

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ecole Supérieure en Génie Electrique et Energétique d'Oran
المدرسة العليا في الهندسة الكهربائية و الطاقة بوهران



SUPPORT DE COURS D'ELECTRICITE GENERALE

Préparé par : Dr ALIANE KAMILA



Année universitaire : 2017-2018

République Algérienne Démocratique et Populaire
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ecole Supérieure en Génie Electrique et Energétique d'Oran
المدرسة العليا في الهندسة الكهربائية و الطاقة بوهران



SUPPORT DE COURS
D'ELECTRICITE GENERALE

Préparé par : Dr ALIANE KAMILA

Maître de Conférences classe « B »

Dans le cadre de la préparation de l'habilitation universitaire

Année universitaire : 2017-2018

Avant propos

Depuis la nuit des temps, l'homme s'est intéressé aux caractéristiques électriques de certains phénomènes naturels (foudre, éclair, ...).

Il faut dire que cet intérêt est resté au stade de contemplation et ce n'est qu'à partir du 16^{ème} siècle qu'a commencé l'accumulation des connaissances dans ce domaine.

Ce n'est qu'après l'invention de la pile par le physicien italien Volta qu'est apparue l'électricité comme une nouvelle source d'énergie.

Les travaux de beaucoup d'imminents savants et physiciens (Maxwell, Ohm, Kirchhoff, Lorentz,...) ont permis de fonder les bases de cette nouvelle science appliquée.

L'apparition beaucoup plus tard (année 1950) des dispositifs à semiconducteurs a fait une nette séparation entre électricité et électronique dans le domaine des études et des spécialisations.

Les circuits électriques sont devenus une partie tellement indispensable de notre quotidien qu'on ne fait même plus attention à toute la complexité de ce qu'il y a derrière le simple fait d'allumer une lampe dans son salon ou son téléviseur ou le feu clignotant de son véhicule, ou encore le fait de démarrer le moteur de ce dernier.

Tous les systèmes énumérés ci-dessus ne sont en fait que des systèmes électriques plus ou moins complexes et composés essentiellement d'éléments de base des circuits électriques.

Le polycopié entre vos mains traite des circuits électriques, de leurs composants essentiels et des méthodes d'analyse de ces circuits pour pouvoir calculer toutes les grandeurs électriques.

Ce cours complet d'électricité générale est destiné aux étudiants de l'Ecole Supérieure en Génie Electrique et Energétique d'Oran. Il correspond au programme officiel du module « Electricité générale » enseigné en deuxième année.

Ce polycopié est configuré de la manière suivante :

Le premier chapitre est destiné à faire des rappels sur les nombres complexes et les impédances complexes. Nous étudions aussi le comportement des circuits électriques simples en régime sinusoïdal.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les notions importantes sur les puissances électriques en monophasé.

Dans le troisième chapitre, nous traitons les différentes lois et méthodes d'analyse des circuits électriques en régime sinusoïdal.

Au dernier chapitre, nous étudions les systèmes triphasés équilibrés et les puissances triphasées d'une manière détaillée.

Chaque chapitre contient :

- Un *cours synthétique*, richement illustré.
- Des *exercices d'application* intégrés au cours avec leur correction.

A l'issue de l'étude de ce polycopié, l'étudiant sera capable d'analyser les circuits électriques, de calculer leurs paramètres et de déduire les réponses à certains types d'excitations.

ALIANE KAMILA

Sommaire

Chapitre 1 : Etude des circuits monophasés en régime sinusoïdal

1- Introduction.....	1
2- Définitions.....	1
2.1- Signal électrique.....	1
2.1.1- Régime sinusoïdal.....	1
2.2- Systèmes de phase.....	2
3- Représentation d'un signal sinusoïdal	3
3.1- Diagramme de Fresnel	3
3.2- Dipôles simples soumis à un régime sinusoïdal	3
3.2.1- Résistance	3
3.2.2- Bobine	4
3.2.3- Condensateur.....	5
4- Rappels sur les nombres complexes	5
5- Généralisation de la loi d'Ohm	6
5.1- Impédance et admittance complexes.....	6
5.2- Impédances et admittances complexes des dipôles élémentaires (R, L, C).....	7
5.2.1- Résistance	7
5.2.2- Bobine	7
5.2.3- Condensateur.....	8
6- Association des impédances	8
6.1- Association en série	8
6.1.1- Définition	8
6.1.2- Pont diviseur de tension	9
6.2- Association en parallèle	9
6.2.1- Définition	9
6.2.2- Pont diviseur de courant.....	9
6.3- Exemples.....	10
6.3.1- Cas d'un condensateur réel	10
6.3.2- Cas d'une bobine réelle.....	11

6.3.3- Etude d'un circuit RLC série	12
---	----

Chapitre 2 : Puissances électriques en monophasé

1- Energie et puissances	15
1.1- Puissance électrique	15
1.2- Energie électrique	15
1.3- Transformation de l'énergie.....	15
1.3.1- Récepteur	15
1.3.2- Générateur.....	16
1.4- Conservation de l'énergie et rendement.....	16
2- Puissances en régime sinusoïdal	17
2.1- Puissance instantanée.....	17
2.1.1- Puissance instantanée des dipôles élémentaires.....	18
2.2- Puissance active (ou Moyenne)	21
2.3- Puissance réactive	22
2.4- Puissance apparente	22
2.5- Triangle des puissances.....	23
3- Théorème de Boucherot.....	23
3.1- Théorème	24
4- Mesure des puissances électriques.....	26
4.1- Mesure d'une puissance active	26
4.2- Mesure d'une puissance apparente	26
4.3- Mesure d'une puissance réactive	27
4.4- Mesure de facteur de puissance	27
5- Amélioration du facteur de puissance.....	27
5.1- Importance du facteur de puissance.....	27
5.2- Méthode du triangle de puissance.....	28

Chapitre 3 : Lois fondamentales des circuits électriques en régime alternatif

1- Définitions topologiques.....	31
1.1- Dipôle.....	31

1.2- Circuit électrique.....	31
2- Lois de Kirchhoff.....	32
2.1- Loi des nœuds (Première loi de Kirchhoff)	32
2.2- Loi des mailles (Deuxième loi de Kirchhoff)	32
2.3- Méthode des courants des mailles.....	32
3- Théorème de Millman.....	34
3.1- Enoncé du théorème.....	34
3.2- Démonstration.....	34
4- Théorème de superposition	36
4.1- Enoncé du théorème.....	36
5- Théorèmes de Thévenin et de Norton.....	37
5.1- Théorème de Thévenin.....	37
5.2- Théorème de Norton	40
5.3- Conversion entre un circuit de Thévenin et de Norton.....	43
6- Théorème de Kennelly.....	44
6.1- Passage du circuit triangle (π) au circuit étoile (T).....	44
6.1.1- Démonstration.....	44
6.2- Passage du circuit étoile (T) au circuit triangle (π).....	45
6.2.1- Démonstration.....	45

Chapitre 4 : Les circuits triphasés équilibrés

1- Introduction.....	47
2- Avantages du triphasé.....	47
3- Distribution	47
4- Etude des tensions simples.....	48
4.1- Définition	48
4.2- Définition d'un système triphasé	48
4.3- Définition d'un système triphasé équilibré	49
4.3.1- Equations horaires.....	49
4.3.2- Vecteurs de Fresnel associés et oscillogrammes	49
4.3.3- Système triphasé équilibré direct ou inverse	50
5- Etude des tensions composées	50
5.1- Définition	50

5.2 Vecteurs de Fresnel associés et oscillogrammes.....	51
6- Relation entre les tensions et notation	52
7- Récepteurs triphasés équilibrés.....	52
7.1- Quelques définitions	52
7.2- Couplage en étoile (Y).....	53
7.2.1- Montage	53
7.2.2- Relations entre les courants	53
7.3- Couplage en triangle (Δ).....	54
7.3.1- Montage	54
7.3.2- Relations entre les courants	54
7.4- Plaque à bornes	55
7.5- Passage du couplage triangle au couplage étoile	55
8- Pertes par effet Joule.....	56
8.1- Couplage en étoile.....	56
8.2- Couplage en triangle	56
9- Puissances en triphasé.....	56
9.1- Théorème de Boucherot.....	56
9.2- Couplage en étoile.....	57
9.3- Couplage en triangle	58
10- Mesure de puissances en triphasé	59
10.1- Méthode d'un seul wattmètre.....	59
10.2- Méthode de deux wattmètres	60
11- Relèvement du facteur de puissance en triphasé.....	61
11.1- Couplage des condensateurs en triangle	62
11.2- Couplage des condensateurs en étoile.....	62
11.3- Relation entre les condensateurs en étoile et en triangle	63

Chapitre 1

Etude des circuits monophasés en régime sinusoïdal

Etude des circuits monophasés en régime sinusoïdal

1- Introduction :

Le régime sinusoïdal, appelé souvent régime harmonique, joue un rôle considérable en électronique linéaire, et plus généralement dans la théorie des systèmes linéaires pour diverses raisons :

- La forme du signal sinusoïdal est la seule qui se conserve à la traversée d'un système linéaire. En effet, l'intégrale ou la dérivée d'une sinusoïde reste toujours une sinusoïde avec une amplitude et une phase qui peuvent varier.
- La théorie de Fourier montre que tout signal peut être décomposé en une somme infinie de signaux sinusoïdaux. Nous pouvons donc prévoir la réponse d'un système linéaire à un signal quelconque connaissant sa réponse harmonique.
- Enfin, le signal sinusoïdal est très répandu parce qu'il est facile à produire.

Dans cette partie, nous étudions des circuits linéaires dans lesquels les signaux imposés par les générateurs sont sinusoïdaux.

2- Définitions :

2.1- Signal électrique :

Un *signal électrique* (*tension* ou *courant*) peut être *continu* (si l'amplitude est constante sur un intervalle de temps donné) ou *variable* (si l'amplitude varie continûment en fonction du temps). Dans certains cas, le signal varie suivant des *lois mathématiques* simples (signal sinusoïdal par exemple).

2.1.1- Régime sinusoïdal :

Le signal sinusoïdal est un signal périodique particulier. Sa loi d'évolution s'exprime à l'aide des fonctions « *Sinus* ». On dit qu'un réseau linéaire fonctionne en régime sinusoïdal ou régime harmonique si ses tensions et courants ont pour expressions algébriques :

$$s(t) = S_{Max} \sin(\omega t + \varphi)$$

$2 S_{Max}$ représente la valeur *crête à crête* de $s(t)$.

S_{Max} est l'amplitude maximale ou *crête* du signal $s(t)$ en Volt [V].

$\omega t + \varphi$ représente la *phase instantanée*, qui exprimée généralement en radian [Rad] et parfois en [degré].

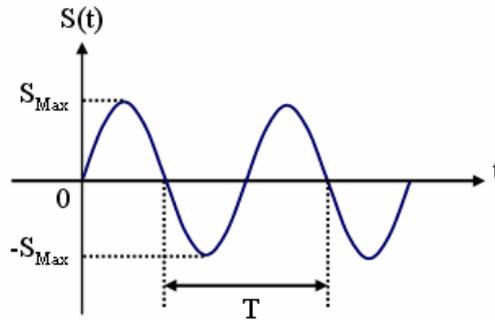
ω est la pulsation (appelée parfois vitesse angulaire) du signal. La pulsation est reliée à la fréquence et à la période T par :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Exprimée en radian par seconde [Rad/s] et f fréquence en Hertz (Hz).

φ est la **phase à l'origine** (à $t = 0$) exprimée en radian [Rad] ou en [degré].

- **Représentation temporelle (cartésienne) d'un signal sinusoïdal :**



- **Valeur efficace :**

On appelle valeur efficace d'une grandeur périodique la racine moyenne du carré de cette grandeur calculée sur une période :

$$S_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T S_{Max}^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt} = \frac{S_{Max}}{\sqrt{2}}$$

Ainsi on écrira souvent :

$$s(t) = S_{eff} \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$$

La **valeur efficace** est celle indiquée par les **voltmètres** et les **ampèremètres**.

- **Valeur moyenne :**

On appelle valeur moyenne d'une grandeur périodique de période T le résultat :

$$S_{Moy} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T S_{Max} \sin(\omega t + \varphi) dt = 0$$

Pour un **signal sinusoïdal (tension ou courant)** la valeur moyenne est **nulle**.

2.2- Systèmes de phase :

En courant alternatif, on distingue le **fil neutre**, qui sert de référence de tension, et le **fil (les fils) de phase**, qui transporte (transportent) le courant. Il existe différents systèmes de courant alternatif :

- **Le monophasé :** c'est le système le plus utilisé pour les réseaux domestiques. Il utilise deux câbles : la phase et le neutre.
- **Le biphasé :** ancien système devenu très rare. Utilise deux fils de phase, et pas de fil neutre.
- **Le triphasé :** principalement utilisé pour le transport de l'utilisation de fortes puissances. Il utilise trois fils de phase et un fil neutre.

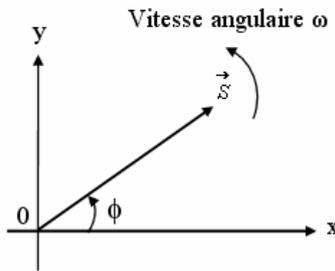
3- Représentation d'un signal sinusoïdal :

3.1- Diagramme de Fresnel :

La *représentation de Fresnel* (ou *vectorielle*) d'un signal $s(t) = S_{Max} \sin(\omega t + \varphi)$ est un vecteur \vec{S} , de module S_{Max} , tournant autour de O dans le sens trigonométrique (antihoraire) à la vitesse angulaire ω . Le vecteur de Fresnel associé à $s(t)$ est défini de la façon suivante :

$$\vec{S} \begin{cases} \|\vec{S}\| = S_{Max} \\ (OX, \vec{S}) = \varphi \end{cases}$$

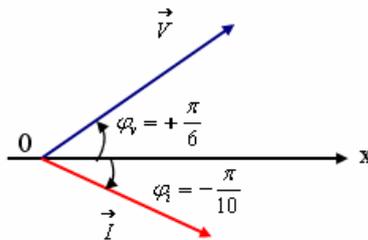
Le diagramme de Fresnel est le suivant :



Exemple d'application : Tracer les diagrammes de Fresnel :

$$v(t) = 4\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$i(t) = 2\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{10}\right)$$



3.2- Dipôles simples soumis à un régime sinusoïdal :

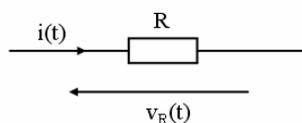
En régime sinusoïdal permanent, le courant $i(t)$ s'écrit sous la forme :

$$i(t) = I_{Max} \sin(\omega t + \varphi_i)$$

En prenant le courant à l'origine des phases ($\varphi_i = 0$), on a :

$$i(t) = I_{Max} \sin(\omega t)$$

3.2.1- Résistance :



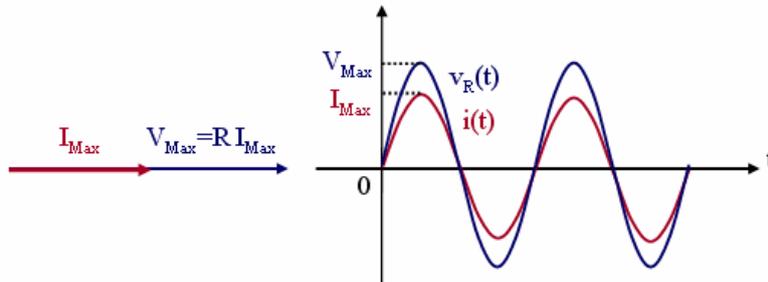
Chapitre 1 : Etude des circuits monophasés en régime sinusoïdal

La tension instantanée $v_R(t)$ aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance R , parcouru par un courant instantané d'intensité $i(t)$, s'écrit :

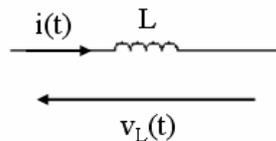
$$v_R(t) = R \times i(t)$$

$$v_R(t) = R \times I_{Max} \sin(\omega t) = V_{Max} \sin(\omega t)$$

Pour la résistance, $v_R(t)$ et $i(t)$ sont en **phase**.



3.2.2- Bobine :



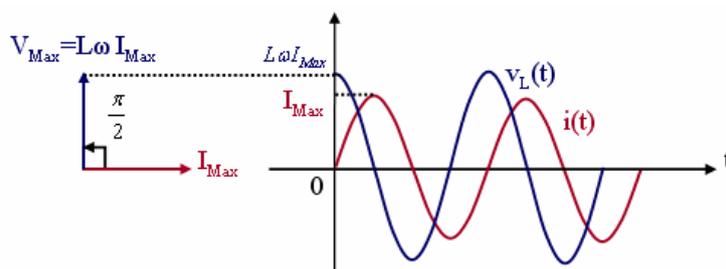
Considérons une bobine d'inductance L parcourue par un courant $i(t)$. La tension à ses bornes est :

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

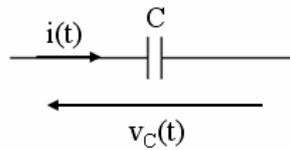
$$v_L(t) = L \times I_{Max} \times \omega \cos(\omega t) = L \omega I_{Max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_L(t) = V_{Max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Pour la bobine, $v_L(t)$ est **en avance** de $\frac{\pi}{2}$ sur $i(t)$.



3.2.3- Condensateur :

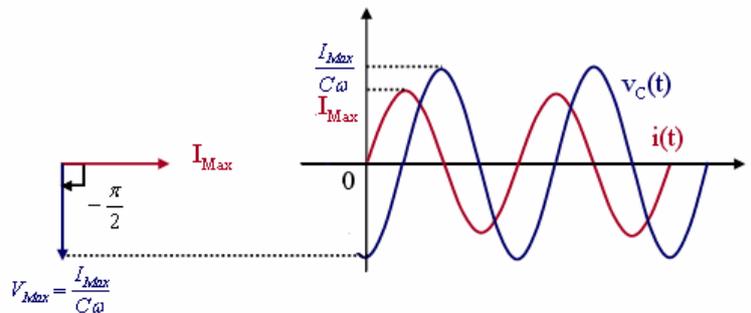


Considérons un condensateur C parcouru par un courant $i(t)$. La tension à ses bornes est :

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt = \frac{1}{C} \int I_{Max} \sin(\omega t) dt$$

$$v_C(t) = -\frac{I_{Max}}{C\omega} \cos(\omega t) = \frac{I_{Max}}{C\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Pour le condensateur, $v_C(t)$ est *en retard* de $\frac{\pi}{2}$ sur $i(t)$.



4- Rappels sur les nombres complexes :

Un nombre complexe écrit dans sa forme cartésienne a pour expression :

$$\underline{Z} = a + jb$$

Avec a la partie réelle et b la partie imaginaire, et j le nombre complexe vérifiant $j^2 = -1$.

Le nombre complexe conjugué \underline{Z}^* est obtenu en changeant le signe de la partie imaginaire :

$$\underline{Z}^* = a - jb$$

Soit deux nombres complexes \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 tels que $\underline{Z}_1 = a_1 + jb_1$ et $\underline{Z}_2 = a_2 + jb_2$, nous avons :

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1)$$

Il existe trois formes de représentation des nombres complexes :

- La forme classique (cartésienne) : $\underline{Z} = a + jb$.
- La forme trigonométrique : $\underline{Z} = |\underline{Z}| (\cos \varphi + j \sin \varphi)$.
- La forme exponentielle (polaire) : $\underline{Z} = |\underline{Z}| e^{j\varphi}$.

Où $|\underline{Z}|$ est le module : $|\underline{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\underline{Z} \cdot \underline{Z}^*}$.

Et φ est l'argument : $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

- Cas particulier : $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$.

Dans le domaine complexe, les opérations dérivations et intégrations sont beaucoup plus simples, il suffit respectivement de **multiplier** par $j\omega$ et de **diviser** par $j\omega$ l'amplitude complexe.

$$\underbrace{\frac{ds(t)}{dt}}_{\text{REPRESENTATION TEMPORELLE}} \Leftrightarrow \underbrace{j\omega S}_{\text{REPRESENTATION COMPLEXE}}$$

$$\underbrace{\int s(t) dt}_{\text{REPRESENTATION TEMPORELLE}} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{S}{j\omega}}_{\text{REPRESENTATION COMPLEXE}}$$

5- Généralisation de la loi d'Ohm :

5.1- Impédance et admittance complexes :

L'impédance complexe \underline{Z} est défini pour un dipôle linéaire comme étant égale au rapport de l'amplitude complexe de la tension \underline{V} sur l'amplitude complexe du courant \underline{I} :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = \frac{V_{Max} e^{j\varphi_v}}{I_{Max} e^{j\varphi_i}} = \frac{V_{Max}}{I_{Max}} e^{j(\varphi_v - \varphi_i)} = |\underline{Z}| e^{j\varphi}$$

$$\underline{Z} = [|\underline{Z}| [\Omega]; \varphi] \quad \text{Avec : } |\underline{Z}| = \frac{V_{Max}}{I_{Max}} = \frac{V_{eff}}{I_{eff}} \text{ et } \varphi = \varphi_v - \varphi_i$$

Le module $|\underline{Z}|$ est le quotient des amplitudes crêtes (ou efficaces) de la tension et du courant en Ohm $[\Omega]$, l'argument φ est égal à la différence des phases à l'origine (v par rapport à i) en radian $[\text{Rad}]$ ou en $[\text{degré}]$.

L'admittance complexe \underline{Y} est l'inverse de l'impédance, ou en d'autres termes :

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{V}} = \frac{1}{\underline{Z}} = |\underline{Y}| e^{j\theta} = |\underline{Y}| e^{-j\varphi}$$

$$\underline{Y} = \left[\frac{1}{|\underline{Z}|} [\Omega^{-1}]; \theta \right] \quad \text{Avec : } |\underline{Y}| = \frac{I_{Max}}{V_{Max}} \text{ et } \theta = -\varphi = \varphi_i - \varphi_v$$

Où $|\underline{Y}|$ désigne le module de l'admittance en Siemens $[S]$ ou $[\Omega^{-1}]$ et θ est le déphasage de l'intensité par rapport à la tension en radian $[\text{Rad}]$ ou en $[\text{degré}]$.

L'impédance $|Z|$ (ou l'admittance $|Y|$) était notée sous forme polaire avec un module et un argument, mais nous pouvons aussi les noter sous forme cartésienne :

$$\underline{Z} = R + jX \quad \text{et} \quad \underline{Y} = G + jB$$

- L'impédance comporte deux termes, la partie réelle R est appelée la **résistance** et la partie imaginaire X est appelée la **réactance**. Elles s'expriment toutes les deux en Ohm $[\Omega]$.
- L'admittance comporte deux termes, la partie réelle G est appelée la **conductance** et la partie imaginaire B est appelée la **susceptance**. Elles s'expriment toutes les deux en Siemens $[S]$ ou $[\Omega^{-1}]$.

5.2- Impédances et admittances complexes des dipôles élémentaires (R, L, C) :

Pour les trois dipôles fondamentaux, nous avons les impédances et les admittances suivantes :

5.2.1- Résistance :

Nous avons :

$$v_R(t) = R \times i(t)$$

En passant aux amplitudes complexes, nous obtenons alors :

$$\underline{V}_R = R \times \underline{I} \Rightarrow \underline{Z}_R = \frac{\underline{V}_R}{\underline{I}} = R$$

Dans le cas d'une résistance, l'impédance complexe est égale à R :

$$\underline{Z}_R = R = [R; \varphi_R = 0]$$

L'impédance complexe d'une résistance est purement **réelle** : la **réactance nulle**.

L'admittance est :

$$\underline{Y}_R = \frac{1}{R} = \left[\frac{1}{R}; 0 \right]$$

5.2.2- Bobine :

La relation entre courant et tension aux bornes d'une bobine d'inductance L est :

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Cette relation temporelle se traduit en termes d'amplitudes complexes par :

$$\underline{V}_L = L \frac{d\underline{I}(t)}{dt} = jL\omega \underline{I} \Rightarrow \underline{Z}_L = \frac{\underline{V}_L}{\underline{I}} = jL\omega$$

La définition de l'impédance complexe d'un dipôle linéaire nous permet alors de poser :

$$\underline{Z}_L = jL\omega = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}} = \left[L\omega; \varphi_L = \frac{\pi}{2} \right]$$

L'impédance complexe d'une bobine est purement *imaginaire* et *positive* : la *réactance inductive*.

L'admittance est :

$$\underline{Y}_L = \frac{1}{jL\omega} = -\frac{j}{L\omega} = \frac{1}{L\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{1}{L\omega}; -\frac{\pi}{2} \right]$$

5.2.3- Condensateur :

La relation entre courant et tension aux bornes d'un condensateur parfait de capacité C est :

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t).dt$$

Nous avons donc :

$$i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

Nous déduisons :

$$\underline{I} = jC\omega \underline{V}_c = e^{j\frac{\pi}{2}} C\omega \underline{V}_c \Rightarrow \underline{Z}_c = \frac{\underline{V}_c}{\underline{I}} = \frac{1}{jC\omega}$$

L'expression de l'impédance du condensateur s'écrit :

$$\underline{Z}_c = \frac{1}{jC\omega} = -j \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{1}{C\omega}; \varphi_c = -\frac{\pi}{2} \right]$$

L'impédance complexe d'un condensateur est purement *imaginaire* et *négative* : la *réactance capacitive*.

L'admittance est :

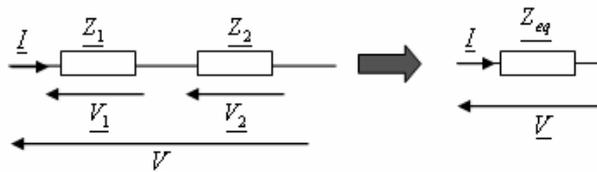
$$\underline{Y}_c = jC\omega = C\omega e^{j\frac{\pi}{2}} = \left[C\omega; \frac{\pi}{2} \right]$$

6- Association des impédances :

6.1- Association en série :

6.1.1- Définition :

Si deux impédances sont *en série*, le *même courant* les traverse, les tensions s'additionnent.



$$\underline{V}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I} \quad \text{et} \quad \underline{V}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}$$

$$\underline{V} = \underline{V}_1 + \underline{V}_2 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{I} = \underline{Z}_{eq} \underline{I} \Rightarrow \underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

Ce résultat se généralise pour l'association de N impédances placées en série :

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_{k=1}^N \underline{Z}_k$$

6.1.2- Pont diviseur de tension :

Le diviseur de tension est un montage électronique simple qui permet de diviser une tension d'entrée \underline{V} en de tensions \underline{V}_k lorsqu'il y a des impédances en **série** \underline{Z}_k . Ce théorème est utilisé pour calculer des tensions aux bornes des impédances placées en série.

$$\underline{V}_1 = \underline{V} \left(\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \right) \quad \text{et} \quad \underline{V}_2 = \underline{V} \left(\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \right)$$

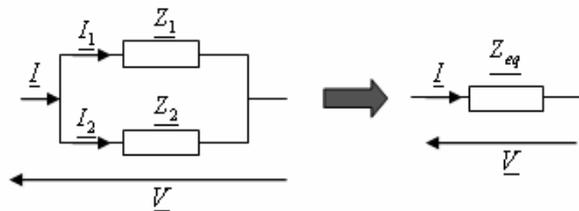
Ce résultat se généralise pour l'association de N impédances placées en série :

$$\underline{V}_k = \underline{V} \left(\frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \dots + \underline{Z}_N} \right)$$

6.2- Association en parallèle :

6.2.1- Définition :

Si deux impédances sont **en parallèle**, la **tension est la même** pour les deux, les courants s'additionnent.



$$\underline{V} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 \quad \text{et} \quad \underline{V} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \right) \underline{V} = \frac{1}{\underline{Z}_{eq}} \underline{V} \Rightarrow \frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \Rightarrow \underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Ce résultat se généralise pour l'association de N impédances placées en parallèle :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\underline{Z}_k}$$

6.2.2- Pont diviseur de courant :

Le diviseur de courant est un montage électronique simple qui permet de diviser un courant d'entrée \underline{I} en de courants \underline{I}_k lorsqu'il y a des impédances en **parallèle** \underline{Z}_k .

$$\underline{I}_1 = \underline{I} \left(\frac{1/\underline{Z}_1}{1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2} \right) = \underline{I} \left(\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \right)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I} \left(\frac{1/\underline{Z}_2}{1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2} \right) = \underline{I} \left(\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \right)$$

A relation du diviseur de tension est très importante. On peut énoncer le résultat ainsi :
 « *Lorsque deux impédances sont montées en dérivation, l'intensité du courant qui passe dans une impédance est égale au produit de l'autre impédance par l'intensité du courant principal divisé par la somme des deux impédances* ».

Ce résultat se généralise pour l'association de N impédances placées en parallèle :

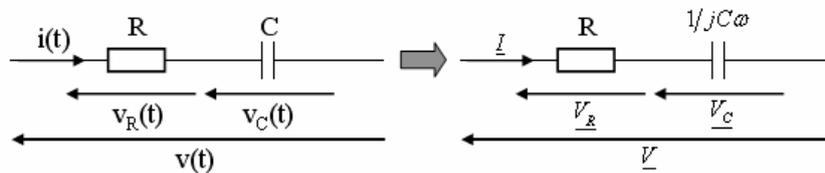
$$\underline{I}_k = \underline{I} \left(\frac{1/\underline{Z}_k}{1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_3 + \dots + 1/\underline{Z}_N} \right)$$

6.3- Exemples :

Nous allons maintenant étudier l'association de dipôles de nature différente en utilisant les impédances complexes.

6.3.1- Cas d'un condensateur réel :

On assimile un condensateur réel à un conducteur ohmique de résistance R en série avec un condensateur parfait de capacité C .



Nous pouvons écrire :

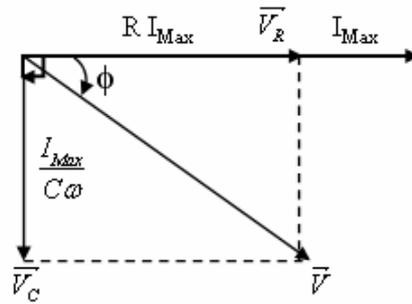
$$\underline{V} = \underline{V}_R + \underline{V}_C$$

$$\underline{V} = (\underline{Z}_R + \underline{Z}_C) \underline{I} = \left(R + \frac{1}{jC\omega} \right) \underline{I} = \underline{Z}_{eq} \cdot \underline{I}$$

On retrouve le module et l'argument de \underline{Z}_{eq} :

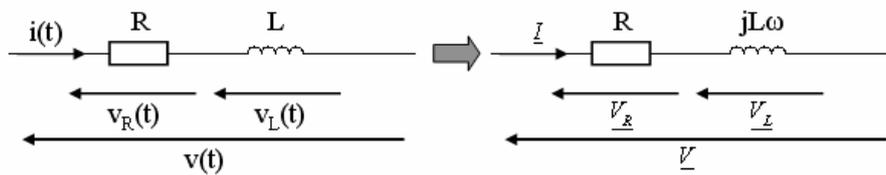
$$\underline{Z}_{eq} = \left(R - j \frac{1}{C\omega} \right) = \left[\underbrace{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} \right)^2}}_{\text{Module}} ; \underbrace{\arctan \left(\frac{-\frac{1}{C\omega}}{R} \right)}_{\text{Phase } \varphi} \right]$$

- **Diagramme de Fresnel :**



6.3.2- Cas d'une bobine réelle :

On assimile une bobine réelle à un conducteur ohmique de résistance R en série avec une bobine idéale d'inductance L .



Nous pouvons écrire :

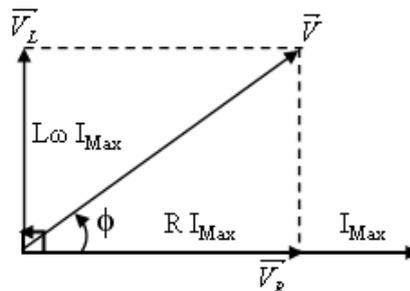
$$\underline{V} = \underline{V}_R + \underline{V}_L$$

$$\underline{V} = (\underline{Z}_R + \underline{Z}_L)\underline{I} = (R + jL\omega)\underline{I} = \underline{Z}_{eq} \cdot \underline{I}$$

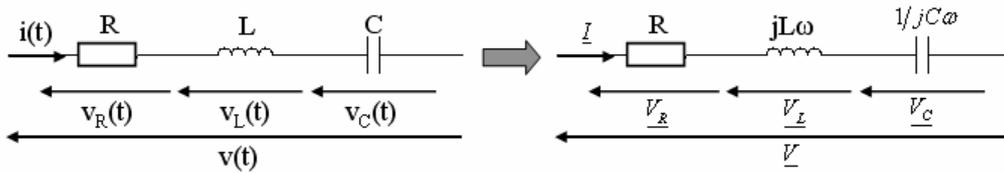
On retrouve le module et l'argument de \underline{Z}_{eq} :

$$\underline{Z}_{eq} = (R + jL\omega) = \left[\underbrace{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}_{\text{Module}} ; \underbrace{\arctan \frac{(L\omega)}{R}}_{\text{Phase } \phi} \right]$$

- **Diagramme de Fresnel :**



6.3.3- Etude d'un circuit RLC série :



Prenons l'association en série des trois éléments de bases qui sont une résistance R , une inductance L et un condensateur C . Le même courant $i(t)$ circule dans les trois éléments, la tension $v(t)$ devient :

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Nous pouvons associer à $i(t)$ et $v(t)$ leurs notations complexes, ce qui donne :

$$\underline{V} = \underline{V}_R + \underline{V}_L + \underline{V}_C$$

$$\underline{V} = R \cdot \underline{I} + jL\omega \underline{I} + \frac{1}{jC\omega} \underline{I} = \left(R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right) \underline{I} = \underline{Z}_{eq} \cdot \underline{I}$$

On retrouve l'impédance :

$$\underline{Z}_{eq} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

Le module et l'argument de \underline{Z}_{eq} sont :

$$\underline{Z}_{eq} = \left[\underbrace{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}_{\text{Module}} ; \underbrace{\arctan \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right)}_{\text{Phase } \varphi} \right]$$

- Si $\varphi = 0$: $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Rightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega}$.

L'impédance \underline{Z}_{eq} a un comportement *résistif*.

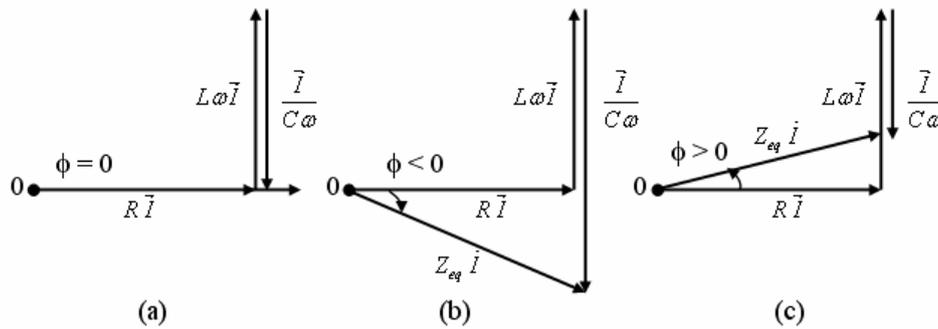
- Si $\varphi > 0$: $L\omega - \frac{1}{C\omega} > 0 \Rightarrow L\omega > \frac{1}{C\omega}$.

L'impédance \underline{Z}_{eq} a un comportement *inductif*.

- Si $\varphi < 0$: $L\omega - \frac{1}{C\omega} < 0 \Rightarrow L\omega < \frac{1}{C\omega}$.

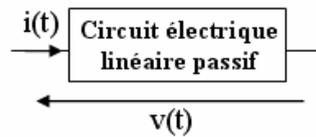
L'impédance \underline{Z}_{eq} a un comportement *capacitif*.

- La représentation de Fresnel du circuit RLC : \underline{Z}_{eq} est résistive (a) ou capacitive (b) ou inductive (c).



Résumé :

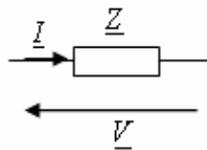
- **En régime alternatif sinusoïdal :** Soit deux signaux sinusoïdaux :



$$v(t) = V_{Max} \sin(\omega t + \varphi_v)$$

$$i(t) = I_{Max} \sin(\omega t + \varphi_i)$$

- **En notation complexe :** On lui associe à chaque signal une grandeur complexe.



$$\underline{v}(t) = V_{Max} e^{j(\omega t + \varphi_v)} = V_{Max} e^{j\omega t} e^{j\varphi_v} = \underline{V} e^{j\omega t}$$

$$\underline{i}(t) = I_{Max} e^{j(\omega t + \varphi_i)} = I_{Max} e^{j\omega t} e^{j\varphi_i} = \underline{I} e^{j\omega t}$$

$\underline{V} = V_{Max} e^{j\varphi_v}$ est l'amplitude complexe de $v(t)$.

$\underline{I} = I_{Max} e^{j\varphi_i}$ est l'amplitude complexe de $i(t)$.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = \frac{V_{Max}}{I_{Max}} e^{j(\varphi_v - \varphi_i)} = \frac{V_{Max}}{I_{Max}} e^{j\varphi} = |\underline{Z}| e^{j\varphi} = R + jX$$

Avec : $|\underline{Z}| = \frac{V_{Max}}{I_{Max}} = \frac{V_{eff}}{I_{eff}}$ et $\varphi = \varphi_v - \varphi_i$.

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{I_{Max}}{V_{Max}} e^{j(\varphi_i - \varphi_v)} = \frac{I_{Max}}{V_{Max}} e^{-j\varphi} = \frac{1}{|\underline{Z}|} e^{-j\varphi} = |\underline{Y}| e^{j\theta} = G + jB$$

Avec : $|\underline{Y}| = \frac{I_{Max}}{V_{Max}} = \frac{I_{eff}}{V_{eff}}$ et $\theta = -\varphi = \varphi_i - \varphi_v$.

Chapitre 1 : Etude des circuits monophasés en régime sinusoïdal

- Les formules et théorème vus en régime continu (diviseur de tension, diviseur de courant,...) se généralisent au régime sinusoïdal.

Analogies :

Grandeurs	Régime continu	Régime sinusoïdal
Tension	U	<u>U</u>
Courant	I	<u>I</u>
Résistance / Impédance complexe	R	<u>Z</u>
Conductance / Admittance complexe	G	<u>Y</u>
Source de tension parfaite	E	<u>E</u>
Source de tension parfaite	I_{CC}	<u>I_{CC}</u>

Chapitre 2

Puissances électriques en monophasés

Puissances électriques en monophasé

1- Energie et puissances :

L'énergie et la puissance sont deux grandeurs très liées et qui ne sont par toujours bien distinguées. On va s'attacher à en donner quelques définitions.

1.1- Puissance électrique :

La puissance *ne se stocke pas, ce n'est pas une quantité*. La puissance électrique est la grandeur physique qui caractérise *la rapidité de transfert d'énergie électrique* dans un dipôle. En courant continu la puissance P reçue par un appareil est égale au produit de sa tension U et l'intensité du courant reçu I . Elle est donnée par la relation :

$$P = U \times I$$

La puissance en Watt [W], la tension en Volt [V] et le courant en Ampère [A].

1.2- Energie électrique :

L'énergie est une quantité. Cela sous entend qu'elle est *stockable*. L'énergie électrique E consommée par un appareil électrique fonctionnant avec une puissance P pendant une durée Δt s'exprime par la relation :

$$E = P \times \Delta t$$

La puissance en Watt [W], le temps en seconde [s] et l'énergie en joule [J].

1.3- Transformation de l'énergie :

1.3.1- Récepteur :

Un récepteur est un dipôle qui transforme *l'énergie électrique* qu'il *reçoit* en *une autre ou plusieurs autres formes d'énergies*. On distingue deux types de récepteurs :

- Récepteur est dit passif car il transforme toute l'énergie électrique qu'il reçoit en énergie thermique (résistor, chauffage,...).
- Récepteur est dit actif car il transforme l'énergie électrique qu'il reçoit en plusieurs formes d'énergies plus l'énergie thermique (moteur,...).

Energie consommée	Récepteur	Energie utile fournie
Energie électrique	Radiateur électrique	Thermique (chaleur)
	Lampe électrique	Rayonnante (lumière)
	Moteur électrique	Mécanique (travail)
	Accumulateur en charge	Chimique
	Transformateur	Electrique

1.3.2- Générateur :

Un générateur est un dipôle qui transforme *une forme d'énergie* (chimique, mécanique, lumineuse,...) en *énergie électrique*.

Energie consommée	Générateur	Energie utile fournie
Thermique (chaleur)	Thermocouple	Energie électrique
Rayonnante (lumière)	Photopile	
Mécanique (travail)	Dynamo, alternateur	
Chimique	Pile, accumulateur	
Electrique	Transformateur	

1.4- Conservation de l'énergie et rendement :

Selon le *principe de conservation de l'énergie*, lors de toute transformation, *l'énergie est conservée*. Il s'énonce de la manière suivante : « *Lors d'une transformation dans un système fermé, la variation de son énergie interne est égale à la quantité d'énergie échangée avec le milieu extérieur, sous forme de chaleur ou de travail* ».

Exemples :

- Résistors : ce sont les fils électriques de tout genre, les lampes à incandescence, les fils chauffants des appareils ménagers, ils transforment de l'énergie électrique en énergie thermique.
- Moteurs électriques : ils sont mis en mouvement (de rotation) par des forces motrices, ils transforment de l'énergie électrique en énergie mécanique et en énergie thermique.

Le rendement est utilisé pour *quantifier la quantité d'une conversion de puissance*. Le rendement η est défini comme le rapport entre l'énergie utile que délivre un système et l'énergie totale fournie à ce même système :

$$\eta = \frac{E_{Utile}}{E_{Consommée}}$$

En divisant par l'intervalle de temps Δt , le rendement peut aussi s'écrire :

$$\eta = \frac{P_{Utile}}{P_{Consommée}} \quad \text{et} \quad \eta \leq 1$$

Le rendement est une grandeur sans dimension mais *il est très souvent exprimé en pourcentage*. Le rapport entre l'énergie *fournie (utile)* à un système et l'énergie *restituée (consommée)* définit son rendement.

- Les appareils qui transforment l'énergie électrique en énergie thermique (four, radiateur,...) sont appelés **récepteurs thermiques**. Toute la puissance électrique absorbée est transformée en puissance thermique, il n'y a pas de pertes.

$$P_{\text{Utile}} = P_{\text{Consommée}} \quad \text{et} \quad \eta = 1$$

- **Les moteurs** transforment l'énergie électrique en énergie mécanique, mais ils ont des pertes dues à l'échauffement, aux frottements,...

$$P_{\text{Consommée}} = P_{\text{Utile}} + P_{\text{Pertes}} \quad \text{et} \quad \eta < 1$$

Exemple : Dans une ampoule électrique :

- L'**énergie consommée** provient de l'électricité.
- L'**énergie utile** est celle qui sert à éclairer.
- L'**énergie non utile** est celle qui fait chauffer l'ampoule.

2- Puissances en régime sinusoïdal :

Soit un dipôle passif, constitué par un ou plusieurs éléments simples. Ce dipôle est traversé par un courant sinusoïdal $i(t)$. Nous trouvons à ses bornes une tension sinusoïdale $u(t)$. Nous pouvons définir plusieurs types de puissances :

2.1- Puissance instantanée :

La puissance instantanée consommée par un dipôle est définie comme le produit de la tension $u(t)$ qui apparaît aux bornes du dipôle par l'intensité du courant $i(t)$ qui le parcourt. Elle s'exprime en Watt [W].

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Nous distinguons deux cas selon le signe de $p(t)$:

- Si $p(t)$ est **positif**, l'énergie est fournie aux dipôles, le dipôle joue le rôle d'un **récepteur**.
- Si $p(t)$ est **négalif**, le dipôle renvoie de l'énergie, le dipôle joue le rôle d'un **générateur**.

En régime sinusoïdal permanent, $u(t)$ et $i(t)$ se mettent sous la forme :

$$u(t) = U_{\text{Max}} \cos(\omega t + \varphi_u) \quad \text{et} \quad i(t) = I_{\text{Max}} \cos(\omega t + \varphi_i)$$

D'où :

$$p(t) = U_{\text{Max}} \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot I_{\text{Max}} \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Soit en utilisant la relation trigonométrique classique suivante :

$$\cos(p) \cdot \cos(q) = \frac{1}{2} [\cos(p - q) + \cos(p + q)]$$

Nous trouvons l'expression de la puissance instantanée :

$$p(t) = \frac{U_{Max} \cdot I_{Max}}{2} [\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)]$$

$$p(t) = \frac{U_{Max}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{Max}}{\sqrt{2}} [\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)]$$

$$p(t) = U_{eff} \cdot I_{eff} [\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)]$$

$$p(t) = U_{eff} \cdot I_{eff} \cos(\varphi_u - \varphi_i) + U_{eff} \cdot I_{eff} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$$

$$p(t) = U_{eff} \cdot I_{eff} \cos(\varphi) + U_{eff} \cdot I_{eff} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i), \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

La puissance instantanée est la somme de deux termes :

- Un **terme constant** qui représente la **puissance active** :

$$P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cos(\varphi)$$

- Et un **terme variable (sinusoïdal)** qui représente la **puissance fluctuante** :

$$P_f(t) = U_{eff} \cdot I_{eff} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$$

La pulsation de l'expression de la puissance instantanée est deux fois la pulsation du signal sinusoïdal (2ω au lieu de ω).

2.1.1- Puissance instantanée des dipôles élémentaires :

En régime sinusoïdal, le courant a alors l'expression suivante : $i(t) = I_{eff} \sqrt{2} \sin(\omega t)$.

- **Dans une résistance :**

Considérons un circuit qui comporte une résistance R alimentée par une tension :

$$u_R(t) = R \times i(t) = R I_{eff} \sqrt{2} \sin(\omega t)$$

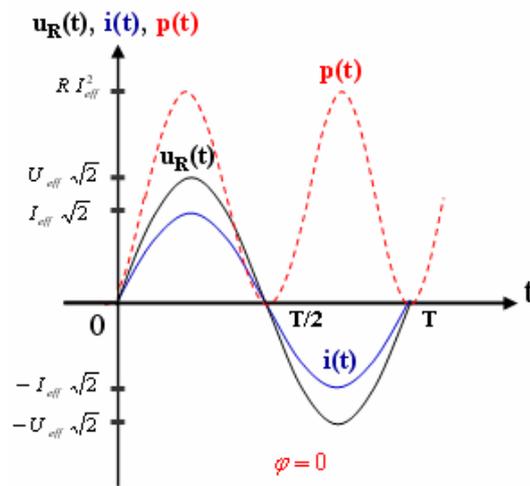
La puissance instantanée qui lui est fournie s'écrit alors :

$$p(t) = u_R(t) \times i(t) = 2 R I_{eff}^2 \sin^2(\omega t)$$

$$p(t) = R I_{eff}^2 (1 - \cos(2\omega t))$$

Remarque : $[\sin(\theta)]^2 = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$.

Le graphe de la puissance instantanée pour un dipôle purement résistif ($\varphi = 0$) est représenté ci-dessous :



Nous constatons que cette puissance est toujours positive et que sa fréquence est double de celle du réseau. L'énergie reçue par la résistance est entièrement consommée et transformée en chaleur. *Une résistance n'emmagasine pas l'énergie : elle la dissipe en chaleur et ne la restitue donc pas à la source.*

- **Dans une inductance :**

Dans ce cas a une tension :

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L\omega I_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t)$$

La puissance instantanée qui fournie à une inductance s'écrit alors :

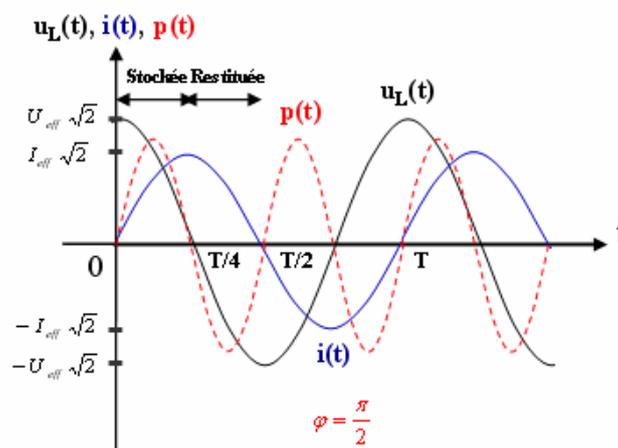
$$p(t) = u_L(t) \times i(t) = 2L\omega I_{eff}^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t)$$

$$p(t) = L\omega I_{eff}^2 \sin(2\omega t)$$

Remarque : $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$.

L'allure de la puissance instantanée pour un dipôle purement inductif $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ est

représentée ci-dessous :



Entre 0 et T/4, l'aire soutendue par $p(t)$ est positive; la bobine stocke de l'énergie. Elle se comporte en *récepteur*. Entre T/4 et T/2, l'aire soutendue par $p(t)$ est négative; la bobine restitue de l'énergie. Elle se comporte en *générateur*.

Pendant la durée [0, T/2], l'énergie dépensée par la bobine est nulle. On dit que le dipôle est purement réactif. Pendant le premier quart de période [0, T/4], la bobine *emmagasine (stockée) une énergie magnétique*. Cette énergie est entièrement *restituée* au réseau au cours du quart de période suivant [T/4, T/2].

• **Dans un condensateur :**

Dans ce cas a une tension :

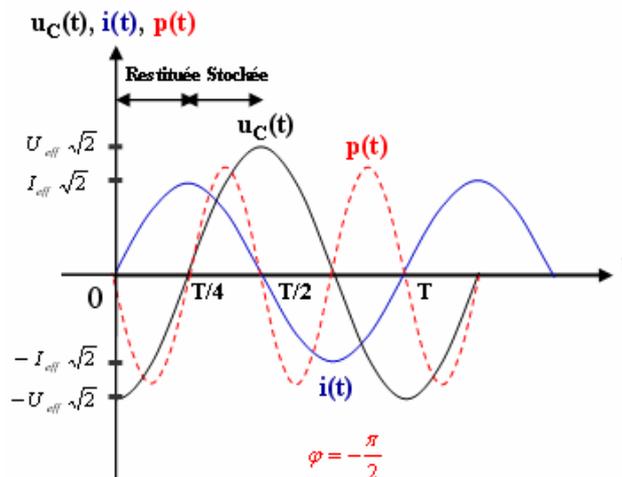
$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt = \frac{\sqrt{2}}{C} \int I_{eff} \sin(\omega t) dt = -\frac{I_{eff} \sqrt{2}}{C\omega} \cos(\omega t)$$

La puissance instantanée emmagasinée dans le condensateur est donnée par :

$$p(t) = u_C(t) \times i(t) = -\frac{2I_{eff}^2}{C\omega} \cos(\omega t) \sin(\omega t)$$

$$p(t) = -\frac{I_{eff}^2}{C\omega} \sin(2\omega t)$$

L'allure de la puissance instantanée pour un dipôle purement capacitif ($\varphi = -\frac{\pi}{2}$) est représentée ci-dessous :



Entre 0 et T/4, l'aire soutendue par $p(t)$ est négative; le condensateur restitue de l'énergie. Il se comporte en *générateur*. Entre T/4 et T/2, l'aire soutendue par $p(t)$ est positive; le condensateur stocke de l'énergie. Il se comporte en *récepteur*.

Pendant la durée [0, T/2], l'énergie dépensée par le condensateur est nulle. Comme la bobine, le condensateur est un dipôle purement réactif. Pendant le premier quart de période [0, T/4], le

condensateur *restitué* une énergie. Cette énergie est entièrement *stockée (sous forme électrique)* pendant le quart de période suivant $[T/4, T/2]$.

2.2- Puissance active (ou Moyenne) :

On appelle puissance active ou puissance moyenne P la valeur moyenne de la puissance instantanée $p(t)$ sur une période T . C'est la puissance qui correspond à un travail physique effectif, son unité est le Watt [W]. Elle s'exprime en régime sinusoïdal monophasé selon la relation :

$$P = \langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t).dt = \frac{U_{Max} \cdot I_{Max}}{2} \cos(\varphi) = U_{eff} \cdot I_{eff} \cos(\varphi)$$

Où φ représente le déphasage entre la tension et le courant circulant dans le dipôle considéré, $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$.

$\cos(\varphi)$ représente le rapport de P sur le produit $U_{eff} \cdot I_{eff}$ s'appelle facteur de puissance. Sa valeur est comprise entre 0 et 1 .

- **Pour une résistance :**

En régime alternatif sinusoïdal, $u(t)$ et $i(t)$ sont en phase ($\varphi = 0$). La puissance active dissipée dans une résistance est donnée par :

$$P_R = U_{eff} \cdot I_{eff} \cos(0) \Rightarrow P_R = U_{eff} \cdot I_{eff} = R \cdot I_{eff}^2 = \frac{U_{eff}^2}{R}$$

La puissance active $P_R > 0$: *la résistance consomme de la puissance active.*

- **Pour une inductance :**

La tension est en avance sur le courant de $\varphi = \frac{\pi}{2}$ donc :

$$P_L = U_{eff} \cdot I_{eff} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

La puissance active dans une inductance est nulle ($P_L = 0$). La bobine ne consomme pas de la puissance active.

- **Pour un condensateur :**

La tension est en retard sur le courant de $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ donc :

$$P_C = U_{eff} \cdot I_{eff} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

La puissance active dans un condensateur est nulle ($P_C = 0$). Le condensateur ne consomme pas de la puissance active.

2.3- Puissance réactive :

C'est une puissance sans effet de travail physique qui correspond à la partie « réactive » du courant. Son unité est le volt-ampère-réactif et son symbole [var] en minuscules. Elle n'est définie qu'en régime sinusoïdal et s'écrit :

$$Q = U_{eff} \cdot I_{eff} \sin(\varphi)$$

Pour un dipôle inductif : $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ et $Q_L > 0$.

Pour un dipôle capacitif : $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < 0$ et $Q_C < 0$.

- **Pour une résistance :**

La puissance réactive dissipée dans une résistance est :

$$Q_R = U_{eff} \cdot I_{eff} \sin(0) = 0$$

La puissance réactive dans une résistance est nulle ($Q_R = 0$). La résistance ne consomme pas de la puissance réactive.

- **Pour une inductance :**

La puissance réactive dans le cas d'une inductance s'écrit alors :

$$Q_L = U_{eff} \cdot I_{eff} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow Q_L = U_{eff} \cdot I_{eff} = L\omega \cdot I_{eff}^2 = \frac{U_{eff}^2}{L\omega}$$

La puissance réactive $Q_L > 0$: l'inductance **consomme** la puissance réactive.

- **Pour un condensateur :**

La puissance réactive dans le cas d'un condensateur s'écrit alors :

$$Q_C = U_{eff} \cdot I_{eff} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow Q_C = -U_{eff} \cdot I_{eff} = -C\omega \cdot U_{eff}^2 = -\frac{I_{eff}^2}{C\omega}$$

La puissance réactive $Q_C < 0$: le condensateur **consomme** une **puissance négative**, on dit qu'il **produit de la puissance réactive**.

2.4- Puissance apparente :

Le produit des valeurs efficaces est appelé puissance apparente. Sa valeur est toujours supérieure ou égale à la puissance active et s'exprime en Volt-Ampère et son symbole est [VA]. La puissance apparente ne représentant en aucun cas un travail physique effectif.

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U_{eff} \cdot I_{eff}$$

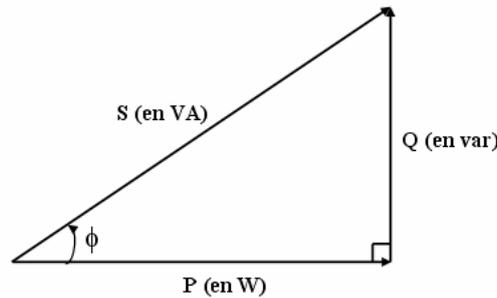
Les puissances active, réactive et apparente sont reliées entre elles par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cos(\varphi) = S \cos(\varphi) \\ Q = U_{eff} \cdot I_{eff} \sin(\varphi) = S \sin(\varphi) \\ S = U_{eff} \cdot I_{eff} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S^2 = P^2 + Q^2 \\ \cos(\varphi) = \frac{P}{S} \end{cases}$$

- **Pour une résistance :** $S_R = \sqrt{P_R^2 + Q_R^2} = R \cdot I_{eff}^2 = \frac{U_{eff}^2}{R}$.
- **Pour une inductance :** $S_L = \sqrt{P_L^2 + Q_L^2} = L\omega \cdot I_{eff}^2 = \frac{U_{eff}^2}{L\omega}$.
- **Pour un condensateur :** $S_C = \sqrt{P_C^2 + Q_C^2} = C\omega \cdot U_{eff}^2 = \frac{I_{eff}^2}{C\omega}$.

2.5- Triangle des puissances :

Voici une façon simple de représenter les relations entre P, Q et S en régime alternatif sinusoïdal. Exemple d'un *récepteur inductif*.



$$P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cos(\varphi) \quad Q = U_{eff} \cdot I_{eff} \sin(\varphi) \quad S = U_{eff} \cdot I_{eff}$$

Si on applique le théorème de Pythagore dans le triangle, on peut déterminer :

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S} \quad \sin(\varphi) = \frac{Q}{S} \quad \tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{Q}{P} \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

La puissance complexe est la somme complexe des puissances moyennes et réactives :

$$\underline{S} = P + jQ = U_{eff} I_{eff} (\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)) = U_{eff} I_{eff} e^{j\varphi} \text{ Avec : } |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ et } \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

3- Théorème de Boucherot :

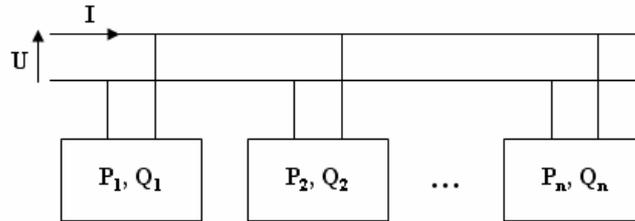
La méthode de Boucherot traduit *la conservation des puissances actives et réactives*. Ce théorème est utilisé en électrotechnique pour déterminer *le courant absorbé* par une installation (ou un circuit). *La méthode* est la suivante :

1- On calcul la puissance active totale P_T .

2- On calcul les puissances réactives connaissant le facteur de puissance $\cos(\varphi)$:

$$Q = P \tan(\varphi).$$

3- On en déduit $S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = U_{eff} \cdot I_{eff}$ puis $I_{eff} = \frac{S_T}{U_{eff}}$.



3.1- Théorème :

- **La puissance active totale P_T** consommée par une installation (ou un circuit) est égale à la somme des puissances actives consommées par chaque appareil (ou par chaque dipôle du circuit).

$$P_T = \sum_{k=1}^n P_k = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

- **La puissance réactive totale Q_T** consommée par une installation (ou un circuit) est égale à la somme des puissances réactives consommées par chaque appareil (ou par chaque dipôle du circuit).

$$Q_T = \sum_{k=1}^n Q_k = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

- Par contre, **la puissance apparente totale S_T** vaut alors :

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = U_{eff} \cdot I_{eff}$$

Avec P_T , Q_T et S_T les puissances actives, réactives et apparentes de l'ensemble et P_k , Q_k et S_k celles associées à chacun des dipôles.

Les puissances apparentes ne se conservent pas $S_T \neq \sum_{k=1}^n S_k$.

Remarque :

- Le théorème de Boucherot n'est pas valable pour la puissance apparente.
- Le théorème de Boucherot, s'applique à tout type de groupements, série ou parallèle.

Exemple :

Un atelier monophasé est constitué de trois ensembles de machines, constituant les charges (1), (2) et (3), mises en parallèle sur la même tension sinusoïdale à 50 Hz de valeur efficace $U_{eff} = 230 \text{ V}$.

On récapitule dans le tableau ci-dessous les mesures faites sur chacune de ces charges.

Charge 1	Charge 2	Charge 3
$P_1=20 \text{ kW}$	$S_2=45 \text{ kVA}$	$S_3=10 \text{ kVA}$
$Q_1=15 \text{ kvar}$	$\cos(\varphi_2) = 0,6$	$Q_3=-5 \text{ kvar}$

1- Calculer pour chaque charge l'ensemble des grandeurs électriques la caractérisant : courant absorbé, puissances actives, réactives, apparentes, et facteur de puissance. On notera ces grandeurs $I_1, I_2, I_3, P_2, P_3, Q_2$, etc.

2- En déduire la valeur de la puissance active totale P et de la puissance réactive totale Q consommées par la charge totale. Calculer également la puissance apparente totale S , le facteur de puissance global $\cos(\varphi)$ ainsi que le courant total absorbé I_{eff} .

Solution :

1* On détaille dans le tableau ci-dessous l'ensemble des grandeurs électriques pour chaque charge :

Charge 1	Charge 2	Charge 3
$P_1=20 \text{ kW}$	$S_2=45 \text{ kVA}$	$S_3=10 \text{ kVA}$
$Q_1=15 \text{ kvar}$	$\cos(\varphi_2) = 0,6$	$Q_3=-5 \text{ kvar}$
$S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = 25 \text{ kVA}$	$P_2 = S_2 \cdot \cos(\varphi_2) = 27 \text{ kW}$	$P_3 = \sqrt{S_3^2 - Q_3^2} = 8,66 \text{ kW}$
$I_1 = \frac{S_1}{U_{\text{eff}}} = 108,7 \text{ A}$	$Q_2 = S_2 \cdot \sin(\varphi_2) = 36 \text{ kvar}$	$I_3 = \frac{S_3}{U_{\text{eff}}} = 43,5 \text{ A}$
$\cos(\varphi_1) = \frac{P_1}{S_1} = 0,8$	$I_2 = \frac{S_2}{U_{\text{eff}}} = 195,7 \text{ A}$	$\cos(\varphi_3) = \frac{P_3}{S_3} = 0,86$

2* Déduire $P, Q, S, \cos(\varphi)$ et I_{eff} :

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 20 + 27 + 8,66 = 55,66 \text{ kW}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 15 + 36 - 5 = 46 \text{ kvar}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{55,66^2 + 46^2} = 72,2 \text{ kVA}$$

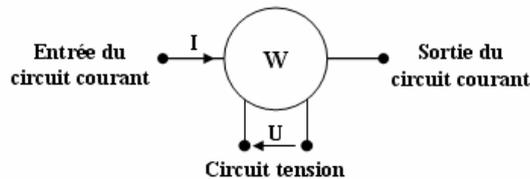
$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S} = \frac{55,66}{72,2} = 0,77$$

$$I_{eff} = \frac{S}{U_{eff}} = \frac{72,2 \times 10^3}{230} = 314 \text{ A}$$

4- Mesure des puissances électriques :

4.1- Mesure d'une puissance active :

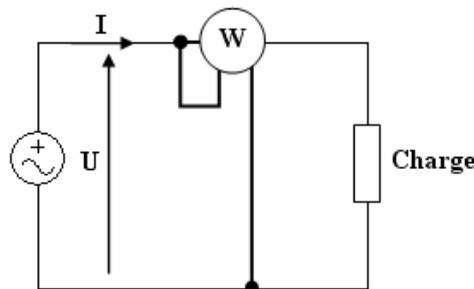
La puissance active est mesurée directement par un wattmètre. Le wattmètre monophasé est un appareil de mesure de puissance en monophasé. Il est constitué de deux bobines : une bobine courant qui permet de mesurer le courant qui traverse la charge (équivalent à un ampèremètre), et une bobine tension mesurent la tension aux bornes de la charge (équivalent à un voltmètre).



Le wattmètre mesure :

$$P_{moy} = \langle u(t).i(t) \rangle \text{ (Watt)}$$

Le câblage utilisé est alors celui représenté sur la figure suivante :

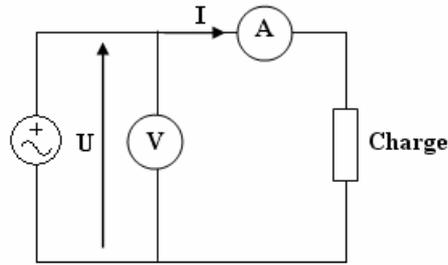


En régime sinusoïdal, on mesure ainsi :

$$P = \langle u(t).i(t) \rangle = U_{eff} . I_{eff} \cos(\varphi)$$

4.2- Mesure d'une puissance apparente :

Mesurer la puissance apparente d'une charge revient à mesurer les valeurs efficaces de sa tension et de son courant et de les multiplier. On réalise le câblage, représenté sur la figure suivante, utilisant un ampèremètre et un voltmètre en mode AC.



Les appareils mesurent :

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) \cdot dt} \quad \text{et} \quad I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) \cdot dt}$$

On forme alors :

$$S = U_{eff} \cdot I_{eff}$$

4.3- Mesure d'une puissance réactive :

La puissance réactive se trouve par le calcul.

$$S^2 = P^2 + Q^2 \Rightarrow Q = \sqrt{S^2 - P^2}$$

4.4- Mesure de facteur de puissance :

Le facteur de puissance se trouve par le calcul.

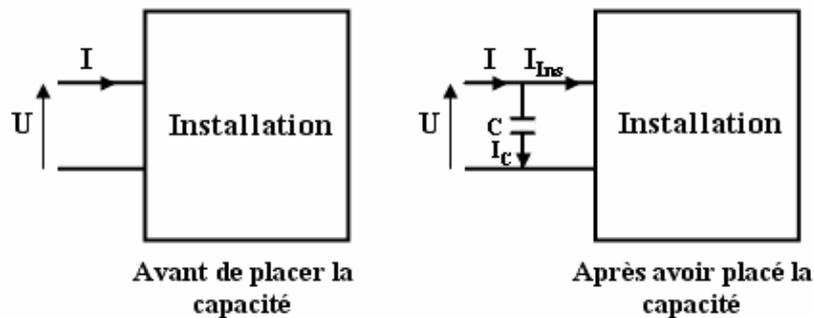
$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S}$$

5- Amélioration du facteur de puissance :

5.1- Importance du facteur de puissance :

- Le facteur de puissance est un élément qui rend compte de l'efficacité d'un dipôle pour consommer correctement la puissance lorsqu'il est traversé par un courant.
- Les *distributeurs d'énergie électrique* facturent en général la *puissance apparente* (en *kVA*) consommée sur la base de la mesure réalisée à l'aide du *compteur d'énergie*.
- Si le *facteur de puissance* d'une installation est *faible*, l'*intensité* consommée sera *grande* d'où une *facture électrique* plus élevée.
- C'est pour cette raison que les *distributeurs d'énergie électrique* facturent l'*énergie réactive* pour les gros consommateurs, la *facturation* tiendra compte de toutes les *puissances* : *Active, réactive et apparente* consommées.
- *Améliorer* le *facteur de puissance* permet donc de *réduire* le courant absorbé total et ainsi diminuer la *puissance apparente souscrite (kVA)*.

- Les avantages de l'amélioration du facteur de puissance : **Réduction des factures d'électricité**. Le facteur de puissance est indiqué sur la facture d'électricité. **Lorsque le facteur de puissance est faible, cela signifie que l'entreprise n'utilise pas complètement l'électricité pour laquelle elle paie, ce qui se traduit par des pénalités importantes sur la facture d'électricité, par une surcharge du système de distribution électrique et par une augmentation du bilan carbone de l'entreprise.** L'amélioration du facteur de puissance permet d'éliminer les pénalités sur la facture d'électricité.
- Pour **améliorer le facteur de puissance (corriger)** d'une installation ou d'un récepteur, il suffit de diminuer la **puissance réactive**. On **ajoute un condensateur (ou une batterie de condensateurs)** aux bornes du récepteur ou de l'installation à compenser.



5.2- Méthode du triangle de puissance :

On peut calculer avec le triangle de puissances.

En monophasé :

$$Q_C = -U_{eff}^2 C \omega$$

La puissance active d'un condensateur étant égale à 0, la puissance active P de l'installation est la même avant et après la mise en place du condensateur.

$$P_C = 0 \Rightarrow P' = P$$

Le théorème de Boucherot permet d'écrire le nouveau bilan de puissance réactive consommée par l'installation :

$$Q' = Q + Q_C \Rightarrow Q_C = Q' - Q = P(\tan(\varphi') - \tan(\varphi))$$

φ : Angle de déphasage avant relèvement.

φ' : Angle de déphasage après relèvement.

On calcule la valeur de la capacité du circuit qui sert à améliorer le facteur de puissance :

$$Q_C = P(\tan(\varphi') - \tan(\varphi)) = -U_{eff}^2 C \omega \Rightarrow C = -\frac{Q_C}{U_{eff}^2 \omega} = \frac{P(\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{U_{eff}^2 \omega}$$

Exemple :

Sur un navire il y a une installation avec une puissance active de 200 kW et un facteur de puissance de 0,61 inductif. La valeur efficace de la tension est 250 V avec une fréquence de 50 Hz.

- Calculer la valeur de la capacité C pour avoir un facteur de puissance de 0,85.

Solution :

- Nous avons une installation inductive donc pour améliorer le facteur de puissance il faut brancher des condensateurs.

$$\tan(\varphi) = \tan(\arccos(0,61)) = 1,30$$

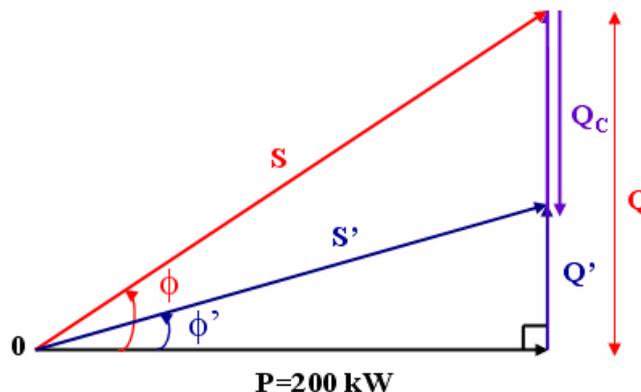
$$\tan(\varphi') = \tan(\arccos(0,85)) = 0,62$$

$$Q_C = P(\tan(\varphi') - \tan(\varphi)) = 200 \times 10^3 (0,62 - 1,30) = -136 \text{ k var}$$

$$C = -\frac{Q_C}{U_{eff}^2 \omega} = \frac{136 \times 10^3}{250^2 \times 314} = 6930 \mu F$$

Cet exemple montre l'intérêt à améliorer le facteur de puissance car on va diminuer considérablement les échauffements dans les conducteurs électriques et on économise plus sur la section des conducteurs.

- Le diagramme de Fresnel de l'installation est le suivant :



Résumé :

- Les puissances en régime sinusoïdal : Les trois puissances utilisées pour un récepteur soumis à une tension monophasée de valeur efficace U_{eff} [V] et parcouru par un courant de valeur efficace I_{eff} [A] sont :

Symbole	Nom	Unité	Formule	Mesure
P	Puissance active ou moyenne	Watt [W]	$P = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$ $P = S \cos(\varphi)$	Wattmètre
Q	Puissance réactive	volt-ampère-réactif [var]	$Q = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \sin(\varphi)$ $Q = S \sin(\varphi)$	Par le calcul
S	Puissance apparente	Volt-Ampère [VA]	$S = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$ $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$	Voltmètre x Ampèremètre

- Les puissances consommées par chacun des éléments de base sont rassemblées ci-dessous :

Dipôle	\underline{Z}	$\varphi_u - \varphi_i$	P	Q	S
Résistance	R	0	$P_R = R \cdot I_{\text{eff}}^2 = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}$	0	$R \cdot I_{\text{eff}}^2 = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}$
Bobine	$jL\omega$	$\frac{\pi}{2}$	0	$Q_L = L\omega \cdot I_{\text{eff}}^2 = \frac{U_{\text{eff}}^2}{L\omega}$	$L\omega \cdot I_{\text{eff}}^2 = \frac{U_{\text{eff}}^2}{L\omega}$
Condensateur	$-j \frac{1}{C\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$Q_C = -C\omega \cdot U_{\text{eff}}^2 = -\frac{I_{\text{eff}}^2}{C\omega}$	$C\omega \cdot U_{\text{eff}}^2 = \frac{I_{\text{eff}}^2}{C\omega}$

Chapitre 3

Lois fondamentales des circuits électriques en régime alternatif

Lois fondamentales des circuits électriques en régime alternatif

1- Définitions topologiques :

1.1- Dipôle :

Un dipôle est un élément électrique capable ou non de fournir de l'énergie, c'est *un récepteur* ou *un générateur* d'énergie électrique, susceptible de convertir l'énergie électrique en une énergie de type différent (chimique, mécanique, radiative, thermique). Il est relié à l'extérieur par deux bornes *A* et *B*. À tout instant, le courant entrant par l'une des bornes est égal au courant sortant par l'autre borne.

1.2- Circuit électrique :

Un circuit électrique ou un réseau est constitué de dipôles connectés entre eux de façon quelconque. En général, il comporte au moins *une source de tension* ou *une source de courant*. Dans un circuit électrique, on distingue :

- **Noeud :**

Un noeud est un *point* d'un circuit où *trois fils ou plus* se rencontrent.

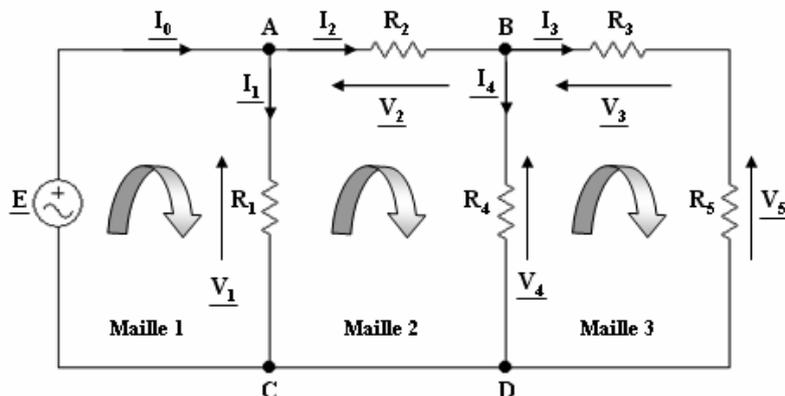
- **Branche :**

Une branche est une portion du réseau comprise entre *deux noeuds consécutifs* qui ne possède aucun embranchement.

- **Maille :**

Une maille est n'importe quel *parcours fermé* dans un circuit qui permet de revenir au point de départ.

Exemple : Sur le circuit de la figure suivante, l'association de R_1 , R_2 , R_3 , R_4 et R_5 formant le dipôle *AC* constitue un réseau électrique alimenté par le générateur de tension \underline{E} . *A*, *B*, *C* et *D* sont les noeuds de ce réseau. Le schéma montre trois mailles. Il en existe d'autres, par exemple, en partant du point *A*, on peut définir une maille qui comprend R_2 , R_3 et R_5 , qui passe par *D*, puis *C* et qui rejoint *A* en incluant R_1 .



2- Lois de Kirchhoff :

Dans un circuit, les lois de Kirchhoff sont constituées de la loi des mailles, qui traite des tensions, et de la loi des nœuds qui traite des courants.

2.1- Loi des nœuds (Première loi de Kirchhoff) :

La loi des nœuds exprime *la conservation de la charge* dans un circuit électrique. La loi des nœuds stipule que : « *La somme algébrique des intensités des courants arrivant à un nœud est nulle* ».

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0$$

Il s'agit d'*une somme algébrique*.

Nous pouvons formuler la loi des nœuds autrement : « *La somme des intensités des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme des intensités des courants qui le quittent* ».

$$\sum_{e=1}^{N_1} I_e = \sum_{s=1}^{N_2} I_s$$

Remarque : L'indice « *e* » est pour le courant entrant et l'indice « *s* » pour le courant sortant.

Exemple : Dans notre exemple, on pourra écrire : $I_0 = I_1 + I_2$ et $I_2 = I_3 + I_4$.

2.2- Loi des mailles (Deuxième loi de Kirchhoff) :

La loi des mailles permet d'étudier le comportement des tensions à l'intérieur d'un circuit électrique. La deuxième loi de Kirchhoff stipule : « *La somme algébrique des différences de potentiel (ou tension) le long d'une maille comptabilisées dans un sens donné est nulle* ».

$$\sum_{k=1}^N \Delta V_k = 0$$

ΔV_k est *une grandeur algébrique*.

Exemple : Dans notre exemple, on pourra écrire :

- *Maille (1) :* $E - V_1 = 0$.
- *Maille (2) :* $V_1 - V_2 - V_4 = 0$.
- *Maille (3) :* $V_4 - V_3 - V_5 = 0$.

2.3- Méthode des courants des mailles :

Cette méthode est basée sur la loi des mailles :

1- On recherche le nombre de mailles indépendantes. On a la relation suivante :

$$M = B - (N - 1)$$

Chapitre 3 : Lois fondamentales des circuits électriques en régime alternatif

Avec M le nombre de mailles indépendantes, B le nombre de branches et N le nombre de nœuds du réseau.

2- On attribue à chaque maille un courant de maille et un sens de parcours.

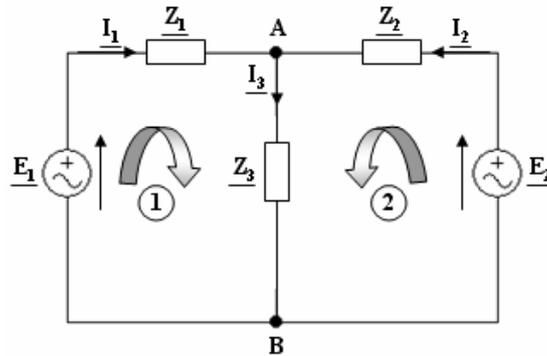
3- On écrit pour chaque maille l'équation de maille dont les inconnues sont les courants en utilisant la loi des mailles.

4- On résout le système d'équations.

5- On calcule les courants circulant dans chaque branche à partir des courants de maille.

6- On en déduit la différence de potentiel entre deux nœuds en utilisant les lois des dipôles.

Exemple : On considère le circuit suivant :



1- Le nombre de mailles indépendantes :

Nombre de nœuds : (A, B) $N = 2$.

Nombre de branches : (\underline{E}_1 , \underline{Z}_1 , \underline{E}_2 , \underline{Z}_2 , \underline{Z}_3) $B = 3$.

Nombre de mailles : $m = 3$.

D'où le nombre de *mailles indépendantes* : $M = B - (N - 1) = 3 - (2 - 1) = 2$.

- **Maille (1) :** Composée de \underline{E}_1 , \underline{Z}_1 et \underline{Z}_3 .
- **Maille (2) :** Composée de \underline{Z}_3 , \underline{Z}_2 et \underline{E}_2 .

2- L'équation de nœud A : $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}_3$.

3- Les équations des mailles :

- **Maille (1) :** $\underline{E}_1 = \underline{Z}_1 \times \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \times \underline{I}_3 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) \times \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \times \underline{I}_2$.
- **Maille (2) :** $\underline{E}_2 = \underline{Z}_2 \times \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \times \underline{I}_3 = \underline{Z}_3 \times \underline{I}_1 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \times \underline{I}_2$.

L'analyse d'un circuit électrique repose sur la détermination des courants qui circulent dans toutes les branches de ce circuit.

4- Les équations de maille sont formulées sous la forme matricielle suivante :

$$[E] = [Z] \times [I]$$

Avec :

$[E]$: Matrice colonne des forces électromotrices.

$[Z]$: Matrice (carrée) des impédances.

$[I]$: Matrice colonne des courants.

Ce système d'équations peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre ce système matriciel, on peut utiliser la méthode de Cramer. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\Delta I_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} E_1 & Z_3 \\ E_2 & Z_2 + Z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{vmatrix}} = \frac{(Z_2 + Z_3) \times E_1 - Z_3 \times E_2}{Z_3 \times (Z_1 + Z_2) + Z_1 \times Z_2} \\ \underline{I}_2 &= \frac{\Delta I_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} Z_1 + Z_3 & E_1 \\ Z_3 & E_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{vmatrix}} = \frac{(Z_1 + Z_3) \times E_2 - Z_3 \times E_1}{Z_3 \times (Z_1 + Z_2) + Z_1 \times Z_2} \\ \underline{I}_3 &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \frac{Z_2 \times E_1 + Z_1 \times E_2}{Z_3 \times (Z_1 + Z_2) + Z_1 \times Z_2} \end{aligned}$$

3- Théorème de Millman :

3.1- Enoncé du théorème :

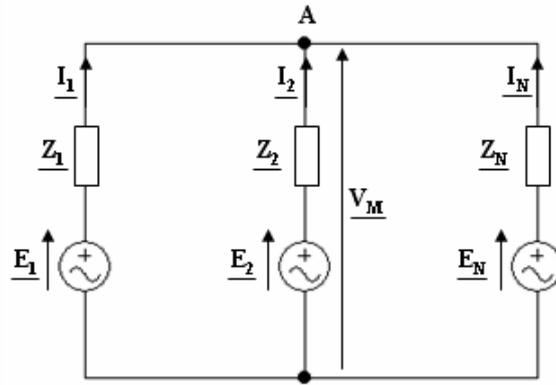
Ce théorème est tout simplement *la loi des noeuds* exprimée en terme *de potentiels*. Le théorème s'énonce comme suit : Le potentiel en un noeud quelconque d'un réseau est égal au rapport des deux termes suivants :

- **Au numérateur** : La somme des forces électromotrices respectivement multipliées par l'admittance de la branche.
- **Au dénominateur** : La somme de toutes les admittances connectées au noeud considéré.

$$\underline{V}_M = \frac{\sum_{k=1}^N E_k \cdot Y_k}{\sum_{k=1}^N Y_k} = \frac{\sum_{k=1}^N \frac{E_k}{Z_k}}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{Z_k}}$$

3.2- Démonstration :

Soit un circuit formé par N branches associées en parallèle comportant chacune une source de tension en série avec une impédance.



La loi des nœuds au point A :

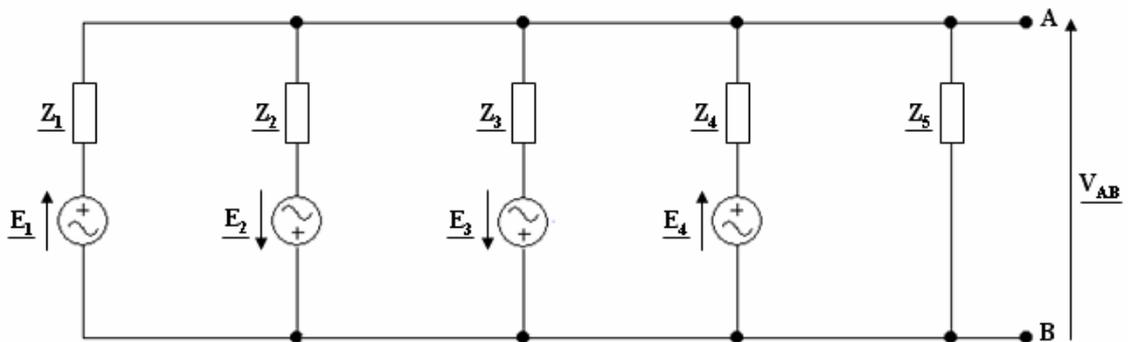
$$\sum_{k=1}^N I_k = I_1 + I_2 + \dots + I_N = 0 \Leftrightarrow \frac{E_1 - V_M}{Z_1} + \frac{E_2 - V_M}{Z_2} + \dots + \frac{E_N - V_M}{Z_N} = 0$$

$$\frac{E_1}{Z_1} + \frac{E_2}{Z_2} + \dots + \frac{E_N}{Z_N} = V_M \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_N} \right)$$

La formule pour calculer V_M est :

$$V_M = \frac{\frac{E_1}{Z_1} + \frac{E_2}{Z_2} + \dots + \frac{E_N}{Z_N}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_N}}$$

Exemple : On considère le circuit électrique donné par la figure suivante. On demande de calculer la tension aux bornes de l'impédance Z_5 .



En appliquant directement le théorème de Millman, on obtient :

$$V_{AB} = \frac{+\frac{E_1}{Z_1} - \frac{E_2}{Z_2} - \frac{E_3}{Z_3} + \frac{E_4}{Z_4} + \frac{0}{Z_5}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_5}}$$

4- Théorème de superposition :

Le théorème de superposition permet de simplifier l'étude des circuits « *complexes* ». Il s'applique aux circuits comportant des sources indépendantes (*au moins deux sources indépendantes de tension et/ou de courant*).

4.1- Enoncé du théorème :

Soit un circuit électrique qui comporte n sources indépendantes : $\underline{S}_1, \underline{S}_2, \dots, \underline{S}_n$. On souhaite calculer une grandeur électrique (un courant \underline{I} traversant une branche ou une tension \underline{V} aux bornes d'un élément).

- L'intensité qui parcourt les dipôles constituant un réseau linéaire est la somme des intensités obtenues dans les différents états du réseau où toutes les sources, sauf une, *sont passivées*.

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \dots + \underline{I}_n$$

- La tension aux bornes de dipôles constituant un réseau linéaire est la somme des tensions obtenues dans les différents états du réseau où toutes les sources, sauf une, *sont passivées*.

$$\underline{V} = \underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \dots + \underline{V}_n$$

Remarque : *Passiver un générateur* signifie :

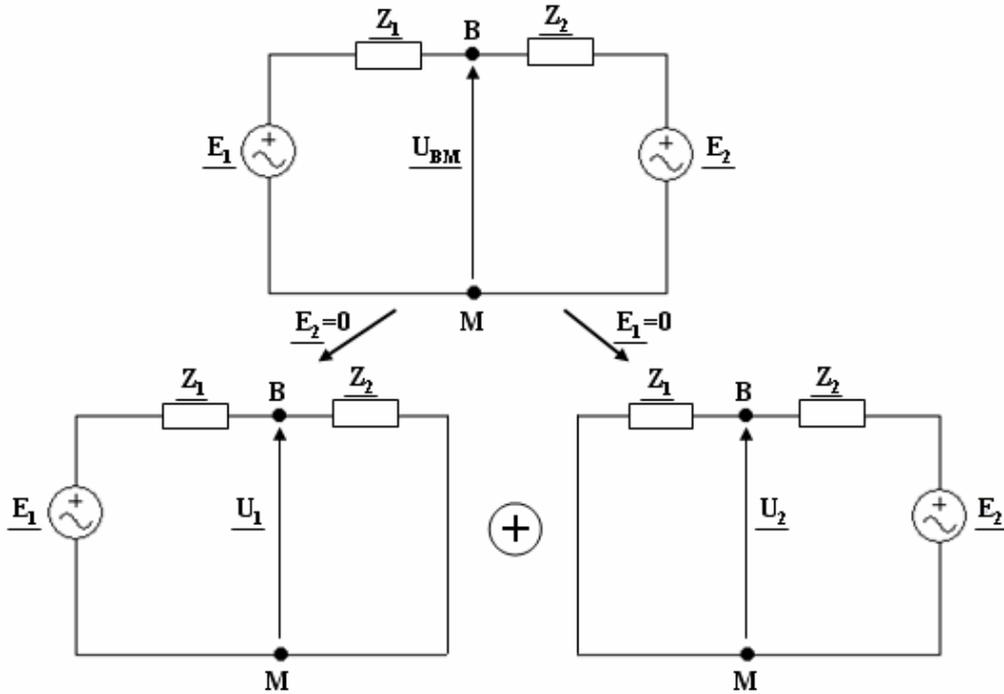
- Pour un *générateur de tension* : Rendre *la tension nulle*, c'est à dire remplacer *le générateur par un fil*.
- Pour un *générateur de courant* : Rendre *le courant nul*, c'est à dire remplacer *le générateur par un interrupteur ouvert*.

Exemple : Prenons par exemple le montage de la figure suivante, dans lequel nous calculons la tension \underline{U}_{BM} .

- Si $\underline{E}_2 = 0$: $\underline{U}_1 = \underline{E}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$.
- Si $\underline{E}_1 = 0$: $\underline{U}_2 = \underline{E}_2 \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$.

En tenant compte des deux sources, nous obtenons :

$$\underline{U}_{BM} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \underline{E}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \underline{E}_2 \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

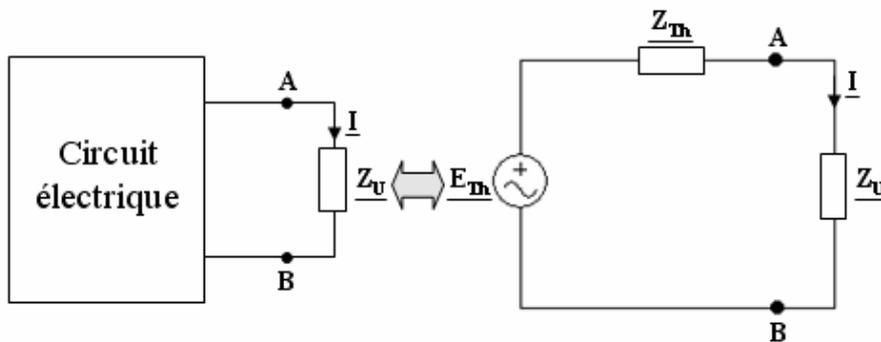


5- Théorèmes de Thévenin et de Norton :

5.1- Théorème de Thévenin :

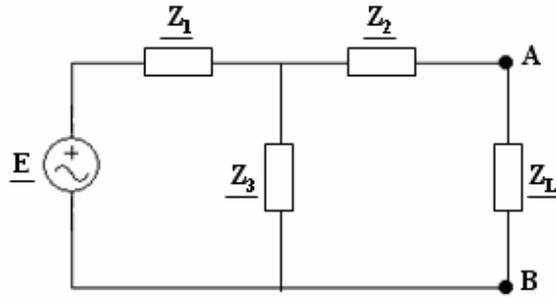
Tout *réseau électrique linéaire* en régime *alternatif sinusoïdal*, placé entre deux bornes **A** et **B** peut être remplacé par un circuit équivalent constitué d'un générateur équivalent de Thévenin \underline{E}_{Th} (\underline{U}_{AB}) en série avec une impédance de Thévenin \underline{Z}_{Th} .

- La valeur de la source de Thévenin \underline{E}_{Th} est donnée par la mesure ou le calcul de **la tension à vide** (la charge étant débranchée).
- La valeur de l'impédance \underline{Z}_{Th} est mesurée ou calculée vues des deux bornes **A** et **B** lorsque **les sources indépendantes sont passivées** (la source de tension est court-circuitée et la source de courant est enlevée).



$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_{Th}}{\underline{Z}_{Th} + \underline{Z}_U}$$

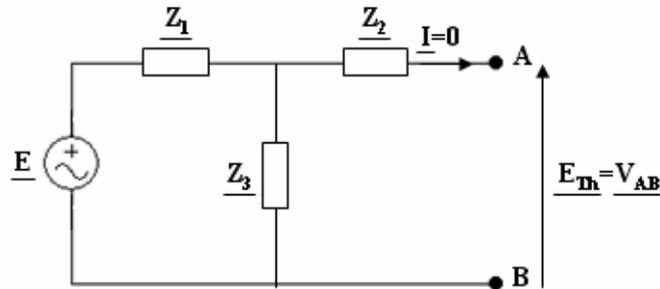
Exemple 1 : Appliquer le théorème de Thévenin au circuit suivant :



• **Etape 1 : Détermination de E_{Th} :**

1- Débrancher Z_L entre A et B .

2- Déterminer la tension entre A et B (*la tension à vide*).



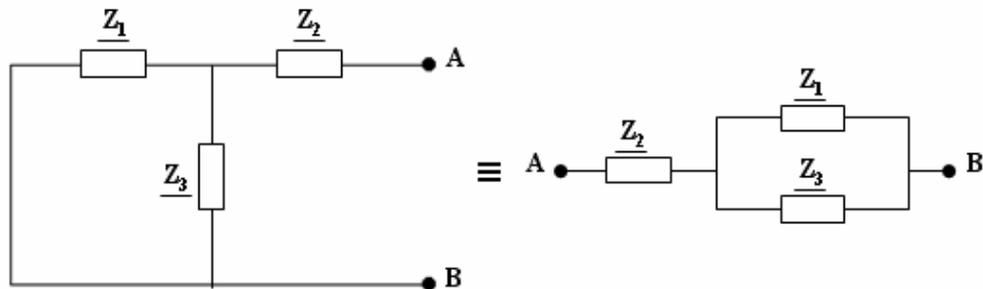
$$E_{Th} = V_{AB} = V_{Z_3} = E \frac{Z_3}{Z_1 + Z_3}$$

• **Etape 2 : Détermination de Z_{Th} :**

1- Débrancher Z_L entre A et B .

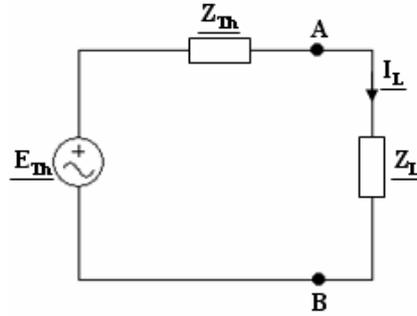
2- Eteindre la source E .

3- Déterminer l'impédance entre les deux bornes A et B .



$$Z_{Th} = Z_2 + (Z_1 // Z_3) = Z_2 + \frac{Z_1 \times Z_3}{Z_1 + Z_3} = \frac{Z_1 \times Z_2 + Z_1 \times Z_3 + Z_2 \times Z_3}{Z_1 + Z_3}$$

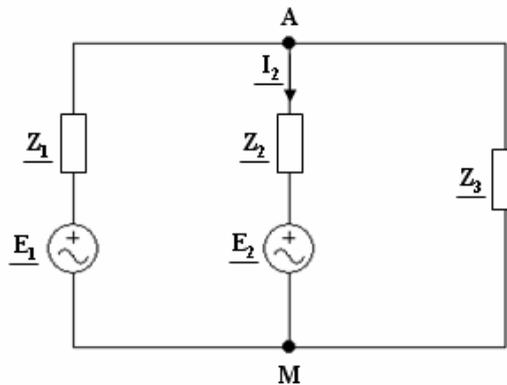
- **Etape 3 :** Calcul de \underline{I}_L : Le circuit équivalent de Thévenin apparaît comme suit :



$$\underline{I}_L = \frac{\underline{E}_{Th}}{\underline{Z}_{Th} + \underline{Z}_L} = \frac{\underline{E} \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}}{\underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} + \underline{Z}_L} = \underline{E} \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \times \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \times \underline{Z}_3 + \underline{Z}_L \times (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}$$

$$\underline{V}_L = \underline{Z}_L \times \underline{I}_L = \underline{E} \frac{\underline{Z}_3 \times \underline{Z}_L}{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \times \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \times \underline{Z}_3 + \underline{Z}_L \times (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}$$

Exemple 2 : Déterminer l'intensité du courant \underline{I}_2 qui traverse \underline{Z}_2 , en utilisant le théorème de Thévenin.



- **Etape 1 :** On débranche la charge \underline{Z}_2 et \underline{E}_2 entre les points A et M .

$$\underline{E}_{Th} = \underline{V}_{AM} = \underline{V}_M - \underline{V}_A = \underline{Z}_3 \times \underline{I}$$

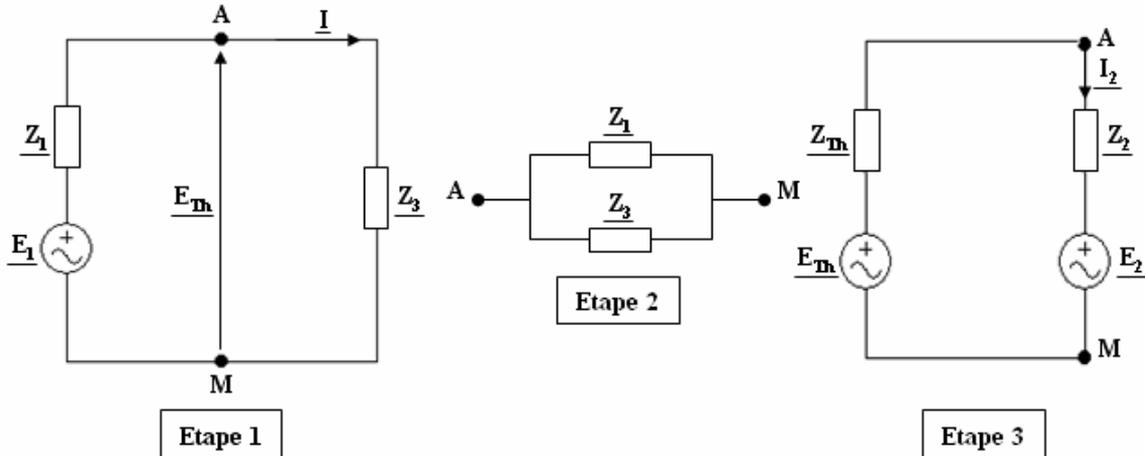
$$\underline{Z}_3 \times \underline{I} = \underline{E}_1 - \underline{Z}_1 \times \underline{I} \Rightarrow \underline{I} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} \Rightarrow \underline{E}_{Th} = \underline{E}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}$$

- **Etape 2 :** La charge \underline{Z}_2 et \underline{E}_2 étant toujours débranchés, on court-circuite \underline{E}_1 .

$$\underline{Z}_{Th} = \underline{Z}_1 // \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}$$

- **Etape 3 :** Calcul de \underline{I}_2 :

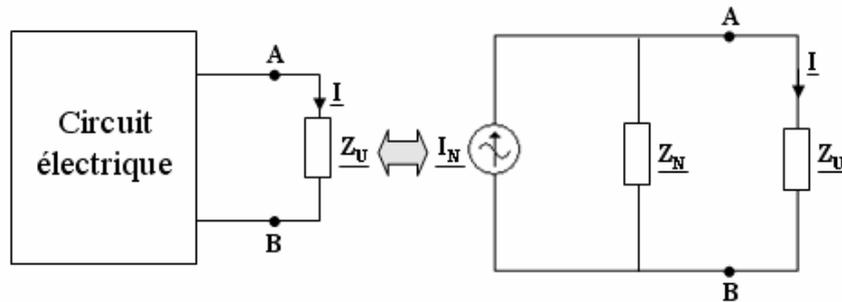
$$\underline{E}_{Th} - \underline{Z}_{Th} \times \underline{I}_2 - \underline{Z}_2 \times \underline{I}_2 - \underline{E}_2 = 0 \Rightarrow \underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_{Th} - \underline{E}_2}{\underline{Z}_{Th} + \underline{Z}_2}$$



5.2- Théorème de Norton :

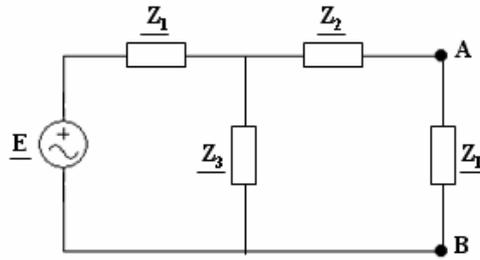
Tout *réseau électrique linéaire* en régime *alternatif sinusoïdal*, placé entre deux bornes **A** et **B** peut être remplacé par un circuit équivalent constitué d'un générateur de Norton équivalent de courant \underline{I}_N en parallèle avec une impédance \underline{Z}_N .

- Le courant de Norton ($\underline{I}_N = \underline{I}_{CC}$) est obtenu par le calcul ou par une mesure après avoir *court-circuité les bornes A et B*.
- L'impédance interne \underline{Z}_N s'obtient de la même façon que celle du théorème de Thévenin ($\underline{Z}_N = \underline{Z}_{Th}$).



$$\underline{I} = \underline{I}_N \frac{\underline{Z}_N}{\underline{Z}_N + \underline{Z}_U}$$

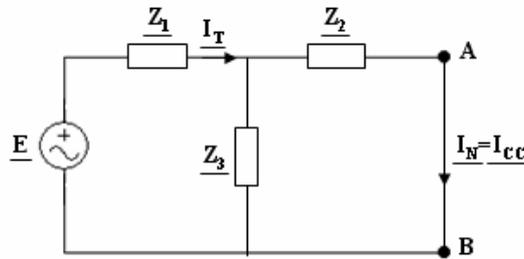
Exemple 1 : Donner le circuit équivalent de Norton du circuit suivant :



- **Etape 1 : Détermination de courant de Norton I_N** : Pour obtenir ce courant, on possède de la façon suivante :

1- Débrancher Z_L entre **A** et **B**.

2- Court-circuiter Z_L .



$$I_T = \frac{E}{Z_{eq}} = \frac{E}{Z_1 + (Z_2 // Z_3)} = E \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 \times Z_2 + Z_1 \times Z_3 + Z_2 \times Z_3}$$

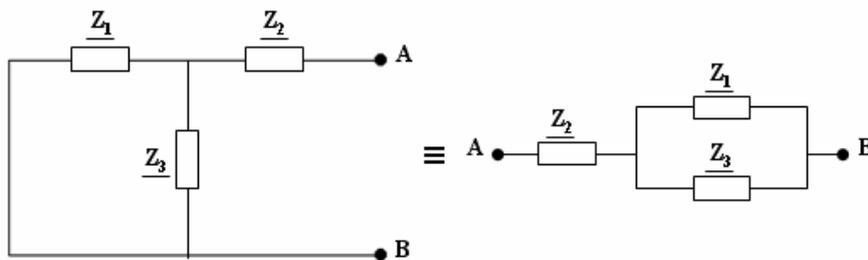
$$I_N = I_T \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = E \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 \times Z_2 + Z_1 \times Z_3 + Z_2 \times Z_3} \times \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = E \frac{Z_3}{Z_1 \times Z_2 + Z_1 \times Z_3 + Z_2 \times Z_3}$$

- **Etape 2 : Détermination de Z_N** : Pour obtenir l'impédance de Norton Z_N , on suit les étapes suivantes :

1- La charge Z_L étant toujours débranchée entre **A** et **B**.

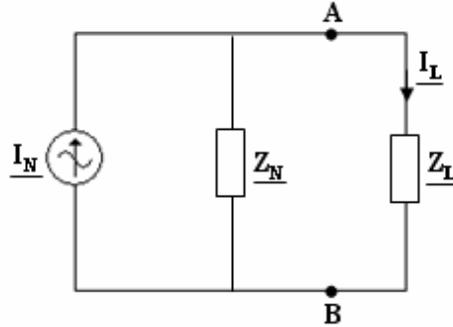
2- On court-circuite E .

3- On Détermine l'impédance entre les deux bornes **A** et **B**.



$$Z_N = Z_{Th} = Z_2 + (Z_1 // Z_3) = Z_2 + \frac{Z_1 \times Z_3}{Z_1 + Z_3} = \frac{Z_1 \times Z_2 + Z_1 \times Z_3 + Z_2 \times Z_3}{Z_1 + Z_3}$$

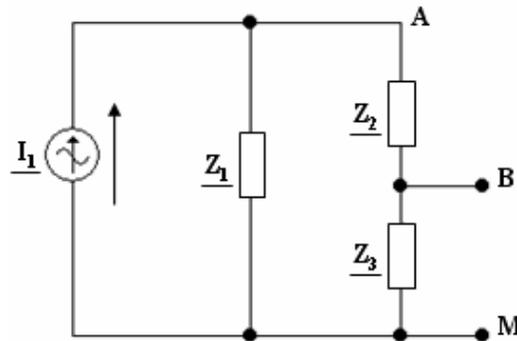
- **Etape 3 :** Calcul de \underline{I}_L : Le circuit équivalent de Norton est donné par :



$$\underline{I}_L = \underline{I}_N \frac{\underline{Z}_N}{\underline{Z}_N + \underline{Z}_L} = \underline{E} \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \times \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \times \underline{Z}_3 + \underline{Z}_L \times (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}$$

$$\underline{V}_{Z_L} = \underline{Z}_L \times \underline{I}_L = \frac{\underline{Z}_N \times \underline{Z}_L}{\underline{Z}_N + \underline{Z}_L} \underline{I}_N = \underline{E} \frac{\underline{Z}_3 \times \underline{Z}_L}{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \times \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \times \underline{Z}_3 + \underline{Z}_L \times (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}$$

Exemple 2 : On cherche le dipôle équivalent de Norton entre **B** et **M**.



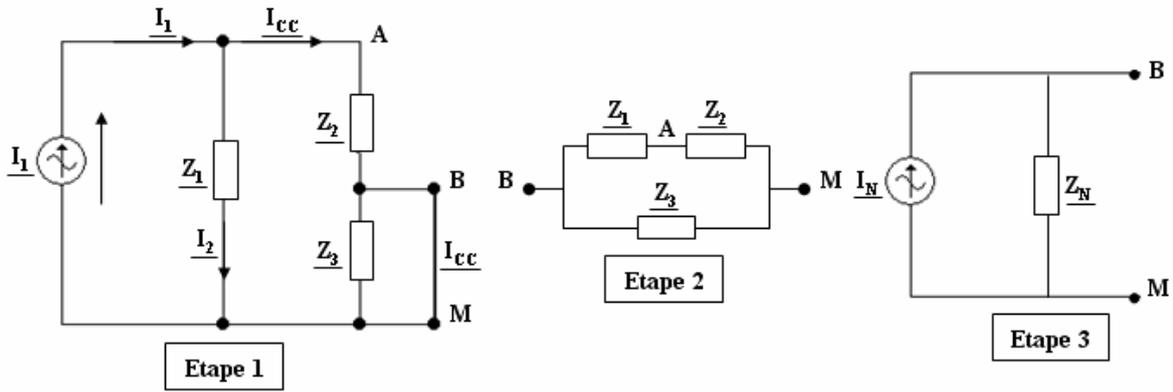
- **Etape 1 :** $\underline{I}_N = \underline{I}_{CC}$ est obtenu en court-circuitant **B** et **M**. D'après la loi des mailles :

$$\left. \begin{array}{l} -\underline{Z}_2 \underline{I}_{CC} + \underline{Z}_1 \underline{I}_2 = 0 \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_{CC} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{I}_{CC} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}_1$$

- **Etape 2 :** On remplace la source de courant \underline{I}_1 par un circuit ouvert.

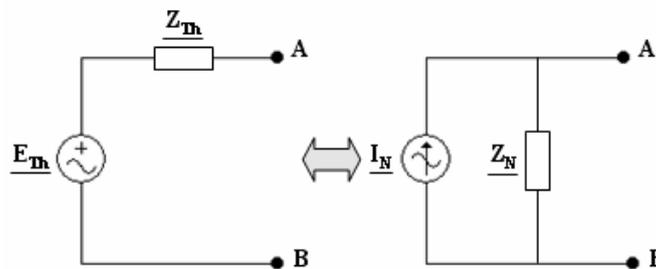
$$\underline{Z}_N = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) // \underline{Z}_3 = \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \times \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

- **Etape 3 :** Le circuit équivalent de Norton.



5.3- Conversion entre un circuit de Thévenin et de Norton :

Tout générateur de Thévenin peut être transformé en générateur de Norton (et inversement).



On passe directement d'un circuit de Norton à un circuit de Thévenin et inversement, à l'aide des formules suivantes :

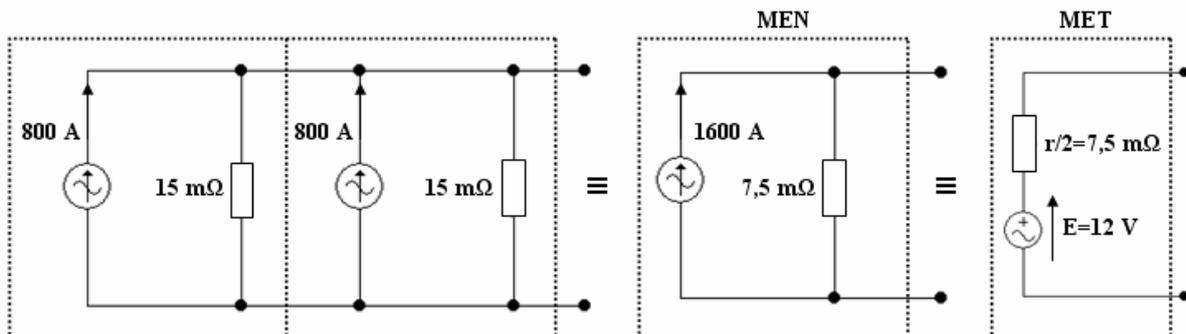
- Transformation Norton vers Thévenin :

$$\begin{aligned} E_{Th} &= I_N \times Z_N \\ Z_{Th} &= Z_N \end{aligned}$$

- Transformation Thévenin vers Norton :

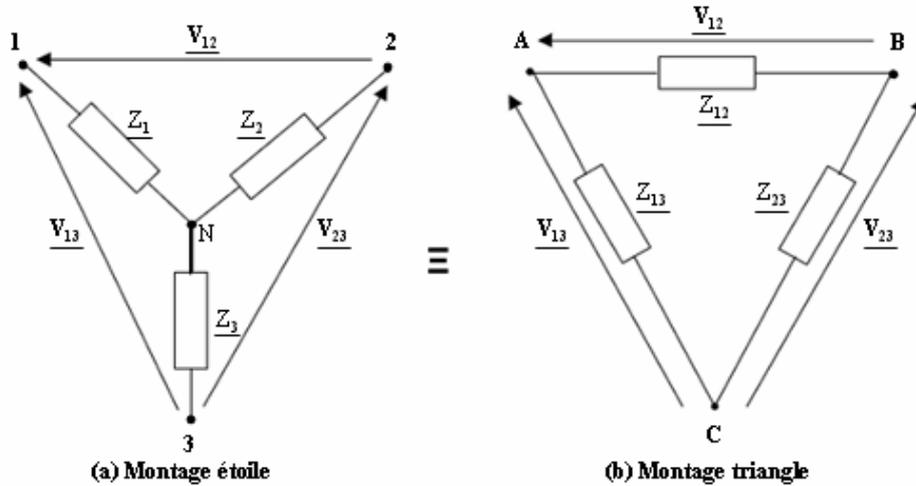
$$\begin{aligned} I_N &= \frac{E_{Th}}{Z_{Th}} \\ Z_N &= Z_{Th} \end{aligned}$$

Exemple : Chercher le modèle de Thévenin et de Norton de circuit suivant :



6- Théorème de Kennelly :

Il permet de passer d'un réseau de trois impédances montées en étoile à un réseau de trois impédances montées en triangle et inversement.



6.1- Passage du circuit triangle (π) au circuit étoile (T) :

L'impédance d'une branche de l'étoile équivalente est égale au produit des impédances adjacentes divisé par la somme totale des impédances.

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12} \times \underline{Z}_{13}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12} \times \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}}$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{13} \times \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}}$$

6.1.1- Démonstration :

Les conditions d'équivalence sont :

- Impédance entre **1** et **2** = Impédance entre **A** et **B**.
- Impédance entre **2** et **3** = Impédance entre **B** et **C**.
- Impédance entre **3** et **1** = Impédance entre **C** et **A**.

On obtient :

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (\underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}) // \underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_{12} \times \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{12} \times \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}} \quad (1)$$

$$\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = (\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13}) // \underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_{12} \times \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{13} \times \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}} \quad (2)$$

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 = (\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23}) // \underline{Z}_{13} = \frac{\underline{Z}_{12} \times \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{13} \times \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}} \quad (3)$$

En faisant (1) + (2) + (3), on aura :

$$2 \times (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = \frac{2 \times (\underline{Z}_{13} \times \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{12} \times \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{12} \times \underline{Z}_{13})}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}}$$

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{13} \times \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{12} \times \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{12} \times \underline{Z}_{13}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}} \quad (4)$$

$$(4) - (2) \Rightarrow \underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12} \times \underline{Z}_{13}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}} \quad (5)$$

$$(4) - (3) \Rightarrow \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12} \times \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}} \quad (6)$$

$$(4) - (1) \Rightarrow \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{13} \times \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}} \quad (7)$$

6.2- Passage du circuit étoile (T) au circuit triangle (π) :

L'impédance d'une branche du triangle équivalent est égale à la somme des produits des impédances, divisé par l'impédance de la branche opposée.

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \times \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \times \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3}$$

$$\underline{Z}_{13} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \times \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \times \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \times \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \times \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1}$$

6.2.1- Démonstration :

On effectue les produits des relations (5), (6) et (7) deux à deux, puis on additionne ces produits :

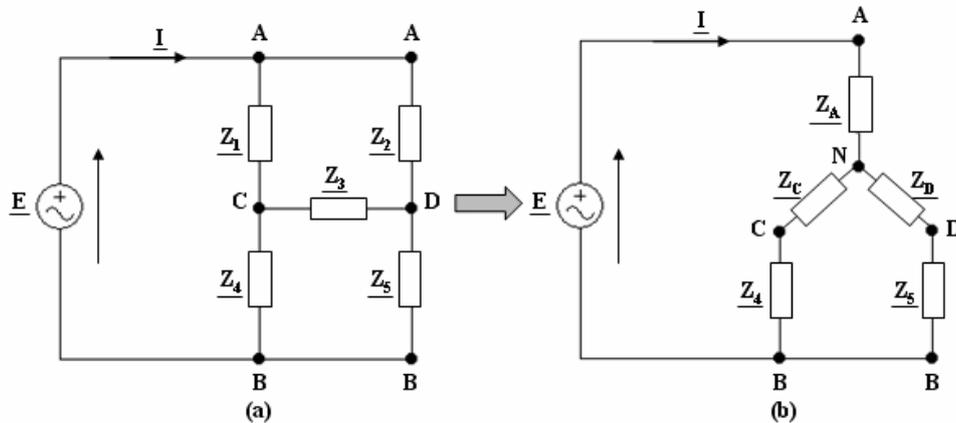
$$\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \times \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \times \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{13} \underline{Z}_{23} (\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23})}{(\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23})^2} = \frac{\underline{Z}_{12} \times \underline{Z}_{13} \times \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}} \quad (8)$$

En faisant le rapport de la relation (8) par les relations (5), (6) et (7), on obtient respectivement :

$$\begin{aligned}
 (8) \Rightarrow \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \times \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \times \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1} &= \frac{\underline{Z}_{12} \times \underline{Z}_{13} \times \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}} \Rightarrow \underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \times \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \times \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1} \\
 (5) & \\
 (8) \Rightarrow \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \times \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \times \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} &= \frac{\underline{Z}_{12} \times \underline{Z}_{13} \times \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} \times \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}} \Rightarrow \underline{Z}_{13} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \times \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \times \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \\
 (6) & \\
 (8) \Rightarrow \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \times \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \times \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3} &= \frac{\underline{Z}_{12} \times \underline{Z}_{13} \times \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{13} \times \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}} \Rightarrow \underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \times \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \times \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3} \\
 (7) &
 \end{aligned}$$

Exemple : Une source de tension alternative délivre une tension d'amplitude \underline{E} dans le circuit appelé « *Pont de Wheatstone* » représenté à la figure suivante.

Déterminer l'expression de l'impédance équivalente \underline{Z}_{eq} vue entre les bornes A et B . En déduire l'expression du courant \underline{I} .



Dans le cas d'une représentation étoile, les expressions des différentes impédances sont :

$$\underline{Z}_A = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \quad \underline{Z}_C = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \quad \underline{Z}_D = \frac{\underline{Z}_2 \times \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

Entre le point N et le point B , on a deux impédances en parallèles. L'impédance équivalente \underline{Z}_{eq} du circuit devient :

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_A + \left[(\underline{Z}_C + \underline{Z}_4) // (\underline{Z}_D + \underline{Z}_5) \right]$$

Le courant qui circule dans l'impédance équivalente est :

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{eq}}$$

Chapitre 4

Les circuits triphasés

équilibrés

Les circuits triphasés équilibrés

1- Introduction :

Les systèmes monophasés étudiés précédemment ne présentent en général un intérêt que pour les faibles puissances. Pour les grandes puissances (distribution d'énergie, alimentation des moteurs), on utilise souvent le système triphasé.

2- Avantages du triphasé :

Le système triphasé fut présenté pour la première fois en 1893. Le système triphasé offre plusieurs avantages :

Transport économique : Le transport de l'énergie sous forme triphasée est *plus économique que sous forme monophasée*, pour différentes raisons.

- Trois fils de phase au lieu de six (3×2 en monophasé).
- Courants plus faibles \Rightarrow moins de *pertes Joule*.
- Sections de conducteurs moins importantes.

Production :

- Même masse : 50 % de puissance en plus qu'en monophasé.
- La puissance électrique fournie par générateur monophasé n'est pas constante dans le temps : on dit qu'elle fluctue. Un générateur triphasé présente l'énorme avantage de fournir une Puissance instantanée constante dans le temps :
 - Pas de vibrations dans les machines.
 - Pas de risques de rupture des arbres de transmission.

Utilisation :

- Deux tensions pour le même réseau : la première est prise entre deux phases, et la seconde est prise entre une phase et le neutre.
- Le triphasé permet de créer des *champs magnétiques tournants*, ce que ne permet pas le monophasé. Ce champ est utilisé pour entraîner les moteurs triphasés.
- Moteurs triphasés.
 - Meilleur couple au démarrage.
 - Meilleur rapport qualité-prix.
- Dans les montages à redresseurs, le système triphasé a un taux d'ondulation nettement inférieur à celui du monophasé. Redressement (alternatif \rightarrow continu) plus facile.

3- Distribution :

La distribution se fait à partir de quatre bornes + la terre :

- Trois bornes de *phase* repérées de façon normalisées par *1, 2, 3* ou *A, B, C* ou *R, S, T* (sur les anciennes distributions).
- Une borne de *neutre N*.

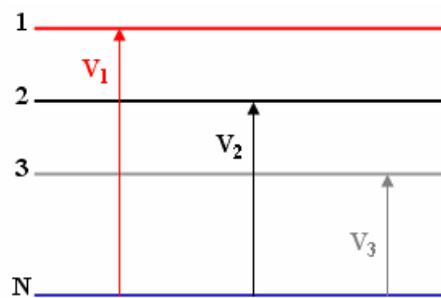
On distingue deux types de tensions : *Les tensions simples* et *les tensions composées*.

4- Etude des tensions simples :

4.1- Définition :

Les tensions *simples* (ou *étoilées* ou *de phase*) sont les tensions efficaces mesurées entre chacune des phases et le neutre. Les tensions simples se notent *V* et s'expriment en volt (V).

Neutre indispensable.



Il existe 3 tensions simples :

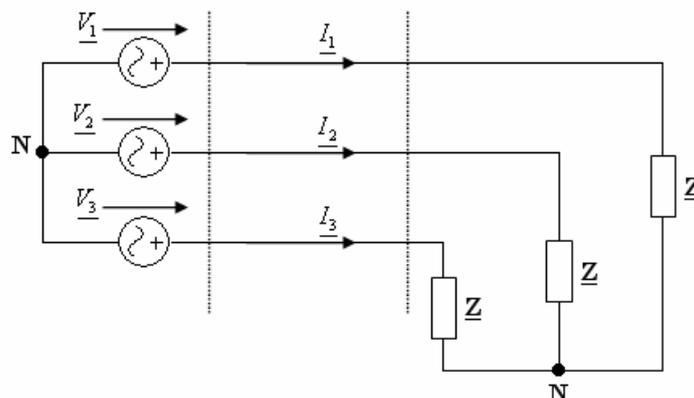
- V_1 : Tension simple entre la phase **1** et le **neutre**.
- V_2 : Tension simple entre la phase **2** et le **neutre**.
- V_3 : Tension simple entre la phase **3** et le **neutre**.

4.2- Définition d'un système triphasé :

On appelle *système triphasé* un ensemble de *trois grandeurs sinusoïdales alternatives de même nature*, de *même fréquence* et *déphasées entre elles de $2\pi/3 = 120^\circ$* .

Remarque : Même nature = *trois courants ou trois tensions*.

Exemple : Considérons le système triphasé suivant :



Le système de tensions triphasées s'écrit :

$$\begin{cases} v_1(t) = V_1\sqrt{2} \sin(\omega t) \\ v_2(t) = V_2\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_3(t) = V_3\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

$v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_3(t)$ forment un système triphasé.

V_1 , V_2 et V_3 sont des valeurs efficaces.

4.3- Définition d'un système triphasé équilibré :

Un système triphasé est dit **équilibré** lorsque les trois grandeurs qui le composent ont **la même valeur efficace** (ou bien **la même amplitude**).

4.3.1- Equations horaires :

En posant $V_1 = V_2 = V_3 = V$ dans le système d'équations, on obtient un exemple de tensions triphasées équilibrées sous forme sinusoïdale :

$$\begin{cases} v_1(t) = V\sqrt{2} \sin(\omega t) \\ v_2(t) = V\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_3(t) = V\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

$v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_3(t)$ forment un système triphasé équilibré.

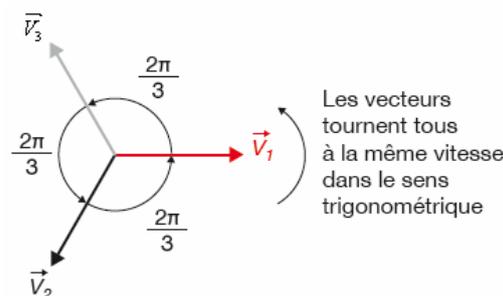
Les trois grandeurs ont la même valeur efficace V .

Remarque : Les **trois tensions efficaces simples** sont égales à **220 V** (ou **230 V**).

4.3.2- Vecteurs de Fresnel associés et oscillogrammes :

On déduit des équations horaires les vecteurs suivants :

$$\vec{V}_1 \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{V}_2 \begin{pmatrix} V \\ -\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \quad \vec{V}_3 \begin{pmatrix} V \\ -\frac{4\pi}{3} \end{pmatrix}$$



Dans un système triphasé équilibré la somme vectorielle des tensions simples est nulle.

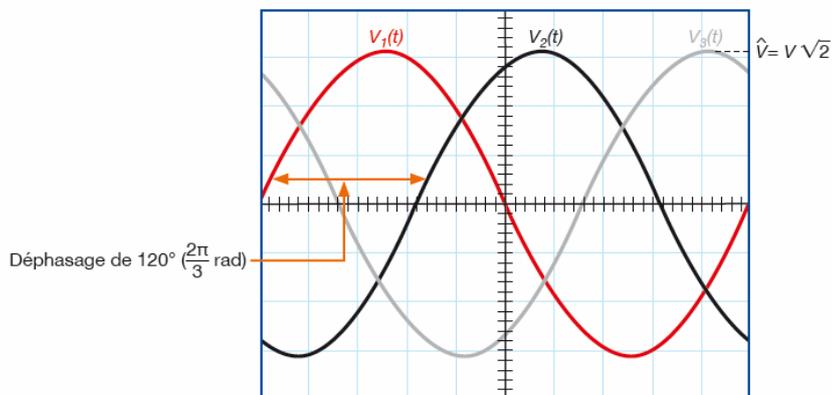
$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = 0$$

À tout instant, la somme des valeurs instantanées des tensions simples est nulle.

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

Le système est *équilibré direct*.

- **Oscillogrammes :** Les trois tensions simples sont sinusoïdales. Elles ont la même valeur maximale, la même valeur efficace, la même période et la même fréquence. Elles sont déphasées de 120° les unes par rapport aux autres.



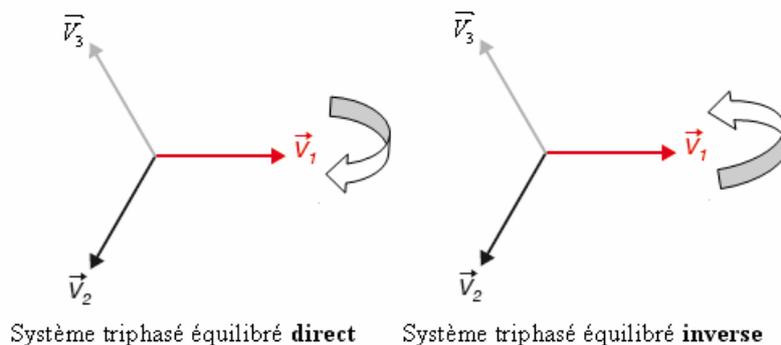
4.3.3- Système triphasé équilibré direct ou inverse :

Le système triphasé est *équilibré direct*. v_1 est en avance sur v_2 qui est en avance sur v_3 .

Ordre : 1, 2, 3, 1,...

Le système triphasé est *équilibré inverse*. v_3 est en avance sur v_2 qui est en avance sur v_1 .

Ordre : 1, 3, 2, 1,...

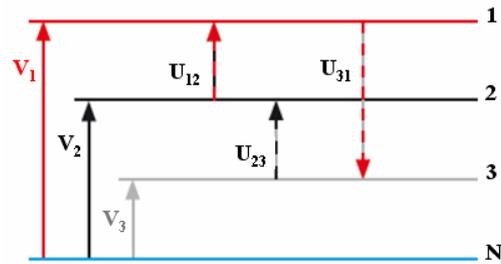


5- Etude des tensions composées :

5.1- Définition :

Les tensions *composées* (ou *de ligne*) sont les *tensions efficaces* mesurées entre *deux phases*.

Les tensions composées se notent U et s'expriment en volt (V). *Neutre inutile*.



Il existe 3 tensions composées :

- U_{12} : Tension composée entre la phase 1 et la phase 2.
- U_{23} : Tension composée entre la phase 2 et la phase 3.
- U_{31} : Tension composée entre la phase 3 et la phase 1.

Chaque tension composée est la différence de deux tensions simples. Les tensions composées ont même fréquence que les tensions simples.

$$\begin{cases} u_{12} = v_1 - v_2 \\ u_{23} = v_2 - v_3 \\ u_{31} = v_3 - v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{U}_{12} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \\ \vec{U}_{23} = \vec{V}_2 - \vec{V}_3 \\ \vec{U}_{31} = \vec{V}_3 - \vec{V}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{12}(t) = U\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \\ u_{23}(t) = U\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ u_{31}(t) = U\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{7\pi}{6}\right) \end{cases}$$

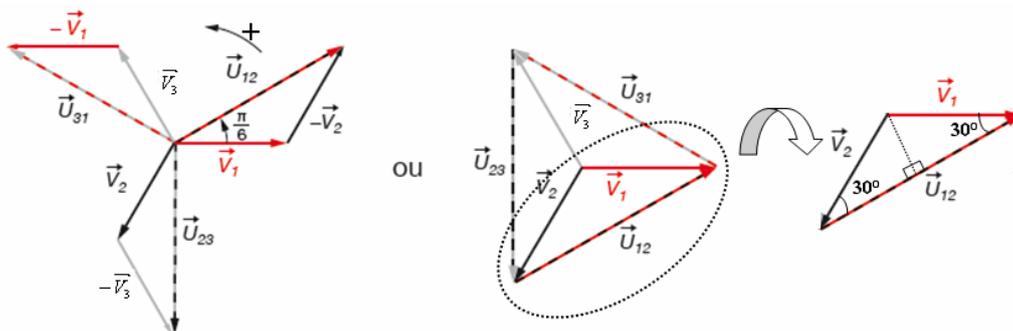
Remarque : Les *trois tensions efficaces composées* sont égales à **380 V** (ou **400 V**).

5.2 Vecteurs de Fresnel associés et oscillogrammes :

On déduit des équations horaires les vecteurs suivants :

$$\vec{U}_{12} \left(\frac{U}{\frac{\pi}{6}} \right) \quad \vec{U}_{23} \left(-\frac{3\pi}{6} \right) \quad \vec{U}_{31} \left(-\frac{7\pi}{6} \right)$$

A partir des expressions définies précédemment, il est possible de représenter les différentes tensions.

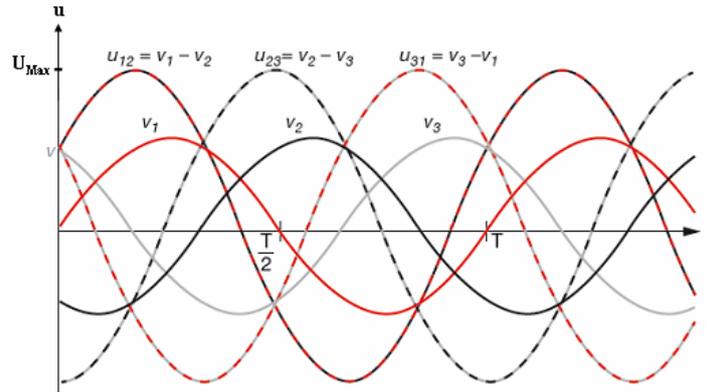


Si le réseau est équilibré :

$$\vec{U}_{12} + \vec{U}_{23} + \vec{U}_{31} = 0 \Leftrightarrow u_{12} + u_{23} + u_{31} = 0$$

Le système des trois tensions composées est **équilibré direct**.

- **Oscillogrammes** : Les trois tensions composées sont sinusoïdales. Elles ont la même valeur maximale, la même valeur efficace, la même période et la même fréquence. Elles sont déphasées de 120° les unes par rapport aux autres.



6- Relation entre les tensions et notation :

Par construction vectorielle (Diagramme de Fresnel) :

$$\underline{U}_{12} = \underline{V}_1 - \underline{V}_2$$

Les tensions simples et les tensions composées sont liées par la loi :

$$\cos(30^\circ) = \frac{U/2}{V} \Rightarrow U = 2V \cos(30^\circ) = 2V \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow U = \sqrt{3}V$$

Remarque : Cette relation est toujours vraie quelque soit la charge.

Notation : Pour identifier un réseau triphasé, il existe deux notations possibles :

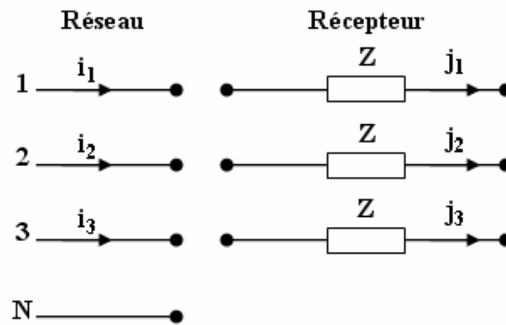
- $3 \times 380 \text{ V}$: Réseau triphasé avec tension composée de 380 V.
- $220/380 \text{ V}$: Réseau triphasé avec tension simple de 220 V et tension composée de 380 V.

7- Récepteurs triphasés équilibrés :

7.1- Quelques définitions :

- **Récepteurs triphasés** : Un récepteur = **3 dipôles** : Ce sont des récepteurs constitués de trois dipôles d'impédances \underline{Z} (différentes ou égales).
- **Récepteurs triphasés équilibrés** : Ce sont des récepteurs constitués de trois récepteurs monophasés identiques (trois dipôles identiques). Un récepteur triphasé présente donc dix bornes.

- **Couplage d'un récepteur** : Manière dont on connecte les trois éléments entre eux et à la ligne.
- **Courants par phase** : Les courants qui traversent les éléments Z du récepteur triphasés. Symbole : J .
- **Courants en ligne** : Ce sont les courants qui passent dans les fils du réseau triphasé. Symbole : I .

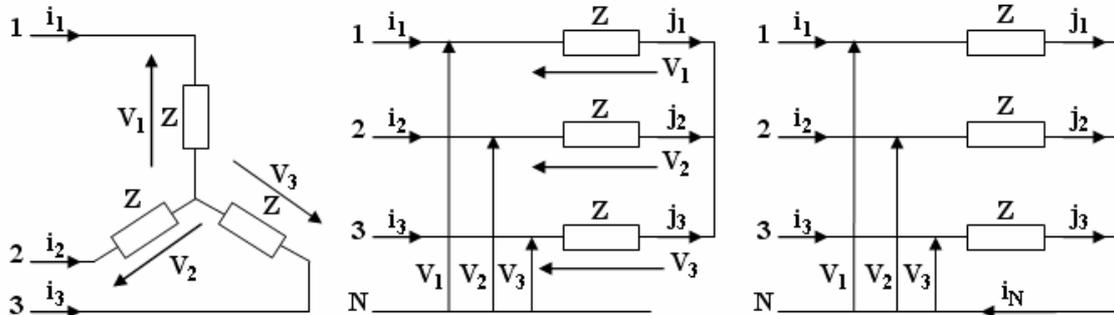


Le réseau et le récepteur peuvent se relier de deux façons différentes : en *étoile* ou en *triangle*.

7.2- Couplage en étoile (Y) :

7.2.1- Montage :

Dans un couplage en étoile, chaque dipôle est relié entre le neutre et une phase du réseau.



Même branchement représenté de deux façons différentes. Le premier schéma explique le terme « *étoile* ».

Dans le cas général, les courants de lignes vérifient la relation : $i_1 + i_2 + i_3 = i_N$.

Si le montage est *équilibré*, comme ici, alors les trois récepteurs ont même impédance donc :

$$i_N = 0 \Rightarrow i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

Le courant dans le fil neutre est nul. Le fil neutre n'est donc pas nécessaire. Pour **un système triphasé équilibré**, le fil neutre ne sert à rien.

7.2.2- Relations entre les courants :

On constate sur les schémas précédents que les courants en ligne sont égaux aux courants par phase.

$$i_1 = j_1, \quad i_2 = j_2, \quad i_3 = j_3$$

De plus la charge et le réseau sont équilibrés, donc : $I_1 = I_2 = I_3 = I = J$.

On retiendra pour le couplage étoile :

$$I = J$$

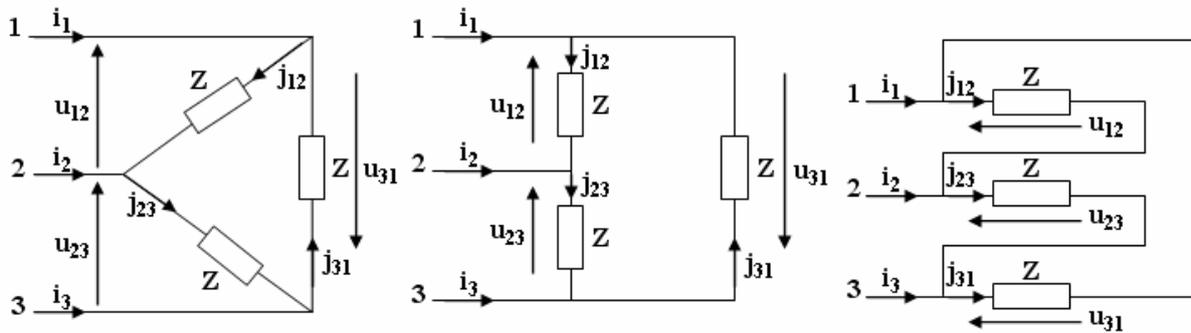
De plus chaque dipôle est soumis à une tension simple on pourra écrire : $\underline{V} = \underline{Z} \times \underline{I}$.

Et aussi : $U = \sqrt{3}V$.

7.3- Couplage en triangle (Δ) :

7.3.1- Montage :

Dans un couplage en triangle, chaque dipôle est relié entre deux phases du réseau. *Le neutre est inutilisé.*



Même branchement représenté de trois façons différentes. Le premier schéma explique le terme « *triangle* ».

Comme il s'agit des mêmes impédances, $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ et $j_{12} + j_{23} + j_{31} = 0$.

Ici en aucun cas le fil neutre n'est nécessaire.

7.3.2- Relations entre les courants :

D'après les schémas du montage triangle :

$$\begin{aligned} i_1 &= j_{12} - j_{31} \Rightarrow \underline{I}_1 = \underline{J}_{12} - \underline{J}_{31} \\ i_2 &= j_{23} - j_{12} \Rightarrow \underline{I}_2 = \underline{J}_{23} - \underline{J}_{12} \\ i_3 &= j_{31} - j_{23} \Rightarrow \underline{I}_3 = \underline{J}_{31} - \underline{J}_{23} \end{aligned}$$

Le système triphasé est équilibré : $I_1 = I_2 = I_3 = I$ et $J_{12} = J_{23} = J_{31} = J$.

Pour le couplage triangle, la relation entre I et J est la même que la relation entre V et U .

Pour le couplage triangle :

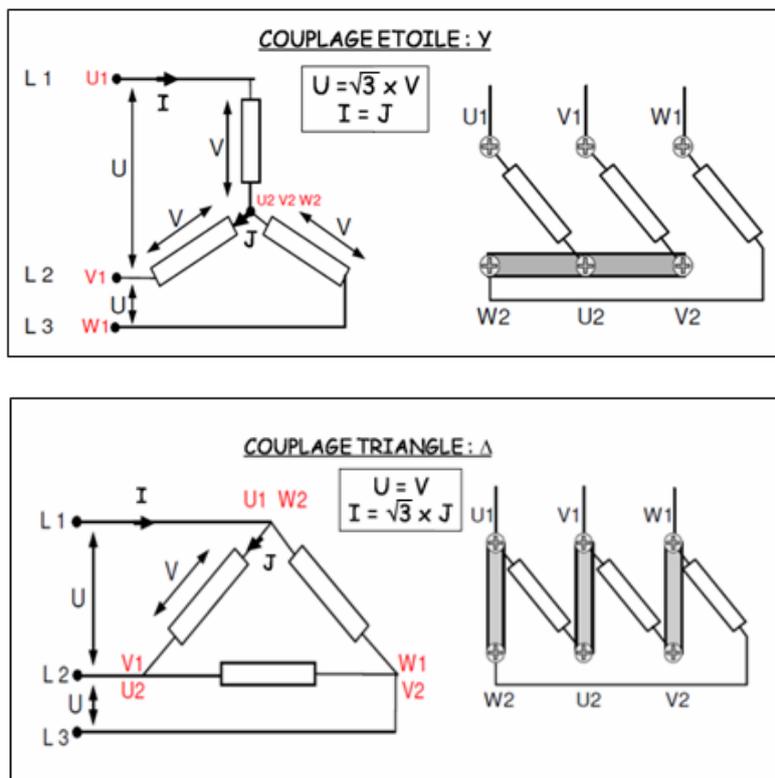
$$I = \sqrt{3} J$$

Dans le couplage triangle, le neutre n'est pas utilisé, donc les tensions simples n'interviennent pas. Donc : $U = V$.

De plus pour chaque dipôle, nous aurons la relation : $\underline{U} = \underline{Z} \times \underline{J}$.

7.4- Plaque à bornes :

Un récepteur pouvant se brancher *en étoile* ou *en triangle* suivant le réseau dont on dispose, on facilite le passage d'un couplage à l'autre en utilisant un *bornier*, aussi appelé *plaque à bornes*, tel que celui présenté sur les figures ci-dessous. Les trois phases d'un récepteur sont très souvent repérées par les bornes U_1 et U_2 pour la première d'entre elles, V_1 et V_2 pour la seconde et W_1 et W_2 pour la troisième. L'utilisation de deux ou trois câbles permet alors de coupler facilement le récepteur au réseau : Les figures suivantes indiquent les câblages à réaliser pour coupler le récepteur *en étoile* et *en triangle*.



7.5- Passage du couplage triangle au couplage étoile :

$$Z_{12} = Z_{23} = Z_{13} = Z_{\Delta} \text{ et } Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_Y.$$

a- Tension et puissance inchangées :

L'impédance en étoile est égale à trois fois l'impédance en triangle : $Z_{\Delta} = Z_Y/3$.

b- Tension et impédances inchangées :

La puissance en triangle est égale à trois fois la puissance en étoile : $P_{\Delta} = 3 P_Y$.

c- Puissance et impédances inchangées :

La tension en étoile devient $\sqrt{3}$ la tension en triangle : $U_Y = \sqrt{3} U_{\Delta}$.

8- Pertes par effet Joule :

L'effet Joule est exploité dans les radiateurs électriques pour se chauffer.

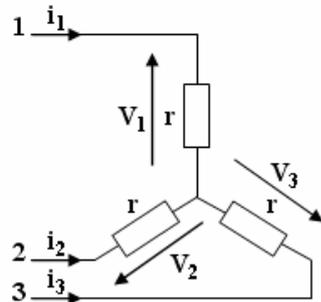


Figure (a) : Couplage en étoile

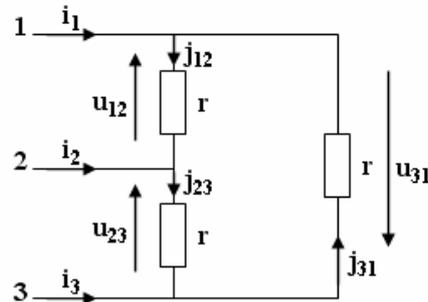


Figure (b) : Couplage en triangle

8.1- Couplage en étoile :

Soit r la résistance par phase ou résistance d'un enroulement du récepteur. On a vu que chaque enroulement est traversé par le courant i donc :

$$P_j = 3P_1 = 3rI^2$$

Soit R la résistance entre phases ou résistance entre deux bornes :

On voit que : $R = 2r$. Donc :

$$P_j = 3rI^2 = \frac{3}{2}RI^2$$

8.2- Couplage en triangle :

Soit r la résistance par phase ou résistance d'un enroulement du récepteur. On a vu que chaque enroulement est traversé par le courant j donc :

$$P_j = 3rJ^2$$

Résistance vue entre deux bornes :

$$R = r // 2r = \frac{2r \times r}{2r + r} = \frac{2}{3}r$$

Finalement pour le couplage triangle :

$$P_j = 3rJ^2 = 3 \frac{3}{2} R \left(\frac{I}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{3}{2} RI^2$$

9- Puissances en triphasé :

9.1- Théorème de Boucherot :

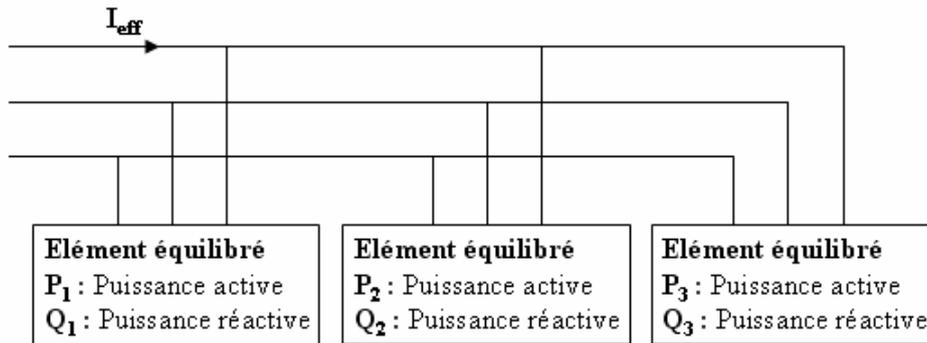
En distribution monophasée ou triphasée, la puissance active absorbée par un groupement de récepteurs est égale à la somme des puissances actives absorbées par chaque élément du groupement. Il en va de même pour les puissances réactives.

$$P = \sum_{k=1}^n P_k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=1}^n Q_k$$

Il y a conservation de la puissance active d'une part et de la puissance réactive d'autre part.

Remarque : Le théorème de Boucherot *ne concerne pas* les puissances apparentes.

$$S \neq \sum_{k=1}^n S_k \quad \text{Par contre : } S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$



- En étoile ou en triangle : Si les dipôles sont *identiques (équilibrés)* :

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 3P_1 \quad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3Q_1 \quad \text{et} \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

- Facteur de puissance :

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S}$$

9.2- Couplage en étoile :

Chaque élément d'un montage triphasé soumis à une tension de valeur efficace V (tension simple) et est traversé par un courant d'intensité efficace I (courant de ligne).

- La puissance active d'un montage triphasé est :

$$P = 3VI \cos(\varphi)$$

- La puissance réactive d'un montage triphasé est :

$$Q = 3VI \sin(\varphi)$$

- La puissance apparente d'un montage triphasé est :

$$S = 3VI$$

Comme on sait que $V = U/\sqrt{3}$, les résultats précédents s'écrivent :

$$P = \sqrt{3}UI \cos(\varphi) \quad Q = \sqrt{3}UI \sin(\varphi) \quad S = \sqrt{3}UI$$

9.3- Couplage en triangle :

Chaque élément d'un montage triphasé soumis à une tension de valeur efficace U (tension composée) et est traversé par un courant d'intensité efficace J (courant de phase).

- La puissance active d'un montage triphasé est :

$$P = 3UJ \cos(\varphi)$$

- La puissance réactive d'un montage triphasé est :

$$Q = 3UJ \sin(\varphi)$$

- La puissance apparente d'un montage triphasé est :

$$S = 3UJ$$

Comme on sait que $J = I/\sqrt{3}$, les résultats précédents s'écrivent :

$$P = \sqrt{3}UI \cos(\varphi) \quad Q = \sqrt{3}UI \sin(\varphi) \quad S = \sqrt{3}UI$$

Remarque : *Quelque soit le couplage, les puissances s'expriment de la même façon en fonction de la tension composée U et du courant en ligne I .*

Exemple 1 : Un moteur triphasé absorbe au réseau une puissance de 2,8 kW sous $3 \times 400 \text{ V} - 50 \text{ Hz}$, $\cos(\varphi) = 0,85$. Ses enroulements sont couplés en étoile. Calculez :

- 1- La tension aux bornes de chaque enroulement.
- 2- L'intensité du courant de ligne.
- 3- L'intensité du courant dans chaque enroulement.
- 4- La puissance réactive.

Solution : Formules générales triphasées.

- 1* La tension aux bornes de chaque enroulement :

$$V = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{400}{\sqrt{3}} = 230 \text{ V}$$

- 2+3* Le courant de ligne et le courant de phase :

$$I = J = \frac{P}{\sqrt{3}U \cos(\varphi)} = \frac{2800}{1,73 \times 400 \times 0,85} = 4,76 \text{ A}$$

- 4* La puissance réactive :

$$\sin(\varphi) = \sin(\arccos(0,85)) = 0,526$$

$$Q = \sqrt{3}UI \sin(\varphi) = 1,73 \times 400 \times 4,76 \times 0,526 = 1732 \text{ var} = 1,732 \text{ k var}$$

$Q > 0 \Rightarrow$ Le moteur de nature *inductive*.

Exemple 2 : Trois condensateurs de capacité $C=50 \mu\text{F}$ sont couplés en triangle. Ils sont alimentés par un réseau triphasé $U=380 \text{ V}$, $f=50 \text{ Hz}$. Calculer :

- 1- L'intensité efficace J circulant dans chaque condensateur.
- 2- L'intensité efficace I du courant en ligne.
- 3- La puissance réactive du récepteur.
- 4- La tension maximale aux bornes d'un condensateur.

Solution :

1* Le courant de phase : L'impédance d'un condensateur est donnée par :

$$Z = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{50 \times 10^{-6} \times 2\pi \times 50} = 63,7 \Omega$$

$$J = \frac{U}{Z} = \frac{380}{63,7} = 5,97 \text{ A}$$

2* Le courant de ligne :

$$I = J\sqrt{3} = 5,97 \times \sqrt{3} = 10,3 \text{ A}$$

3* La puissance réactive du récepteur :

$$Q = \sqrt{3}UI \sin(\varphi) = 1,73 \times 380 \times 10,3 \times \sin(-\pi/2) = -6800 \text{ var}$$

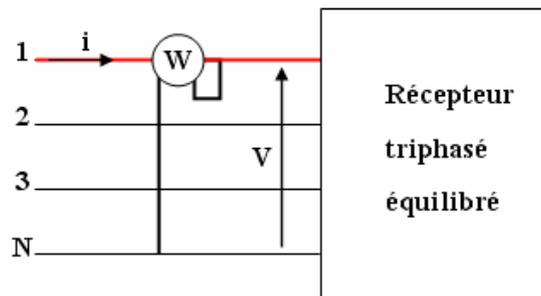
4* La tension maximale :

$$U_{Max} = U\sqrt{2} = 380\sqrt{2} = 537 \text{ V}$$

10- Mesure de puissances en triphasé :

10.1- Méthode d'un seul wattmètre :

Cette méthode n'est valable que pour une charge triphasée équilibrée. Le schéma de montage est le suivant :



Le wattmètre branché de cette façon mesure (puissance lue) : $P' = V I \cos(\varphi)$.

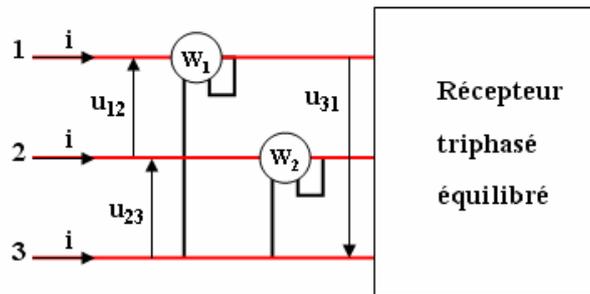
La puissance du récepteur s'exprime (puissance absorbée) : $P = \sqrt{3} U I \cos(\varphi)$.

Il suffit de mesurer la puissance consommée par une phase et de multiplier par trois : $P = 3 P'$.

Remarque : Il n'est pas nécessaire de connaître le couplage du récepteur.

10.2- Méthode de deux wattmètres :

La méthode des deux wattmètres consiste à mesurer la puissance active totale consommée par un récepteur suivant le schéma de montage ci-dessous :



- Le wattmètre W_1 est soumis à I_1 et U_{13} : $P_1 = U_{13} I_1 \cos(U_{13}, I_1) = U I \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)$.
- Le wattmètre W_2 est soumis à I_2 et U_{23} : $P_2 = U_{23} I_2 \cos(U_{23}, I_2) = U I \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$.

La puissance totale consommée par le récepteur triphasé est :

$$P = P_1 + P_2 = UI \left(\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \right) = 2UI \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(\varphi) = \sqrt{3} UI \cos(\varphi)$$

La différence des indications donne :

$$P_1 - P_2 = UI \left(\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \right) = 2UI \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(\varphi) = UI \sin(\varphi) = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

La puissance réactive est donnée par l'expression :

$$Q = \sqrt{3} (P_1 - P_2) \quad \text{et} \quad \tan(\varphi) = \frac{Q}{P}$$

Remarque : Les puissances P_1 et P_2 sont algébriques. Leurs signes dépendent de la nature du dipôle.

Exemple : On mesure la puissance consommée par une machine triphasée dont les phases sont équilibrées à l'aide de la méthode des deux wattmètres. Les wattmètres donnent : $P_1=500\text{ W}$ et $P_2=-200\text{ W}$.

- 1- Quelles sont les puissances actives et réactives consommées par le récepteur.
- 2- Le récepteur est-il plutôt inductif ou capacitif.
- 3- Quel est le facteur de puissance du récepteur.
- 4- Sachant que la machine est connectée sur une ligne 400 V, quel courant consomme-t-elle.

Solution :

1* Les puissances actives et réactives consommées par le récepteur :

$$P = P_1 + P_2 = 500 + (-200) = 300\text{ W}$$

$$Q = \sqrt{3}(P_1 - P_2) = \sqrt{3}(500 - (-200)) = 1212\text{ var}$$

2* Le récepteur consomme **une puissance réactive positive** : il est donc plutôt **inductif**.

3* Le facteur de puissance du récepteur :

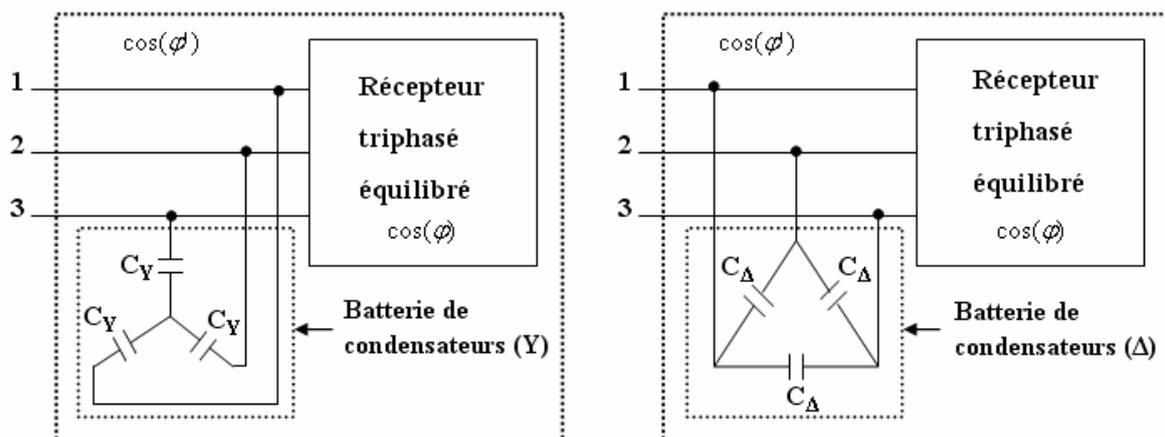
$$\tan(\varphi) = \frac{Q}{P} = \frac{1212}{300} = 4,04 \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(4,04) = 1,33\text{ Rad} = 76,1^\circ \Rightarrow \cos(\varphi) = 0,24$$

4* Le courant de ligne :

$$I = \frac{P}{\sqrt{3}U \cos(\varphi)} = \frac{300}{1,76 \times 400 \times 0,24} = 1,80\text{ A}$$

11- Relèvement du facteur de puissance en triphasé :

Comme en monophasé pour améliorer le facteur de puissance d'une installation ou d'un récepteur, il suffit de diminuer la puissance réactive. On utilise une batterie de condensateurs (**trois condensateurs**) pouvant être couplé **en étoile** ou **en triangle**. Cette batterie de condensateurs est raccordée aux bornes du récepteur ou de l'installation à compenser.



11.1- Couplage des condensateurs en triangle :

Tension aux bornes d'un condensateur : U .

Puissance réactive absorbée par un condensateur :

$$Q_{C1} = -U^2 C \omega$$

Remarque : Signe (-) signifie que le condensateur *fournit* de la *puissance réactive*.

Puissance réactive absorbée par les trois condensateurs :

$$Q_C = 3Q_{C1} = -3U^2 C \omega$$

	Puissance active	Puissance réactive	Facteur de puissance
Charge seule	P	$Q = P \tan(\varphi)$	On a $\cos(\varphi)$
Les trois condensateurs seuls	0	$Q_C = -3U^2 C \omega$	0
Charge + condensateurs	P	$Q' = Q + Q_C = P \tan(\varphi')$	On veut $\cos(\varphi')$

On en déduit la capacité du condensateur de la manière suivante :

$$Q_C = -3U^2 C \omega = Q' - Q \Rightarrow -3U^2 C \omega = P \tan(\varphi') - P \tan(\varphi)$$

Finalement :

$$C_{\Delta} = \frac{P(\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{3U^2 \omega}$$

11.2- Couplage des condensateurs en étoile :

Lorsque le facteur de puissance augmente de $\cos(\varphi)$ à $\cos(\varphi')$ le déphasage diminue et la puissance réactive diminue de :

$$Q = P \tan(\varphi) \quad \text{à} \quad Q' = P \tan(\varphi')$$

Cette différence $Q_C = Q' - Q$ est fournie par trois condensateurs de capacités unitaires C_Y , alimentés sous la tension V , donc la puissance réactive totale :

$$Q_C = 3Q_{C1} = -3V^2 C \omega$$

Finalement :

$$C_Y = \frac{P(\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{3V^2 \omega} = \frac{P(\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{U^2 \omega}$$

11.3- Relation entre les condensateurs en étoile et en triangle :

$$\frac{C_{\Delta}}{C_Y} = \frac{\frac{P(\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{3U^2\omega}}{\frac{P(\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{U^2\omega}} = \frac{1}{3} \Rightarrow C_Y = 3 \times C_{\Delta}$$

Remarque : *Le couplage triangle des condensateurs est plus avantageux* car leur *capacité est trois fois plus petite* qu'en couplage étoile. Plus la capacité est grande, plus le condensateur est volumineux et onéreux.

Exemple :

Une charge triphasé consomme, sur un système triphasé 230V/400V à 50 Hz une puissance de 25 kW avec un facteur de puissance de 0,7.

1- Calculer la valeur des capacités C , câblées en étoile, permettent de relever le facteur de puissance à la valeur 0,92.

2- Calculer la valeur des capacités C' , câblées en triangle, permettent de relever le facteur de puissance à la valeur 0,92.

Solution :

1* La valeur des capacités C câblées en étoile :

$$\cos(\varphi) = 0,7 \Rightarrow \tan(\varphi) = 1,02$$

$$Q_{Ch} = P \times \tan(\varphi) = 25 \times 10^3 \times 1,02 = 25,5 \text{ k var}$$

$$Q_{Total} = P \times \tan(\arccos(0,92)) = 10,64 \text{ k var}$$

$$Q_{Total} = Q_{Ch} + Q_C = Q_{Ch} - 3C\omega V^2$$

$$C = \frac{Q_{Ch} - Q_{Total}}{3\omega V^2} = \frac{25,5 \times 10^3 - 10,64 \times 10^3}{3 \times 100\pi \times 230^2} = 0,29 \text{ mF}$$

2* La valeur des capacités C' câblées en triangle :

$$Q_{Total} = Q_{Ch} + Q_{C'} = Q_{Ch} - 3C'\omega U^2 = Q_{Ch} - 9C'\omega V^2$$

$$C' = \frac{Q_{Ch} - Q_{Total}}{9\omega V^2} = \frac{25,5 \times 10^3 - 10,64 \times 10^3}{9 \times 100\pi \times 230^2} = 99,4 \text{ }\mu\text{F}$$

Résumé : Tableau récapitulatif :

Nous donnons dans le tableau suivant une synthèse des relations existant entre les grandeurs électriques dans les couplages *étoile* et *triangle*.

Couplage	Etoile équilibrée (Y)	Triangle équilibré (Δ)
Relation entre I et J	$I = J$	$I = \sqrt{3} J$
Relation entre U et V	$U = \sqrt{3} V$	$U = V$
Neutre	<i>Potentiel du point commun</i>	<i>Non utilisé</i>
Déphasage	$\varphi_V - \varphi_I$ (entre V et I)	$\varphi_U - \varphi_J$ (entre U et J)
Puissance active	$P = 3P_1 = 3VI \cos(\varphi)$ $P = \sqrt{3}UI \cos(\varphi)$	$P = 3P_1 = 3UJ \cos(\varphi)$ $P = \sqrt{3}UI \cos(\varphi)$
Puissance réactive	$Q = \sqrt{3}UI \sin(\varphi)$	$Q = \sqrt{3}UI \sin(\varphi)$
Puissance apparente	$S = \sqrt{3}UI$	$S = \sqrt{3}UI$
Facteur de puissance	$\cos(\varphi) = \frac{P}{S}$	$\cos(\varphi) = \frac{P}{S}$
Pertes joules	$P_j = 3rI^2 = \frac{3}{2}RI^2$	$P_j = 3rJ^2 = \frac{3}{2}RI^2$
Résistance équivalente	$R = 2r$	$R = \frac{2}{3}r$
Condensateurs	$C_Y = \frac{P(\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{U^2\omega}$	$C_\Delta = \frac{P(\tan(\varphi) - \tan(\varphi'))}{3U^2\omega}$

Bibliographie

- [1] **Notions fondamentales pour l'Electricité et l'Electronique**, Hamdoune Abdelkader, Université Abou Bakr Belkaid Tlemcen, 2012.
- [2] **Electronique analogique**, Didier Le Ruyet / Pierre Provent, Conservatoire national des arts et métiers, Janvier 2010.
- [3] **Electricité générale**, Neffati Tahar, Dunod, Juillet 2003.
- [4] **Support de cours : Electronique Fondamentale 1**, Bekkouche Khaled, Université Mohamed Khider Biskra, 2014/2015.
- [5] **Circuits linéaires en régime permanent sinusoïdal**, DEUG Sciences et Technologie 1^{er} semestre, Electronique et Instrumentation, Université de Savoie.
- [6] **Electronique générale**, Meriche Faiza, Université Mohamed Seddik Ben Yahya Jijel, 2015.
- [7] **Support de cours d'électrocinétique**, David Folio, 1^{er} Cycle ingénieur de l'ENSI de Bourges, Année Universitaire : 2013-2014.
- [8] **Module d'électricité : Electrocinétique (1^{ère} partie)**, Fabrice Sincère, Version 3.0.4, <http://pagesperso.orange.fr/fabrice.sincere>.
- [9] **Electronique générale : Analyse des circuits électriques**, Hamoudi Djamel et Flitti Aicha, Copyright Pages Bleues Internationales 2013.
- [10] **Electronique : Théorie du signal et composants**, François Manneville et Jacques Esquieu, Dunod, Juin 1997.
- [11] **Cours d'électricité : Etude des régimes alternatifs**, Mathieu Bardoux, Département de Génie Thermique et Energie, Université du littoral côte d'opale (ULCO).
- [12] **Electricité : Analyse des signaux et des circuits électriques**, Michel Piou, Edition 12/03/2014.
- [13] **Exercices et problèmes d'électrotechnique : Notions de base et machines électriques**, Luc Lasne, Dunod, 2005.
- [14] **Précis d'électrotechnique : L'essentiel du cours, exercices et problèmes corrigés**, Christophe Palermo, Dunod, Juin 2012.
- [15] **Systèmes triphasés équilibrés : Terminale STI**, Claude Divoux, 1999.
- [16] **Chapitre II : Circuits Triphasés**, A. Moussa, 2015-2016.
- [17] **Chapitre 3 : Systèmes Triphasés**, Fabrice Sincère, Version 3.0.2, <http://pagesperso-orange.fr/fabrice.sincere/>.