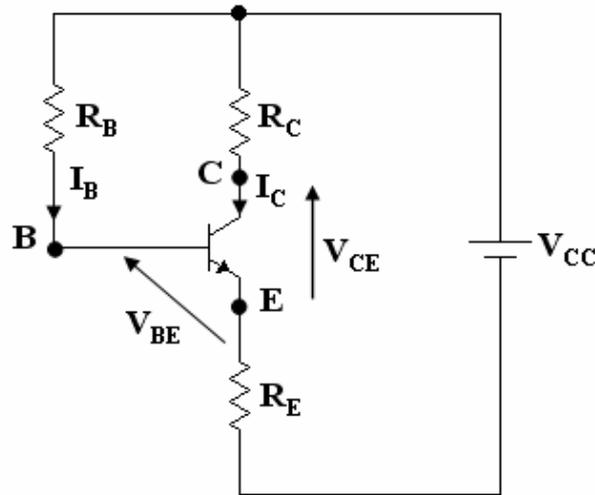


Figure 13 : Polarisation par réaction d'émetteur.

- *Droite d'attaque statique :*

L'addition des tensions le long de la maille de la base donne :

$$V_{BE} - V_{CC} + R_B \times I_B + R_E \times I_E = 0$$

Or $I_E \cong I_C$ et $I_C = \beta \times I_B$.

Donc l'équation ci-dessus devient :

$$V_{BE} = V_{CC} - (R_B + \beta R_E) \times I_B$$

- *Droite de charge statique :*

L'addition des tensions le long de la maille du collecteur donne :

$$V_{CE} - V_{CC} + R_E \times I_E + R_C \times I_C = 0$$

Comme I_E égale environ I_C . Réarrangeons cette équation sous la forme :

$$I_C \cong \frac{V_{CC} - V_{CE}}{R_C + R_E}$$

On voit maintenant que l'ordonnée à l'origine de la droite de charge représente un courant de saturation égal à $V_{CC}/(R_C + R_E)$ et l'abscisse à l'origine représente une tension de blocage égale à V_{CC} .

On utilise la polarisation par réaction d'émetteur pour masquer la variation de β . Si l'on prend la résistance R_E suffisamment grande pour masquer l'effet de β , on sature le transistor. Donc, la polarisation par réaction d'émetteur est presque aussi sensible à la variation de β que la polarisation de base.

8.6- Polarisation par diviseur de tension :

La *figure 14* représente le circuit de polarisation par diviseur de tension (Aussi appelé circuit universel de polarisation). Cette polarisation est la plus utilisée dans les circuits linéaires. L'appellation « Par diviseur de tension » provient du diviseur de tension formé par (R_1 et R_2). La tension entre les bornes de R_2 polarise la diode « Emetteur » en direct.

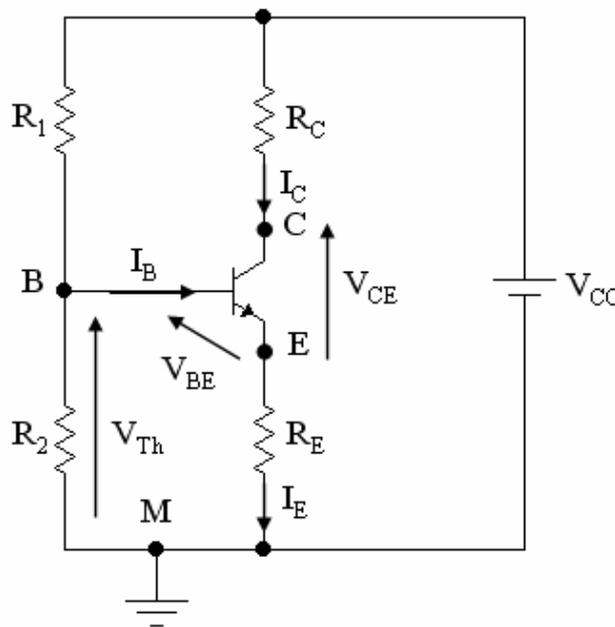


Figure 14 : Polarisation par diviseur de tension : Circuit complet.

Remplaçons le réseau d'entrée du transistor (R_1 et R_2) par le générateur de Thévenin. On obtient le montage de la *figure 15*.

- La tension de Thévenin est donnée par :

$$V_{Th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{CC}$$

- La résistance de Thévenin est donnée par :

$$R_{Th} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$$

Qu'on écrit plus simplement :

$$R_{Th} = R_1 // R_2$$

- *Droite d'attaque statique :*

L'équation de la maille d'entrée qui nous donnera l'équation de la droite d'attaque statique est :

$$V_{Th} = R_{Th} \cdot I_B + V_{BE} + R_E \cdot I_E = (R_1 // R_2) \cdot I_B + V_{BE} + R_E \cdot I_E$$

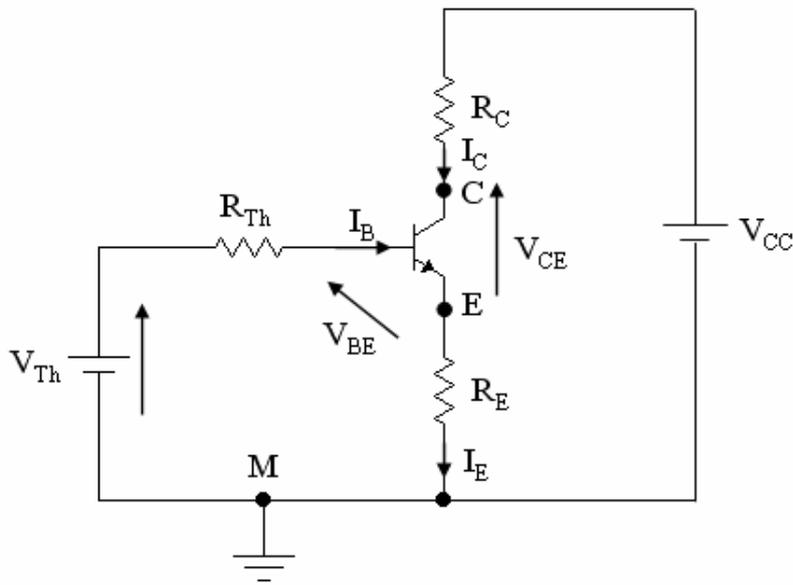


Figure 15 : Polarisation par diviseur de tension : Simplification du schéma.

Or, $I_E = \beta \times I_B$, donc :

$$V_{Th} = (R_1 // R_2 + \beta \times R_E) \times I_B + V_{BE}$$

Pour que la tension du diviseur apparaisse constante vue de la base, la loi de la source de tension constante se traduit par : $\beta \times R_E \gg R_1 // R_2$ (Diviseur à tension constante).

L'équation de la droite d'attaque statique est donc :

$$V_{Th} = \beta \cdot R_E \cdot I_B + V_{BE} \quad (2)$$

- *Droite de charge statique :*

Pour la droite de charge statique, on a :

$$V_{CC} = R_C \times I_C + V_{CE} + R_E \times I_E$$

Or, $I_E = \frac{(\beta + 1)}{\beta} \times I_C$, mais comme β est très grand, on peut écrire :

$$I_E \approx I_C$$

L'équation de la droite de charge statique est :

$$V_{CC} = (R_C + R_E) \times I_C + V_{CE}$$

Remarque : De l'équation (2), on tire :

$$I_B = \frac{V_{Th} - V_{BE}}{\beta \times R_E} = \frac{\frac{R_2 \times V_{CC}}{R_1 + R_2} - V_{BE}}{\beta \times R_E}$$

D'où :

$$I_C = \beta \times I_B = \frac{\beta \cdot \left(\frac{R_2 \times V_{CC}}{R_1 + R_2} - V_{BE} \right)}{\beta \times R_E} = \frac{R_2 \times V_{CC} - V_{BE}}{R_E}$$

- On voit que I_C ne dépend plus de β . De plus, si on prend $V_{BE} \ll V_{Th}$, alors

$I_C \approx \frac{R_2 \times V_{CC}}{(R_1 + R_2) \times R_E}$ et I_C est indépendant du transistor tout comme V_{CE} d'après (2).

Bibliographie

- [1] **Notions fondamentales pour l'Electricité et l'Electronique**, Hamdoune Abdelkader, Université Abou Bakr Belkaid Tlemcen, 2012.
- [2] **Principes d'électronique**, Albert Paul Malvino, Dunod, 2002.
- [3] **Support de cours : Electronique générale**, Said Adel, Institut Supérieur des Etudes Technologiques de Nabeul, 2013/2014.
- [4] **Electricité générale**, Neffati Tahar, Dunod, 2003.
- [5] **Support de cours : Electronique Fondamentale 1**, Bekkouche Khaled, Université Mohamed Khider Biskra, 2014/2015.
- [6] **Electronique générale**, Meriche Faiza, Université Mohamed Seddik Ben Yahya Jijel, 2015.
- [7] **Les quadripôles électriques**, Bekkouche Khaled, Electronique Fondamentale 1, 2^{ème} année licence génie électrique Université Mohamed Khider Biskra, 2014/2015.
- [8] **Quadripôles**, S. Tisserant, ESIL – Matériaux – Electronique analogique – 2011-2012.
- [9] **Electricité générale : Les lois de l'électricité**, Michel Piou, Agrégé de génie électrique IUT de Nantes France, Edition 11/03/2014.
- [10] **Filtres passifs : Exercices**, N. Roussafi, electroussafi.ueuo.com.
- [11] **Filtres passifs.doc**, Serge Monnin.
- [12] **La fonction filtrage (Chapitre4)**, Cours de physique appliquée Terminale STI électronique, epix@fr.st.
- [13] **Filtres passifs du 1^{er} et du 2nd ordre**, Moreggia PCSI, 2011/2012.
- [14] **Filtre d'ordre 1**, [http : //pcsi-unautre REGARD.over-blog.com/](http://pcsi-unautre REGARD.over-blog.com/), 2008-2009.
- [15] **Introduction à l'électronique analogique**, Neffati Tahar, Dunod, 2008.
- [16] **Le transistor bipolaire**, Pascal Masson, École Polytechnique Universitaire de Nice Sophia-Antipolis Cycle Initial Polytechnique, Edition 2008-2009.
- [17] **Amplificateurs à transistors bipolaires**, Claude Chevassu, O1MM 2^e année, Version du 18 Février 2012.