Mathématiques avancées de l'ingénieur : Théorie et Pratique du Calcul Matriciel

Dr. Abdellah GHERBI
gherbi1@live.fr

École Supérieur en Génie Électrique et Énergétique d'Oran (ESGEE-ORAN)
Département du deuxième cycle
Achaba Hanifi, techno-pole Usto, Oran- Algérie.
Laboratoire de Mathématiques Fondamentales
et Appliquée d'Oran (LMFAO).

Septembre 2019

Préface

Les problèmes issus des sciences expérimentales et appliquées (physique, chimie, biologie, mécanique,. . .) ont joué un grand rôle dans l'histoire des Mathématiques. Cette interaction a entretenu et entretient des relations étroites tant avec l'Analyse réelle et complexe, qu'avec l'algèbre et la géométrie. Il est donc devenu impérieux de collecter d'une manière moderne et efficace les différents outils mathématiques et les présenter dans des ouvrages et des brochures en tenant compte des besoins pédagogiques et didactiques des étudiants dans leurs apprentissages.

Ce polycopié du cours a comme ambition de présenter les concepts de base permettant de discuter quelques problèmes classiques du calcul matriciel que l'étudiant universitaire ou des écoles supérieures rencontrera incontestablement lors de son parcours de formation scientifique. Tout en donnant des méthodes de portée générale, ce document présente aussi quelques situations particulières, telles que le calcul fonctionnel sur des matrices.

Ce polycopié intitulé "Mathématiques avancées de l'ingénieur : Théorie et pratique de calcul matriciel" est composée de six chapitres. Dans les deux premiers chapitres, on rappelle quelques notions de base utiles pour la suite du travail. On commence dans le chapitre 1 par la donnée de la définition d'un espace vectoriel et ses différentes propriétés élémentaires ainsi que la notion du produit scalaire, la norme euclidienne et le concept de l'orthogonalité. Le deuxième chapitre est une synthèse du cours sur les matrices, de la première année du premier cycle universitaire. Le troisième chapitre est réservé à l'étude de la similitude, la décomposition et la réduction des matrices. Dans le chapitre 04, on traite la notion du pseudo-inverse et de l'inverse généralisé d'une matrice qui n'est pas forcément inversible. Nous abordons dans le cinquième chapitre les notions des $\lambda-$matrices et le calcul fonctionnel matriciel. On donne au sixième chapitre quelques exercices d'assimilation et d'illustrations corrigés.

Ce cours est le fruit de l'enseignement dispensé par l'auteur au sein de l'École Supérieure en Génie Électrique et Énergétique d'Oran (ESGEEO), il s'inscrit dans le cadre du programme officiel du module d'algèbre linéaire et celui des mathématiques avancées de l'ingénieur (MAI). Ce travail se démarque par un souci pédagogique réel de faire comprendre les concepts aux étudiants, aussi bien par la clarté des explications que par la pertinence des applications. Une autre particularité est la richesse des exercices proposés à la fin ce cours. La présentation est exceptionnellement claire, les preuves, les illustrations et les exercices proposés sont données avec grand soin.

L’auteur.

Table des matières

1

Notions sur les espaces vectoriels

1.1 Espaces vectoriels

Espace vectoriel :

Définition 1.1.1

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ tout ensemble non vide E muni d'une loi de composition interne notée additivement " $+$ " et d'une loi de composition externe notée multiplicativement " $\times$ " tel que :

i. $(E, +)$ est un groupe commutatif, c'est à dire

$$\begin{cases} \text{Pour tout } x, y \in E \text{ on a } x + y = y + x \in E, \\ \text{Pour tout } x, y, z \in E \text{ on a } (x + y) + z = x + (y + z), \\ \text{Il existe un unique } 0 \in E \text{ tel que pour tout } x \in E \text{ on a } x + 0 = 0 + x = x, \\ \text{Pour tout } x \in E, \text{ il existe un unique } x' \in E \text{ tel que } x + x' = x' + x = 0. \end{cases}$$

ii. Pour tout $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $\lambda \times (u + v) = \lambda \times u + \lambda \times v$.

iii. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u \in E$ on a $(\lambda + \mu) \times u = \lambda \times u + \mu \times u$.

iv. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u \in E$ on a $(\lambda\mu) \times u = \lambda \times (\mu \times u)$.

v. Pour tout $u \in E$ on a $1_{\mathbb{K}} \times u = u \times 1_{\mathbb{K}} = u$.

Les éléments de E sont appelés vecteurs, ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.

L'élément neutre de E par rapport à l'addition est appelé le vecteur nul, on le note 0_E.
Le zéro de $\mathbb{K}$ est noté 0.
Si E est un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, on dit aussi que c'est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel ($\mathbb{K}-e.v.$).

Exemple.

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*
2. *L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polunômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*
3. *L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.*
4. *L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Remarquons que $(0+\lambda)\times u = \lambda \times u = 0 \times u + \lambda \times u$, donc $0 \times u = 0_E$.
De plus, $\lambda \times (u + 0_E) = \lambda \times u + \lambda \times 0_E = \lambda \times u$, donc $\lambda \times 0_E = 0_E$,
et $(1+(-1)) \times u = 0 = u + (-1) \times u$, c'est à dire que $(-1) \times u = -u$.
Base et dimension :

Définition 1.1.2

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ une famille de vecteurs de E.

- On appelle une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$, un vecteur v de E de la forme
$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}.$$
Les λ_k sont appelés les coefficients de la combinaison linéaire.
- On dit que $\mathcal{F}$ est une famille libre, si toute combinaison linéaire nulle des éléments de $\mathcal{F}$ a ses coefficients nuls. Autrement dit,
$$\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}, \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$
- On dit que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$. Autrement dit, pour tout $u \in E$, il existe $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$.

Proposition 1.1.1

— Un sous-ensemble d'une famille libre est libre.
— Un sous-ensemble d'une famille génératrice est génératrice.

Définition 1.1.3

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice de E.

Exemple.

1. *La famille* $\mathcal{F} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *appelée la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.
2. *La base canonique de* $\mathbb{R}_n[X]$ *est* $\{1, X, X^2, ..., X^n\}$.
3. *L'ensemble* $\{1, X, X^2, ...\}$ *est une base de* $\mathbb{R}[X]$.

Définition 1.1.4

On appelle dimension d'un espace vectoriel E, le nombre des vecteurs de sa base. Si la base contient un nombre fini de vecteur on parle d'un espace vectoriel de dimension fini, sinon on dit que E est de dimension infini.

Exemple.

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ *est espace vectoriel de dimension* n *sur* $\mathbb{K}$.
2. $\mathbb{R}_n[X]$ *est un* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel de dimension finie* $n+1$, *par contre* $\mathbb{R}[X]$ *est de dimension infinie.*

Sous-espace vectoriel :

Définition 1.1.5

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et F un sous-ensemble de E. On dit que F est sous-espace vectoriel de E si les lois de composition interne et externe de E induisent sur F une structure d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Plus précisément,

Théorème 1.1.1

On dit qu'un sous-ensemble non vide F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si, pour tout $u, v \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ on a,

$$\lambda u + \mu v \in F.$$

Exemple.

1. $\{0_E\}$ *et* E *sont de manière évidente des sous-espaces vectoriels de* E. *On appelle sous-espace vectoriel non trivial de* E *tout sous-espace vectoriel autre que* $\{0_E\}$ *et* E.
2. *Soit* u, v *deux vecteurs d'un espace vectoriel* E. *Dire le vecteur* v *combinaison linéaire du vecteur* u *revient à dire que* v *est proportionnel à* u. *L'ensemble des vecteurs proportionnels à* u *se note* $\mathbb{K}u$. *Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de* E. *Lorsque* u *est non nul,* $\mathbb{K}u$ *est par définition la droite vectorielle engendrée par* u.
3. $\mathbb{K}_n[X]$ *est sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}[X]$.

Sous-espace vectoriel engendré par une partie : Afin de construire un sous-espace vectoriel, il serait naturel de savoir comment la structure de sous-espace vectoriel se comporte vis à vis les opérations ensemblistes usuelles.

Proposition 1.1.2

1. La réunion d'une famille de sous-espaces vectoriels n'est pas forcément un sous-espace vectoriel.
2. L'intersection d'une famille de sous-espace vectoriels (finie ou non) est un sous-espace vectoriel.

De la proposition précédente, on peut déduire que si F est une partie non vide d'un espace vectoriel E (non nécessairement un sous-espace vectoriel) alors l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant F est aussi un sous-espace vectoriel de E contenant F. C'est le plus petit sous-espace vectoriel (au sens de l'inclusion) contenant F, on l'appelle **le sous-espace vectoriel engendré par** F et on le note par $Vect(F)$ ou bien $< F >$.

Théorème 1.1.2

Soit $s \in \mathbb{N}^*$ et $F = \{v_1, v_2, ..., v_s\}$ une famille de vecteurs de E. Alors, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de F est le sous-espace vectoriel engendré par F.

Remarque. *F est une famille génératrice de $Vect(F)$.*

Exemple. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.*

1. *Le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur nul 0_E est $\{0_E\}$.*
2. *Soit v un vecteur non nul de E. $Vect(v)$ est la droite vectorielle engendrée par v et on a*
$$Vect(v) = \mathbb{K}v.$$
3. *Supposons que $E = \mathbb{R}^2$, alors $Vect((1,0),(0,1)) = \mathbb{R}^2$.*

Somme directe :

Définition 1.1.6

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E. On appelle somme de F et G et on note $F+G$, l'ensemble des éléments de E de la forme x_1+x_2 tels que $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$.

Corollaire. *$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 1.1.3

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G + \dim(F \cap G).$$

Proposition 1.1.4

Soit $H = F + G$ alors, tout élément de H s'écrive de manière unique sous la forme $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$ si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Définition 1.1.7

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E vérifiant $F \cap G = \{0_E\}$. On dit que la somme $F + G$ est une somme directe et on note $F \oplus G$.

Exemple.

1. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ tels que*

$$F = Vect((1,0)) \text{ et } G = Vect((0,1)).$$

   Alors, $\mathbb{R} = F \oplus G$.

2. $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$.
3. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. On considère les deux sous-espace vectoriel H, K de $E \times F$ définis par $H = E \times \{0_F\}$ et $K = \{0_E\} \times F$. Alors, $E \times F = H \oplus K$.*

Corollaire. *Si E est de dimension finie, on a :* $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.

Proposition 1.1.5

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace de E. Il existe alors un sous-espace vectoriel F' de E appelé **un supplémentaire** de F dans E tel que $E = F \oplus F'$.

Remarque. *Tous les supplémentaires de F ont la même dimension.*

Définition 1.1.8

En dimension finie, la dimension d'un supplémentaire de F est appelée la codimension de F, on la note $cdimF$.

1.2 Espaces hermitiens (euclidiens)

Toute l'étude suivante peut se reprendre dans le cadre des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ avec des résultats analogues.
Forme sesquilinéaire :
Dans ce qui suit, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On désigne par f une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.2.1

- L'application f est appelée forme sesquilinéaire, si, pour tout v fixé de E, l'application qui à u associe $f(u,v)$ est linéaire, et si, pour tout u fixé dans E, l'application qui à y associe $f(x,y)$ est semi-linéaire. C'est à dire que : $\forall u, u', v, v' \in E$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ on a
$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu u', v) &= \lambda f(u,v) + \mu f(u', v), \\ f(u, \lambda v + \mu v') &= \overline{\lambda} f(u,v) + \overline{\mu} f(u, v'). \end{aligned}$$
- Une forme sesquilinéaire f est dite hermitienne, si, quels que soient u et v dans E,
$$f(u,v) = \overline{f(v,u)}.$$
- Une forme sesquilinéaire hermitienne f est dite positive si, pour tout u de E, le nombre $f(u,u)$ est positif ou nul.

Si f est sesquilinéaire, on a, pour tout u, v dans E et λ dans $\mathbb{C}$
$$\begin{aligned} &f(u,0) = f(0,u) = 0, \\ &f(\lambda u, \lambda u) = |\lambda|^2 f(u,u), \\ &f(u+v, u+v) = f(u,u) + f(u,v) + f(v,u) + f(v,v). \quad (\sharp) \end{aligned}$$

Remarque. *Si E est un espace vectoriel réel, on parle d'une forme bilinéaire au lieu d'une forme sesquilinéaire et d'une forme symétrique au lieu d'une forme hermitienne*

Exemple.

1. *Sur l'espace des fonctions complexes de la variable réelle t, intégrables sur $[0,1]$, l'application*
$$(f,g) \to \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$$
est forme sesquilinéaire hermitienne et positive.
2. *Sur $\mathbb{R}^n$, l'application définie pour tout $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ et $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ par*
$$(u,v) \to \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$
est une forme bilinéaire symétrique et positive.

Orthogonalité :

Définition 1.2.2

Soit f une forme sesquilinéaire sur E. Deux vecteurs u et v de E sont dits orthogonaux pour f si
$$f(u,v) = 0.$$

De la relation $(\sharp)$, il résulte immédiatement le théorème suivant.

Théorème 1.2.1: (Pythagore)

Deux vecteurs u et v sont orthogonaux pour f si et seulement si

$$f(u+v,u+v) = f(u,u) + f(v,v).$$

Définition 1.2.3

Soit f une forme sesquilinéaire (ou bien bilinéaire symétrique si E est un $\mathbb{R}-$e.v.) sur E et F une partie non vide de E. On appelle orthogonale de F (pour f), l'ensemble

$$F^{\perp} = \{u \in E,\ \forall v \in F : f(u,v) = 0\}.$$

Proposition 1.2.1

$F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Corollaire. *Deux sous-espaces vectoriels F et G de E seront dits orthogonaux pour f, si, quels que soient u dans E et y dans G, les vecteurs u et v sont orthogonaux pour f.*

Définition 1.2.4

On appelle noyau de f, l'orthogonal $E^{\perp}$ de E pour f, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E orthogonaux à tous les éléments de E.

Il résulte de cette définition que les éléments de $E^{\perp}$ sont orthogonaux à eux-mêmes.

Définition 1.2.5

Un vecteur orthogonal à lui même pour f est appelé vecteur isotrope. L'ensemble des vecteurs isotropes pour f est appelé le cône isotrope de f.

Attention : Le cône isotrope et le noyau ne sont pas forcément égaux.

Définition 1.2.6

Une forme sesquilinéaire hermitienne f (respectivement, une forme bilinéaire symétrique) est dite non dégénérée, si le noyau de f est réduit à zéro. c'est à dire $E^{\perp} = \{0_E\}$.

Exemple. *On considère sur $\mathbb{R}^2$ la forme bilinéaire f définie pour $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ par*

$$f(u,v) = u_1v_1 - u_2v_2.$$

On sait que $\mathbb{R}^2$ est engendré par les vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. Donc, un vecteur $u = (u_1, u_2)$ dans l'orthogonal de $\mathbb{R}^2$ pour f doit forcément vérifier

$$f(u,e_1) = 0 \text{ et } f(u,e_2) = 0.$$

Or, $f(u, e_1) = 0 \Rightarrow u_1 = 0$ *et* $f(u, e_2) = 0 \Rightarrow -u_2 = 0$.
Donc $u = (0, 0)$ *et* $(\mathbb{R}^2)^\perp = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. *Ainsi* f *est non dégénérée.*
Les vecteurs isotropes vérifient

$$f(u, u) = u_1^2 - u_2^2 = 0.$$

Ce sont donc les vecteurs des deux droites vectorielles engendrées par $(1, 1)$ *et* $(1, -1)$ *respectivement.*

Proposition 1.2.2

Une forme sesquilinéaire hermitienne (respectivement, une forme bilinéaire symétrique) positive est non dégénérée, si et seulement si le vecteur nul est le seul vecteur isotrope pour f.

Définition 1.2.7

si f est une forme sesquilinéaire hermitienne (respectivement, une forme bilinéaire symétrique) positive et non dégénérée, l'application qui à u associe $\sqrt{f(u, u)}$ est une norme sur E, appelée, norme hermitienne (respectivement, norme euclidienne) associée à f.

On rappelle qu'une norme sur E est une application $\mathcal{N}$ sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et satisfaisant les hypothèses suivantes :

Séparation	$\forall x \in E,\ \mathcal{N}(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$,
Homogénéité	$\forall (\lambda, x) \in K \times E \quad \mathcal{N}(\lambda x) = \lvert\lambda\rvert \mathcal{N}(x)$,
Inégalité triangulaire	$\forall (x, y) \in E^2,\ \mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$.

Produit scalaire :

Définition 1.2.8

On appelle produit scalaire sur E, une forme sesquilinéaire hermitienne (respectivement, une forme bilinéaire symétrique) positive et non dégénérée.
Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire complexe (respectivement, réel) est alors appelé espace hermitien (respectivement, espace euclidien).

On notera $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v dans E et $\|u\|$ la norme hermitienne ou euclidienne associée.

Théorème 1.2.2

Soit $(E, \langle ., .\rangle)$ un espace hermitien ou euclidien. Alors pour tout $u, v \in E$:

Inégalité de Cauchy-Schwarz	$\lvert\langle u, v\rangle \leq \|u\|\|v\|$,
Inégalité de Minkowski	$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$,
Théorème de Pythagore	$\langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Proposition 1.2.3

pour tous u, v de E : $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|$ si et seulement si u et v sont colinéaires.

Supplémentaire orthogonal, projection orthogonale :
Soit E un espace hermitien ou bien euclidien, F un sous-espace de E. L'orthogonal $F^{\perp}$ de F pour le produit scalaire est un supplémentaire de F dans E. On l'appelle le supplémentaire orthogonal de F dans E. Formellement on écrit,

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

Corollaire.

1. *Le supplémentaire orthogonal est unique.*
2. $(F^{\perp})^{\perp} = F$.
3. $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$.

Proposition 1.2.4

Soit E un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire $\langle ., .\rangle$, et soit F un sous-espace de dimension finie de E. Pour tout $u \in E$, il existe un unique $p_F(u) \in F$ tel que $u - p_F(u)$ est orthogonal à F. L'application

$$\begin{array}{rccc} p_F : & E & \longrightarrow & F \\ & u & \longmapsto & p_F(u) \end{array}$$

est linéaire. Cet application p_F s'appelle la projection orthogonale sur F.

2

Généralités sur le calcul matriciel

Une matrice A est un tableau à deux dimensions de nombres $a_{ij} \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ordonnés. On dit que l'élément a_{ij} est situé à la $i$ème ligne et à la $j$ème colonne de la matrice A.

Une matrice A qui possède m lignes et n colonnes est dite d'ordre (m, n) et s'écrit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$. On désigne par $\mathbb{K}^{m,n}$ l'espace des matrices d'ordre (m, n) à coefficients a_{ij} dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & . & . & a_{ij} & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si $m = n$ la matrice est dite carrée.

Une matrice qui ne comporte qu'une seule colonne, $A \in \mathbb{K}^{m,1}$, est appelée un vecteur colonne : $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

Une matrice qui ne comporte qu'une seule ligne, $A \in \mathbb{K}^{1,n}$, est appelée un vecteur ligne : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \end{pmatrix}$.

Par convention, tout vecteur est désigné par une matrice colonne.

2.1 Opérations usuelles sur les matrices

2.1.1 Addition des matrices

L'addition matricielle n'est définie qu'entre deux matrices de mêmes dimensions. La matrice somme obtenue est de la même dimension que les matrices additionnées et chacun de ses éléments est la somme des éléments des deux matrices correspondants à la même ligne et à la même colonne.

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} \in \mathbb{K}^{m,n}$. La somme $A+B$ de A et B est la matrice $A+B \in \mathbb{K}^{m,n}$ définie par :

$$\begin{aligned} A+B &= (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} \\ c_{ij} &= a_{ij}+b_{ij} \end{aligned}$$

On définit de même la soustraction $A-B$ des matrices A et B par :

$$A-B = (a_{ij}-b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$$

En particulier, la somme matricielle est commutative et associative dans l'espace $\mathbb{K}^{m,n}$, c'est à dire pour tout $A, B, C \in \mathbb{K}^{m,n}$, on a :

$$\begin{aligned} A+B &= B+A \\ A+(B+C) &= (A+B)+C \end{aligned}$$

Exemple. *Si $A, B \in \mathbb{K}^{2,3}$ tel que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & -8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, alors*

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} 2+4 & 1+0 & 7+(-4) \\ 5+1 & 6+2 & -8+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & -5 \end{pmatrix} \\ A-B &= \begin{pmatrix} 2-4 & 1-0 & 7-(-4) \\ 5-1 & 6-2 & -8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 11 \\ 4 & 4 & -11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.1.2 Produit matriciel

Multiplication d'une matrice par un scalaire :

La multiplication d'une matrice par un scalaire donne une matrice dont chaque élément de la matrice est multiplié par le scalaire. Étant donnés une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} \in \mathbb{K}^{m,n}$

et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, alors les éléments de la matrice λA sont donnés par λa_{ij}, $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$:

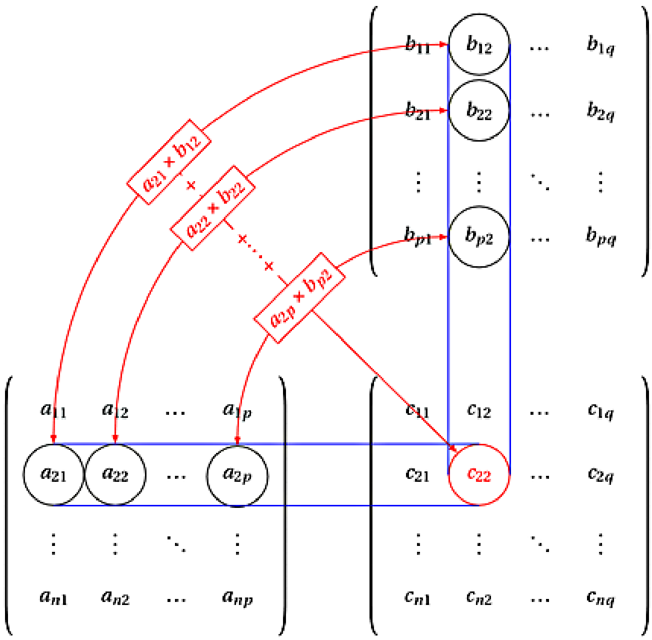
$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathbb{K}^{m,n}.$$

En particulier, si $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors

$$\begin{aligned} \lambda(A+B) &= \lambda A + \lambda B \\ (\lambda+\mu)A &= \lambda A + \mu A \\ (\lambda\mu)A &= \lambda(\mu A). \end{aligned}$$

Multiplication matricielle :

La multiplication entre deux matrice n'est définie que lorsque leurs dimensions sont compatibles, dans le sens où le nombre de colonnes de la matrice à gauche dans la multiplication est égal au nombre de lignes de la matrice à droite dans la multiplication. Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathbb{K}^{m,n}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathbb{K}^{n,p}$, la multiplication entre les matrices A et B, AB, donne une matrice d'ordre (m, p) dont les éléments sont $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.



Représentation schématique du produit de matrices

Le produit matriciel n'est pas en général commutatif, $AB \neq BA$, il est par contre :

(i) associatif, à savoir, pour tout A, B, et C des matrices pour lesquelles les produits ont un sens, on a $(AB)C = A(BC) = ABC$,

(ii) distributif par rapport à l'addition, à savoir, pour toutes matrices A, B, C pour lesquelles les produits $A(B+C)$ et $(A+B)C$ ont un sens alors, $A(B+C) = AB + AC$ et $(A+B)C = AC + BC$.

Exemple. *Si* $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$, *alors* $AB \in \mathbb{R}^{2,3}$ *et on a :*

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5\times 8 + (-3)\times 7 & 5\times(-2)+(-3)\times 0 & 5\times 6+(-3)\times 9 \\ 4\times 8+2\times 7 & 4\times(-2)+2\times 0 & 4\times 6+2\times 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19 & -10 & 3 \\ 46 & -8 & 42 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarquons ici que le produit BA *n'est pas défini.*

2.1.3 Matrice transposée, matrice adjointe et trace

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in \mathbb{K}^{m,n}$. On définit la transposée et la transconjuguée (ou la matrice adjointe) de A respectivement par :

$$\begin{aligned} A^t &= (a_{ji})_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le i\le m}} \in \mathbb{K}^{n,m}, \\ A^* &= (\overline{a_{ji}})_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le i\le m}} \in \mathbb{K}^{n,m}. \end{aligned}$$

Exemple. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2+3i & 3+4i \\ 1+5i & 3+7i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$. *La matrice transposée et la matrice adjointe de* A *sont données, respectivement, par :*

$$A^t = \begin{pmatrix} 2+3i & 1+5i \\ 3+4i & 3+7i \end{pmatrix} \text{ et } A^* = \begin{pmatrix} 2-3i & 1-5i \\ 3-4i & 3-7i \end{pmatrix}.$$

Propriétés élémentaires de la transposition :

Soit $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, alors :

$(A^t)^t = A$,

$(A+B)^t = A^t + B^t$ avec $B \in \mathbb{K}^{m,n}$,

$(\lambda A)^t = \lambda A^t$ et $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$,

$(AB)^t = B^t A^t$ avec $B \in \mathbb{K}^{n,p}$. **Trace d'une matrice :** On appelle trace d'une matrice carrée d'ordre n, la somme des éléments de la diagonale de cette matrice. Formellement :

$$\forall A \in \mathbb{K}^{n,n};\ Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Propriétés :

1. Si A et B sont deux matrices carrées de même ordre, on a :

$$\begin{array}{l} Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B), \\ Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A), \ \lambda \in \mathbb{C}, \\ Tr(A^t) = Tr(A). \end{array}$$

2. Si A et B sont respectivement de types (n, m) et (m, n),

$$Tr(AB) = Tr(BA).$$

2.2 Matrices particulières

La matrice nulle :

La matrice dont tous les éléments sont nuls est appelée matrice nulle. On la note $A = 0$ où $a_{ij} = 0$, pour tout i, j.

Matrice diagonale :

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathbb{K}^{n,n}$ est dite diagonale si tous les éléments non diagonaux de A sont nuls, c'est à dire $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$. La matrice est dans ce cas de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & & & & . \\ . & & a_{ii} & & & . \\ . & & & & . & . \\ . & & & & . & 0 \\ 0 & & & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La matrice identité :

Une matrice identité est une matrice diagonale d'ordre (n, n) notée I_n dont tous les éléments de la diagonale sont égaux à 1 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & & & & . \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & 0 \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrice triangulaire :

Une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure) est une matrice carrée $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathbb{K}^{n,n}$ dont les éléments qui se trouvent au dessous (respectivement au dessus) de la diagonale principales sont nuls, c'est à dire telle que $a_{ij} = 0, \forall i > j$ $(\forall i < j)$. Elle est donc de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & a_{n-1n} \\ 0 & . & . & . & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ respectivement } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & . \\ . & . & a_{33} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matrices symétriques et antisymétriques :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{K}^{n,n}$ une matrice carrée.

Si $A^t = A$, alors A est dite une matrice symétrique.

Si $A^t = -A$, alors A est dite une matrice antisymétrique.

Exemple.

1. *La matrice $A^t + A$ est symétrique par contre la matrice $A^t - A$ est antisymétrique.*
2. *La seule matrice symétrique et antisymétrique à la fois est la matrice nulle.*

Corollaire. *Toute matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ s'écrit comme somme d'une matrice symétrique avec une matrice antisymétrique.*

En effet,

$$A = \left(\frac{A + A^t}{2}\right) + \left(\frac{A - A^t}{2}\right).$$

Matrice adjointe : Si $A \in \mathbb{C}^{n,m}$, on appelle la matrice adjointe de A, la matrice A^* définie par :

$$A^* = \overline{A}^t.$$

Matrice auto-adjointe : Si $A = A^*$, on dit que A est auto-adjointe.
Matrice normale : On dit que A est normale si et seulement si A commute avec sa matrice adjointe, c'est à dire

$$AA^* = A^*A.$$

Matrice unitaire, orthogonale : Une matrice carrée A d'ordre n a coefficient réels est dite unitaire si et seulement si $AA^t = A^tA = I_n$.Si $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ et $AA^* = A^*A = I_n$, on dit qu'elle est orthogonale.
Matrice idempotente : Soit une matrice carrée $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Si $A \times A = A$, alors A est dite une matrice idempotente.
Matrice nilpotente : Soit une matrice carrée $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ (n'est pas forcément nulle).S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$, on dit que A est nilpotente.
Quelques propriétés classiques :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{K}^{m,n}$.

$A0 = 0$ et $0A = 0$, c'est la matrice nulle de la multiplication matricielle.

$A + 0 = 0 + A = A$, la matrice 0 est l'élément neutre de l'addition matricielle.

$AI_n = A$ et $I_m A = A$, l'élément neutre de la multiplication matricielle.

Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice : Soit $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On considère les matrices **élémentaires** suivantes :

$$I_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} & & & i & & & & j & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & . & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array}, \quad I_i(\alpha) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & \alpha & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$I_{ij}(\alpha) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & i & & & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & 0 & . & . & \alpha & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}$$

Remarque.

1. *La matrice I_{ij} est obtenue en intervertissant les lignes (ou bien les colonnes) i et j dans la matrice I_n.*

2. *$I_i(\alpha)$ est obtenue en multipliant la colonne C_i par α dans la matrice I_n.*

3. *$I_{ij}(\alpha)$ est obtenue en remplaçant la colonne C_j par la combinaison linéaire $(\alpha C_i) + C_j$ dans la matrice I_n.*

4. *Les matrices élémentaires I_{ij}, $I_i(\alpha)$ et $I_{ij}(\alpha)$ sont tous de déterminants non nuls.*

Proposition 2.2.1

Soit A une matrice dans $\mathbb{K}^{n,n}$. Alors :

1. La multiplication à gauche de A par I_{ij} permet d'intervertir les lignes L_i et L_j dans A, et quand la multiplication est à droite, ça revient à intervertir les colonnes C_i et C_j dans A.
2. La multiplication à gauche de A par $I_i(\alpha)$ revient à multiplier la ligne L_i dans A par α, alors que la multiplication à droite permet de multiplier la colonne C_i dans A par α.
3. Quand on multiplie la matrice A à gauche par $I_{ij}(\alpha)$, alors ceci revient à multiplier la ligne L_j par α et l'ajouter à la ligne L_i dans A, et quand on multiplie à droite, ça revient à multiplier la colonne C_i par α et l'ajouter à la colonne C_j dans A.

Exemple.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \alpha a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \alpha a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + \alpha a_{31} & a_{12} + \alpha a_{32} & a_{13} + \alpha a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha a_{11} + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \alpha a_{21} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \alpha a_{31} + a_{33} \end{pmatrix}.$$

2.3 Rang d'une matrice

On définit le rang d'une matrice comme étant la dimension du sous-espace engendré par ses vecteurs colonnes, c'est aussi égal au nombre maximum des lignes ou des colonnes linéairement indépendantes dans la matrice. $rg(A)$ désigne le rang d'une matrice A.

Le rang d'une matrice ne change pas :

- quand on change l'ordre des lignes,

- quand on multiplie (ou on divise) une ligne par un nombre non nul,

- quand on ajoute (ou on retranche) à une ligne une combinaison des autres,

- quand on ajoute (ou on retranche) à la matrice une nouvelle ligne qui est combinaison linéaire des autres.

Exemple. $rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & -3 \end{pmatrix} = 3.$

On a fait $L_2 \longrightarrow L_2 - L_1$ *et* $L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1$.

Si A est une matrice d'ordre (m, n) et si toutes ses lignes et ses colonnes sont linéairement indépendantes, on a $rg(A) = \min(n, m)$.

Le produit A^tA est une matrice carrée d'ordre (n, n), son rang est égal au rang de A.

Le produit AA^t est une matrice carrée d'ordre (m, m), son rang est égal au rang de A.

2.4 Noyau et image d'une matrice

Soit $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, l'ensemble des solutions $X \in \mathbb{K}^n$, du système homogène $AX = 0$ est un espace vectoriel appelé noyau de la matrice A, noté $\ker(A)$.

$$\ker(A) = \{X \in K^n : AX = 0 \in \mathbb{K}^m\}.$$

L'image de la matrice A est le sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$, noté $Im(A)$, défini par :

$$Im(A) = \{Y \in \mathbb{K}^m : Y = AX,\ X \in \mathbb{K}^n\}.$$

En particulier, le rang d'une matrice est égal à la dimension de son image, $rg(A) = \dim(Im(A))$ et on a pour toute matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$,

$$rg(A) + \dim(\ker(A)) = n.$$

De plus, si $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible ;

(ii) $\ker(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$;

(iii) $rg(A) = n$;

(iv) les colonnes et les lignes de A sont linéairement indépendantes.

2.5 Déterminant d'une matrice

2.5.1 Définitions et méthode du calcul

Le déterminant d'une matrice carrée A d'ordre n est le nombre noté $\det(A)$ ou bien $|A|$, il se calcul de manière récursive :

$\det(A) = a_{11}$ si $A = (a_{11})$ est une matrice d'ordre 1.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, on pose par définition

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Le résultat est donc obtenu en effectuant le produit des éléments opposés et en calculant la différence entre ces deux produits.

D'une manière générale, si $A \in \mathbb{K}^{n,n}$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_i),$$

où A_i est la matrice obtenue en rayant la i-ème ligne et la 1ère colonne, ainsi $A_i \in \mathbb{K}^{n-1,n-1}$.

Si $n = 3$, alors

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right) \end{aligned}$$

Le déterminant 3×3 se ramène donc au calcul de plusieurs déterminants 2×2 combinés de façon adéquate.

Remarquons que le déterminant d'une matrice carrée A, $\det(A)$, peut être developpé suivant n'importe quelle ligne ou colonne de la matrice, c'est à dire :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \\ \det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \text{ pour tout } 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

où A_{ij} est la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne. $m_{ij} = \det(A_{ij})$ est appelé le mineur du coefficient a_{ij} et $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ son cofacteur, ce qui permet d'écrire la formule du déterminant sous la forme simple suivante :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij}$$

pour toutes les lignes i et les colonnes j.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$m_{ij} = \det A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\ j-1} & a_{1\ j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\ 1} & \dots & a_{i-1\ j-1} & a_{i-1\ j+1} & \dots & a_{i-1\ n} \\ a_{i+1\ 1} & \dots & a_{i+1\ j-1} & a_{i+1\ j+1} & \dots & a_{i+1\ n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\ j-1} & a_{n\ j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Évidemment, développer un déterminant selon une ligne ou une colonne est d'autant plus intéressant du point de vue des calculs que cette ligne ou colonne contient des coefficients nuls. En effet, chaque coefficient nul apporte une contribution nulle à la somme, ce qui diminue le nombre de déterminants de taille inférieure à calculer. Le cas le plus favorable est celui où tous les coefficients d'une ligne ou colonne sont nuls sauf un, s'ils le sont tous, on sait par définition que le déterminant est nul. Ainsi, Pour calculer la valeur d'un déterminant, on développera suivant la ligne ou la colonne où il y a le plus de zéros.

Lorsque le déterminant d'une matrice carrée est nul on dit que la matrice est singulière. Une matrice est dite régulière si son déterminant est non nul, autrement dit son rang est égal à n si la matrice est d'ordre (n, n). Une matrice est dite orthogonale si $\det(A) = \pm 1$.

Exemple. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$, $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$, $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2.$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 12 - 3 \times 8 = -12.$$

On peut aussi développer par rapport à la première colonne et retrouver le même résultat :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 \times 6 - 12 = -12.$$

Quelques théorèmes :

Théorème 2.5.1

1. Si tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne d'une matrice sont nuls, alors le déterminant de la matrice est égal à zéro.
2. Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est égal au produit des éléments de la diagonale de la matrice. En particulier, $\det(I_n) = 1$.
3. Si tous les éléments d'une ligne, ou d'une colonne, d'un déterminant sont multipliés par une constante k, la valeur du nouveau déterminant est k fois la valeur du déterminant initial.
4. Si B est obtenue à partir de $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, en échangeant deux de ses lignes ou de ses colonnes, alors $\det(B) = -\det(A)$. Alors, Un déterminant change de signe lorsque l'on permute deux lignes ou deux colonnes consécutives.
5. Si B est obtenue à partir de $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, en faisant passer la i-ème ligne (colonne) par dessus p lignes (colonnes), alors $\det(B) = (-1)^p \det(A)$.
6. Si deux lignes ou deux colonnes de A sont identiques, alors $\det(A) = 0$. Autrement dit, si deux lignes (ou colonnes) d'un déterminant sont proportionnelles, la valeur du déterminant est nulle.
7. Si aux éléments d'une ligne (colonne) on ajoute k fois les éléments correspondants d'une autre ligne (colonne), la valeur du déterminant reste inchangée. Autrement dit, la valeur d'un déterminant est conservée si l'on a joute à une ligne (ou à une colonne) une combinaison des autres lignes (ou colonnes).
8. Le déterminant d'une matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ est égal à celui de sa transposée, $\det(A) = \det(A^t)$.
9. Si chaque élément d'une ligne (ou colonne) d'un déterminant est exprimé sous la forme d'un binôme, le déterminant peut être écrit comme somme de deux ou plusieurs déterminants.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda b_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} + \lambda b_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & a_{ij} & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ a_{n1} + \lambda b_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & a_{ij} & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$+\lambda \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & a_{ij} & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ b_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

10. Si $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ en général.

Exemple.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2(1) & 2(3) & 2(2) \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 3(1) & 0 \\ 1 & 3(1) & 2 \\ -1 & 3(0) & 2 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12.$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \to C_1 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$, *où C_i désigne la colonne i et $C_1 + C_3$ signifie que l'on a ajouté la colonne C_3 à la colonne C_1.*

4) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} \underset{C_1 \to C_1 + C_2 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

$= 5 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 5(-4+4) = 0.$

Attention : *La ligne (ou colonne) dans laquelle seront effectués les calculs ne doit pas être multipliée par des scalaires. La multiplication par un scalaire λ reviendrait à multiplier le déterminant par λ.* $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{L_1 \to 2L_1 - L_2}{\longrightarrow} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2$, *alors que* $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$.

5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \to C_1 + C_2 + C_3 + C_4}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

6) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_1 \to L_1 + L_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

2.5.2 Applications

1- Calcul de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre n : On rappelle qu'une matrice carrée $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ est inversible s'il existe $B \in \mathbb{K}^{n,n}$ telle que $AB = BA = I_n$ où I_n est la matrice unité d'ordre n. On note $B = A^{-1}$ l'inverse de A s'il existe.

On appelle comatrice de la matrice A, et on note $\widetilde{A}$, la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont les cofacteurs de A :

$$\widetilde{A} = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

Théorème 2.5.2

Pour tout $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, on a l'identité :

$$A\left(\widetilde{A}\right)^t = \det(A) I_n.$$

A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left(\widetilde{A}\right)^t$.

Cette identité, se prête peu aux calculs à la main (et même en machine) car le calcul des cofacteurs est très lourd. En pratique, cette formule ne permet de calculer l'inverse d'une matrice que pour $n = 2$ ou 3. En particulier, pour $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\det(A) = ad - bc \neq 0$, on retrouve la classique formule de l'inverse, à savoir :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemple. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, *alors* $\det(A) = -2$ *et* A *est inversible.* *Calculons les* 9 *cofacteurs de la matrice* A.

Cofacteurs ligne 1, $c_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -2$, $c_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5$, $c_{13} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$.

Cofacteurs ligne 2, $c_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4$, $c_{22} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -7$, $c_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$.

Cofacteurs ligne 3, $c_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$, $c_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4$, $c_{33} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$.

La comatrice de A est :

$$\widetilde{A} = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'inverse de A est :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left(\widetilde{A}\right)^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -5 & 7 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quelques propriétés de l'inverse matriciel

Soient $A, B, C \in \mathbb{K}^{n,n}$, on a les propriétés suivantes :

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
3. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$, $\lambda \neq 0$.
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
5. $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.
6. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

2- Détermination du rang :

Le rang r d'une matrice est l'ordre du plus grand déterminant non nul de la matrice, ce qui revient à dire que si k est le nombre de lignes linéairement indépendantes et l le nombre de colonnes linéairement indépendantes dans la matrice, alors $r = \min(k, l)$. En d'autres termes, le rang d'une matrice est égal à r si :

- il y'a au moins un mineur d'ordre r de la matrice différent de zéro,

- tous les mineurs de la matrice d'ordre $r + 1$ et plus, sont nuls.

Si la matrice est carrée et que le rang est égal au nombre de lignes, la matrice est dite de rang maximal, son déterminant est non nul et elle est inversible.

Le rang d'une matrice nulle est admis être zéro.

Pour déterminer le rang d'un matrice on procède de la manière suivante :

1) On part des mineurs de petits ordres, en commençant par les mineurs d'ordre 1, c'est à dire avec les éléments de la matrice, en allant aux mineurs d'ordres plus important.

2) On suppose que l'on trouve un mineur d'ordre r non nul, alors on doit seulement calculer les mineurs d'ordre $(r + 1)$ de la matrice. Si tous les mineurs d'ordre $(r + 1)$ sont nuls, alors le rang de la matrice est égal à r, mais si l'un d'entre eux est non nul, alors le rang de la matrice est au moins égal à $(r + 1)$ et on continue l'opération en calculant les mineurs d'ordre $(r + 2)$ et ainsi de suite.

Exemple. *Cherchons le rang de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Il existe au moins un mineur d'ordre 2 *différent de zéro.* $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Il y a aussi un mineur d'ordre 3 *non nul,* $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$ $2 - 1 = 1 \neq 0$.

Tous les mineurs d'ordre 4 *à l'intérieur de la matrice, sont nuls :*

$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$. *Ainsi le rang de la matrice est* 3.

3- Solution d'un système d'équations linéaires, Règle de Cramer :

On peut déterminer la solution d'équations linéaires par les déterminants. Le théorème suivant, appelé règle de Cramer, donne une formule explicite pour la solution de certains systèmes d'équations linéaires. Soit le système de n équations linéaires à n inconnues $x_1, x_2, ..., x_n$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad . \\ \qquad\qquad\qquad . \\ \qquad\qquad\qquad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ce système peut aussi s'écrire sous la forme matricielle $AX = B$ où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & . & . & a_{ij} & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \; ; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}.$$

La matrice A est appelée la matrice des coefficients du système et la matrice B est appelée le second membre. Définissons la matrice A_j par :

$$\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
a_{11} & . & . & . & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & . & . & . & a_{1n} \\
a_{21} & . & . & . & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & . & . & . & a_{2n} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
a_{n1} & . & . & . & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & . & . & . & a_{nn}
\end{pmatrix} \\
\uparrow \\
j\text{ème colonne}
\end{array}$$

Autrement dit, A_j est la matrice obtenue en remplaçant la j-ème colonne de A par le second membre B. La règle de Cramer va nous permettre de calculer la solution du système dans le cas où $\det(A) \neq 0$ en fonction des déterminants des matrices A et A_j.

Théorème 2.5.3: (Règle de Cramer)

Soit le système linéaire $AX = B$ de n équations à n inconnues. Supposons que $\det(A) \neq 0$. Alors l'unique solution du système est donnée par :

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \; x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, \; x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}.$$

Démonstration. Puisque nous avons supposé que $\det(A) \neq 0$, alors la matrice A est inversible et $X = A^{-1}B$ est l'unique solution du système. D'autre part, nous avons vu que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left(\widetilde{A}\right)^t$ où $\widetilde{A}$ est la comatrice de A. Donc

$$X = \frac{1}{\det(A)}\left(\widetilde{A}\right)^t B.$$

Autrement dit, si c_{ij} sont les cofacteurs de A :

$$\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix}
c_{11} & c_{21} & . & . & . & c_{n1} \\
c_{12} & c_{22} & . & . & . & c_{n2} \\
. & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
c_{1n} & c_{2n} & . & . & . & c_{nn}
\end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix}
c_{11}b_1 + c_{21}b_2 + \ldots + c_{n1}b_n \\
c_{12}b_1 + c_{22}b_2 + \ldots + c_{n2}b_n \\
. \\
. \\
. \\
c_{1n}b_1 + c_{2n}b_2 + \ldots + c_{nn}b_n
\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{c_{11}b_1 + c_{21}b_2 + ... + c_{n1}b_n}{\det(A)}, \\
x_2 &= \frac{c_{12}b_1 + c_{22}b_2 + ... + c_{n2}b_n}{\det(A)}; \\
&... \\
x_i &= \frac{c_{1i}b_1 + c_{2i}b_2 + ... + c_{ni}b_n}{\det(A)} \\
&... \\
x_n &= \frac{c_{1n}b_1 + c_{2n}b_2 + ... + c_{nn}b_n}{\det(A)}.
\end{aligned}$$

Or, $c_{1i}b_1 + c_{2i}b_2 + ... + c_{ni}b_n$ est le développement en cofacteurs de $\det(A_i)$ par rapport à sa i-ème colonne. Donc $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$. □

Exemple. *Résolvons le système suivant :*

$$\begin{cases}
x_1 \qquad\qquad + 2x_3 = 6 \\
-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30 \\
-x_1 \quad - 2x_2 + 3x_3 = 8
\end{cases}$$

On a,

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \; A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \\
A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= 44 \;;\; \det(A_1) = -40 \\
\det(A_2) &= 72 \;;\; \det(A_3) = 152.
\end{aligned}$$

La solution est alors

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = -\frac{40}{44} = -\frac{10}{11}, \\
x_2 &= \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}, \\
x_3 &= \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}.
\end{aligned}$$

2.6 Matrices partitionnées

Il est parfois plus intéressant de considérer une matrice sous forme de tableau de matrices élémentaires ou simples. Soit

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

avec $A_{11} \in \mathbb{K}^{m,p}$, $A_{12} \in \mathbb{K}^{m,q}$, $A_{21} \in \mathbb{K}^{n,p}$ et $A_{22} \in \mathbb{K}^{n,q}$. La matrice A est donc formée de $m+n$ lignes et $p+q$ colonnes, $A \in \mathbb{K}^{m+n,p+q}$.

Considérons une autre matrice partitionnée $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ où $B_1 \in \mathbb{K}^{p,1}$ et $B_2 \in \mathbb{K}^{q,1}$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Toutes les sous matrices doivent comporter des dimensions compatibles avec les règles du produit matriciel.

La transposée d'une matrice partitionnée est donnée par :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} A_{11}^t & A_{21}^t \\ A_{12}^t & A_{22}^t \end{pmatrix}.$$

Déterminant d'une matrice partitionnée

Proposition 2.6.1

Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux.

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & * & * & * & * & * \\ 0 & B_2 & * & * & * & * \\ . & 0 & . & * & * & * \\ . & & . & . & * & * \\ . & & & . & . & * \\ 0 & . & . & . & 0 & B_d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det(B_1) \ldots \det(B_d).$$

La démonstration de ce résultat s'effectue par récurrence sur le nombre de blocs.

Inverse d'une matrice partitionnée : Soit $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ une matrice partitionnée en quatre sous-matrices telle que $A = \begin{pmatrix} D & E \\ F & G \end{pmatrix}$ où $D \in \mathbb{K}^{m,m}$ et les dimensions des matrices E, F

et G sont en accord avec celles de A et D. L'inverse de la matrice A est donné par :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} D^{-1} + D^{-1}E(G - FD^{-1}E)^{-1}FD^{-1} & -D^{-1}E(G - FD^{-1}E)^{-1} \\ -(G - FD^{-1}E)^{-1}FD^{-1} & (G - FD^{-1}E)^{-1} \end{pmatrix}$$

si D^{-1} existe.

3

Similitude, décomposition et réduction des matrices

3.1 Similitude et équivalence

3.1.1 Définitions et propriétés élémentaires

Matrices équivalentes : Étant données deux matrices A et B dans $\mathbb{K}^{m,n}$, on dit que A et B sont équivalentes si et seulement s'il existe deux matrices $P \in GL_m(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$.
Matrices semblables : On dit que deux matrices A et B dans $\mathbb{K}^{n,n}$ sont semblables si et seulement s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$, où $GL_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n.
Propriétés :

1. Les relations binaires $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ définies respectivement sur $\mathbb{K}^{m,n}$ et $\mathbb{K}^{n,n}$ par :
$$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \exists P \in GL_m(\mathbb{K}),\ \exists Q \in GL_n(\mathbb{K}) :\ A = PBQ.$$
$$A\mathcal{R}'B \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K}) :\ A = PBP^{-1}.$$
sont des relations d'équivalences.
2. La classe d'équivalences d'une matrice A suivant $\mathcal{R}$ où bien $\mathcal{R}'$ est appelée classe de similitude de A.

3. La notion d'équivalence entre matrices, ne concerne pas seulement les matrices carrées, par contre, la notion de similitude, est strictement réservée aux matrices carrées.
4. Si deux matrices sont semblables, alors elles sont équivalentes. La réciproque n'est pas forcément vraie.
5. Deux matrices sont équivalentes (respectivement semblables) si elles représentent le même morphisme (respectivement endomorphisme) dans des bases éventuellement différentes.
   En effet : On considère deux espaces vectoriels E et F, deux bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}'_0$ de E ainsi que deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ de F. Soient P et Q les matrices de passages correspondantes. Alors si on considère la matrice A d'un morphisme f dans les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$, la matrice B de f dans les nouvelles bases est donnée par la formule du changement de bases $B = Q^{-1}AP \Leftrightarrow A = QBP^{-1}$.
6. Les transformations élémentaires sur une matrice (échanges de lignes ou de colonnes, multiplication d'une ligne par un scalaire et addition à une ligne ou à une colonne d'un multiple des autres) donnent des matrices équivalentes.
   Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ est équivalente à $\begin{pmatrix} a' & b' \\ a & b \end{pmatrix}$ car
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = I_{12}\begin{pmatrix} a' & b' \\ a & b \end{pmatrix} = I_{12}\begin{pmatrix} a' & b' \\ a & b \end{pmatrix} I_2.$$
   et les matrices I_{12} et I_2 sont inversibles.

Proposition 3.1.1

Si A et B sont semblables, alors $\det A = \det B$ et $Tr(A) = Tr(B)$.

3.1.2 Forme de Smith et Décomposition en rang maximal

Forme de Smith :

Théorème 3.1.1

Toute matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ de rang r est équivalente à la matrice S_r qui vaut l'identité sur la sous-matrice carré d'ordre r en haut à gauche et 0 partout autre part. La matrice $S_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$ est dite la forme canonique de Smith de la matrice A.

Démonstration. Soit A une matrice à m lignes, n colonnes, et de rang r. Notons $v_1, v_2, ..., v_n$ les n vecteurs colonnes de A, qui sont des vecteurs dans F. Le rang de A est la dimension de l'espace engendré par $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, qui est inférieure ou égale à n et à m. Nous allons montrer que la matrice A est équivalente à la matrice S_r obtenue en complétant la matrice identité I_r de rang r par des zéros, à droite et en dessous.
Considérons l'application f, de E ($\dim E = n$) dans F ($\dim F = m$) dont la matrice relative aux bases canoniques est A. Nous voulons trouver une base de l'espace de départ

et une base de l'espace d'arrivée, telles que la matrice de A relative à ces bases soit S_r. Comme la dimension de l'image de f est r, la dimension du noyau est $n-r$, d'après le théorème du rang. Soit $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ une base de Im f et $\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-r}\}$ une base de Ker f. Pour tout $i = 1, ..., r$, choisissons un vecteur α_i tel que $f(\alpha_i) = u_i$.
La famille $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_{n-r}\}$ est une base de E.
La famille $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ est une famille libre, on peut la compléter par $m-r$ vecteurs $u_{r+1}, u_{r+2}, ..., u_m$ de sorte que $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, ..., u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, ..., u_m\}$ soit une base de F. Pour $i = 1, ..., r$, l'image de α_i est u_i. Les images de $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-r}$ sont toutes nulles. Donc, la matrice de f relative aux bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de F est S_r. Puisque A et S représentent la même application linéaire f dans des bases différentes, elles sont donc équivalentes, il existe alors deux matrices inversibles P et Q telles que

$$S_r = PAQ \text{ et } A = P^{-1}S_rQ^{-1}.$$

□

Corollaire.

1. $rg(S_r) = rg(A) = r$,
2. $rg(A) = rg(A^t)$.

Exemple. *Déterminer la forme de Smith de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Tout d'abord, on fait en sorte que a_{11} soit égale à 1, soit en échangeant des lignes ou des colonnes, ou en multipliant la première ligne ou la première colonne par un scalaire. Dans notre cas , il suffit d'échanger les lignes 4 et 1.

$$I_{14}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on transforme les éléments de la première ligne en 0. Dans notre cas :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} I_{12}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} I_{13}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

on ramène des 0 sur la première colonne :

$$I_{21}(-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$I_{31}(1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$I_{41}(-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On ramène maintenant des 1 au niveau des coefficients a_{22} et a_{33} :

$$I_2(\frac{1}{3})I_{23}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$I_3(\frac{1}{4})I_{34}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S.$$

D'où,

$$S = I_3(\frac{1}{4})I_{34}I_2(\frac{1}{3})I_{23}I_{41}(-2)I_{31}(1)I_{21}(-1)I_{14}AI_{12}(-2)I_{13}(1) = PAQ.$$

avec

$$\begin{cases} P = I_3(\frac{1}{4})I_{34}I_2(\frac{1}{3})I_{23}I_{41}(-2)I_{31}(1)I_{21}(-1)I_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ Q = I_{12}(-2)I_{13}(1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Maintenant, si A et B sont deux matrices de $\mathbb{K}^{m,n}$ de même rang r, elles seront forcement équivalentes à la même matrice S_r, il existe alors quatre matrices inversibles P_1, P_2, Q_1 et Q_2 telles que :

$$S_r = P_1AQ_1 = P_2BQ_2$$

Donc,

$$B = (P_2^{-1}P_1)A(Q_1Q_2^{-1}).$$

Par conséquent, A et B sont équivalentes. Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 3.1.2

Deux matrices dans $\mathbb{K}^{m,n}$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Corollaire. *Il résulte de ce théorème que :*

1. *Deux matrices dans $\mathbb{K}^{n,n}$ de déterminants non nuls, sont équivalentes.*

2. *Toute matrice est équivalentes à sa matrice transposée.*

Remarque. *Si A et B sont deux matrices dans $\mathbb{K}^{n,n}$ telles que $rg(A) \neq rg(B)$, alors elles ne sont pas équivalentes même si elles ont le même déterminant nul et la même trace.*

Exemple. *Les matrices* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *vérifient* $\det A = \det B = 0$ *et* $TrA = TrB = 2$, *mais elle ne sont pas équivalentes car elles n'ont pas le même rang,* $rg(A) = 1 \neq rg(B) = 2$.

Décomposition de rang maximal

Proposition 3.1.2

Soit $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ telle que $rg(A) = r$ avec $r \leq \min(m,n)$, alors il existe $F \in \mathbb{K}^{m,r}$ et il existe $G \in \mathbb{K}^{r,n}$ telles que

$$A = FG.$$

La décomposition de A en FG est dite la décomposition de rang maximal de A.

Démonstration. En passant à la forme de Smith, on a

$$A = P^{-1} S_r Q^{-1}$$

où $P \in \mathbb{K}^{m,m}$ et $Q \in \mathbb{K}^{n,n}$ sont des matrices inversibles. Comme

$$S_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r \\ 0_{m-r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \end{pmatrix}$$

alors

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} I_r \\ 0_{m-r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \end{pmatrix} Q^{-1} = \left[P^{-1} \begin{pmatrix} I_r \\ 0_{m-r,r} \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \end{pmatrix} Q^{-1} \right] = FG$$

avec

$$F = P^{-1} \begin{pmatrix} I_r \\ 0_{m-r,r} \end{pmatrix} \text{ et } G = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

On a $F \in \mathbb{K}^{m,r}$ et $G \in \mathbb{K}^{r,n}$, il reste à prouver que $rg(F) = rg(G) = r$. Pour cela, il suffit de savoir que la multiplication de P^{-1} par $\begin{pmatrix} I_r \\ 0_{m-r,r} \end{pmatrix}$ revient à ne garder de P^{-1} que les r premières colonnes. Comme P est inversible, on obtient $rg(P) = rg(P^{-1}) = m$, donc les m colonnes de P sont libres, ce qui entraine en particulier que les r premières colonnes sont libres et alors

$$rg\left(P^{-1} \begin{pmatrix} I_r \\ 0_{m-r,r} \end{pmatrix} \right) = rg(F) = r.$$

De la même manière, on montre que $rg(G) = r$. □

Exemple. *Reprenons les matrices A, P, Q et S de l'exemple précédent.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $S = PAQ$ ou bien $A = P^{-1}SQ^{-1}$ avec

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où,

$$\begin{aligned} A = P^{-1}SQ^{-1} = [P^{-1}S]\,Q^{-1} &= \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= FG. \end{aligned}$$

Remarque.

1. *La décomposition de rang maximal n'est pas unique.*
2. *Pour montrer que $rg(F) = r$ on pouvait utiliser la propriété suivante, dite inégalité de Sylvester :*

$$\forall A \in \mathbb{K}^{m,r}, \forall B \in \mathbb{K}^{r,n},\ rg(A) + rg(B) - m \leq rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B)).$$

Dans notre cas on aura,

$$\begin{aligned} rg(P^{-1}) + rg\begin{pmatrix} I_r \\ 0_{m-r,r} \end{pmatrix} - m &\leq rg\left(P^{-1}\begin{pmatrix} I_r \\ 0_{m-r,r} \end{pmatrix}\right) \\ &\leq \min\left(rg(P^{-1}), rg\begin{pmatrix} I_r \\ 0_{m-r,r} \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

D'où,

$$m + r - m \leq rg\left(P^{-1}\begin{pmatrix} I_r \\ 0_{m-r,r} \end{pmatrix}\right) \leq \min(m, r)$$

Ainsi,

$$rg\left(P^{-1}\begin{pmatrix} I_r \\ 0_{m-r,r} \end{pmatrix}\right) = r.$$

3.2 Réduction d'une matrice carrée

3.2.1 Diagonalisation

Définition 3.2.1

Soit $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ une matrice carrée d'ordre n, on dit que A est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

On peut dire aussi que A est diagonalisable si sa classe d'équivalence suivant la relation $\mathcal{R}'$ contient au moins une matrice diagonale où bien l'endomorphisme $f : E \to E$ représenté par la matrice A peut s'exprimer en fonction d'une matrice diagonale suivant une nouvelle base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de E.
Donc, diagonaliser une matrice carrée A revient à déterminer une nouvelle base $\mathcal{B}$ de sorte que A soit diagonale suivant la base $\mathcal{B}$.
La détermination de cette base repose essentiellement sur deux notions fondamentales appelées respectivement valeur propre et de vecteur propre.
Valeurs propres – Vecteurs propres :

Définition 3.2.2

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n dans $\mathbb{K}^{n,n}$. Soient λ un scalaire dans $\mathbb{K}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne **non nulle**. On dit que λ est une valeur propre de A et que X est un vecteur propre associé la valeur propre λ si λ et X sont liés par la relation $AX = \lambda X$.
L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le spectre de A, on le note $\sigma(A)$.
Le sous-espace vectoriel E_λ engendré par les vecteurs propres associés à la valeur propre λ est appelé sous-espace propre.

L'égalité $AX = \lambda X$ équivaut au système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

Si les inconnues sont seulement x_1, x_2, ..., x_n ce sera un système linéaire dont on trouverait les solutions par la règle de Cramer.

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

ou bien $(A-\lambda I_n)X = 0$. C'est un système linéaire homogène dont on cherche les solutions non nulles. Pour que ce système ait une solution non nulle, il faut et il suffit que le déterminant de la matrice $A-\lambda I_n$ soit nul, autrement la solution unique du système de Cramer serait le vecteur nul.

Définition 3.2.3

Le déterminant de la matrice $A-\lambda I_n$ est un polynôme en λ de degré n appelé le polynôme caractéristique de la matrice A, on le note $P_A(\lambda)$.

Formellement, on écrit :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \det(A) + \ldots + (-1)^{n-1}Tr(A)\lambda^{n-1} + (-1)^n\lambda^n, \end{aligned}$$

Théorème 3.2.1

λ est une valeur propre de A si et seulement si $\det(A-\lambda I_n) = 0$.

Les valeurs propres de A sont donc les nombres λ tels que $P_A(\lambda) = 0$.

Définition 3.2.4

Soit λ une valeur propre pour une matrice A. On dit que λ est une valeur propre de multiplicité k (avec $k \in \mathbb{N}$) si λ est une solution d'ordre k pour le polynôme caractéristique de A, c'est à dire

$$P_A(X) = (X-\lambda)^k Q(X) \text{ avec } Q(\lambda) \neq 0.$$

Exemple.

1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda)-bc = \lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)$.

2) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ \dots & . & . & . & . & . \\ \dots & . & . & . & . & . \\ \dots & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \\
P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & . & . & . & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}, \\
P_A(\lambda) &= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda).
\end{aligned}
$$

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -8 & -3 & -4 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $P_A(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$. *Donc* $\lambda = 2$ *est une valeur propre simple de* A *et* $\lambda = 1$ *est une valeur propre double de la matrice* A. *Cherchons les vecteurs propres de* A *associés aux valeurs propres* $\lambda = 2$ *et* $\lambda = 1$.

Si $\lambda = 2$, *on a* $AX = 2X$ *ou* $(A - 2I_3)X = 0$ *avec* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$$
\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -8x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}
$$

Le calcul montre que les vecteurs propres sont les multiples de $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}^t$.

Si $\lambda = 1$, *on a* $AX = X$ *ou* $(A - I_3)X = 0$.

$$
\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -8x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}
$$

Le calcul montre que les vecteurs propres sont engendrés par les vecteurs indépendants $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4) Si λ *est une valeur propre complexe de la matrice* A, *alors son conjugué complexe* $\overline{\lambda}$ *est aussi une valeur propre de* A *et elles sont de même multiplicité. Les vecteurs propres pour* λ *s'obtiennent en conjuguant les vecteurs propres pour* $\overline{\lambda}$.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = (e^{i\theta} - \lambda)(e^{-i\theta} - \lambda).$$

$\lambda = e^{i\theta}$, $\begin{cases} -i\sin\theta x_1 - \sin\theta x_2 = 0 \\ \sin\theta x_1 - i\sin\theta x_2 = 0 \end{cases}$. *Les vecteurs propres de A associés à la valeur propre $\lambda = e^{i\theta}$ sont les multiples de* $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

Corollaire. *Une matrice carrée A est inversible si et seulement si 0 ne soit pas une valeur propre de A.*

Une matrice carrée $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ admet toujours des valeurs propres à condition que le corps $\mathbb{K}$ soit algébriquement clos. Rappelons qu'un corps $\mathbb{K}$ est dit algébriquement clos si toutes les racines de tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ sont dans $\mathbb{K}$.

Exemple. *Le corps des nombres complexe $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.*

On sait d'après le théorème de d'Alembert-Gauss que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n admet exactement n racines distinctes ou multiples dans $\mathbb{C}$, ceci montre que toute matrice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ admet n valeurs propre comptées avec leurs multiplicités (vu que les valeurs propres de A sont les racines de P_A). Le nombre des valeurs propres distinctes de A est toujours inférieur ou égal à n. Formellement, on écrit

$$P_A(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^{m} (x - \lambda_i)^{k_i}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ désignent les valeurs propres distinctes de A, de multiplicités respectives $k_1, k_2, ..., k_m$ telles que $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$.

Le corps $\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos. Un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ peut ne pas avoir des des racines dans $\mathbb{R}$. C'est le cas dans l'exemple suivant :

$$P(X) = X^2 + 1$$

Dans le cas où un polynôme $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \in \mathbb{R}[X]$ admet n racines dans $\mathbb{R}$ distinctes ou multiples, on dit que P est scindé dans $\mathbb{R}$. C'est à dire qu'il se factorise dans $\mathbb{R}$ sous la forme

$$P(x) = a_n \prod_{i=1}^{m} (x - \alpha_i)^{k_i}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ désignent les racines distinctes de P, de multiplicités respectives $k_1, k_2, ..., k_m$ tels que $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$. D'une manière générale, nous avons la définition suivante :

Définition 3.2.5

Un polynôme P dans $\mathbb{K}[X]$ de degré n est dit scindé dans $\mathbb{K}$ s'il admet n racines (pas nécessairement distinctes) dans $\mathbb{K}$.

Proposition 3.2.1

Pour qu'une matrice A dans $\mathbb{K}^{n,n}$ admette n valeurs propres dans $\mathbb{K}$ il faut et il suffit que le polynôme caractéristique P_A associé à A soit scindé dans $\mathbb{K}$.

Proposition 3.2.2

Un vecteur propre associé à une valeur propre n'est jamais unique.

En effet, soit u un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Soit v un vecteur non nul dans $\mathbb{K}u$. On a $v = \alpha u$ avec $\alpha \neq 0$:

$$Av = A(\alpha u) = \alpha Au = \alpha\lambda u = \lambda(\alpha u) = \lambda v.$$

Ainsi, tout vecteur non nul colinéaire avec u est un vecteur propre associé à λ.

Proposition 3.2.3

Deux matrices semblables ont toujours le même spectre.

En effet, soit A et B deux matrices semblables, il existe alors une matrice inversible P telle que :

$$B = P^{-1}AP$$

Alors;

$$\begin{aligned}
\lambda \in \sigma(B) \quad &\iff \quad \det(B - \lambda I) = 0 \\
&\iff \quad \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = 0 \\
&\iff \quad \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = 0 \\
&\iff \quad \det P^{-1} \det(A - \lambda I) \det P = 0 \\
&\iff \quad \det(A - \lambda I) = 0 \\
&\iff \quad \lambda \in \sigma(A).
\end{aligned}$$

Proposition 3.2.4

Un vecteur propre n'est jamais associé à deux valeurs propres distinctes.

En effet, soient λ, μ deux valeurs propres distinctes d'une matrice A, supposons que u est un vecteur propre associe à λ et μ à la fois. Alors

$$Au = \lambda u \text{ et } Au = \mu u,$$

ce qui revient à dire que $\lambda u = \mu u$ où bien $(\lambda - \mu)u = 0$. Vu que $\lambda \neq \mu$, on obtient $u = 0$ or un vecteur propre n'est jamais nul. Par conséquent, λ et μ ne peuvent pas avoir un vecteur propre commun.

Corollaire. *Soit $\lambda, \mu \in \sigma(A)$ telles que $\lambda \neq \mu$, alors $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$.*

Soit u, v deux vecteurs propres de A associés respectivement à deux valeurs propres distinctes λ et μ, alors u et v sont forcément linéairement indépendants. Car : soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

tels que $\alpha u + \beta v = 0 ... (\star)$, alors

$$\begin{aligned} A(\alpha u + \beta v) = A(0) &\Leftrightarrow \alpha \lambda u + \beta \mu v = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha \lambda u + \mu(-\alpha u) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha(\lambda - \mu) u = 0 \\ &\Rightarrow \alpha = 0 \text{ et } \beta = 0 \text{ d'après } (\star). \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'on a trois vecteurs propres v_1, v_2 et v_3 correspondants à des valeurs propres distinctes λ_1, λ_2 et λ_3, alors les trois vecteurs sont aussi linéairement indépendants. En effet, soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 ... (\star\star)$, alors

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) = A(0) &\Leftrightarrow \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \alpha_3 \lambda_3 v_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1) v_3 = 0 \\ &\Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \text{ d'après le premier cas} \\ &\Rightarrow \alpha_1 = 0 \text{ d'après } (\star\star). \end{aligned}$$

D'une manière générale, nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.2.2

Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.

Quelques théorèmes sur la diagonalisation des matrices carrées :

Théorème 3.2.3

Une matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ est diagonalisable si et seulement si elle admet n vecteurs propres linéairement indépendants.

Théorème 3.2.4

Soit λ une valeur propre d'une matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ de multiplicité k ($k \in \mathbb{N} :\ 1 \leq k \leq n$) et E_λ le sous espace-propre associé à λ, alors $1 \leq \dim E_\lambda \leq k$.

Démonstration. Supposons que A est la matrice associée à un endomorphisme f défini sur un espace vectoriel E de dimension n. Vu que λ est une valeur propre de A, alors E_λ n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit $d = \dim E_\lambda$, alors $1 \leq d \leq n$.

— Si $d = n$, alors $E = E_\lambda$ et $A = \lambda I_n$ dont le polynôme caractéristique est $P_A(X) = (X - \lambda)^n$. D'où, λ est une valeur propre de A de multiplicité n ce qui montre que la dimension de E_λ est égale à l'ordre de multiplicité de λ, donc l'inégalité souhaitée est vraie.

— Si $d < n$, soit $\{e_1, e_2, ..., e_d\}$ une base de E_λ . D'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $\{e_{d+1}, e_{d+2}, ..., e_n\}$ tels que $\{e_1, e_2, ..., e_d, e_{d+1}, ..., e_n\}$ soit une base de E. Alors la matrice A dans cette base sera de la forme $\begin{pmatrix} \lambda I_d & B \\ 0_{n-d,n-d} & C \end{pmatrix}$. D'après les formules de développement des déterminants, il vient immédiatement que $P_A(X) = (X - \lambda)^d Q(X)$, ce qui prouve que λ est une racine de $P_A(X)$ de multiplicité au moins égal à d, d'où $1 \leq d \leq k$.

□

Théorème 3.2.5

Soit $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ une matrice carrée admettant p valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ dans $\mathbb{K}$ de multiplicités respectives $k_1, k_2, ..., k_p$. Alors, A est diagonalisable si et seulement si

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + ... + \dim E_{\lambda_p} = n.$$

Corollaire. *Sous les hypothèses du Théorème 3.2.5, si $P_A(X)$ est scindé et $\dim E_{\lambda_i} = k_i$ avec $i = 1, ..., p$ alors A est diagonalisable.*

3.2.2 Polynôme annulateur et polynôme minimal

Polynôme annulateur :

Définition 3.2.6

Soit $P(X) = a_0 + a_1X + ... + a_mX^m$ un polynôme dans $\mathbb{K}[X]$.

— Si $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, on note $P(A)$ la matrice dans $\mathbb{K}^{n,n}$ définie par :

$$P(A) = a_0I_n + a_1A + ... + a_mA^m.$$

— Un polynôme est dit annulateur pour la matrice A si $P(A) = 0$.

Exemple.
1. *Si A est une matrice idempotente (c'est à dire $A^2 = A$), alors le polynôme $P(X) = X(X-1)$ est annulateur pour A.*
2. *Le polynôme $X - 1$ est annulateur pour la matrice identité.*
3. *Le polynôme $(X-1)^3(X+2)^2$ est annulateur pour la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.*

Remarque. *Bien que la multiplication des matrices ne soit pas commutative, on a cependant :*

$$P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$$

pour tout couple de polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

Cela tient au fait que les différentes puissances de A commutent entre elles.

Proposition 3.2.5

Soit $P(X)$ un polynôme annulateur pour une matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Alors les valeurs propres de A figurent parmi les racines de P.

Démonstration. Si λ est une valeur propre de A, il existe un vecteur non nul v tel que $Av = \lambda v$ et $A^k v = \lambda^k v \forall k \in \mathbb{N}$. Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_m X^m$ un polynôme annulateur de A ($P(A) = 0$), c'est à dire

$$a_0 I_n + a_1 A + ... + a_m A^m = 0.$$

En appliquant cette relation au vecteur v on trouve :

$$\begin{aligned} a_0 v + a_1 Av + ... + a_m A^m v = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a_0 v + a_1 \lambda v + ... + a_m \lambda^m v = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (a_0 + a_1 \lambda + ... + a_m \lambda^m) v = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad P(\lambda) v = 0 \end{aligned}$$

Or $v \neq 0$, donc $P(\lambda) = 0$. □

Théorème 3.2.6

Soit A une matrice carrée d'ordre n dans $\mathbb{K}^{n,n}$. Il existe toujours un polynôme annulateur pour A (autre que le polynôme nul).

En effet, on sait que la dimension de la classe $\mathbb{K}^{n,n}$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est n^2, donc toute famille de $n^2 + 1$ matrices est liée. En particulier les matrices $I_n, A, A^2, ..., A^{n^2}$ sont liées. Il existe donc $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n^2} \in \mathbb{K}$ non tous nuls, tels que :

$$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_{n^2} A^{n^2} = 0$$

ce qui veut dire que le polynôme

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_{n^2} X^{n^2}$$

est annulateur pour A.

Théorème 3.2.7: (Théorème de Cayley Hamilton)

Pour toute matrice carrée $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, le polynôme caractéristique de A est annulateur pour A.

Théorème 3.2.8: (Théorème de polynôme annulateur)

Une matrice A est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur de A, scindé et n'ayant que des racines simples.

Corollaire. *Toute matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ admettant n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$ est diagonalisable.*

Polynôme minimal :

Définition 3.2.7

On appelle polynôme minimal de A et on note π_A, le polynôme annulateur de A unitaire [a] de plus petit degré.

a. unitaire veut dire que le coefficient du terme de plus haut degré vaut ± 1.

Remarque. *Tout polynôme P multiple de π_A est annulateur pour A.*

En effet :
$$P(X) = Q(X)\pi_A(X) \Rightarrow P(A) = Q(A)\pi_A(A) = 0.$$

Proposition 3.2.6

Les polynômes annulateurs de A sont tous des multiples de π_A.

Démonstration. Soit P un polynôme annulateur pour A. Effectuant la division euclidienne de P par π_A, on a :
$$\begin{cases} P(X) = Q(X)\pi_A(X) + R(X) \\ R = 0 \text{ ou bien } \deg R < \deg \pi_A \text{ si } R \neq 0. \end{cases}$$
Puisque $P(A) = 0$ et $\pi_A(A) = 0$, on a $R(A) = 0$. Donc R est un annulateur de A. Mais π_A est l'annulateur de degré le plus petit, ainsi $R \neq 0$ est impossible. Donc, $R = 0$ et π_A divise P. □

Exemple. *Soit la matrice à coefficients réels* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Son polynôme caractéristique est* $P_A(X) = (1-X)^3$.

Pour déterminer le polynôme minimal de A on fait les remarques suivantes :
- *il admet 1 comme unique racine,*
- *il divise P_A,*
- *il est unitaire.*

Il n'y a donc que trois possibilités $(1-X)$ ou $(1-X)^2$ ou $(1-X)^3$. Or la matrice A est différente de I_3, donc $(1-X)$ n'est pas un polynôme annulateur de A. Pour conclure, il suffit alors de calculer $(I-A)^2$. On trouve la matrice nulle donc $\pi_A(X) = (1-X)^2$.

Proposition 3.2.7

Une matrice A dans $\mathbb{K}^{n,n}$ est diagonalisable si et seulement si toutes les racines de son polynôme minimal sont simples et sont dans $\mathbb{K}$.

Exemple.
1. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *est diagonalisable car*
$$\pi_A(X) = (X+2)(X-1).$$
2. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *n'est pas diagonalisable car* $\pi_A(X) = (1-X)^2$.

Ce dernier exemple, nous entraine à poser la question suivantes : Pour une matrice A non diagonalisable, quelle est la forme la plus simple que l'on peut obtenir pour une matrice semblable à A ?

3.2.3 Trigonalisation (Méthode de Jordan)

Décomposition de Jordan :

Si une matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ ne possède pas n vecteurs propres linéairement indépendants, ce qui peut se produire si des valeurs propres de A sont de multiplicité supérieure à 1, il n'est pas alors possible de diagonaliser A, on peut cependant écrire A sous forme triangulaire par bloc de sous-matrices en procédant de la manière suivante. Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ les valeurs propres de A de multiplicités respectives $m_1, m_2, ..., m_s$ et soit $n_1, n_2, ..., n_s$ le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants correspondants à ces valeurs propres, $n_i \leq m_i$, $i = 1, 2, ..., s$.

Pour chaque valeur propre λ_i, on dit que $X_{i,r}$ est un vecteur propre généralisé d'ordre r de A si

$$(A - \lambda_i)^r X_{i,r} = 0 \text{ et } (A - \lambda_i)^{r-1} X_{i,r} \neq 0.$$

Ainsi, les vecteurs propres de A sont considérés comme des vecteurs propres généralisés de A d'ordre 1. Un vecteur propres généralisé d'ordre $r \geq 2$ correspondant à la valeur propre λ_i peut être obtenu à partir des vecteurs propres généralisés d'ordre $1, 2, ..., r-1$ par :

$$\begin{array}{rcl} AX_{i,1} & = & \lambda_i X_{i,1} \\ AX_{i,2} & = & \lambda_i X_{i,2} + X_{i,1} \\ & & ... \\ AX_{i,r} & = & \lambda_i X_{i,r} + X_{i,r-1} \end{array}$$

la suite $X_{i,1}, X_{i,2}, ..., X_{i,r}$ forme une chaine de Jordan de longueur r associée à la valeur propre λ_i et au vecteur propre $X_{i,1}$. On montre :

- que l'on peut toujours trouver m_i vecteurs propres généralisés de A linéairements indépendants pour chaque valeur propre λ_i ;

- que ces m_i vecteurs propres généralisés peuvent être générés par n_i chaines de Jordan dont la somme des longueurs est égale à la multiplicité de λ_i ;

- que les n vecteurs propres généralisés relatifs à toutes les valeurs propres de A forment une base dans laquelle la matrice A est représentée par une forme canonique de Jordan telle que :

$$J = diag(J(\lambda_1), J(\lambda_2), ..., J(\lambda_s))$$

$$J(\lambda_i) = diag(J_1(\lambda_i), J_2(\lambda_i), ..., J_{n_i}(\lambda_i))$$

et où les blocs de Jordan $J_k(\lambda_i)$ $(k = 1, ..., n_i)$ sont des matrices carrées de la forme :

$$J_k(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & & & . & . & & & & . \\ . & & & & . & . & & & . \\ . & & & & & . & . & & . \\ . & & & & & & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & \lambda_i & 1 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

dont l'ordre est égal à la longueur de la chaine de Jordan à laquelle $J_k(\lambda_i)$ est associé. Si l'on désigne par P la matrice dont les colonnes sont formées des vecteurs propres généralisés linéairements indépendants d'une matrice A quelconque, on peut donc écrire :

$$P^{-1}AP = J \text{ et } A = PJP^{-1}.$$

Exemple. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Les valeurs propres de* A *sont* $\lambda_1 = 2$ *et* $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$, *les vecteurs propres respectivement associés sont* $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Comme la matrice* A *ne possède que deux vecteurs propres linéairement indépendants, on ne peut la diagonaliser. On vérife que* X_1 *est le seul vecteur propre généralisé associé à* $\lambda_1 = 2$. *Par contre, on peut construire un vecteur propre généralisé d'ordre 2 associé à* $\lambda_2 = 4$. *On doit donc résoudre* $(A - \lambda_2 I_3)X = X_2$, *alors*

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 1 \\ -2x - 2y = -1 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

soit par exemple $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et la matrice* $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *telle que la forme canonique de Jordan de* A *est donnée par :*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Théorème 3.2.9

Soit $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, P_A son polynôme caractéristique et π_A son polynôme minimal.

1. Si $P_A(X) = (X-\lambda)^n$ et $\pi_A(X) = (X-\lambda)^m$ avec $m \leq n$ et $\dim E_\lambda = k$, alors la matrice A est semblable à la matrice J (dite réduite de Jordan) donnée par :

$$J = J(\lambda) = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_k(\lambda) \end{pmatrix}$$

où chaque $J_i(\lambda)$ est un λ-bloc de Jordan et l'ordre du plus grand bloc est égale à $m = \deg \pi_A$

2. Si $P_A(X) = (X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}...(X-\lambda_s)^{m_s}$ alors la réduite de Jordan associée à A est la matrice J donnée par

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

où chaque $J(\lambda_i)$ est de taille m_i. De plus, pour chaque valeur propre λ_i , le nombre k_l de sous-blocs de Jordan dans $J(\lambda_i)$ d'ordre l est égale à

$$k_l = 2\dim\ker((A-\lambda_i I)^l) - \dim\ker((A-\lambda_i I)^{l-1}) + \dim\ker((A-\lambda_i I)^{l+1}) \quad (3.1)$$

Exemple. *1. Soit $A \in \mathbb{R}^{6,6}$ une matrice réelle d'ordre 6 telle que :*

$$P_A(\lambda) = (\lambda-4)^6,\ \pi_A(\lambda) = (\lambda-4)^4 \ \textit{et}\ \dim E_4 = 3.$$

Alors on a une seule valeur propre égale à 4. Comme $\dim E_4 = 3$, il existe alors trois sous-blocs de Jordan, et comme $\deg \pi_A = 4$, alors un des sous-blocs est d'ordre 4, mais ceci entraine que forcément les autres blocs sont d'ordre 1. Ainsi, la réduite de Jordan associée à A est

$$J = \left(\begin{array}{cccc|c|c} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

2. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & -16 & -4 & -15 \\ -1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 10 \\ 2 & 0 & 2 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -12 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A *est* $P_A(X) = (X-2)^5(X-3)$.
Les espaces propres associés sont :

$$\begin{array}{l} E_2 =< (1,0,0,0,1,0),(0,0,1,0,0,0) > \\ E_3 =< (0,5,-1,0,0,1) > \end{array}$$

($< u, v >$ *désigne le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs* u *et* v).
On sait alors que A *est semblable à une matrice de la forme*

$$J = \begin{pmatrix} J(2) & 0 \\ 0 & J(3) \end{pmatrix}$$

sachant que $J(2)$ *est de taille* 5 *et* $J(3)$ *est de taille* 1.
Il est clair alors que $J(3) = (3)$. *Il reste à déterminer* $J(2)$. *Comme* $\dim E_2 = 2$, *on déduit que dans* $J(2)$ *il existe deux sous-blocs de Jordan, mais comme l'ordre de* $J(2)$ *est 5 alors les ordres des deux sous-blocs sont soit 2 et 3, soit 1 et 4. Calculons, par la formule (3.1), le nombre de sous-blocs d'ordre 1. On a*

$$\begin{array}{rcl} k_1 & = & 2\dim\ker(A-2I) - \dim\ker((A-2I)^0) + \dim\ker((A-2I)^2) \\ & = & 2\dim E_2 - \dim\ker I + \dim\ker((A-2I)^2) \\ & = & 4 - 0 + \dim\ker((A-2I)^2). \end{array}$$

Calculons $\ker((A-2I)^2)$. *On a :*

$$\ker((A-2I)^2) = \{v \in \mathbb{R}^6 : \ (A-2I)^2 v = 0\}$$

avec

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -8 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, $\ker((A-2I)^2) = \{0\}$. *D'où, il existe eventuellement 4 sous blocs de Jordan d'ordre 1 associés à 2, ceci contredit le fait que* $J(2)$ *contient deux sous blocs de Jordan. Ainsi, les sous-blocs de Jordan associés à la valeur propres 2 sont d'ordre 3 et 2 respectivement et la matrice de Jordan associée à* A *est alors :*

$$J = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Pour trouver la matrice de passage P, *il faut déterminer des vecteurs* $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ *avec*

$$\begin{array}{l} Av_1 = 2v_1, \ Av_2 = v_1 + 2v_2, \ Av_3 = v_2 + 2v_3, \\ Av_4 = 2v_4, \ Av_5 = v_4 + 2v_5, \ Av_6 = 3v_6 \end{array}$$

v_1, v_4 et v_6 sont les vecteurs propres déjà trouvés, donc

$$v_1 = (1,0,0,0,1,0),\ v_4 = (0,0,1,0,0,0)\ \textit{et}\ v_6 = (0,0,-5,6,0,1)$$

après calcul on trouve :

$$v_2 = (3,-1,0,0,2,0),\ v_3 = (0,1,1,0,0,0)\ \textit{et}\ v_5 = (2,0,0,1,-2,0)$$

et alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2.4 Décomposition polaire et valeurs singulières

La décomposition polaire est l'équivalent matriciel de l'écriture $z = re^{i\theta}$ des nombres complexes :

Définition 3.2.8

Toute matrice $A \in K^{m,n}$ peut être écrite sous la forme $A = HU$ où $H = (AA^*)^{1/2}$ est une matrice symétrique définie positive et U est une matrice unitaire. Cette décompotion est unique.

Vérifions facilement que la matrice AA^* est :

- symétrique : $(AA^*)^* = (A^*)^* A^* = AA^*$,

- définie positive : $\forall X \in \mathbb{C}^n$, $\langle AA^*X, X\rangle = \langle A^*X, A^*X\rangle = \|A^*X\|^2 \geq 0$.

AA^* possède donc toujours m vecteurs propres linéairement indépendants (qui peuvent être choisis orthogonaux) relatifs aux valeurs propres positives $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, elle peut alors être décomposée en $AA^* = SDS^*$ où S est unitaire et $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$. $H = (AA^*)^{1/2} = SD^{1/2}S^*$ où $D^{1/2} = diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_m})$, puisque

$$H^2 = HH = SD^{1/2}S^*SD^{1/2}S^* = SDS^* = AA^*.$$

Les valeurs propres positives $s_1, s_2, ..., s_n$ de la matrice $(A^*A)^{1/2}$ sont appelées les valeurs singulières de la matrice A. On montre les résultat suivant :

Théorème 3.2.10

Toute matrice $A \in K^{m,n}$ admet une décomposition en valeurs singulières de la forme :

$$A = UDV^* \tag{3.2}$$

où U et V sont des matrices unitaires respectivement d'ordre m et d'ordre n et où $D = (d_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ est une matrice $m \times n$ telle que $d_{ii} = \sqrt{\lambda_i}, i = 1, ..., m$ et $d_{ij} = 0$ ailleurs. Les colonnes des matrices U et V formées respectivement à partir des composantes des vecteurs propres orthonormés de AA^* et A^*A. Les valeurs propres non nulles de ces deux matrices coïncident.

Exemple. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *On calcul :*

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $(AA^*)^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Les valeurs singulières de la matrice* A *sont donc* $s_1 = \sqrt{2}$ *et* $s_2 = 1$. *Les vecteurs propres orthonormés correspondants sont* $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *de sorte que* $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'autre part, $AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *dont les valeurs propres sont* $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ *et* $\lambda_3 = 2$ *et les vecteurs propres orthonormés associés sont :*

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \; ; \; Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; Y_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Finalement, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4

Pseudo-inverse d'une matrice et inverse généralisé

Le but de ce chapitre est de généraliser la notion d'inverse d'une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1 Inverse généralisé

La solution du problème linéaire

$$AX = B \text{ où } A \in \mathbb{K}^{m,n}, \; X \in \mathbb{K}^n \text{ et } B \in \mathbb{K}^m, \tag{4.1}$$

peut être exprimée en général de la façon suivante :

Proposition 4.1.1

Si $M \in \mathbb{K}^{n,m}$ satisfait à

$$AMA = A \tag{4.2}$$

alors (4.1) possède une solution si et seulement si

$$AMB = B.$$

Dans ce cas, toutes les solutions de (4.1) s'écrivent sous la forme :

$$X = MB + (I_n - MA)Y$$

où Y est un élément quelconque de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. En effet, d'une part, s'il existe au moins un vecteur X tel que $AX = B$, alors

$$B = AX = AMAX = AM\,(AX) = AMB,$$

et la condition est nécessaire.

D'autre part, si $AMB = B$ alors les éléments $X = MB + (I_n - MA)Y$, $Y \in K^n$, vérifient la relation

$$\begin{aligned} AX &= AMB + A(I_n - MA)Y = AMB + AY - AMAY \\ &= AMB + AY - AY = AMB = B \end{aligned}$$

et sont donc des solutions du système (4.1). □

Remarque. *1) $I_n - MA$ est une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$ dont l'image est précisément le noyau* $\ker(A)$ *de la matrice A :*

$$\forall Y \in \ker(A) : (I_n - MA)Y = Y,$$
$$\forall Y \notin \ker(A) : A(I_n - MA)Y = 0.$$

2) Si la matrice A possède un inverse à gauche A_g^{-1} telle que $A_g^{-1}A = I_n$, ce qui est possible si $m \geq n$ et $rang(A) = n$, alors en posant $M = A_g^{-1}$ on en déduit que $AMA = A$ et que le système (4.1) admet une solution si et seulement si $AA_g^{-1}B = B$ ou bien $(I_m - AA_g^{-1})B = 0$, qui représente la condition de compatibilité du système d'équations linéaires (4.1). Dans ce cas la solution est donnée par :

$$X = A_g^{-1}B.$$

De même si A admet un inverse à droite A_d^{-1} telle que $AA_d^{-1} = I_m$, ce qui est possible si $m \leq n$ et $rang(A) = m$, alors en posant $M = A_d^{-1}$ on en déduit que $AMA = A$ et que le système (4.1) est toujours soluble et que toutes les solutions peuvent s'écrire sous la forme $X = A_d^{-1}B$ pour un certain inverse à droite de la matrice A.

Si A est carrée, $m = n$, inversible, alors son inverse $A^{-1} = A_g^{-1} = A_d^{-1}$ est unique et la solution unique du système (4.1) est $X = A^{-1}B$.

3) Cependant, une matrice M vérifiant (4.2) peut exister même lorsque A ne possède ni inverse à gauche ni inverse à droite.

Définition 4.1.1

On appelle inverse généralisé de la matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ toute matrice $A^G \in \mathbb{K}^{n,m}$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} AA^GA = A \\ A^GAA^G = A^G \end{array} \right. \tag{4.3}$$

On montre que toute matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ admet au moins une matrice inverse généralisée $A^G \in K^{n,m}$. Celle-ci est unique si et seulement si $A = 0$ ou A est carrée et non singulière. Dans ce dernier cas, on a évidemment $A^G = A^{-1}$.

En vertu de la proposition précédente, on peut exprimer toutes les solutions d'un système d'équations linéaires en fonction d'une matrice inverse généralisée.

Exemple. *Soit le système linéaire :*

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 = b_1 \\ 0x_1 + 0x_2 = b_2 \end{cases}$$

soit $AX = B$ *où* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Puisque $rang(A) = 1 < 2$, *la matrice* A *ne possède ni inverse à gauche ni inverse à droite. On vérife cependant facilement que* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *satisfait aux conditions* (4.3) *et constitue donc un inverse généralisé de la matrice* A. *On a bien* $AMB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B = B$, *soit comme attendu* $b_2 = 0$. *Donc la solution générale du système est, tenant compte de* $b_2 = 0$ *:*

$$\begin{aligned} X &= MB + (I_n - MA)Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

où $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *est un élément quelconque de* $\mathbb{R}^2$. *D'où,* $X = \begin{pmatrix} b_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *quelque soit* $y_2 \in \mathbb{R}$.

Interprétation de l'inverse généralisé d'une matrice : Interprétons la matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ comme les composantes d'une application linéaire A défine de E dans F où E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels tels que $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = m$, on montre que A^G représente les composantes d'une application linéaire telle que :

$$\begin{cases} Im(A) \oplus \ker(A^G) = F \\ \ker(A) \oplus Im(A^G) = E \end{cases} \tag{4.4}$$

c'est à dire le noyau de A^G est un supplémentaire de $Im(A)$ dans F et l'image de A^G est un supplémentaire de $\ker(A)$ dans E.

Inversement, tout couple de supplémentaires E' et F' respectivement dans E et F vérifiant (4.4) :

$$\begin{cases} Im(A) \oplus F' = F \\ \ker(A) \oplus E' = E \end{cases} \tag{4.5}$$

définit une application linéaire donc une matrice A^G inverse généralisé de la matrice A.

4.2 Inverse de Moore-Penrose

Parmi tous les sous-espaces vectoriels supplémentaires vérifiant E' et F' vérifiant (4.5), on porte une attention particulière au cas où E' et F' sont les compléments orthogonaux de $\ker(A)$ et $Im(A)$, c'est à dire :

$$\begin{cases} Im(A) + F' = F, \ \ker(A) + E' = E, \\ \ker(A) \cap E' = \{0\}, \ Im(A) \cap F' = \{0\}, \\ u.u' = 0 \text{ et } v.v' = 0 \\ \forall u \in \ker(A), \ \forall v \in Im(A), \ \forall u' \in E', \ \forall v' \in F' \end{cases}$$

Ce choix définit de façon unique une application linéaire A^G, inverse généralisé de A, appelée l'inverse de Moore-Penrose de la matrice A, noté $A^\dagger$.

Définition 4.2.1

A toute matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, on peut associer une matrice unique $A^\dagger \in \mathbb{K}^{n,m}$ appelée pseudo-inverse ou inverse de Moore-Penrose de A telle que :

$$\begin{cases} AA^\dagger A = A \\ A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger \\ (AA^\dagger)^* = AA^\dagger \\ (A^\dagger A)^* = A^\dagger A \end{cases} \quad (MP)$$

Remarque.

1. *$Im(A^\dagger) = Im(A^*) = Im(A^\dagger A) = Im(A^* A)$, $Im(A) = Im(AA^\dagger) = Im(AA^*)$.*
2. *$AA^\dagger$ est le projecteur orthogonal sur $Im(A)$ dans $\mathbb{K}^n$ et $A^\dagger A$ est le projecteur orthogonal sur $Im(A^*) = \ker(A)^\perp$ dans $\mathbb{K}^m$.*

En effet, puisque $A^\dagger$ vérifie le système (MP), on a :

$$AA^\dagger A = A \Longrightarrow A^\dagger AA^\dagger A = A^\dagger A \Longrightarrow (A^\dagger A)^2 = A^\dagger A,$$

ce qui signifie que $A^\dagger A$ est un projecteur puisqu'il est en plus symétrique, il est un projecteur orthogonal sur son image $Im(A^\dagger A)$.

De la même façon, on montre que $AA^\dagger$ est le projecteur orthogonal sur $Im(A)$.

Exemple.

1) Reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Afin de déterminer l'inverse de Moore-Penrose de A, écrivons $A^\dagger = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont des constantes à déterminer. En exprimant *les conditions (MP), on a :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = 1$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow bc = d$$

$$\begin{pmatrix} \overline{a} & 0 \\ \overline{b} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow b = 0$$
$$\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = 0$$

donc $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0$ *et* $A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Dans le cas d'une matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$*, de la forme*

$$A = \begin{pmatrix} diag(s_1, ..., s_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

où $s_i > 0$*,* $i = 1, ..., r$*, on vérife aisément que la matrice*

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} diag(\frac{1}{s_1}, ..., \frac{1}{s_r}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

vérifie les relations (MP) et constitue donc la matrice pseudo-inverse de A*.*

Le pseudo-inverse d'une matrice A quelconque peut être calculé à partir de sa décomposition en valeurs singulières. En effet, si $A = UDV^*$ où U et V sont unitaires et D est de la forme (4.6), alors on vérifie que

$$A^\dagger = VD^\dagger U^* \tag{4.8}$$

où $D^\dagger$ est donnée par la formule (4.7).

1) $AA^\dagger A = UDV^*VD^\dagger U^*UDV^* = UDD^\dagger DV^* = UDV^* = A$,

2) $A^\dagger AA^\dagger = VD^\dagger U^*UDV^*VD^\dagger U^* = VD^\dagger DD^\dagger U^* = VD^\dagger U^* = A^\dagger$,

3) $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger$,

4) $(A^\dagger A)^* = A^\dagger A$.

Exemple. *On a vu que la décomposition en valeurs singulières de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *est* $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Donc l'inverse* *de Moore-Penrose de A est :*

$$\begin{aligned} A^\dagger &= VD^\dagger U^* \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.2.1 Propriétés du pseudo-inverse

Si A est une matrice et $\alpha \in \mathbb{C}^*$, alors :

$$\begin{cases} (A^\dagger)^\dagger = A \\ (\alpha A)^\dagger = \frac{1}{\alpha} A^\dagger, \ \alpha \neq 0 \\ (A^\dagger)^t = (A^t)^\dagger \\ (A^\dagger)^* = (A^*)^\dagger \\ A^\dagger = (A^t A)^\dagger A^t = A^t (A A^t)^\dagger \\ A A^t (A^\dagger)^\dagger A^t = A \\ A^t A A^\dagger = A^t \\ rang(A^\dagger) = rang(A) = rang(A^t) \end{cases}$$

Si A est carrée inversible alors $A^{-1} = A^\dagger$.

Théorème 4.2.1

Soit $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ de rang r, si $\{v_1, ..., v_r\}$ est une base de $\operatorname{Im}(A^*)$ et $\{w_1, ..., w_{n-r}\}$ est une base de $\ker(A^*)$, alors

$$A^\dagger = [v_1, ..., v_r, 0, ..., 0] \, [Av_1, ..., Av_r, w_1, ..., w_{n-r}]^{-1}$$

Démonstration. En utilisant la définition de $A^\dagger$, on a :

$$\begin{aligned} A^\dagger [Av_1, ..., Av_r, w_1, ..., w_{n-r}] &= \left[A^\dagger A v_1, ..., A^\dagger A v_r, A^\dagger w_1, ..., A^\dagger w_{n-r}\right] \\ &= [v_1, ..., v_r, 0, ..., 0]\,. \end{aligned}$$

D'autre part, $[Av_1, ..., Av_r, w_1, ..., w_{n-r}]$ est une base de K^n, donc $A^\dagger = [v_1, ..., v_r, 0, ..., 0] \, [Av_1, ..., Av_r, w_1, ..., w_{n-r}]^{-1}$. □

Exemple. *Calculer $A^\dagger$ si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ *est une base de* $Im(A^*)$. $A\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\2\\-1\end{pmatrix}$ *et* $A\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\-1\\2\end{pmatrix}$.

Donc $A^\dagger\begin{pmatrix}2\\5\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ *et* $A^\dagger\begin{pmatrix}-1\\-4\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

On calcul maintenant la base de $Im(A)^\perp=\ker(A^*)$, *on résout alors le système* $A^*x=0$, *on a :*

$$x=x_1\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

et

$$A^\dagger\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=0\ ;\ A^\dagger\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=0.$$

Donc

$$A^\dagger\begin{pmatrix}2&-1&1&0\\5&-4&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\2&-1&0&1\\-1&2&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&-1&0&0\\3&-1&0&0\end{pmatrix},$$

et

$$A^\dagger=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&-1&0&0\\3&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&1&0\\5&-4&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\2&-1&0&1\\-1&2&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}^{-1}.$$

Méthode pratique pour le calcul du pseudo inverse de Moore-Penrose :

Théorème 4.2.2

Soit $A\in\mathbb{K}^{m,n}$ et $A=FG$ une décomposition de rang maximal. Alors

$$A^\dagger=G^*(F^*AG^*)^{-1}F^*.$$

Il vient de ce théorème que toute matrice a un unique pseudo inverse de Moore-Penrose.

Démonstration. Montrons d'abord que F^*AG^* est inversible. On a :

$$F^*AG^* = F^*FGG^* = (F^*F)(GG^*)$$

mais d'après l'inégalité de Sylvester :

$$\begin{aligned} rgF + rgF^* - r &\leq rg(F^*F) \leq \min(rgF, rgF^*) \\ &\Rightarrow r \leq (F^*F) \leq r \Rightarrow rg(F^*F) = r. \end{aligned}$$

Vu que $F^*F \in \mathbb{K}^{r,r}$, donc F^*F est inversible. De même, GG^* est inversible et alors F^*AG^* est inversible et on a

$$(F^*AG^*)^{-1} = (GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}$$

Il est ensuite évident de vérifier que la matrice $G^*(F^*AG^*)^{-1}F^*$ vérifie les conditions (MP). En effet :

(1) $AA^\dagger A = A\left[G^*(F^*AG^*)^{-1}F^*\right]A = FGG^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*FG = FG = A.$

(2) $A^\dagger AA^\dagger = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*FGG^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^* = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^* = A^\dagger.$

(3) $(AA^\dagger)^* = (FGG^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*)^* = (F(F^*F)^{-1}F^*)^* = F\left[(F^*F)^{-1}\right]^* F^* = AA^\dagger.$

(4) $(A^\dagger A)^* = (G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*FG)^* = (G^*(GG^*)^{-1}G)^* = G^*\left[(GG^*)^{-1}\right]G = A^\dagger A.$

□

Proposition 4.2.1

Soit $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ une matrice de rang r. Alors

1. Si A est de rang maximal en colonnes alors $A^\dagger = (A^tA)^{-1}A^*$.
2. Si A est de rang maximal en lignes alors $A^\dagger = A^*(AA^t)^{-1}$.
3. Si $A = FG$ est une décomposition de rang maximal alors $A^\dagger = G^\dagger F^\dagger$.
4. Si $A = FPG$ avec $F \in \mathbb{K}^{m,r}$, $G \in \mathbb{K}^{r,n}$, $P \in \mathbb{K}^{r,r}$ et $rgF = rgG = r$ et P inversible alors
$$A^\dagger = G^\dagger P^{-1} F^\dagger.$$

Exemple.

1) *Soit A une matrice carrée d'ordre 3 et de rang 2 donnée par* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère la décomposition en rang maximal suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = FG.$$

Alors :

$$A^\dagger = G^*(F^*AG^*)^{-1}F^* = \begin{pmatrix} \frac{11}{28} & -\frac{2}{7} & -\frac{9}{28} \\ -\frac{11}{28} & \frac{2}{7} & \frac{9}{28} \\ -\frac{3}{14} & \frac{3}{7} & \frac{5}{14} \end{pmatrix}.$$

2) *Soit* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Comme* B *est de rang maximal en lignes alors,*

$$B^\dagger = (B^*B)^{-1}B^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) *Soit* $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Comme* C *est de rang maximal en colonnes alors,*

$$C^\dagger = C^*(CC^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Cas d'une matrice partitionnée

Proposition 4.2.2

Soit A une matrice dans $\mathbb{K}^{m,n}$ de rang r telle que

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

avec $A_{11} \in \mathbb{K}^{r,r}$ inversible. En posant : $A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}$. Alors

$$A^\dagger = A_2^*(A_1^* A A_2^*)^{-1} A_1^*.$$

4.2.2 Systèmes d'équations linéaires

La méthode de résolution des systèmes linéaires $AX = B$ avec la matrice inverse ne fonctionne que si A est une matrice carrée, et encore elle ne fonctionne pas si le problème est singulier c'est à dire dans le cas où le déterminant de A est nul et que la matrice inverse n'existe pas. D'autre pas les matrice rectangulaires n'ont pas pas d'inverse ni de déterminant. Cependant nous souhaitons donner un sens à la solution de systèmes non inversibles et aussi triangulaires car ils sont fréquents.

Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Si $m = n$ et $rang(A) = n$, le système admet une solution unique donnée par la méthode de Cramer.

Si $m < n$, le système est dit sous-déterminé où il y'a moins d'équations que d'indéterminés, le système admet une infinité de solutions.

Si $m > n$, le système est dit sur-déterminé où il y'a plus d'équations que d'inconnues, généralement le système n'a pas de solution. On peut chercher une solution approchée satisfaisant au mieux toutes les équations du système par la méthode des moindre carrée qui consiste à chercher une solution $X \in K^n$ telle que $e(X) = \|AX - B\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k - b_i \right|^2$ soit minimal où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne. On cherche donc X tel que $\frac{\partial}{\partial x_j} \|AX - B\|^2 = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x_j} \|AX - B\|^2 = \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k - b_i \right|^2 \\ &= 2\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}x_k - b_i)\,\overline{a_{ij}},\ j = 1, ..., n \end{aligned}$$

Soit

$$A^*(AX - B) = 0 \text{ ou encore } A^*AX = A^*B.$$

Si A^*A est inversible (on sait déjà que la matrice A^*A est symétrique et définie positive), alors

$$X = (A^*A)^{-1}A^*B,$$

donc $X = A^{\dagger}B$. En effet, notons UDV^* la décomposition de la matrice A en valeurs singulières, on a :

$$\begin{aligned} (A^*A)^{-1}A^* &= (VD^*U^*UDV^*)^{-1}(VD^*U^*) \\ &= (V^*)^{-1}(D^*D)^{-1}(V^{-1}V)D^*U^* \\ &= V(D^*D)^{-1}D^*U^*. \end{aligned}$$

Si D est de la forme $D = \begin{pmatrix} D_n \\ 0 \end{pmatrix}$ où $D_n = diag(s_1, s_2, ..., s_n)$ avec $s_i > 0$, $i = 1, ..., n$, alors

$$\begin{aligned} (D^*D)^{-1}D^* &= (D^tD)^{-1}D^t = (D_n^tD_n)^{-1}D^t \\ &= diag(\frac{1}{s_1^2}, \frac{1}{s_2^2}, ..., \frac{1}{s_n^2})(diag\ (s_1, s_2, ..., s_n) \quad 0\ ) \\ &= \left(D_n^{-1} \quad 0 \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(A^*A)^{-1}A^* = A^\dagger$$

et

$$X = (A^*A)^{-1}A^*B = A^\dagger B.$$

4.2.3 Résolution de l'équation matricielle $AXB = C$

Consdérons le système linéaire matriciel $AXB = C$ où $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B \in \mathbb{K}^{p,q}$ sont données et $X \in \mathbb{K}^{n,p}$ est une matrice inconnue à déterminer. Comme

$$AXB = AA^\dagger AXBB^\dagger B,$$

une condition de compatibilité s'écrit :

$$AA^\dagger CB^\dagger B = C$$

qui est une condition nécessaire et suffisante pour avoir une solution de l'équation $AXB = C$.

Théorème 4.2.3

La solution générale de l'équation compatible $AXB = C$ est donnée par :

$$X = A^\dagger CB^\dagger + Y - A^\dagger AYBB^\dagger, \tag{4.9}$$

où Y est une matrice arbitraire de $\mathbb{K}^{n,p}$.

Démonstration. (4.9) est bien une solution de l'équation $AXB = C$ car en utilisant la condition de compatibilité, on a :

$$\begin{aligned} AXB &= A\left(A^\dagger CB^\dagger + Y - A^\dagger AYBB^\dagger\right)B \\ &= AA^\dagger CB^\dagger B + AYB - AA^\dagger AYBB^\dagger B \\ &= AA^\dagger AA^\dagger CB^\dagger BB^\dagger B + AYB - AA^\dagger AYBB^\dagger B \\ &= AA^\dagger CB^\dagger B + AYB - AYB = AA^\dagger CB^\dagger B = C. \end{aligned}$$

De plus toute solution de $AXB = C$ peut s'écrire $X = X + A^\dagger C B^\dagger - A^\dagger A X B B^\dagger$ qui est une forme particulière de (4.9) avec $Y = X$. $\square$

5

Les $\lambda-$matrices et calcul fonctionnel matriciel

5.1 Les $\lambda-$matrices

5.1.1 Définitions et propriétés élémentaires :

Définition 5.1.1

Soit $\mathbb{K}[\lambda]$ l'anneau des polynômes en λ à coefficients dans $\mathbb{K}$. On appelle $\lambda-$matrice de type (n, m), toute matrice $A(\lambda)$ à n lignes et m colonnes dont les coefficients sont des polynômes dans $\mathbb{K}[\lambda]$.

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1,m}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2,m}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \dots & a_{n,m}(\lambda) \end{pmatrix} \text{ avec } a_{i,j} \in \mathbb{K}[\lambda],\ 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq m.$$

Le degré de $A(\lambda)$, noté $\deg A(\lambda)$ est le plus grand degré parmi les degrés des coefficients a_{ij} de $A(\lambda)$.

Exemple.

1. *La matrice* $\begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda^2+3 \\ 5 & \sqrt{7}\lambda^3-2\lambda+1 \end{pmatrix}$ *est une* $\lambda-$*matrice de degré* 3.
2. *Pour tout matrice* $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, *la matrice* $A-\lambda I_n$ *est une* $\lambda-$*matrice de degré* 1.

Proposition 5.1.1

Soit $A(\lambda)$ une $\lambda-$matrice de type (n,m) et de degré d. Alors $A(\lambda)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$A(\lambda)=\sum_{k=0}^{d} A^{(k)}\lambda^k = A^{(d)}\lambda^d + A^{(d-1)}\lambda^{d-1}+...+A^{(1)}\lambda^1+A^{(0)}.$$

avec $A^{(k)} \in \mathbb{K}^{n,m}$ pour tout $k \in \{0,1,...,d\}$.

De cette proposition, on peut définir une $\lambda-$matrice de degré d comme étant un polynôme de degré d en λ à coefficients matriciels.

Exemple. *Pour la matrice* $A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda^2+3 \\ 5 & \sqrt{7}\lambda^3-2\lambda+1 \end{pmatrix}$, *on a :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{7} \end{pmatrix}\lambda^3+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque. $A(\lambda)$ *est nulle si et seulement si* $A^{(k)}=0$, *pour tout* $k \in \{0,1,...,d\}$.

Déterminant d'une $\lambda-$matrice : Si $A(\lambda)$ est une $\lambda-$matrice carrée d'ordre n et de degré d. On pose

$$\Delta(\lambda)=\det(A(\lambda))=|A(\lambda)|.$$

$\Delta(\lambda)$ est un polynôme en λ de degré inférieure ou égal à nd.

Définition 5.1.2

Soit $A(\lambda)$ une $\lambda-$matrice carrée d'ordre n et de degré d.

1. $A(\lambda)$ est dite unitaire si $A^{(d)}=I_n$.
2. $A(\lambda)$ est dite régulière si $\det A(\lambda)$ n'est pas le polynôme nul.
3. $A(\lambda)$ est dite unimodulaire si $\det A(\lambda)=\det A^{(0)} \neq 0$.

Proposition 5.1.2

Si $\det A^{(0)} \neq 0$ alors $A(\lambda)$ est régulière.

Si $A(\lambda)$ est régulière, alors $\deg \Delta(\lambda)=nd$ et le coefficient de λ^{nd} est $|A^{(0)}|$.

Rang d'une $\lambda-$matrice : Le rang d'une matrice $\lambda-$matrice est l'ordre du plus grand mineur non nul.

Le rang d'une $\lambda-$matrice régulière est égal à son ordre. En effet : si $\Delta(\lambda)=|A(\lambda)|\equiv 0$, alors le coefficient de chaque puissance de λ est forcément nul, le coefficient $|A^{(0)}|$ de λ^{nd} est nul ce qui n'est pas le cas pour une $\lambda-$matrice régulière.

Opérations sur les $\lambda-$matrices :

- Considérons deux $\lambda-$matrices $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ telles que :

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= A^{(d)}\lambda^d + A^{(d-1)}\lambda^{d-1} + ... + A^{(1)}\lambda + A^{(0)}, \\ B(\lambda) &= B^{(q)}\lambda^q + B^{(q-1)}\lambda^{q-1} + ... + B^{(1)}\lambda + B^{(0)}. \end{aligned}$$

On dira que $A(\lambda) = B(\lambda)$ si $d = q$ et $A^{(i)} = B^{(i)}$ pour tout $i \in \{0, 1, ..., d\}$.

- La somme et le produit de deux $\lambda-$matrices $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ se définissent de la même manière que dans le cas des matrices ordinaires à condition que les tailles soient compatibles. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} &\deg(A(\lambda) + B(\lambda)) \leq \deg(A(\lambda)) + \deg(B(\lambda)), \\ &\deg(A(\lambda)B(\lambda)) \leq \deg(A(\lambda)) \deg(B(\lambda)). \end{aligned}$$

- Si $A(\lambda)$ ou $B(\lambda)$ est régulière, le degré de $A(\lambda)B(\lambda)$ est exactement $\deg A(\lambda) + \deg B(\lambda)$ ainsi que celui de $B(\lambda)A(\lambda)$.

- Le produit des $\lambda-$matrices n'est (en général) pas commutatif, mais il est associatif. La somme est commutative.

Exemple. *Soit* $A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 2\lambda \\ \lambda^2 - 1 & \lambda^3 + 3 \end{pmatrix}$ *et* $B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda + 3 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 + 2 \end{pmatrix}$. *Alors*

$$\begin{aligned} A(\lambda) + B(\lambda) &= \begin{pmatrix} \lambda & 3\lambda + 3 \\ \lambda^2 + \lambda & \lambda^3 + \lambda^2 + 5 \end{pmatrix}, \\ A(\lambda)B(\lambda) &= \begin{pmatrix} 2\lambda^2 + 3\lambda - 1 & 2\lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda - 3 \\ \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda + 2 & \lambda^5 + 3\lambda^3 + 6\lambda^2 - \lambda + 3 \end{pmatrix}, \\ B(\lambda)A(\lambda) &= \begin{pmatrix} \lambda^3 + \lambda^2 - 4 & \lambda^4 + 3\lambda^3 + 5\lambda + 9 \\ \lambda^4 + 2\lambda^2 - 3 & \lambda^5 + 2\lambda^3 + 5\lambda^2 + 2\lambda + 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Supposons que $A(\lambda)$ est une $\lambda-$matrice carrée d'ordre n, si on remplace λ par une matrice carrée C d'ordre n, on peut obtenir deux résultats différents étant donné qu'en général deux matrices carrées d'ordre n ne commutent pas. Nous définissons les valeurs fonctionnelles de $A(\lambda)$ à droite et à gauche $A_D(C)$ et $A_G(\lambda)$ comme suit :

$$\begin{aligned} A_D(C) &= A^{(d)}C^d + A^{(d-1)}C^{d-1} + ... + A^{(1)}C + A^{(0)}, \\ A_G(C) &= C^d A^{(d)} + C^{d-1}A^{(d-1)} + ... + CA^{(1)} + A^{(0)}. \end{aligned}$$

Exemple. *Soit* $A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda + 1 \\ \lambda - 2 & \lambda^2 + 2 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Alors :*

$$\begin{aligned} A_D(C) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 14 & 26 \end{pmatrix} \\ A_G(C) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 17 & 27 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'inverse d'une $\lambda-$matrice :

Proposition 5.1.3

Si $A(\lambda)$ est une $\lambda-$matrice régulière, alors elle admet une matrice inverse donnée par :

$$[A(\lambda)]^{-1} = \frac{1}{\Delta(\lambda)}[Com(A(\lambda))]^t.$$

Exemple. *La matrice* $A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^3+1 & \lambda \\ 0 & 2 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *est unimodulaire car*

$$\Delta(\lambda) = -2 = |A^{(0)}|,$$

et on a :

$$[A(\lambda)]^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & \lambda^3+1 & \lambda^4-\lambda^3-\lambda-1 \\ 0 & -1 & -\lambda+1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque. $\deg[A(\lambda)]^{-1} \neq \deg A(\lambda)$.

5.1.2 Division des $\lambda-$matrices

Théorème 5.1.1

Soit $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ deux $\lambda-$matrices telles que $|B^{(\deg B(\lambda))}| \neq 0$, il existe alors deux couples uniques de $\lambda-$matrices $(Q_d(\lambda), R_d(\lambda))$ et $(Q_g(\lambda), R_g(\lambda))$ telles que $R_d(\lambda)$ et $R_g(\lambda)$ soient nulles ou de degrés inférieurs au degré de $B(\lambda)$ et telles que

$$A(\lambda) = Q_d(\lambda)B(\lambda) + R_d(\lambda),$$
$$A(\lambda) = B(\lambda)Q_g(\lambda) + R_g.$$

Si $R_d(\lambda) = 0$, $B(\lambda)$ est dit **diviseur à droite** de $A(\lambda)$.
Si $R_g(\lambda) = 0$, $B(\lambda)$ est dit **diviseur à gauche** de $A(\lambda)$.
$Q_d(\lambda)$ et $R_d(\lambda)$ (respectivement $Q_g(\lambda)$ et $R_g(\lambda)$) sont appelées le quotient et le reste à droite (respectivement le quotient et le reste à gauche) de la division de $A(\lambda)$ par $B(\lambda)$.

Exemple.

1. *Soit* $A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda & 3\lambda^2+2\lambda-3 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^3-\lambda^2-\lambda+3 \end{pmatrix}$ *et* $B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda^2-2 \end{pmatrix}$. *Alors*

$$\begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda & 3\lambda^2+2\lambda-3 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^3-\lambda^2-\lambda+3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 1 & \lambda-1 \end{pmatrix}}_{Q_d(\lambda)}\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda^2-2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\lambda & 2\lambda+1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}}_{R_d(\lambda)}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda & 3\lambda^2+2\lambda-3 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^3-\lambda^2-\lambda+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda^2-2 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}}_{Q_g(\lambda)} + \underbrace{\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}}_{R_g(\lambda)}$$

2. *Soit* $A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2+2\lambda & \lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$ *et* $B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$, *alors*

$$\begin{pmatrix} \lambda^2+2\lambda & \lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}}_{Q_d(\lambda)} \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad R_d(\lambda) = 0.$$

Algorithme de détermination du quotient et du reste : Soit $A(\lambda) = \sum_{k=0}^{d} A^{(k)}\lambda^k$ et $B(\lambda) = \sum_{k=0}^{d'} B^{(k)}\lambda^k$ avec $|B^{(d')}| \neq 0$.

(a) Si $d < d'$ alors $Q_d = 0$ et $R_d(\lambda) = A(\lambda)$.

(b) Si $d \geq d'$:

On calcule d'abord $A_1 = A^{(d)}\left[B^{(d')}\right]^{-1}$ et $A_1(\lambda) = A(\lambda) - A_1\lambda^{d-d'}B(\lambda)$ et on pose $d_1 = \deg A_1$, alors $d_1 < d$.

Si $d_1 < d'$, alors on a :

$$Q_d(\lambda) = A_1\lambda^{d-d'},$$
$$R_d(\lambda) = A_1(\lambda).$$

Si $d_1 \geq d'$, on pose $A_2 = A_1^{(d_1)}\left[B^{(d')}\right]^{-1}$ et $A_2(\lambda) = A_1(\lambda) - A_2\lambda^{d_1-d'}B(\lambda)$ et on pose $d_2 = \deg A_2$, alors $d_2 < d_1$.

Si $d_2 < d'$, alors on a :

$$Q_d(\lambda) = A_1\lambda^{d-d'} + A_2\lambda^{d_1-d'},$$
$$R_d(\lambda) = A_2(\lambda).$$

Sinon, en réitère cette opération jusqu'à obtenir une matrice $A_p(\lambda)$ avec $\deg A_p(\lambda) < d'$ et alors

$$Q_d(\lambda) = A_1\lambda^{d-d'} + A_2\lambda^{d_1-d'} + ... + A_p\lambda^{d_{p-1}-d'},$$
$$R_d(\lambda) = A_p(\lambda).$$

Pour la division à gauche, on peut avoir un algorithme semblable au précédent, comme on peut considérer les matrices $[A(\lambda)]^t$ et $[B(\lambda)]^t$ et faire la division à droite pour obtenir

$$[A(\lambda)]^t = Q_d(\lambda)[B(\lambda)]^t + R_d(\lambda) \text{ et } \deg R_d(\lambda) < \deg B(\lambda)$$

et par au passage au transposé on a

$$A(\lambda) = B(\lambda)[Q_d(\lambda)]^t + [R_d(\lambda)]^t = B(\lambda)Q_g(\lambda) + R_g(\lambda).$$

Exemple. *Effectuer la division à droite et à gauche de la matrice* $A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^3-1 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda \\ \lambda^3 & \lambda^2+1 & 1+\lambda \end{pmatrix}$ *par la matrice* $B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2-1 & 2 & 0 \\ \lambda+1 & \lambda^2 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$.

La division à droite : *On a*

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= A^{(3)}\lambda^3 + A^{(2)}\lambda^2 + A^{(1)}\lambda + A^{(0)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= B^{(2)}\lambda^2 + B^{(1)}\lambda + B^{(0)} \end{aligned}$$

Vu que $\deg A(\lambda) = 3 > \deg B(\lambda) = 2$, *on pose :*

$$A_1 = A^{(3)}[B^{(2)}]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1(\lambda) = A(\lambda) - A_1\lambda^{3-2}B(\lambda) = \begin{pmatrix} -1 & 1-3\lambda & 2 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda \\ \lambda & \lambda^2-2\lambda+1 & 1+\lambda \end{pmatrix}.$$

$$A_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A_1^{(2)}\lambda^2 + A_1^{(1)}\lambda + A_1^{(0)}.$$

On a $\deg A_1(\lambda) = 2 = \deg B(\lambda)$, *on pose alors*

$$A_2 = A_1^{(2)}[B^{(2)}]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2(\lambda) = A_1(\lambda) - A_2\lambda^{2-2}B(\lambda) = \begin{pmatrix} -1 & 1-3\lambda & 2 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda \\ -1 & 1-2\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit que $\deg A_2(\lambda) = 1 < \deg B(\lambda)$. *Donc,*

$$Q_d(\lambda) = A_1\lambda + A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } R_d(\lambda) = A_2(\lambda) = \begin{pmatrix} -1 & 1-3\lambda & 2 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda \\ -1 & 1-2\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

La division à gauche : *On note par* $Q_g(\lambda)$ *et* $R_g(\lambda)$, *le quotient et le reste de la division à gauche de* $A(\lambda)$ *par* $B(\lambda)$. *Posons* $\mathcal{A}(\lambda) = A(\lambda)^t$ *et* $\mathcal{B}(\lambda) = B(\lambda)^t$. *Alors*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda) &= \begin{pmatrix} \lambda^3-1 & 0 & \lambda^3 \\ 1-\lambda & \lambda & \lambda^2+1 \\ 2 & 1-\lambda & 1+\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{A}^{(3)}\lambda^3 + \mathcal{A}^{(2)}\lambda^2 + \mathcal{A}^{(1)}\lambda + \mathcal{A}^{(0)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\lambda) &= \begin{pmatrix} \lambda^2-1 & \lambda+1 & 1 \\ 2 & \lambda^2 & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{B}^{(2)}\lambda^2 + \mathcal{B}^{(1)}\lambda + \mathcal{B}^{(0)}. \end{aligned}$$

Il est clair que $\deg \mathcal{A}(\lambda) > \deg \mathcal{B}(\lambda)$, *on pose alors :*

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}^{(3)}[\mathcal{B}^{(2)}]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1(\lambda) &= \mathcal{A}(\lambda)-\mathcal{A}_1\mathcal{B}(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda-1 & -2\lambda^2 & -2\lambda\\ 1-\lambda & \lambda & 1+\lambda^2\\ 2 & 1-\lambda & 1+\lambda\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\\
&= \mathcal{A}_1^{(2)}\lambda^2+\mathcal{A}_1^{(1)}\lambda+\mathcal{A}_1^{(0)}.
\end{aligned}$$

$\deg\mathcal{A}_1(\lambda)=2=\deg\mathcal{B}(\lambda)$.

$\mathcal{A}_2=\mathcal{A}_1^{(2)}[\mathcal{B}^{(2)}]^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

$\mathcal{A}_2(\lambda)=\mathcal{A}_1(\lambda)-\mathcal{A}_2\mathcal{B}(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda+3 & -\lambda & 2-2\lambda\\ 1-\lambda & 0 & 0\\ 2 & 1-\lambda & 1+\lambda\end{pmatrix}$.

Comme $\deg\mathcal{A}_2(\lambda)<\deg\mathcal{B}(\lambda)$, *on obtient :*

$$\mathcal{Q}_d(\lambda)=\mathcal{A}_1\lambda+\mathcal{A}_2=\begin{pmatrix}\lambda & -2 & \lambda\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ \text{et}\ \mathcal{R}_d(\lambda)=\mathcal{A}_2(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda+3 & -\lambda & 2-2\lambda\\ 1-\lambda & 0 & 0\\ 2 & 1-\lambda & 1+\lambda\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$Q_g(\lambda)=\mathcal{Q}_d(\lambda)^t=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0\\ \lambda & 1 & 0\end{pmatrix}\ \text{et}\ R_g(\lambda)=\mathcal{R}_d(\lambda)^t=\begin{pmatrix}\lambda+3 & 1-\lambda & 2\\ -\lambda & 0 & 1-\lambda\\ 2-2\lambda & 0 & 1+\lambda\end{pmatrix}$$

Théorèmes du reste :

Théorème 5.1.2

Soient $R_d(\lambda)$ et $R_g(\lambda)$ les restes obtenus en divisant une $\lambda-$matrice $A(\lambda)$ à droite et à gauche sur la $\lambda-$matrice $B-\lambda I_n$ sachant que $B=(b_{ij})$ est une matrice carrée d'ordre n. Alors :

$$R_d(\lambda)=A_D(B)\ \text{et}\ R_g(\lambda)=A_G(B).$$

Exemple. *Soit* $A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^2 & \lambda+1\\ \lambda-2 & \lambda^2+2\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

On a

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda^2 & \lambda+1\\ \lambda-2 & \lambda^2+2\end{pmatrix}}_{A(\lambda)}=\underbrace{\begin{pmatrix}-\lambda-1 & -3\\ -4 & -\lambda-4\end{pmatrix}}_{Q_d(\lambda)}\underbrace{\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 4-\lambda\end{pmatrix}}_{B-\lambda I_2}+\underbrace{\begin{pmatrix}10 & 15\\ 14 & 26\end{pmatrix}}_{R_d(\lambda)}.$$

Or, $A_D(B)=\begin{pmatrix}10 & 15\\ 14 & 26\end{pmatrix}$.

De même,

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda^2 & \lambda+1\\ \lambda-2 & \lambda^2+2\end{pmatrix}}_{A(\lambda)}=\underbrace{\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 4-\lambda\end{pmatrix}}_{B-\lambda I_2}\underbrace{\begin{pmatrix}-\lambda-1 & -3\\ -4 & -\lambda-4\end{pmatrix}}_{Q_g(\lambda)}+\underbrace{\begin{pmatrix}9 & 12\\ 17 & 27\end{pmatrix}}_{R_g(\lambda)}.$$

Or, $A_g(B) = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 17 & 27 \end{pmatrix}$.

Soit f un polynôme en λ. Si $A(\lambda) = f(\lambda)I_n$, alors :

$$R_d(\lambda) = R_g(\lambda) = f(B).$$

Comme conséquence, nous avons :

Théorème 5.1.3

Soit f un polynôme en λ et $B = (b_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. Une $\lambda-$matrice $A(\lambda)$ de la forme $f(\lambda).I_n$ est divisible par $B - \lambda I_n$ si et seulement si $f(B) = 0$.

Il resulte d'après le théorème de Cayley-Hamilton que :

Corollaire. *Pour toute matrice carrée $B = (b_{ij})$ d'ordre n on a : $P_B(\lambda).I_n$ est divisible par $B - \lambda I_n$.*

Exemple. *Soit* $A(\lambda) = P_B(\lambda)I_2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 4\lambda + 9 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 4\lambda + 9 \end{pmatrix}$ *avec* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.
Alors $A(\lambda)$ est divisible par $B - \lambda I_2$, en effet :
On a

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= P_B(\lambda)I_2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 4\lambda + 9 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 4\lambda + 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \\ &= A^{(2)}\lambda^2 + A^{(1)}\lambda + A^{(0)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\lambda) &= B - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -3 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{B}^{(1)}\lambda + \mathcal{B}^{(0)}. \end{aligned}$$

Calculons A_1 et $A_1(\lambda)$:

$$\begin{aligned} A_1 &= A^{(2)}[\mathcal{B}^{(1)}]^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ A_1(\lambda) &= A(\lambda) - A_1\lambda^{2-1}\mathcal{B}(\lambda) = \begin{pmatrix} -3\lambda + 9 & 2\lambda \\ -3\lambda & -\lambda + 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \\ &= A_1^{(1)}\lambda + A_1^{(0)}. \end{aligned}$$

Calculons A_2 et $A_2(\lambda)$:

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1^{(1)}[\mathcal{B}^{(1)}]^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ A_2(\lambda) &= A_1(\lambda) - A_2\lambda^{1-1}\mathcal{B}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$Q(\lambda) = A_1\lambda + A_2 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \text{ et } R(\lambda) = A_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.1.3 Réduction des $\lambda-$matrices

Reconsidérons les matrices élémentaires développées dans le premier chapitre :

$$I_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccccccc} & & & i & & & & j & & & \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}, \quad I_i(\alpha(\lambda)) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & \alpha(\lambda) & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$I_{ij}(\alpha(\lambda)) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccccc} & & i & & & & j & & \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & 0 & . & . & \alpha(\lambda) & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

La multiplication à droite ou à gauche d'une $\lambda-$matrice $A(\lambda)$ par ces matrices élémentaires permet de :

- Échanger les lignes (les colonnes) de $A(\lambda)$.
- Multiplier chaque ligne (colonne) par un polynôme $\alpha(\lambda)$.
- Additionner à chaque ligne (colonne) une autre ligne (colonne) multipliée par un polynôme $\alpha(\lambda)$.

Deux $\lambda-$matrices sont équivalentes si on peut obtenir l'une à partir de l'autre en utilisant des multiplications à droite et à gauche par les matrices élémentaires I_{ij}, $I_i(\alpha(\lambda))$ et $I_{ij}(\alpha(\lambda))$.

Proposition 5.1.4

Deux $\lambda-$matrices $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ de même ordre sont équivalentes si et seulement s'il existe deux $\lambda-$matrices $P(\lambda)$ et $Q(\lambda)$ de sorte que $\det P(\lambda)$ et $\det Q(\lambda)$ sont des constants non nuls telles que

$$B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda).$$

Exemple. *Les $\lambda-$matrices $A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 \end{pmatrix}$ et $B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^3 - 1 \end{pmatrix}$ sont équivalentes. En effet, il existe deux $\lambda-$matrices $P(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ et $Q(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ telles que $\det P(\lambda) = \det Q(\lambda) = -1 \neq 0$ et*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Théorème 5.1.4

Toute $\lambda-$matrice $A(\lambda)$ carrée régulière d'ordre n est équivalente à une $\lambda-$matrice $D(\lambda)$ de la forme

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n(\lambda) \end{pmatrix} = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$$

telles que :

— $a_1(\lambda), a_2(\lambda), ..., a_n(\lambda)$ sont tous des polynômes de premier degré en λ.

— $a_i(\lambda)$ est unique pour tout i dans $\{1, 2, ..., n\}$.

— Chaque $a_i(\lambda)$ est divisible par a_{i-1} pour tout i dans $\{2, ..., n\}$.

$a_1(\lambda), a_2(\lambda), ..., a_n(\lambda)$ sont appelés les polynômes invariants de $A(\lambda)$.

Corollaire. *Deux $\lambda-$matrices sont équivalentes si elles ont les mêmes polynômes invariants.*

Forme de Smith d'une $\lambda-$matrice :

Théorème 5.1.5

Toute $\lambda-$matrice $A(\lambda)$ de rang r est équivalente à une $\lambda-$matrice $S(\lambda)$ de la forme

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1(\lambda) & 0 & & & & & 0 \\ 0 & a_2(\lambda) & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

sachant que les $a_1(\lambda), a_2(\lambda), ..., a_r(\lambda)$ sont les polynômes invariants de $A(\lambda)$. $S(\lambda)$ est dite la réduite de Smith ou bien la forme canonique de $A(\lambda)$.

Remarque. *La forme réduite de Smith d'une $\lambda-$matrice carrée régulière est égale à la $\lambda-$matrice diagonale $D(\lambda)$.*

Pour trouver $D(\lambda)$ ou bien la forme de Smith $S(\lambda)$ d'une $\lambda-$matrice $A(\lambda)$ on procède comme suit :
On cherche parmi les coefficients de $A(\lambda)$, celui de le plus petit degré et qui soit le plus simple possible. Après, une éventuelle permutation de lignes ou de colonnes, on suppose que ce coefficient est $a_{11}(\lambda)$. Ensuite, en fait la division euclidienne de chaque élément de la ligne 1 sur le coefficient $a_{11}(\lambda)$. Si un élément de la ligne 1, par exemple $a_{1j}(\lambda)$, a un reste non nul, c'est à dire

$$a_{1j}(\lambda) = a_{11}(\lambda)q_{1j}(\lambda) + r_{1j}(\lambda) \text{ avec } r_{1j}(\lambda) \neq 0$$

on multiplie la colonne 1 par $-q_{1j}(\lambda)$ et on l'ajoute à la colonne j, de telle sorte que l'on remplace $a_{1j}(\lambda)$ par $r_{1j}(\lambda)$ qui est de degré inférieur à $a_{11}(\lambda)$. On échange les colonnes j et 1 et on réitère la procédure précédente jusqu'à arriver à une matrice où tout les coefficients de la première ligne sont divisible par $a_{11}(\lambda)$ avec un reste nul. Ce qui a était fait avec la première ligne, on le refait avec la première colonne, de telle sorte que l'on arrive à une matrice où tous les coefficients de la première ligne et la première colonne sont divisible par $a_{11}(\lambda)$ avec un reste nul. On retranche ensuite de chaque colonne j, la colonne 1 multipliée par la quotient de la division de $a_{1j}(\lambda)$ par $a_{11}(\lambda)$ et on retranche de chaque ligne i, la ligne 1 multipliée par la quotient de la division de $a_{i1}(\lambda)$ sur $a_{11}(\lambda)$. Ceci ramène notre matrice à la forme

$$A_1(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22}(\lambda) & \cdots & b_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2}(\lambda) & \cdots & b_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

Si un des coefficients $b_{ij}(\lambda)$ est divisible par $a_1(\lambda)$ avec un reste non nul, alors on ajoute à la ligne 1, la ligne qui contient cet élément, ceci ramène la matrice au cas initial, auquel on ré-applique tout ce qui précède, jusqu'à l'obtention d'une matrice de la même forme que $A_1(\lambda)$, où tout les $b_{ij}(\lambda)$ sont divisibles par $a_1(\lambda)$ avec un reste nul et $a_1(\lambda)$ unitaire (pour cette dernière il suffit de multiplier la première ligne par l'inverse du coefficient du plus grand degré dans $a_1(\lambda)$). Toute la procédure précédente, est appliquée ensuite à la matrice $(bij)_{2\leq i,j\leq n}$ pour arriver à la forme

$$A_2(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1(\lambda) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}(\lambda) & \cdots & c_{3n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & c_{n3}(\lambda) & \cdots & c_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

où $a_2(\lambda)$ est divisible par $a_1(\lambda)$ avec un reste nul et tout les $c_{ij}(\lambda)$ sont divisibles par $a_2(\lambda)$ avec un reste nul. La procédure est poursuivie alors jusqu'à l'obtention de la forme $S(\lambda)$.

Exemple. *Déterminer la forme de Smith pour la $\lambda-$matrice*

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+\lambda+1 & \lambda \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 2 & \lambda^2-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}.$$

Le plus simple coefficient de plus petit degré est 1.
- Échanger les lignes 1 et 2 : On obtient en multipliant à gauche par I_{12}

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda+1 & \lambda^2+\lambda+1 & \lambda \\ 2 & \lambda^2-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

- Échanger maintenant les colonnes 1 et 2 : la multiplication à droite par I_{12} donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda^2+\lambda+1 & \lambda+1 & \lambda \\ \lambda^2-1 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

- Tous les coefficients de la première ligne et la première colonne sont divisibles par 1 avec un reste nul, alors on ajoute à la deuxième colonne la première multipliée par $-\lambda$. Pour cela, on doit multiplier à droite par $I_{12}(-\lambda)$, on trouve alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ \lambda^2+\lambda+1 & -\lambda^3-\lambda^2+1 & \lambda \\ \lambda^2-1 & -\lambda^3+\lambda+2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

on ajoute à la troisième colonne la première multipliée par $-\lambda$ (multiplication à droite par $I_{13}(-\lambda)$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2+\lambda+1 & -\lambda^3-\lambda^2+1 & -\lambda^3-\lambda^2 \\ \lambda^2-1 & -\lambda^3+\lambda+2 & -\lambda^3+2\lambda-1 \end{pmatrix}$$

on ajoute à la deuxième ligne la première multipliée par $-(\lambda^2+\lambda+1)$ (multiplication à gauche par $I_{21}(-(\lambda^2+\lambda+1))$),

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+1 & -\lambda^3-\lambda^2 \\ \lambda^2-1 & -\lambda^3+\lambda+2 & -\lambda^3+2\lambda-1 \end{pmatrix}$$

on ajoute à la troisième ligne la première multipliée par $-(\lambda^2-1)$ *(multiplication à gauche par* $I_{31}(-(\lambda^2-1))$*),*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+1 & -\lambda^3-\lambda^2 \\ 0 & -\lambda^3+\lambda+2 & -\lambda^3+2\lambda-1 \end{pmatrix}$$

On ajoute maintenant à la troisième colonne la deuxième multipliée par -1 *(multiplication à droite par* $I_{23}(-1)$*)*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+1 & -1 \\ 0 & -\lambda^3+\lambda+2 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

On échange les colonnes 2 et 3 (multiplication à droite par I_{23} *),*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda^3-\lambda^2+1 \\ 0 & \lambda-3 & -\lambda^3+\lambda+2 \end{pmatrix}$$

On ajoute maintenant à la troisième colonne la deuxième multipliée par $-(\lambda^3-\lambda^2+1)$ *(multiplication à droite par* $I_{23}(-(\lambda^3-\lambda^2+1))$*),*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -\lambda^4+\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda-1 \end{pmatrix}$$

on ajoute à la troisième ligne la deuxième multipliée par $\lambda-3$ *(multiplication à gauche par* $I_{32}(\lambda-3)$*),*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^4+\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda-1 \end{pmatrix}$$

et enfin on multiplie la deuxième ligne et la troisième ligne par -1 *(multiplication à gauche par* $I_2(-1)$ *et* $I_3(-1)$*) pour obtenir,*

$$S(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^4-\lambda^3-3\lambda^2-2\lambda+1 \end{pmatrix}$$

qui est la forme de Smith cherchée. Dans cet exemple on a $S(\lambda)=D(\lambda)$*.*
Les $\lambda-$*matrices* $P(\lambda)$ *et* $Q(\lambda)$ *vérifiants*

$$S(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$$

sont définies respectivement comme suit : $P(\lambda)$ *est le produit de toute les* $\lambda-$*matrices avec lesquelles on a multiplié à gauche et* $Q(\lambda)$ *est le produit de toutes les* $\lambda-$*matrices avec lesquelles on a multiplié à droite, en respectant l'ordre de multiplication. Nous avons donc :*

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= I_3(-1)I_2(-1)I_{32}(\lambda-3)I_{31}(-\lambda^2+1)I_{21}(-\lambda^2-\lambda-1)I_{12} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda^2+\lambda+1 & 0 \\ 3-\lambda & \lambda^3-\lambda^2-2\lambda-4 & -1 \end{pmatrix} \\ Q(\lambda) &= I_{12}I_{12}(-\lambda)I_{13}(-\lambda)I_{23}(-1)I_{23}I_{23}(-\lambda^3-\lambda^2+1) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & \lambda^3+\lambda^2 \\ 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda^3-\lambda^2+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Proposition 5.1.5

Toute $\lambda-$matrice carrée $A(\lambda)$ peut s'écrire comme des multiplications de I_{ij}, $I_i(\alpha(\lambda))$ et $I_{ij}(\alpha(\lambda))$.

5.1.4 Dérivées des $\lambda-$matrices

Définition 5.1.3

Soit $A(\lambda)$une $\lambda-$matrice. La dérivée de $A(\lambda)$ par rapport à λ est une $\lambda-$matrice notée $\frac{dA}{d\lambda}(\lambda)$ dont les coefficients sont les dérivées des coefficients de $A(\lambda)$ par rapport à λ.

Exemple. $\frac{d}{d\lambda}\begin{pmatrix} \lambda+2 & 1-\lambda^2 & 5 \\ 2\lambda & \lambda^3-\lambda+7 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2\lambda & 0 \\ 2 & 3\lambda^2-1 & 1 \end{pmatrix}.$

Proposition 5.1.6

Soient $A = A(\lambda)$ et $B = B(\lambda)$ deux $\lambda-$matrices.

1. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a : $\frac{d}{d\lambda}[\alpha A + \beta B] = \alpha\frac{dA}{d\lambda} + \beta\frac{dB}{d\lambda}$.
2. $\frac{d}{d\lambda}[AB] = \frac{dA}{d\lambda}B + A\frac{dB}{d\lambda}$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors en général : $\frac{d}{d\lambda}(A^n) \neq nA^{n-1}\frac{dA}{d\lambda}$.
4. Pour $n > 1$, $\frac{d}{d\lambda}(A^n) = \sum_{i=1}^{n} A^{i-1}\frac{dA}{d\lambda}A^{n-i}$.
5. Si $A(\lambda)$ est régulière, alors : $\frac{d}{d\lambda}(A^{-n}) = -A^{-n}\frac{dA^n}{d\lambda}A^{-n}$.

5.2 Fonctions de matrices

On définit par exemple pour toute matrice carrée A et toute fonction f de classe C^∞, la matrice $f(A)$ fonction f de A, par la série de Taylor de la fonction f comme suit :

$$\begin{aligned}
e^A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + ... \\
\sin A &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!} = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} + ... \\
\cos A &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A^{2n}}{(2n)!} = I - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} + ... \\
\sinh(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!} = A + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} + ... \\
\cosh(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!} = I + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} + ...
\end{aligned}$$

Les matrices $f(A)$ pas uniquement ci-dessus sont définies pour toute matrice carrée A dont les valeurs propres sont inférieures en module au rayon de convergence de la série de Taylor de la fonction f.

Pour toute matrice carrée A dont les valeurs propres sont inférieures en module à 1, on a aussi :

$$\begin{aligned}
(I - A)^{-1} &= I + A + A^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \\
\ln(I + A) &= A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{A^n}{n}
\end{aligned}$$

Exemple.

1) Montrons que : $\exp\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

En effet, posons $A = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$, *comme le rayon de convergence de la fonction* $f(x) = e^x$ *est infini, alors la fonction exponentielle de la matrice* A *est une matrice* 2×2 *bien définie. D'autre part,* $A^0 = I_2$, $A^1 = A$, $A^2 = \begin{pmatrix} -\theta^2 & 0 \\ 0 & -\theta^2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\theta^3 \\ \theta^3 & 0 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} \theta^4 & 0 \\ 0 & \theta^4 \end{pmatrix}$, *etc ...*

$$\begin{aligned}
A^{2p} &= \begin{pmatrix} (-1)^p\theta^{2p} & 0 \\ 0 & (-1)^p\theta^{2p} \end{pmatrix} = (-1)^p\theta^{2p} I_2 \\
A^{2p+1} &= \begin{pmatrix} 0 & (-1)^p\theta^{2p+1} \\ -(-1)^p\theta^{2p+1} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^{2p+1}}{(2p+1)!} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \theta^{2p}}{(2p)!} I_2 + \begin{pmatrix} 0 & \sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \theta^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ -\sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \theta^{2p+1}}{(2p+1)!} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2) Vérifions que pour toute matrice A dont les valeurs propres sont en module supérieur à 1, on a :

$$(I-A)^{-1} = -\sum_{n=1}^{\infty} A^{-n}.$$

En effet, comme A et $(I-A)$ sont inversibles, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
(I-A)^{-1} &= (A^{-1}A - A)^{-1} = \left[(A^{-1}-I)A\right]^{-1} \\
&= A^{-1}(A^{-1}-I)^{-1} = -A^{-1}(I-A^{-1})^{-1},
\end{aligned}$$

où A^{-1} a toutes ses valeurs propres inférieures à 1 en module, donc $(I-A)^{-1} = -A^{-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(A^{-1})^n = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}(A^{-1})^{n+1}$.

Comme le rayon de convergence d'une série est conservé par intégration et dérivation, cela permet de construire les fonctions de matrices par dérivation et intégration par rapport à la matrice A comme s'il elle était un scalaire.

Exemple. $[\ln(1-x)]' = \frac{-1}{1-x}$ *donc* $\ln(1-x) = -\int\limits_0^x \frac{dt}{1-t} = -\int\limits_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *et alors :*

$$\ln(I-A) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n}$$

Comme $\cos A$ et $\sin A$ son définies pour toute matrice A, il en est de même pour $\cos^2 A$ et $\sin^2 A$ et on a :

$$\cos^2 A + \sin^2 A = I_n,$$

de même on peut obtenir

$$\sin(2A) = 2\sin A \cos A.$$

Si A et B sont deux matrices qui commutent $AB = BA$, alors :

$$\begin{aligned}
e^A e^B &= e^B e^A = e^{A+B} \\
\sin(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \cos B \sin A \\
\cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \\
(A+B)^n &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p A^p B^{n-p}.
\end{aligned}$$

5.3 Matrices constituantes

Dans les écritures précédentes de $f(A)$ basées sur les puissances de la matrice A, l'expression des coefficients de $f(A)$ pose en général des difficultés de calculs. Pour palier à cet inconvénient on propose en pratique de chercher $f(A)$ sous la forme :

$$f(A) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\nu_i - 1} f^{(j)}(\lambda_i) Z_{ij} \tag{5.1}$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont les valeurs propres de la matrice A de multiplicités respectives $\nu_1, ..., \nu_r$, avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, $\nu = \sum_{i=1}^{r} \nu_i$ et Z_{ij} sont ν matrices constantes indépendantes de f appelées matrices constituantes de A ou bien les composantes de la matrice A car elles ne dépendent que de A.

Pour déterminer les matrices constituantes Z_{ij}, comme elles ne dépendent que de A, il suffit de choisir des fonctions particulières pour f. On choisit souvent les fonctions simples comme les monômes x^k, $k = 0, 1, ..., \nu - 1$, les fractions rationnelles du type $\frac{p(x)}{(x-\lambda_i)^j}$, $i = 1, ..., r$; $j = 1, ..., \nu_i$ où $p(x)$ est le polynôme caractéristique de A.

5.3.1 Matrices à valeurs propres simples

Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} \nu &= r \\ f(A) &= f(\lambda_1) Z_1 + ... + f(\lambda_r) Z_r \end{aligned}$$

et r matrices constituantes $Z_1, ..., Z_r$ à déterminer. Choisissons pour cela les fonctions $1, x, x^2, ..., x^{r-1}$. Ce choix conduit au système :

$$\begin{cases} I = Z_1 + ... + Z_r \\ A = \lambda_1 Z_1 + ... + \lambda_r Z_r \\ A^2 = \lambda_1^2 Z_1 + ... + \lambda_r^2 Z_r \\ ... \\ A^{r-1} = \lambda_1^{r-1} Z_1 + ... + \lambda_r^{r-1} Z_r \end{cases}$$

ou bien :

$$\begin{pmatrix} I \\ A \\ . \\ . \\ . \\ A^{r-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & . & . & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & . & . & \lambda_2^{r-1} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & \lambda_r & \lambda_r^2 & . & . & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}}_{V(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r)} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ . \\ . \\ . \\ Z_r \end{pmatrix}$$

où apparait la matrice de Van der Monde $V(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r)$. Comme :

$$\det V(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r) = 0 \Longleftrightarrow \exists i, j,\ i \neq j,\ \lambda_i = \lambda_j.$$

Cette matrice est inversible par hypothèse, et la résolution de ce système donne les matrices Z_i cherchées.

5.3.2 Cas général

Si l'on choisit les fonctions, pour $i = 1, ..., r$; $j = 1, ..., \nu_i$:

$$\begin{aligned} f_{ij}(x) &= \frac{p(x)}{(x-\lambda_i)^j} \\ &= (x-\lambda_1)^{\nu_1}...(x-\lambda_{i-1})^{\nu_i-1}(x-\lambda_{i+1})^{\nu_i+1}...(x-\lambda_r)^{\nu_r} \end{aligned}$$

où $p(x)$ est le polynôme caractéristique de A, on obtient la propriété pour tout $k \neq i$ et pour tout j :

$$f_{ij}(\lambda_k) = f_{ij}^{(1)}(\lambda_k) = ... = f_{ij}^{(\nu_k-1)}(\lambda_k) = 0.$$

De plus, on a aussi les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f_{i1}(\lambda_i) &= f_{i2}(\lambda_i) = ... = f_{i,\nu_i-1}(\lambda_i) = 0,\ f_{i,\nu_i}(\lambda_i) \neq 0, \\ f_{i1}^{(1)}(\lambda_i) &= ... = f_{i,\nu_i-2}^{(1)}(\lambda_i) = 0,\ f_{i,\nu_i-1}^{(1)}(\lambda_i) \neq 0,\ f_{i,\nu_i}^{(1)}(\lambda_i) \neq 0, \\ & ... \\ f_{i1}^{(\nu_i-2)}(\lambda_i) &= 0,\ f_{i,2}^{(\nu_i-2)}(\lambda_i) \neq 0, ...,\ f_{i,\nu_i}^{(\nu_i-2)}(\lambda_i) \neq 0, \\ f_{i1}^{(\nu_i-1)}(\lambda_i) &\neq 0, ...,\ f_{i,\nu_i}^{(\nu_i-1)}(\lambda_i) \neq 0. \end{aligned}$$

En reportant dans la relation (5.1), on trouve r systèmes triangulaires, pour $i = 1, ..., r$:

$$\begin{pmatrix} f_{i,\nu_i}(A) \\ f_{i,\nu_i-1}(A) \\ . \\ . \\ . \\ f_{i1}(A) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_{i,\nu_i}(\lambda_i) & f_{i,\nu_i}^{(1)}(\lambda_i) & . & . & . & f_{i,\nu_i}^{(\nu_i-1)}(\lambda_i) \\ 0 & f_{i,\nu_i-1}^{(1)}(\lambda_i) & . & . & . & f_{i,\nu_i-1}^{(\nu_i-1)}(\lambda_i) \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & f_{i1}^{(\nu_i-1)}(\lambda_i) \end{pmatrix}}_{V(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_r)} \begin{pmatrix} Z_{i0} \\ Z_{i1} \\ . \\ . \\ . \\ Z_{i,\nu_i-1} \end{pmatrix}$$

qui se résouent facilement.

Exemple. *Soient les matrices :*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

dont les polynômes caractéristiques sont identiques $p(\lambda) = (\lambda - 4)^3$. *Leurs matrices de Jordan respectives sont :*

$$J_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } J_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer leurs matrices constituantes, comme A_1 *et* A_2 *ont même ensemble de valeurs propres, on a dans les deux cas :*

$$f(A_i) = f(4)Z_{1i} + f^{(1)}(4)Z_{2i} + f^{(2)}(4)Z_{3i}\ ;\ i = 1, 2.$$

Choisissons comme fonctions usuelles $1, x$ *et* x^2, *cela donne :*

$$\begin{cases} I_3 = Z_{1i} \\ A_i = 4Z_{1i} + Z_{2i} \\ A_i^2 = 16Z_{1i} + 8Z_{2i} + 2Z_{3i} \end{cases}$$

La résolution de ce système donne les expressions des matrices constituantes :

$$\begin{aligned} Z_{1i} &= I_3 \\ Z_{2i} &= A_i - 4I_3 \\ Z_{3i} &= \frac{1}{2}\left[A_i^2 - 8A_i + 16I_3\right]. \end{aligned}$$

6

Exercices Corrigés

Calcul matriciel élémentaire

Exercice 6.1. *Les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix} \; ; \; B = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{6} & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

sont elles réelles, diagonales, symétriques, anti-symétriques, singulières, orthogonales, hermitiennes, anti-hermitiennes, unitaires, normales.

Corrigé.

Matrice réelle : B.

Matrice singulière : A.

Matrice orthogonale : B.

Matrice symétrique : A.

Matrice unitaire : B.

Matrice normale : A et B.

Autres propriétés : aucune des deux.

Exercice 6.2. *1) On note*

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

montrer que $A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1 + \theta_2) = A(\theta_2)A(\theta_1)$.

2) Soit A une matrice carrée. L'assertion A est normale si et seulement si AA est normale est-elle correcte ? justifiez votre réponse.

Corrigé.

2) Supposons que A est normale, donc $A^*A = AA^*$. Pour voir si AA est normale ou non on doit calculer $(AA)^*$,

$$\begin{aligned} (AA)^* &= A^*A^*, \\ (AA)(AA)^* &= AAA^*A^* = AA^*AA^* \\ &= A^*AAA^* = A^*AA^*A \\ &= A^*A^*AA = (AA)^*(AA). \end{aligned}$$

Donc si A est normale alors AA est normale.

Inversement, si AA est normale, alors $(AA)^*(AA) = (AA)(AA)^*$ et $A^*A^*AA = AAA^*A^*$. Cela n'implique pas forcément que $AA^* = A^*A$. En effet, soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, A n'est pas normale puisque $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^*A$. Mais la matrice $AA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est normale.

En conclusion, si A est normale alors AA est normale mais la réciproque est en général fausse.

Exercice 6.3. *Soient les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

où $\lambda \neq \mu$. Déterminer les valeurs de λ et μ pour que $B^{-1}AB$ soit diagonale.

Corrigé.

$\lambda = -1$ et $\mu = 2$ ou $\lambda = 2$ et $\mu = -1$.

Exercice 6.4. *Montrer que*

a) si A est une matrice symétrique et B une matrice orthogonale, alors $B^{-1}AB$ est symétrique,

b) si A est une matrice anti-symétrique alors iA est symétrique,

c) le produit de deux matrices symétques A et B est symétrique si et seulement si A et B commutent.

Corrigé.

a) Le fait que B est orthogonale revient à dire que $BB^t = B^tB = I_n$. Ceci assure que B est inversible d'inverse $B^{-1} = B^t$.
Donc, $B^{-1}AB = B^tAB$ et comme A est symétrique, on trouve

$$(B^{-1}AB)^t = (B^tAB)^t = B^tA^t(B^t)^t = B^tAB = B^{-1}AB.$$

Autrement dit, $B^{-1}AB$ est symétrique.

b) On a A est anti-symétrique, c'est à dire que $A^t = -A$. D'où,

$$(iA)^t = \bar{i}A^t = (-i)(-A) = iA,$$

ce qui montre que iA est symétrique.

c) Supposons que A et B sont deux matrices symétriques, alors

$$(AB)^t = B^tA^t = BA.$$

Or, pour que le produit AB soit symétrique il faut et il suffit que $(AB)^t = AB$, en d'autre terme, AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 6.5.

1) Montrer que $AB = 0$ n'implique pas que A ou B soit égale à la matrice nulle.

2) Montrer que dans le cas général, $AB = 0$ implique qu'une des deux matrices A ou B est au moins singulière.

Corrigé.

1) Soient A et B deux matrices non nulles telles que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
Alors,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou bien $B = 0$.

2) On sait que $\det AB = \det A \times \det B$. Si $AB = 0$ on obtient,

$$\begin{aligned} \det AB = \det 0 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \det A \times \det B = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \det A = 0 \text{ ou bien } \det B = 0. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $AB = 0$ implique qu'une des deux matrices A ou B est au moins singulière.

Exercice 6.6. *Si A est une matrice orthogonale d'ordre n, montrer que*

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & A & & \\ . & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale.

Corrigé. A est une matrice orthogonale d'ordre n revient à dire que $AA^t = A^tA = I_n$. S est une matrice carrée d'ordre $n+1$ par définition.

$$S = \left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ \hline 0 & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & A & & \\ . & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array}\right) \text{ et } S^t = \left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ \hline 0 & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & A^t & & \\ . & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array}\right).$$

Donc,

$$\begin{aligned} SS^t &= \left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ \hline 0 & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & A & & \\ . & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ \hline 0 & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & A^t & & \\ . & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ \hline 0 & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & AA^t & & \\ . & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ \hline 0 & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & I_n & & \\ . & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array}\right) = I_{n+1}. \end{aligned}$$

et

$$S^tS = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & . & . & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ . & & & & \\ . & & A^t & & \\ . & & & & \\ 0 & & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & . & . & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ . & & & & \\ . & & A & & \\ . & & & & \\ 0 & & & & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & . & . & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ . & & & & \\ . & & A^tA & & \\ . & & & & \\ 0 & & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & . & . & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ . & & & & \\ . & & I_n & & \\ . & & & & \\ 0 & & & & \end{array}\right) = I_{n+1}.$$

Ainsi, $SS^t = S^tS = I_{n+1}$. Autrement dit, S est orthogonale.

Exercice 6.7. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2+i \\ i & 2 & 3-i \\ 2-i & 3+i & 1 \end{pmatrix}$. *Vérifier que A est symétrique. Déterminer le rang et le noyau de A.*

Corrigé.

$ran(A) = 3$ et $\ker(A) = \{0\}$.

Exercice 6.8. *Calculer les déterminants suivants :*

a) $\begin{vmatrix} gc & ge & a+ge & gb+ge \\ 0 & b & b & b \\ c & e & e & b+e \\ a & b & b+f & b+d \end{vmatrix}$; *b)* $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta\gamma & \alpha\gamma & \alpha\beta \\ -\alpha+\beta+\gamma & \alpha-\beta+\gamma & \alpha+\beta-\gamma \end{vmatrix}$; *c)*

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & . & . & . & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & . & . & . & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & . & . & . & x_n \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ x_1 & x_2 & x_3 & . & ... & . & 1+x_n \end{vmatrix}$$

Corrigé.

a) $ab(ab-cd)$.

b) $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)$.

c) $1 + x_1 + x_2 + ... + x_n$.

Exercice 6.9. *Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice diagonale $A = dia(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ soit non singulière. Calculer alors A^{-1}.*

Corrigé.

$\lambda_1\lambda_2...\lambda_n \neq 0$ et $A^{-1} = diag(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, ..., \frac{1}{\lambda_n})$.

Exercice 6.10. *Déterminer les rangs des matrices suivantes :*

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & c & b & a \\ -c & 0 & a & b \\ -b & -a & 0 & c \\ -a & -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ *où* $b \neq 0,\ a^2 + b^2 = c^2$ *et* $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) $B = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha - 1 & \alpha + 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 - \alpha & \alpha + 3 & \alpha + 7 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Corrigé.

a) $rang(A) = 4$ si $a \neq 0$ et 2 si $a = 2$.

b) $rang(B) = 2$.

Exercice 6.11. *Calculer l'inverse, s'il existe, des matrices suivantes :*

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 19 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ *; b)* $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ *; c)* $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *; d)* $D = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ *;*

e) $E = \begin{pmatrix} 1 - i & 0 \\ 0 & 1 + i \end{pmatrix}$ *; f)* $F = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & 1 \\ 0 & 1 + i & 1 - i \end{pmatrix}$ *; g)* $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Corrigé.

a) n'existe pas. b) $B^{-1} = B$. c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. d) $D^{-1} = D$.

e) $E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$. $F^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + i & 1 + i & -i \\ -1 - i & -1 + i & 1 \\ -1 + i & 1 + i & 1 \end{pmatrix}$. g) $G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Exercice 6.12. *Résoudre les systèmes linéaires suivants et discuter en fonction des paramètres éventuels :*

a) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$ *; b)* $\begin{cases} 2x = b(y + z) \\ x = 2a(y - z) \\ x = (6a - b)y - (6a + b)z \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$ *;*

$$c)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+4z=\eta \\ x+4y+10z=\eta^2 \end{cases},\ \eta\in\mathbb{R},\ d)\ \begin{cases} x_1+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_2+x_3-2x_4-x_5+2x_6=0 \\ -3x_1-3x_3-x_4-x_5-2x_6=0 \\ -x_1-x_3-x_6=0 \end{cases}.$$

Corrigé.

a) $x=y=z=0$.

b) Si $b\neq 4a$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} \frac{4ab}{4a-b} \\ \frac{4a+b}{4a-b} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Si $b=4a\neq 0$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 2a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Si $b=4a=0$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

c) Si $\eta=1$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Si $\eta=2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Si $\eta\neq 1$ et $\eta\neq 2$, le système est incompatible.

d) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Similitude et réduction des matrices

Exercice 6.13. *Donner la forme de Smith S associée à la matrice A, en déterminant les matrices P et Q vérifiants $S=PAQ$.*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & 2a & a+b \\ ab & a^2 & ab \end{pmatrix}\ \textit{avec } a\neq b.\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé.

1. On a

$$I_{21}(-a-b)I_{31}(-ab)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & 2a & a+b \\ ab & a^2 & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & a(a-b) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & a(a-b) & 0 \end{pmatrix} I_{12}(-1)I_{13}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & a(a-b) & 0 \end{pmatrix},$$

comme $a \neq b$ on obtient,

$$I_2(\frac{1}{a-b})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & a(a-b) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a(a-b) & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$I_{32}(a(b-a))\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a(a-b) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0) & 0 \end{pmatrix} = S.$$

Ainsi on a

$$S = PAQ$$

avec

$$P = I_{32}(a(b-a))I_2(\frac{1}{a-b})I_{21}(-a-b)I_{31}(-ab) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a+b}{b-a} & \frac{1}{a-b} & 0 \\ a^2 & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Q = I_{12}(-1)I_{13}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On a

$$\begin{aligned}
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad & \to \quad AI_{12}(-1)I_{13}(-3)I_{14}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\
& \to \quad I_{21}(1)I_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\
& \to \quad I_{23}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\
& \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} I_2(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\
& \to \quad I_{32}(2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} I_{23}(2)I_{24}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S.
\end{aligned}$$

et on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.14. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes :*

a) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ *; b)* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *; c)* $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *; d)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *;*

e) $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Corrigé.

a) $\lambda_1 = 3$, $X_1 = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. $\lambda_2 = -4$, $X_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) $\lambda_1 = 0$, $X_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. $\lambda_2 = 1$, $X_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. $\lambda_3 = 3$, $X_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) $\lambda_1 = 1$ double, $X_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\lambda_2 = 10$, $X_2 = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) $\lambda_1 = 2$ double, $X_1 = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. $\lambda_2 = 1$, $X_2 = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

e) $\lambda = a$ quadruple, $X = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.15. *Quelles sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice nulle* $0 \in \mathbb{K}^{n,n}, n \in \mathbb{N}$ *?*

Corrigé La matrice nulle admet une seule valeur propre nulle de multiplicité n, le sous-espace propre associé est $E_0 = \mathbb{K}^n$.

Exercice 6.16. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice :*

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$$

Déterminer les conditions pour que :

- les valeurs propres soient réelles,

- les vecteurs propres soient orthogonaux.

Montrer que les deux conditions sont satisfaites simultanément seulement si A est symétrique.

Corrigé.

$\lambda_1 = 1,\ X_1 = k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$. $\lambda_2 = 1 + \sqrt{\alpha\beta},\ X_2 = k \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$. $\lambda_3 = 1 - \sqrt{\alpha\beta}$, $X_3 = k \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

- les valeurs propres sont réelles si $\alpha\beta$ est un nombre réel positif.

- les vecteurs propres X_1, X_2 et X_3 sont orthogonaux si $|\alpha| = |\beta|$.

Exercice 6.17. *Soit λ une valeur propre de deux matrices $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ associée au même vecteur propre v.*

1. *Montrer que 2λ est valeur propre pour $A + B$ associée à v.*
2. *Montrer que λ^2 est une valeur propre pour AB associée à v.*

Corrigé.

1. Comme λ est une valeur propre de A et de B et v est le vecteur propre associé, on a

$$Av = \lambda v \text{ et } Bv = \lambda v$$

D'où,

$$\begin{array}{rcl} (A+B)v & = & Av + Bv \\ & = & \lambda v + \lambda v \\ & = & 2\lambda v \end{array}$$

Ainsi, 2λ est une valeur propre de $A + B$ et v est un vecteur propre associé car v est non nul.

2. On a
$$\begin{aligned}(AB)v &= A(Bv) = A(\lambda v)\\ &= \lambda Av = \lambda^2 v\end{aligned}$$
Vu que v est un vecteur non nul, il est donc un vecteur propre de AB associé à la valeur propre λ^2.

Exercice 6.18. *Soit $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ une matrice d'ordre n et c un nombre complexe.*

(a) *Pour tout valeur propre λ de A, montrer que $\lambda + c$ est une valeur propre de $A + cI_n$ sachant que I_n est la matrice identité d'ordre n.*
Que peut on dire concernant les vecteurs propres associés à $\lambda + c$?

(b) *Montrer que la multiplicité algébrique de la valeur propre λ de A est égal à la multiplicité algébrique de la valeur propre $\lambda + c$ de $A + cI_n$*

(c) *Que peut on dire sur* $\dim E_{(\lambda+c)}$ *?*

Corrigé.

(a) Soit v un vecteur propre associé à une valeur propre λ de A. Alors
$$Av = \lambda v.$$
et
$$\begin{aligned}(A + cI_n)v &= Av + cI_n v\\ &= \lambda v + cv\\ &= (\lambda + c)v \text{ avec } v \neq 0\end{aligned}$$
D'où, $\lambda + c$ est une valeur propre de $A + cI_n$ et v est un vecteur propre associé à $\lambda + c$.

(b) Soit $p(t) = \det(A - tI_n)$ et $q(t) = \det((A + cI_n) - tI_n)$ les polynômes caractéristiques de A et de $A + cI_n$ respectivement.
$$q(t) = \det((A + cI_n) - tI_n) = \det(A - (t - c)I_n) = p(t - c).$$
Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ les valeurs propres de A de multiplicités algébriques $n_1, n_2, ..., n_k$ respectivement. D'où,
$$p(t) = \pm \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{n_i}.$$
Ainsi,
$$q(t) = p(t - c) = \pm \prod_{i=1}^{k} ((t - c) - \lambda_i)^{n_i} = \pm \prod_{i=1}^{k} (t - (c + \lambda_i))^{n_i}$$
ce qui montre que les valeurs propres de $A + cI_n$ sont $\lambda_1 + c, \lambda_2 + c, ..., \lambda_k + c$ de multiplicités algébriques respectifs $n_1, n_2, ..., n_k$.

(c) D'après (a) on a, λ et $\lambda + c$ ont les mêmes vecteurs propres donc les mêmes sous espaces propres. Par conséquent, $\dim E_\lambda = \dim E_{\lambda+c}$.

Exercice 6.19. *Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de la matrice*
$$A = \begin{pmatrix} 10001 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11\\ 1 & 10003 & 5 & 7 & 9 & 11\\ 1 & 3 & 10005 & 7 & 9 & 11\\ 1 & 3 & 5 & 10007 & 9 & 11\\ 1 & 3 & 5 & 7 & 10009 & 11\\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 10011 \end{pmatrix}.$$

Corrigé.

Soit $B = A10000I_6$ avec I_6 est la matrice identité d'ordre 6. Alors

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

Comme les lignes de B sont colinéaires, on a $\det B = 0$, donc 0 est une valeur propre de B.
Déterminons le sous-espace propre E_0 associé à la valeur propre 0 :
La matrice B est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si $Bv = 0$ pour $v = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ on trouve

$$x_1 = -3x_2 - 5x_3 - 7x_4 - 9x_5 - 11x_6.$$

D'où, $E_0 = Ker\ B$ est le sous-espace propre engendré par

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, $\lambda = 0$ est valeur propre de B de multiplicité 5 ou 6.
Par inspection, on voit que :

$$Bv = 36v \text{ pour } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que $\lambda = 36$ est aussi une valeur propre de B, dont le vecteur propre associé est $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'où, la matrice B admet deux valeurs propres $\lambda_1 = 0$ de multiplicité 5

et $\lambda_2 = 36$ de multiplicité 1.
Pour déterminer les valeurs et les vecteurs propres de A, on rappelle que $A = B + 10000I_6$, or on sait qu'en général, si $A = B + cI$, alors les valeur propres de A sont de la forme $\mu = \lambda + c$ avec λ est une valeur propre de B. Les vecteur propre de A associés à $\mu = \lambda + c$ sont ceux de B associés à la valeur propre λ. Ainsi, les valeurs propre de la matrice A sont $\mu_0 = \lambda_0 + 10000 = 0 + 10000 = 10000$ et $\mu_2 = \lambda_2 + 10000 = 36 + 10000 = 10036$.
Les vecteurs propres associés à 10000 sont

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur propre associé à la valeur propre 10036 est $v_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.20. *Soit n un entier naturel impaire et $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Montrer que A a au moins une valeur propre réelle.*

Corrigé. Soit $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ le polynôme caractéristique de la matrice A.
$P_A(\lambda)$ est un polynôme de degré n et à coefficients réels car $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Vu que n est impaire, le terme de plus grand degré sera donc de la forme $-\lambda^n$ et

$$P_A(\lambda) = -\lambda^n + \text{ les autres termes.}$$

Ainsi, lorsque λ augmente, le polynôme $P_A(\lambda)$ tends vers $-\infty$,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} P_A(\lambda) = -\infty.$$

De même, si λ tends vers $-\infty$, on obtient

$$\lim_{\lambda \to -\infty} P_A(\lambda) = +\infty.$$

Donc, il existe (d'après le théorème des valeurs intermédiaires) au moins un $\lambda \in]-\infty, +\infty[$ tel que $P_A(\lambda) = 0$. Or, les racine de $P_A(\lambda)$ sont les valeurs propres de A. donc A admet au moins une valeur propre réelle.

Exercice 6.21. *Montrer que les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont toutes réelles.*

Corrigé.
Soit λ une valeur propre d'une matrice hermitienne quelconque A et v un vecteur propre associé à λ. On a donc,

$$Av = \lambda v.$$

Multipliant à gauche par $\overline{v}^t$, on trouve d'une part :

$$\begin{array}{rcl}\overline{v}^t A v & = & \overline{v}^t \lambda v \\ & = & \lambda \overline{v}^t v \\ & = & \lambda \|v\|^2.\end{array}$$

D'autre part on a,

$$\overline{v}^t (Av) = (Av)^t \overline{v} = v^t A^t \overline{v}.$$

Ainsi,

$$v^t A^t \overline{v} = \lambda \|v\|^2$$

et

$$\overline{v}^t \overline{A}^t v = \overline{\lambda} \|v\|^2 \text{ (par le passage au conjugué)}$$

Vu que A est hermitienne on a $\overline{A}^t = A$. D'où,

$$\begin{array}{rcl}\overline{\lambda}\|v\| & = & \overline{v}^t \overline{A}^t \overline{v} \\ & = & \overline{v}^t A^t \overline{v} \\ & = & \lambda \|v\|.\end{array}$$

Comme v est un vecteur propre, il est non nul et $\|v\| \neq 0$. Ainsi,

$$\lambda = \overline{\lambda}.$$

Exercice 6.22. *Soit A une matrice carrée dans $\mathbb{R}^{n,n}$. Supposons que tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A associé à une valeur propre de A. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $A = \lambda I_n$.*

Corrigé.

Posons $A = (a_{ij})$. Soit $e_i = (0, ..., 0, \overbrace{1}^{i}, 0, ..., 0)$ un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors, e_i est un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ_i. C'est à dire $Ae_i = \lambda_i e_i$. Explicitement, on a

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{(n-1)i} \\ a_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où, $a_{ki} = 0$ si $k \neq i$ et $a_{ii} = \lambda_i$. Donc,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \lambda_3 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

On considère maintenant le vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Alors v est un vecteur propre associé à une valeur propre λ, c'est à dire $Av = \lambda v$, ou bien

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \lambda_3 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

D'où, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$ et on a $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & & 0 \\ \vdots & & \lambda & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n$.

Exercice 6.23. *Soit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Montrer que*

a) *AA^t est symétrique.*

b) *Les ensembles des valeurs propres de A et de A^t coïncident.*

c) *La matrice AA^t est positive.*

d) *Les valeurs propres de AA^t sont toutes positives.*

Corrigé.

a) On a
$$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t.$$
Donc AA^t est symétrique.

b) On sait que A est semblable à A^t, elles ont donc le même polynôme caractéristique et donc les mêmes valeurs propres.

c) Soit v un vecteur dans $\mathbb{R}^n$. Alors
$$v^t AA^t v = (A^t v)^t A^t v = \|A^t v\|^2 \geq 0.$$
Donc AA^t est positive.

d) Soit λ une valeur propre de AA^t et v un vecteur propre de AA^t associé à λ.
$$v^t AA^t v = v^t \lambda v = \lambda \|v\|^2.$$
Comme AA^t est positive, on obtient
$$\begin{aligned} v^t AA^t v \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda \|v\|^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Exercice 6.24. *Soit A une matrice symétrique définie positive d'ordre n. Montrer que :*

(a) *A est inversible.*

(b) *A^{-1} est symétrique.*

(c) *A^{-1} est définie positive.*

Corrigé.

(a) **A est inversible :** Rappelons qu'une matrice symétrique A est définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont des réels strictement positifs. D'où, 0 n'est pas une valeur propre, donc $\det A \neq 0$ ce qui montre que A est inversible

(b) **A^{-1} est symétrique :** D'après (a), on sait que si A est inversible, on a

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

D'où,

$$\begin{aligned} I_n &= I_n^t = (A^{-1}A)^t \\ &= A^t(A^{-1})^t \\ &= A((A^{-1})^t) \text{ car } A \text{ est symétrique.} \end{aligned}$$

Alors, $A^{-1} = (A^{-1})^t$.

(c) **A^{-1} est définie positive :** On sait que les valeurs propres de A^{-1} sont tous de la forme $\dfrac{1}{\lambda}$ sachant que λ est une valeur propre de A. Or, on A est définie positive, donc toutes les valeurs propres de A sont strictement positives. Ainsi, toute valeur propre de A^{-1} est strictement positive. Autrement dit, A^{-1} est définie positive.

Exercice 6.25. *Diagonalisez les matrices suivantes :*

a) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$; *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; *d)* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; *e)* $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Corrigé.

a) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

b) $P = \begin{pmatrix} -3i-1 & 3i-1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{pmatrix}$.

c) n'est pas diagonalisable.

d) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

e) n'est pas diagonalisable.

f) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-i & 2+i \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

Exercice 6.26. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n,n} \text{ avec } n \geq 2.$$

1. *Montrer que A est diagonalisable.*
2. *Calculer π_A, le polynôme minimal de A.*
3. *Calculer A^p, $p \in \mathbb{N}^*$.*

Corrigé.

1. Par le calcul, on observe que $A^2 = (n-1)I_n + (n-2)A$. Par suite, A annule le polynôme scindé simple $(X+1)(X-(n-1))$ et donc A est diagonalisable.
2. Le polynôme minimal de A est $\pi_A(X) = (X+1)(X-(n-1))$ car ce polynôme est annulateur alors que les polynômes $X+1$ et $X-(n-1)$ ne le sont pas.
3. Par division euclidienne $X^p = (X+1)(X-(n-1))Q(X) + \alpha X + \beta$. En évaluant la relation en -1 et $(n-1)$, on obtient,

$$\begin{cases} \beta - \alpha = (-1)^p \\ \beta + (n-1)\alpha = (n-1)^p \end{cases}$$

Après résolution

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{(n-1)^p - (-1)^p}{n} \\ \beta = \dfrac{(n-1)^p + (n-1)(-1)^p}{n} \end{cases}$$

D'où,

$$A^p = \frac{(n-1)^p - (-1)^p}{n} A + \frac{(n-1)^p + (n-1)(-1)^p}{n}.$$

Exercice 6.27. *Soit A une matrice nilpotente dans $\mathbb{K}^{n,n}$. Montrer que le polynôme caractéristique de A est*

$$P_A(X) = (-1)X^n.$$

Corrigé. Il suffit de montrer que A admet une valeur propre unique et nulle ($\lambda = 0$). Soit λ une valeur propre de A et v un vecteur propre associé à λ. Alors :

$$\begin{aligned} &Av = \lambda v \\ &A^2 v = \lambda^2 v \\ &\vdots \\ &A^k v = \lambda^k v \text{ par recurrence sur } k. \end{aligned}$$

Comme A est nilpotente, il existe alors $h \in \mathbb{N}$ tel que $A^h = 0$. D'où,

$$\lambda^h v = A^h v = 0.$$

Or, $v \neq 0$ donc $\lambda = 0$.
Ainsi $\lambda = 0$ est l'unique valeur propre de A et comme les valeurs propres de A sont les racines de P_A, on obtient :

$$P_A(X) = (-1)X^n.$$

Exercice 6.28. *Soit $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ telle que : $P_A(\lambda - \lambda_0)^n$, $\pi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^p$ et $\dim E_{\lambda_0} = d$. Montrer que*

$$\frac{n}{p} \leq d \leq n - p + 1.$$

Corrigé. Rappelons qu'une matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ est trigonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ est scindé dans $\mathbb{K}$, c'est à dire qu'il se factorise en produit des polynômes de premier degré où encore s'il admet tous ces racines dans $\mathbb{K}$.
Notons que si λ_0 est une valeur propre de A et E_{λ_0} son espace propre associé, alors :

- $\dim E_{\lambda_0}$ est le nombre des λ_0-blocs de Jordan de A.
- La multiplicité $mul_P(\lambda_0)$ de λ_0 dans $P_A(\lambda)$ est la somme des tailles de tous les λ_0-blocs de Jordan $J_i(\lambda_0)$ avec $i \in 1, 2, ..., \dim E_{\lambda_0}$
- La multiplicité $mul_\pi(\lambda_0)$ de λ_0 dans $\pi_A(\lambda)$ est la taille du plus grand bloc de Jordan associé à λ_0.

Dans cet exercice la matrice A admet une seule valeur propre λ_0 de multiplicité n dans $P_A(\lambda)$ et p dans $\pi_A(\lambda)$, c'est à dire :

$$\begin{array}{l} mul_P(\lambda_0) = n \\ mul_\pi(\lambda_0) = p \\ \text{de plus } \dim E_{\lambda_0} = d. \end{array}$$

Donc, le nombre des blocs de Jordan associés à λ_0 est égal à d, dont la taille du plus grand bloc est p. Posons n_i la taille du λ_0-bloc de Jordan $J_i(\lambda_0)$, $i = 1, 2, ..., d$. D'où,

$$n_i \geq 1 \text{ et } n = n_1 + n_2 + ... + n_d.$$

Vu que la taille du plus grand λ_0-bloc de Jordan est p, il existe alors $k \in \{1, 2, ..., d\}$ tel que $n_k = p$. Donc, $p \geq n_i$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., k-1, k+1, ..., d\}$. De plus,

$$\begin{array}{rcl} n_1 + n_2 + ... + n_{k-1} + p + n_{k+1} + ... + n_d = n & \Rightarrow & \overbrace{p + p + ... + p}^{d-fois} \geq n \\ & \Longleftrightarrow & dp \geq n \end{array}$$

Ainsi, $d \geq \dfrac{n}{p}$.......(1). D'autre part,

$$\begin{array}{rcl} n_1 + n_2 + ... + n_{k-1} + p + n_{k+1} + ... + n_d = n & \Longleftrightarrow & n_1 + n_2 + ... + n_{k-1} + n_{k+1} + ... + n_d = n - p \\ & \Longleftrightarrow & \overbrace{1 + 1 + ... + 1}^{(d-1)-fois} \leq n - p \\ & \Longleftrightarrow & d - 1 \leq n - p \end{array}$$

D'où, $d \leq n - p + 1$.......(2). Par conséquent, $\dfrac{n}{p} \leq d \leq n - p + 1$.

Exercice 6.29. *Soit $A \in \mathbb{K}^{6,6}$. On suppose que*

$$P_A(\lambda) = (\lambda-1)^4(\lambda-2)^2 \text{ et } \pi_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

1) Que peut-on dire des dimensions des espaces propres ?
2) Quelles sont les formes de Jordan possibles ?

Corrigé. La matrice A admet deux valeurs propres 1 et 2. Posons $d_1 = \dim E_1$, $d_2 = \dim E_2$. Nous avons d'après l'exercice précédent,

$$\frac{n_i}{p_i} \leq d_i \leq n_i - p_i + 1,\ i = 1, 2,$$

sachant que $n_1 = mul_P(1) = 4$, $p_1 = mul_\pi(1) = 2$, $n_2 = mul_P(2)$ et $p_2 = mul_\pi(2) = 1$. D'où ;

$$\frac{4}{2} \leq d_1 \leq 4 - 2 + 1 \Longleftrightarrow 2 \leq d_1 \leq 3,$$

$$\frac{2}{1} \leq d_2 \leq 2 - 1 + 1 \Longleftrightarrow d_2 = 2.$$

Donc, $\dim E_1 = 2$ ou bien $\dim E_1 = 3$ et $\dim E_2 = 2$.

— Si $\dim E_1 = 2$ et $\dim E_2 = 2$, il existe alors deux 1-blocs de Jordan de même taille 2 et deux 2-blocs de Jordan de taille 1.

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

— Si $\dim E_1 = 3$ et $\dim E_2 = 2$, il existe alors trois 1-blocs de Jordan dont deux sont de même taille 1 et l'autre est de taille 2 et deux 2-blocs de Jordan de taille 1.

$$\left(\begin{array}{cc|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Exercice 6.30. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -4-\alpha & -4 & -1 \end{pmatrix}$ *avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Donner, en fonction de α, la forme de Jordan ainsi qu'une matrice de passage.

Corrigé.

1. **Polynôme caractéristique et valeurs propres :** $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)^4$. La matrice A admet donc une seule valeur propre de multiplicité 4.

2. **Espace propre E_1 :** Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, alors $v \in E_1$ si et seulement si $Av = 1v$.

$$Av = v \iff \begin{cases} x + \alpha y = x \\ y = y \\ x + 2y + 3z + t = z \\ -2x - 4y - \alpha y - 4z - t = t \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha y = 0 \\ t = -x - 2y - 2z \end{cases}$$

   — Si $\alpha \neq 0$, on obtient $y = 0$ et $t = -x - 2z$. Donc, $v = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   — Si $\alpha = 0$, on obtient, $v = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   Ainsi, $\dim E_1 = \begin{cases} 2 & \text{si } \alpha \neq 0 \\ 3 & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$

3. **Les blocs de Jordan :**

   — Si $\alpha \neq 0$, il existe alors deux 1-blocs de Jordan de même taille 2.

   — Si $\alpha = 0$, il existe alors trois 1-blocs de Jordan dont deux sont de même taille 1 et l'autre est de taille 2.

4. **Matrice de passage et forme de Jordan**

   — <u>Si $\alpha = 0$:</u>

   Posons $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $u_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ tel que $Au_4 = u_3 + 1u_4$

$$Au_4 = u_3 + 1u_4 \iff \begin{cases} x + \alpha y = x \\ y = y \\ x + 2y + 3z + t = 1 + t \\ -2x - 4y - 4z - t = -2 + t \end{cases}$$
$$\iff x + 2y + 2z + t - 1 = 0$$
$$\implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2} \\ t = 0 \end{cases} \quad \text{pour } x = y = t = 0$$

D'où, $A = PJP^{-1}$ avec $J = \left(\begin{array}{c|c|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

— <u>Si $\alpha \neq 0$:</u>
Rappelons que J contient deux 1-blocs de Jordan lorsque $\alpha \neq 0$, on pose alors $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ tel que $Av_2 = v_1 + v_2$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_4 = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$ tel que $Av_4 = v_3 + v_4$.

$$Av_2 = v_1 + v_2 \Longrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ à calculer!!!}$$

$$Av_4 = v_3 + v_4 \Longrightarrow v_4 = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \text{ à calculer!!!}$$

D'où ; $A = PJP^{-1}$ avec $J = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & x' \\ 0 & y & 0 & y' \\ 0 & z & 1 & z' \\ -1 & t & -2 & t' \end{pmatrix}$

Exercice 6.31. *Donner la forme réduite de Jordan ainsi qu'une matrice de passage pour* $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Corrigé. Le polynôme caractéristique : $P_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$.
Les valeurs propres : $\lambda = 1$ $mul_P(1) = 3$.
Les vecteurs propres : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ D'où, $\dim E_1 = 2$, ce qui montre qu'il existe deux 1-blocs de Jordan dont l'un est de taille 1 et l'autre est de taille 2.
Calculons le troisième vecteur w ?
Soit $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de sorte que $Aw = u + w$ ou bien $Aw = v + w$.

$$\begin{aligned} Aw = u + w \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 3x + 2y - 2z = x + 1 \\ -x + z = y \\ x + y = z \end{cases} \\ &\Longrightarrow \quad 0 = 1 \text{ (absurde)} \end{aligned}$$

Donc, ce système n'admet pas de solution, on cherche alors à calculer le vecteur w via l'équation $Aw = v + w$.

$$Aw = u + w \iff \begin{cases} 3x + 2y - 2z = x \\ -x + z = y + 1 \\ x + y = z + 1 \end{cases}$$
$$\implies 0 = 2 \text{ (absurde)}$$

donc ce système n'admet pas solution. Dans ce cas et afin de calculer le vecteur w, on utilise la formule suivante :

$$Aw = (\alpha u + \beta v) + w.$$

en cherchant au départ une relation entre α et β puis on résout le système en donnant des valeurs pour α et β de notre choix.

$$Aw = (\alpha u + \beta v) + w \iff \begin{cases} 3x + 2y - 2z = \alpha + x \\ -x + z = \beta + y \\ x + y = \alpha + \beta + z \end{cases} \implies \alpha + 2\beta = 0.$$

Pour $\alpha = 2$ et $\beta = -1$ on obtient $V = \alpha u + \beta v = 2u - v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $AV = V$ Donc,

$$Aw = 2u - v \iff \begin{cases} 3x + 2y - 2z = 2 + x \\ -x + z = -1 + y \\ x + y = 1 + z \end{cases}$$
$$\iff x + y - z = 1$$

Pour $x = y = 0$, on obtient $z = -1$. D'où, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Ainsi, $A = PJP^{-1}$ telles que

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ et } P = (u\ V\ w) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Décomposition en valeurs singulières

Exercice 6.32. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est de rang 2.

b) Calculer les valeurs singulières de A.

c) Calculer les deux matrices U et V de la décomposition de A en valeurs singulières.

Corrigé.

a) On remarque que les deux premières colonnes sont indépendantes. La matrice est donc de rang 2 ou bien $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

b) On calcule les valeurs propres de AA^t.

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}.$$

On calcule le polynôme caractéristique de AA^t :

$$\begin{aligned} \det(AA^t - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 9 \\ 9 & 14-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(14-\lambda) - 81 \\ &= \lambda^2 - 20\lambda + 3. \end{aligned}$$

Le valeurs propres de AA^t sont les racines de l'équation $\det(AA^t - \lambda I_2) = \lambda^2 - 20\lambda + 3 = 0$, donc $\lambda_1 = 10 + \sqrt{97}$ et $\lambda_2 = 10 - \sqrt{97}$. Les valeurs singulières de la matrice A sont :

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{10 + \sqrt{97}} = 4,4552 \\ s_2 &= \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{10 - \sqrt{97}} = 0,38877. \end{aligned}$$

c) On sait qu'on doit chercher une matrice unitaire $U = [u_1, u_2]$ de dimension 2×2 et une matrice unitaire $V = [v_1 \ , \ v_2 \ , \ v_3]$ de dimension 3×3 telles que :

$$A = U \begin{pmatrix} 4,4552 & 0 & 0 \\ 0 & 0,38877 & 0 \end{pmatrix} V^t.$$

On calcule u_1 comme vecteur propre de module 1 de la matrice AA^t associé à la valeur propre $\lambda_1 = 4,4552$, donc

$$\left[\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} - \left(10 + \sqrt{97}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui donne $u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} + \frac{1}{9}\sqrt{97} \\ 1 \end{pmatrix}$. Il reste à normaliser le vecteur :

$$u_1 = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{4}{9} + \frac{1}{9}\sqrt{97} \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} + \frac{1}{9}\sqrt{97} \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \begin{pmatrix} 0,54491 \\ 0,83849 \end{pmatrix}.$$

On calcule de même u_2, vecteur propre de module 1 de la matrice AA^t associé à la valeur propre $\lambda_2 = 10 - \sqrt{97}$,

$$\left[\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} - \left(10 - \sqrt{97}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

alors $u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} - \frac{1}{9}\sqrt{97} \\ 1 \end{pmatrix}$ et son normalisé

$$u_2 = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{4}{9} - \frac{1}{9}\sqrt{97} \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} - \frac{1}{9}\sqrt{97} \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \begin{pmatrix} -0,83851 \\ 0,54491 \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc la matrice $U = \begin{pmatrix} 0,54491 & -0,83851 \\ 0,83849 & 0,54491 \end{pmatrix}$.

La matrice V s'obtient en considérant la matrice A^tA et les valeurs propres associées $\begin{pmatrix} 10+\sqrt{97} & 10-\sqrt{97} & 0 \end{pmatrix}$ de la manière suivante :

v_1 vecteur propre de A^tA associé à $10+\sqrt{97}$:

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 8 & 13 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left(A^tA - (10+\sqrt{97})I_3\right) v_1 &= 0 \\ \left[\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 8 & 13 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} - (10+\sqrt{97}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] v_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{8}{11} + \frac{1}{11}\sqrt{97} \\ -\frac{3}{11} + \frac{1}{11}\sqrt{97} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,6226 \\ 0,62262 \end{pmatrix}$. On normalise

$$v_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1,6226 \\ 0,62262 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1,6226 \\ 0,62262 \end{pmatrix} \right\|} = \begin{pmatrix} 0,49872 \\ 0,80922 \\ 0,31051 \end{pmatrix}.$$

v_2 vecteur propre de A^tA associé à $10-\sqrt{97}$:

$$\left[\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 8 & 13 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} - (10-\sqrt{97}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient $v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{97} \\ 1 \\ \frac{11}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{97} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,9496 \\ 1 \\ 6,9496 \end{pmatrix}$. On normalise

$$v_2 = \frac{\begin{pmatrix} -5,9496 \\ 1 \\ 6,9496 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -5,9496 \\ 1 \\ 6,9496 \end{pmatrix} \right\|} = \begin{pmatrix} -0,64648 \\ 0,10866 \\ 0,75514 \end{pmatrix}.$$

v_3 vecteur propre de $A^t A$ associé à 0 :

$$\begin{aligned} A^t A v_3 &= 0 \\ \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 8 & 13 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} v_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, de normalisation

$$v_3 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \begin{pmatrix} 0,57735 \\ -0,57735 \\ 0,57735 \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$V = \begin{pmatrix} 0,49872 & -0,64648 & 0,57735 \\ 0,80922 & 0,10866 & -0,57735 \\ 0,31051 & 0,75514 & 0,57735 \end{pmatrix}.$$

Il reste les deux conditions suivantes à vérifier qui introduisent des changements de signes des vecteurs précédemment calculés. On doit avoir :

$$\begin{aligned} A^t u_1 &= s_1 v_1 \\ A^t u_2 &= s_2 v_2 \end{aligned}$$

Or,

$$A^t u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,54491 \\ 0,83849 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,2219 \\ 3,6054 \\ 1,3834 \end{pmatrix},$$

et

$$s_1 v_1 = 4,4552 \begin{pmatrix} 0,49872 \\ 0,80922 \\ 0,31051 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,49872 \\ 0,80922 \\ 0,31051 \end{pmatrix}.$$

Il n'y a donc rien à changer.

$$A^t u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,83851 \\ 0,54491 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25131 \\ -0,04229 \\ -0,2936 \end{pmatrix},$$

et

$$s_2 v_2 = 0,38877 \begin{pmatrix} -0,64648 \\ 0,10866 \\ 0,75514 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,25131 \\ 0,04224 \\ 0,29358 \end{pmatrix}$$

Il faut donc par exemple changer u_2 en $(-u_2)$. On vérifie alors que :

$$\begin{pmatrix} 0,54491 & 0,83851 \\ 0,83849 & -0,54491 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4,4552 & 0 & 0 \\ 0 & 0,38877 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,49872 & -0,64648 & 0,57735 \\ 0,80922 & 0,10866 & -0,57735 \\ 0,31051 & 0,75514 & 0,57735 \end{pmatrix}^t$$
$$= \begin{pmatrix} 0,99999 & 2 & 0,99999 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.33. *Donner la décomposition en valeurs singulières des matrices* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Corrigé.

(1) La matrice A :

i) Calcul des valeurs singulières. Les valeurs propres de

$$A^*A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

sont 9 et 4, d'où les valeurs singulières $\sigma_1 = 3$ et $\sigma_2 = 2$.

ii) Calcul de V et U. Les vecteurs propres de AA^* sont $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les vecteurs propres de A^*A sont $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs propres déterminent les colonnes de U et V a constante près : $v_i = \mu_i y_i$ et $u_i = \mu'_i x_i$. On a, par la décomposition en valeurs singulières $Av_1 = \sigma_1 u_1$, ou $A\mu_1 y_1 = \sigma_1 \mu'_1 x_1$. On peut choisir μ_1 et μ'_1 de façon, par exemple, a minimiser le nombre de signe négatifs dans les matrices U et V. Ici, comme les vecteurs propres son réels, les facteurs $\mu = \pm 1$. En prenant $\mu'_1 = 1$, on a $u_1 = x_1$ et $A\mu_1 y_1 = \sigma_1 u_1$:

$$A\mu_1 y_1 = \sigma_1 u_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\mu_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où $\mu_1 = 1$ et $v_1 = y_1$. Pour v_2 et u_2 on a $A\mu_2 y_2 = \sigma_2 \mu_2' x_2$. En prenant $\mu_1' = 1$ on obtient

$$A\mu_2 y_2 = \sigma_2 x_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

d'où $\mu_2 = -1$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. La décomposition en valeurs singulières est donc

$$A = U\Sigma V^*, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) La matrice B :

La matrice est de taille (3,2) et est de rang 2, on cherchera donc 2 valeurs singulières.
i) Calcul des valeurs singulières. La matrice B^*B est

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont 9 et 4, donc $\sigma_1 = 3$ et $\sigma_2 = 2$.
ii) Calcul de V et U. Les vecteurs propres de BB^* (une matrice matrice carrée d'ordre 3) sont $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les vecteurs propres de B^*B sont $y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On choisit les constantes μ de façon à avoir des signes positifs dans U : $\mu_1' = 1$ et $\mu_2' = 1$. On a alors $A\mu_1 y_1 = \sigma_1 u_1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\mu_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où $\mu_1 = 1$. De la même façon, $A\mu_2 y_2 = \sigma_2 x_2$ implique que $\mu_2 = -1$. La décomposition en valeurs singulières est donc

$$A = U\Sigma V^*, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.34. *Donner la décomposition en valeur singulières dans chaque cas :*

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} & -\sqrt{3/2} \\ \sqrt{3/2} - 1 & -\sqrt{3/2} - 1 \\ \sqrt{3/2} + 1 & -\sqrt{3/2} + 1 \end{pmatrix}$,

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Corrigé.

1. $U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$.
2. $U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
   $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.
3. $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.
4. $U = \begin{pmatrix} -0.3066 & -0.7114 & 0.6324 \\ -0.5716 & -0.3936 & -0.7200 \\ -0.7611 & 0.5822 & 0.2859 \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 6.2763 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7128 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3161 & 0 \end{pmatrix}$,
   $V = \begin{pmatrix} -0.2612 & -0.7336 & 0.6274 & 0 \\ -0.4735 & -0.4690 & -0.7455 & 0 \\ -0.5948 & 0.3478 & 0.1590 & -0.7071 \\ -0.5948 & 0.3478 & 0.1590 & 0.7071 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.35. *Déterminer le pseudo-inverse de Moore Penrose des matrice suivantes :*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 9 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

3. $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

Corrigé.

1. $A^{\dagger} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & -1 \\ -\frac{3}{10} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$,

2. $B^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

3. $C^\dagger = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

4. $D^\dagger = \begin{pmatrix} 0.2093 & 0.2791 & 0.5814 & 0.4884 \\ 0.4186 & 0.5581 & 0.1628 & -0.0233 \\ -0.0930 & 0.2093 & 0.1860 & 0.1163 \\ 0.2326 & -0.0233 & 0.5349 & 0.2093 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.36. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer la forme S de Smith de A ainsi que les matrices P et Q telles que*

$$S = PAQ.$$

2. *Déterminer les constantes a et b telles que $a, b \in \mathbb{N}$ et*

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \\ 2a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 & 2b \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

3. *Calculer $A^\dagger$ (le pseudo-inverse de Moore Penrose de A).*
4. *Sous quelle condition sur α, β et γ, le système suivant admet-il de vraies solutions*

$$\begin{cases} x + 2z & = \alpha \\ -y & = \beta \\ 2x - y + 4z & = \gamma \end{cases}.$$

5. *En utilisant le pseudo-inverse, déterminer les solutions du système ci-dessous et la solution de norme minimale*

$$\begin{cases} x + 2z & = 2 \\ -y & = -3 \\ 2x - y + 4z & = 1 \end{cases}.$$

Corrigé.

1. La forme S de Smith de la matrice A : $S = PAQ$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On a

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \\ 2a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 & 2b \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 & 2ab \\ 0 & -ab & 0 \\ 2ab & -ab & 4ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ ab = 1 \Rightarrow a = 1 \text{ et } b = 1 \text{ car } a, b \in \mathbb{N}.$$

3. D'après la questions précédente on a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = FG$$

et

$$rangA = rang \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

c'est à dire on a une décomposition de rang maximal, d'où

$$\begin{aligned} A^{\dagger} &= G^t(F^tAG^t)^{-1}F^t \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. On a

$$\begin{cases} x + 2z & = \alpha \\ -y & = \beta \\ 2x - y + 4z & = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

donc le système admet des solutions si et seulement si

$$AA^{\dagger} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

or

$$\begin{aligned} AA^{\dagger} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma \\ \frac{5}{6}\alpha - \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{6}\gamma \\ \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{6}\beta + \frac{5}{6}\gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc le système admet des solutions si et seulement si

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma \\ \frac{5}{6}\alpha - \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{6}\gamma \\ \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{6}\beta + \frac{5}{6}\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \gamma = 2\alpha + \beta.$$

5. En écrivant le système sous la forme $AX = b$, les solutions sont données par

$$E = \{A^{\dagger}b + (I_3 - A^{\dagger}A)X / \ X \in \mathbb{R}^3\}.$$

On a

$$A^{\dagger}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

et

$$I_3 - A^{\dagger}A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \left(\frac{4}{5}x - \frac{2}{5}z + \frac{2}{5}, 1, \frac{1}{5}z - \frac{2}{5}x + \frac{4}{5} \right), x, y, z \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

et la solution de norme minimale est donnée par

$$X^* = \left(\frac{2}{5}, 1, \frac{4}{5} \right).$$

Exercice 6.37. *1) En discutant s'il y a lieu en fonction de paramètres réels α et β, déterminez la solution $X \in \mathbb{R}^3$ de norme minimale du système $AX = B$ où*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

2) Former la matrice $Y = A^t(AA^t)^{-1}$. Montrer que Y est un inverse à droite de A et que la solution de la norme minimale du système ci-dessus peut s'écrire sous la forme $X = YB$.

Corrigé.

1) Le système est compatible et sa solution générale s'écrit, quels que soient α, β,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha - \beta \\ \beta - 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cherchons la valeur de λ qui minimise la norme $\|X\|$ de X ou de façon équivalente celle qui minimise $\|X\|^2$, soit

$$\begin{aligned} \|X\|^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= (3\alpha - \beta - 2\lambda)^2 + (\beta - 2\alpha + \lambda)^2 + \lambda^2 \\ &= 6\lambda^2 + \lambda(-16\alpha + 6\beta) + (13\alpha^2 + 2\beta^2 - 10\alpha\beta). \end{aligned}$$

Une fonction quadratique de type $a\lambda^2 + b\lambda + c$ avec $a > 0$ admet un minimum pour $\lambda = -\frac{b}{2a}$. La solution de norme minimale est donc obtenue pour

$$\lambda = -\frac{-16\alpha + 6\beta}{12} = \frac{8\alpha - 3\beta}{6}.$$

On trouve dès lors la solution de norme minimale en remplaçant λ par cette valeur dans l'expression de la solution générale, i.e.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3\alpha - \beta \\ \beta - 2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{8\alpha - 3\beta}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18\alpha - 6\beta - 2(8\alpha - 3\beta) \\ -12\alpha + 6\beta + 8\alpha - 3\beta \\ 8\alpha - 3\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2\alpha \\ -4\alpha + 3\beta \\ 8\alpha - 3\beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2) On calcule successivement

$$\begin{aligned}
Y &= A^t(AA^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La matrice Y est un inverse à droite de A puisque :

$$AY = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

On calcul maintenant $X = YB = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2\alpha \\ -4\alpha + 3\beta \\ 8\alpha - 3\beta \end{pmatrix}$, qui permet de retrouver la solution de norme minimale calculée à la question (1).

Les λ−matrices et calcul fonctionnel matriciel

Exercice 6.38. *Pour* $A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 1-\lambda \\ 5\lambda + 2 & \lambda^2 - 3 \end{pmatrix}$ *et* $C(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$*, calculer* $A_D(C)$ *et* $A_G(C)$*, puis déduire le quotient et le reste de la division à droite et à gauche de* $A(\lambda)$ *sur* $B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$.

Corrigé.

On a $A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^2 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = A^{(2)}\lambda^2 + A^{(1)}\lambda + A^{(0)}$.

Donc,

$$\begin{aligned}
A_D(C) &= A^{(2)}C^2 + A^{(1)}C + A^{(0)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 37 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_G(C) &= C^2A^{(2)} + CA^{(1)} + A^{(0)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 22 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercice 6.39.

1) Soit $p_1(\lambda)$; $p_2(\lambda)$; $q_1(\lambda)$ et $q_2(\lambda)$ quatre polynômes. Donner la division à droite et à gauche de la matrice $A(\lambda) = \begin{pmatrix} p_1(\lambda) & 0 \\ 0 & p_2(\lambda) \end{pmatrix}$ sur la matrice $B(\lambda) = \begin{pmatrix} q_1(\lambda) & 0 \\ 0 & q_2(\lambda) \end{pmatrix}$.

2) Soit $A(\lambda)$ une $\lambda-$matrice d'ordre 2. Sous quelles conditions sur les coefficients de $A(\lambda)$, cette matrice est-elle divisible sur la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec un reste nul ?

Corrigé.

1) Remarquons que $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ sont deux $\lambda-$matrices diagonales, donc :

$$\mathbf{Q}_d(\lambda) = \mathbf{Q}_g(\lambda) \text{ et } \mathbf{R}_d(\lambda) = \mathbf{R}_g(\lambda).$$

1. Si $\deg A(\lambda) < \deg B(\lambda)$, c'est à dire $\max(\deg p_1, \deg p_2) < \max(\deg q_1, \deg q_2)$, on obtient :
$$\mathbf{Q}_d(\lambda) = \mathbf{Q}_g(\lambda) = 0 \text{ et } \mathbf{R}_d(\lambda) = \mathbf{R}_g(\lambda) = A(\lambda).$$
2. Si $\deg A(\lambda) \geq \deg B(\lambda)$:
Supposons que $\deg A(\lambda) = \deg p_1$. Donc, $\deg p_1 \geq \deg q_1$ car $\deg p_1 \geq \max(\deg q_1, \deg q_2)$. Il existe alors deux polynômes s_1 et r_1 tels que
$$p_1 = s_1 q_1 + r_1.$$
De plus, si $\deg p_2 \geq \deg q_2$, il existe deux autre polynômes s_2 et r_2 tels que
$$p_2 = s_2 q_2 + r_2.$$
Ainsi :
$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 q_1 + r_1 & 0 \\ 0 & s_2 q_2 + r_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{Q}_d(\lambda) B(\lambda) + \mathbf{R}_d(\lambda). \end{aligned}$$
Si $\deg p_2 < \deg q_2$, on obtient :
$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & {}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 q_1 + r_1 & 0 \\ 0 & 0.q_2 + p_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{Q}_d(\lambda) B(\lambda) + \mathbf{R}_d(\lambda). \end{aligned}$$

2) On considère une $\lambda-$matrice $A(\lambda)$ de la forme

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$$

sachant que p_1, p_2, p_3 et p_4 sont tous des polynômes en λ. $A(\lambda)$ est divisible par $B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec un reste nul revient à dire qu'il existe une $\lambda-$matrice $Q(\lambda) = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix}$ telle que

$$A(\lambda) = Q(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)Q(\lambda).$$

$$\begin{aligned} A(\lambda) = Q(\lambda)B(\lambda) \quad &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = \lambda q_1 \\ p_2 = \lambda q_2 \\ p_3 = \lambda q_3 \\ p_4 = \lambda q_4 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc pour que $A(\lambda)$ soit divisible par $B(\lambda)$ avec un reste nul il faut et il suffit que les coefficients de $A(\lambda)$ soient des polynômes homogène (c'est à dire que le terme constant dans chaque polynôme est nul).

Exercice 6.40. *Déterminer la division à droite et à gauche de $A(\lambda)$ sur $B(\lambda)$ pour $A(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 2\lambda^3 - 1 \\ 3\lambda^2 + 1 & 2\lambda \end{pmatrix}$ et $B(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda^2 & \lambda \\ 1 & 3\lambda^2 \end{pmatrix}$.*

Corrigé.
Division à droite :

$$\begin{aligned} A(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 2\lambda^3 - 1 \\ 3\lambda^2 + 1 & 2\lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= A^{(3)}\lambda^3 + A^{(2)}\lambda^2 + A^{(1)}\lambda + A^{(0)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda^2 & \lambda \\ 1 & 3\lambda^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= B^{(2)}\lambda^2 + B^{(1)}\lambda + B^{(0)}. \end{aligned}$$

Posons $A_1 = A^{(3)}[B^{(2)}]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A_1(\lambda) = A(\lambda) - A_1\lambda^{3-2}B(\lambda) &= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\lambda & -1 \\ 3\lambda^2 + 1 & 2\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= A_1^{(2)}\lambda^2 + A_1^{(1)}\lambda + A_1^{(0)}. \end{aligned}$$

Vu que $\deg A_1(\lambda) = 2 = \deg B(\lambda)$, on pose : $A_2 = A_1^{(2)}[B^{(2)}]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$$A_2(\lambda) = A_1(\lambda) - A_2\lambda^{2-2}B(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\lambda & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Comme $\deg A_2(\lambda) < \deg B(\lambda)$, on obtient :

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= A_1(\lambda) + A_1\lambda B(\lambda) = A_2(\lambda) + A_2B(\lambda) + A_1\lambda B(\lambda) \\ &= (A_1\lambda + A_2)B(\lambda) + A_2(\lambda) = Q_d(\lambda)B(\lambda) + R_d(\lambda) \end{aligned}$$

avec
$$Q_d(\lambda) = A_1\lambda + A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3}\lambda \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } R_d(\lambda) = A_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\lambda & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Division à gauche : Posons $M(\lambda) = A(\lambda)^t$ et $N(\lambda) = B(\lambda)^t$, nous avons donc :

$$\begin{aligned} M(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 3\lambda^2+1 \\ 2\lambda^3-1 & 2\lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= M^{(3)}\lambda^3 + M^{(2)}\lambda^2 + M^{(1)}(\lambda) + M^{(0)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda^2 & 1 \\ \lambda & 3\lambda^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= N^{(2)}\lambda^2 + N^{(1)}\lambda + N^{(0)}. \end{aligned}$$

$$M_1 = M^{(3)}[N^{(2)}]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_1(\lambda) = M(\lambda) - M_1\lambda^{3-2}N(\lambda) &= \begin{pmatrix} 2\lambda & 3\lambda^2+1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= M_1^{(2)}\lambda^2 + M_1^{(1)}\lambda + M_1^{(0)}. \end{aligned}$$

Comme $\deg M_1(\lambda) = 2 = \deg N(\lambda)$, on définit :

$$M_2 = M_1^2[N^{(2)}]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_2(\lambda) = M_1(\lambda) - M_2N(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Comme $\deg M_2(\lambda) < \deg N(\lambda)$, on obtient :

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= (M_1\lambda + M_2)N(\lambda) + M_2(\lambda) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\lambda^2 & 1 \\ \lambda & 3\lambda^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= Q(\lambda)N(\lambda) + R(\lambda). \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} A(\lambda) = M(\lambda)^t &= N(\lambda)^tQ(\lambda)^t + R(\lambda)^t \\ &= B(\lambda)Q_g(\lambda) + R_g(\lambda) \end{aligned}$$

avec $Q_g(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $R_g(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 6.41. *On donne* $B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2+1 & 3\lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda^2-3\lambda+2 \end{pmatrix}$ *et* $C(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+2 & \lambda \\ \lambda-3 & \lambda+1 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer* $A(\lambda) = B(\lambda)C(\lambda)$.
2. *Trouver deux* $\lambda-$*matrices* $Q(\lambda)$ *et* $R(\lambda)$ *de degré au plus un, telles que* $A(\lambda) = Q(\lambda)B(\lambda) + R(\lambda)$.

Corrigé.

$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^3+5\lambda^2-7\lambda-1 & \lambda^3+3\lambda^2 \\ \lambda^3-5\lambda^2+11\lambda-10 & \lambda^3-\lambda^2-3\lambda+2 \end{pmatrix}$, $Q(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+4 & \lambda+3 \\ \lambda-6 & \lambda-1 \end{pmatrix}$
et $R(\lambda) = \begin{pmatrix} -9\lambda+1 & -\lambda-9 \\ 13\lambda-6 & 9\lambda+10 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.42. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ -7 & -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ *dont le polynôme caractéristique est* $P_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)^2$.
Calculer les matrices constituantes de A *puis calculer* $e^A, \sqrt{3 - A}$ *et* $\dfrac{1}{A-4}$.

Corrigé.

Posons

$$\begin{aligned} p_{11}(\lambda) &= (\lambda - 2)^2(\lambda - 1) \\ p_{12}(\lambda) &= (\lambda - 2)^2 \\ p_{21}(\lambda) &= (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 \\ p_{22}(\lambda) &= (\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{array}{rcl} p_{11}(A) & = & p_{11}(1)Z_{10} + p'_{11}(1)Z_{11} + p_{11}(2)Z_{21} + p'_{11}(2)Z_{22} \\ & = & p'_{11}(1)Z_{11} = Z_{11}, \end{array}$$

donc

$$Z_{11} = (A - 2I_4)^2(A - I_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{array}{rcl} p_{12}(A) & = & p_{12}(1)Z_{10} + p'_{12}(1)Z_{11} + p_{12}(2)Z_{21} + p'_{12}(2)Z_{22} \\ & = & p_{12}(1)Z_{10} + p'_{12}(1)Z_{11} = Z_{10} - 2Z_{11}, \end{array},$$

donc

$$Z_{10} = p_{12}(A) + 2Z_{11} = (A - 2I_4) - 2Z_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{array}{rcl} p_{21}(A) & = & p_{21}(1)Z_{10} + p'_{21}(1)Z_{11} + p_{21}(2)Z_{21} + p'_{21}(2)Z_{22} \\ & = & p'_{21}(2)Z_{22} = Z_{22}, \end{array},$$

donc

$$Z_{22} = (A - I_4)^2(A - 2I_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{array}{rcl} p_{22}(A) & = & p_{22}(1)Z_{10} + p'_{22}(1)Z_{11} + p_{22}(2)Z_{21} + p'_{22}(2)Z_{22} \\ & = & p_{22}(2)Z_{21} + p'_{22}(2)Z_{22} = Z_{21} + 2Z_{22}, \end{array},$$

donc

$$Z_{21} = p_{22}(A) - 2Z_{22} = (A - I_4)^2 - 2Z_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a pour toute fonction analytique en 0 dont le rayon de convergence est plus grand que 2.

$$f(A) = f(1)Z_{10} + f'(1)Z_{11} + f(2)Z_{21} + f'(2)Z_{22}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} e^A &= e\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}\right) \\ &+ e^2\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^2 & e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 & 0 \\ 2e^2 - e & 2e^2 & 3e & e \\ 3e - 5e^2 & -5e^2 & -4e & -e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sqrt{3 - A} &= \sqrt{3 - 1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{3 - 1}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \\ &+\sqrt{3 - 2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{3 - 2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 - \frac{9}{4}\sqrt{2} & -1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{11}{2}\sqrt{2} - 5 & \frac{5}{2} & \sqrt{2} & \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{A - 4} &= \frac{1}{1 - 4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{(1 - 4)^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \\ &+\frac{1}{2 - 4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{(2 - 4)^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{9}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{19}{18} & \frac{5}{4} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 6.43. *Montrer que pour toute matrice carrée vérifiant* $A^2 = \rho I$, $\rho \in \mathbb{C}$, *alors* $e^A = \cosh(\sqrt{\rho})I + \frac{\sinh(\sqrt{\rho})}{\sqrt{\rho}}A$.

Corrigé

Si $A^2 = \rho I$, on a :

$$\begin{aligned}
e^A &= I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ...\\
&= I + A + \frac{\rho}{2!}I + \frac{A^3}{3!} + \frac{\rho^2}{4!}I + \frac{A^5}{5!} + ...\\
&= (1 + \frac{\rho}{2!} + \frac{\rho^2}{4!} + ...)I + (1 + \frac{\rho}{3!} + \frac{\rho^2}{5!} + ...)A\\
&= (1 + \frac{\sqrt{\rho}}{2!} + \frac{(\sqrt{\rho})^2}{4!} + ...)I + (1 + \frac{\left(\sqrt{\rho}\right)^2}{3!} + \frac{(\sqrt{\rho})^4}{5!} + ...)A\\
&= \cosh(\sqrt{\rho})I + (1 + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left[\frac{\left(\sqrt{\rho}\right)^3}{3!} + \frac{(\sqrt{\rho})^5}{5!} + ...\right])A\\
&= \cosh(\sqrt{\rho})I + (1 + \frac{1}{\sqrt{\rho}}[\sinh(\sqrt{\rho}) - \sqrt{\rho}])A\\
&= \cosh(\sqrt{\rho})I + \frac{\sinh(\sqrt{\rho})}{\sqrt{\rho}}A.
\end{aligned}$$

Exercice 6.44. *Soit A une matrice réelle telle que* $A^3 = \rho A$, $\rho \in \mathbb{R}$. *Calculer* e^A *et en déduire son expression dans le cas de la matrice réelle :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé.

Comme $A^3 = \rho A$, il vient que

$$\begin{aligned}
e^A &= I + \left[A + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} + ...\right] + \left[\frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} + ...\right]\\
&= I + \left[1 + \frac{\rho}{3!} + \frac{\rho^2}{5!} + ...\right]A + \left[\frac{1}{2!} + \frac{\rho}{4!} + \frac{\rho^2}{6!} + ...\right]A^2
\end{aligned}$$

Pour $\rho > 0$,

$$\begin{aligned}
e^A &= I + \left[1 + \frac{(\sqrt{\rho})^2}{3!} + \frac{(\sqrt{\rho})^4}{5!} + ...\right]A + \left[\frac{1}{2!} + \frac{(\sqrt{\rho})^2}{4!} + \frac{(\sqrt{\rho})^4}{6!} + ...\right]A^2\\
& I + \left[1 + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(\frac{(\sqrt{\rho})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{\rho})^5}{5!} + ...\right)\right]A + \frac{1}{\rho}\left[\frac{(\sqrt{\rho})^2}{2!} + \frac{(\sqrt{\rho})^4}{4!} + \frac{(\sqrt{\rho})^6}{6!} + ...\right]A^2\\
&= I + \frac{\sinh(\sqrt{\rho})}{\sqrt{\rho}}A + \left[\frac{-1 + \cosh(\sqrt{\rho})}{\rho}\right]A^2.
\end{aligned}$$

Pour $\rho < 0$, on a de la même manière :

$$e^A = I + \frac{\sinh(\sqrt{-\rho})}{\sqrt{-\rho}} A + \left[\frac{1-\cosh(\sqrt{-\rho})}{\rho}\right] A^2.$$

Si maintenant $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$, alors on a :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} -a^2-b^2 & -bc & ac \\ -bc & -a^2-c^2 & -ab \\ ac & -ab & -b^2-c^2 \end{pmatrix} \\ A^3 &= -(a^2+b^2+c^2)\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

c'est à dire $A^3 = -(a^2+b^2+c^2)A = \rho A$ avec $\rho = A^3 = -(a^2+b^2+c^2) < 0$. D'où,

$$e^A = I + \frac{\sinh\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} A + \left[\frac{1-\cosh\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{a^2+b^2+c^2}\right] A^2.$$

Exercice 6.45. *1) Calculer e^{tA}, où $t \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.*

2) Même question pour la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Corrigé.

1) La première étape est de de calculer les valeurs propres de la matrice A, solutions du polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I_2) = 0$.

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-1)+4 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{aligned}$$

Nous obtenons alors une valeur propre $\lambda = -1$ de multiplicité 2. Ainsi,

$$f(A) = f(-1)Z_{11} + f^{(1)}(-1)Z_{12}.$$

Choisissons $f(x) = 1$, on a $f(A) = I_2$ et alors $Z_{11} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Choisissons $f(x) = x - \lambda = x + 1$, on a $f(-1) = 0$ et $f^{(1)}(-1) = 1$, donc $A - \lambda I_2 = A + I_2 = Z_{12} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Si maintenant $f(x) = e^{tx}$, sa dérivée par rapport à x est $f^{(1)}(x) = te^{tx}$, et alors :

$$\begin{aligned} f(A) &= f(-1)Z_{11} + f^{(1)}(-1)Z_{12} = e^{-t}Z_{11} + te^{-t}Z_{12} \\ &= e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + te^{-t}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1+2t)e^{-t} & -2te^{-t} \\ 2te^{-t} & (1-2t)e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3-\lambda & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda+2)\left[(\lambda+3)^2 - 1\right] - [-1+\lambda+3] = -(\lambda+2)(\lambda+4)(\lambda+2) - (\lambda+2) \\ &= -(\lambda+2)\left[\lambda^2 + 6\lambda + 9\right] = -(\lambda+2)(\lambda+3)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, A admet une valeur propre simple $\lambda_1 = -2$ et une valeur propre double $\lambda_2 = -3$.

$$f(A) = f(\lambda_1)Z_{11} + f(\lambda_2)Z_{21} + f^{(1)}(\lambda_2)Z_{22}.$$

Si $f(x) = 1$, on a :

$$I_3 = Z_{11} + Z_{21}.$$

Si $f(x) = x - \lambda_2 = x + 3$, on a :

$$\begin{aligned} A - \lambda_2 I_3 &= (\lambda_1 - \lambda_2)Z_{11} + Z_{22} \\ A + 3I_3 &= Z_{11} + Z_{22}. \end{aligned}$$

Si $f(x) = (x - \lambda_2)^2 = (x+3)^2$, on a :

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I_3)^2 &= (\lambda_1 - \lambda_2)^2 Z_{11} \\ (A + 3I_3)^2 &= Z_{11}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$Z_{21} = I_3 - Z_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
Z_{22} &= A + 3I_3 - Z_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= e^{-2t} Z_{11} + e^{-3t} Z_{21} + te^{-3t} Z_{22} \\
&= e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + te^{-3t} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (t+1)e^{-3t} & -te^{-3t} & te^{-3t} \\ -e^{-2t} + (t+1)e^{-3t} & e^{-2t} - te^{-3t} & te^{-3t} \\ -e^{-2t} + e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} & e^{-3t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] F. Ayres JR, Matrices cours et problèmes, Serie Schaum, 1973.

[2] S. Bekkara, Cours de mathématiques avancées de l'ingénieur, ESGEE d'Oran, 2017.

[3] P. Lancaster, Lambda-matrices and vibrating systems, Permagon Press, 1966.

[4] K.T. Tang, Mathematical methods for engineers and scientists 1- Complex analysis, determinants and matrices, Springer, 2006.