MECANIQUE DU POINT MATERIEL

COURS ET EXERCICES POUR LES CLASSES PREPARATOIRES

Dr. Kessairi Khadra

Maitre de conférences A

Références et ouvrages recommandées

- *Mécanique du point matériel, Ahmed Fizazi*
- *Mécanique 1 er année MPSI, PCSI, PTSI, Hachette supérieure, 2003*
- *Cours de physique, Mécanique du point, Science sup, 2 eme Edition, DUNOD, 2007*
- *Mini manuel mécanique du point, DUNOD ,2008*
- *Physique tout en un, 1 er année, 3 eme edition, DUNOD, 2008*
- *Physique MPSI, PTSI, Le compagnon, DUNOD , 2011*

Pour saisir un cours de physique du point matériel

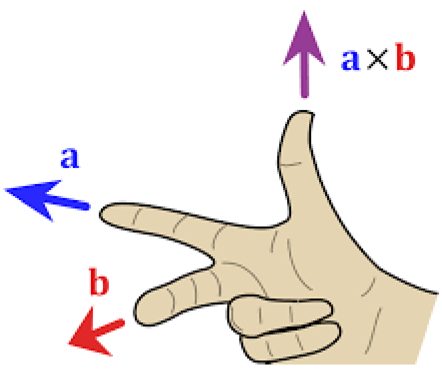
- *Travailler régulièrement, soyer à jours !*
- *Comprendre le cours et les démonstrations des formules pour résoudre les problèmes rencontrés, n'apprenez pas les formules par cœur !*
- *Essayer de résoudre les exercices avant les séances des travaux dirigés.*
- *Le cours et les travaux dirigées ne suffisent pas pour comprendre la mécanique : il faut travailler également tous seule, empruntez et travailler avec des livres de la bibliothèque!*

La physique pour un ingénieur

C'est important pour un ingénieur de comprendre et maitriser les bases de la mécanique classique qui sont à l'origine de nombreux concepts utilisés dans tous les domaines des sciences modernes. En effet, les lois de Newton, la quantité de mouvement, le moment cinétique, le moment d'inertie, le travail d'une force, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle, les lois de conservations, les interactions entre les corps, ….etc, apparaissent dans les différents domaines des sciences appliquées.

Table des matières

Rappels Mathématiques



A acquérir par l'étudiant en fin du chapitre

- ✓ *Déterminer les composantes d'un vecteur dans n'importe quelle base.*
- ✓ *Calculer un produit scalaire, un produit vectoriel et produit mixte à partir des composantes d'un vecteur.*

Cours N°1 : Rappels Mathématiques

Le cours N°1 est consacré aux mathématiques nécessaires pour aborder l'étude du mouvement d'un point matériel. Le cours est subdivisé en deux parties:

- L'analyse dimensionnelle
- L'analyse vectorielle

Partie 1 : Analyse Dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est une méthode pratique qui permet de vérifier les équations physiques et relations entre grandeurs physiques.

1.Dimension et Equation aux dimensions

Toute Grandeurs physique est caractérisée par sa dimension qui est une propriété associée à une unité. La dimension de la grandeur G se note [G], elle nous informe sur la nature physique de la grandeur.

Si G a la dimension d'une masse, on dit qu'elle est homogène a une masse. La relation [G] = M correspond à l'équation au dimension de la grandeur G.

2.Les dimensions et unités fondamentales

Grandeurs	Dimensions	Unités
Longueur	L	m (mètre)
Masse	M	Kg (Kilogramme)
Temps	T	s (seconde)
Température	θ	K(Kelvin)
Intensité de Courant	I	A (Ampère)

Intensité de Lumière	J	Cd (Candela)
Quantité de Matière	N	mol

Toute équation au dimension d'une grandeur G peut se mettre sous la forme :

$$[G] = L^a M^b T^c I^d \theta^e J^f N^g$$

Toute relation doit être homogène en dimension, si, $A = B + C.D$, Alors,

$$[A] = [B] + [C].[D]$$

3.Les unités dérivées

Toutes les unités des grandeurs physique dérivent des unités fondamentales cités au dessous, comme, Newton (N), Joule(J), Ohm (Ω).

4.Les unités secondaires

Il existe des unités secondaires pour quelque grandeurs comme la température T (°C), Volume V(l), Pression P (atmosphère), Energie E (Calorie).

5.Unité supplémentaire

L'unité officielle pour les angles plans est le radian (rad), qui s'ajoute aux 7 unités fondamentales.

6.Remarques

Les fonctions exponentiels, logarithmiques, trigonométriques, constantes et ce qui se trouve à l'intérieur de ces fonctions ont une dimension égale à 1.

$[e^x] = 1$, $[x] = 1$

$[Log\ x] = 1$, $[x] = 1$

$[\cos\alpha] = 1$, $[\alpha] = 1$

$[cst] = 1$

$[\pi] = 1$,

π est définit comme, $\pi = \frac{périmètre}{diamètre}$ d'un cercle, donc $[\pi] = \frac{[P]}{[D]} = \frac{L}{L} = 1$

$[\theta] = 1$

Exemple : si l est l'arc d'un cerle délimité par θ, alors, $[l] = [R.\theta] \Rightarrow [\theta] = \frac{[l]}{[R]} = \frac{L}{L} = 1$

7.Applications

1.1 : l'équation aux dimensions de la vitesse, l'accélération, Force et travail d'une force.

$v = \frac{x}{t}$, $[v] = \frac{[x]}{[t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1}$ (unité m/s)

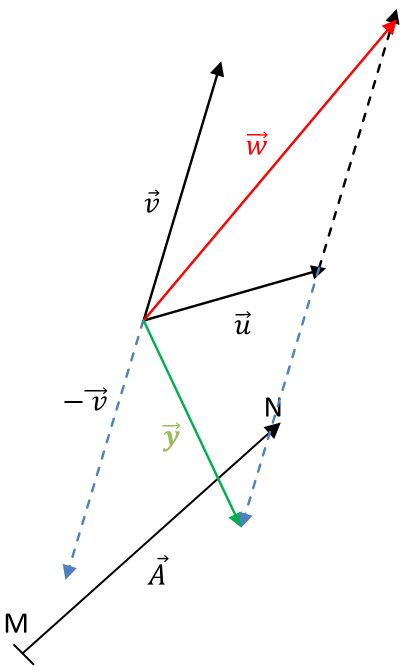
$a = \frac{v}{t}$, $[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$ (unité m/s^2)

$F = m.a$, $[F] = [m].[a] = MLT^{-2}$ (unité N = Kg.m/s^2)

$W = F.l$, $[W] = [F].[L] = ML^2T^{-2}$ (unité Joule = Kg.m^2/s^2)

Partie 2 : Analyse Vectorielle

En physique, on utilise des grandeurs comme la température T, la masse m, la charge q, qui sont définies par un nombre et une unité et d'autre grandeurs vectorielles qui nécessite un nombre, unité, direction et un sens comme, la vitesse $\vec{v}$, le poids $\vec{P}$, le champ electrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$. Les vecteurs obéissent aux lois de l'algèbre vectorielle.



1.Représentation d'un vecteur

$\vec{A}$ est un vecteur qui est un segment orienté avec :

- Origine M
- Module ou intensité $\|\overrightarrow{MN}\|$
- Direction « la droite (MN) »
- Sens « de M vers N »

2.Opérations élémentaires sur un vecteur

Addition vectorielle: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, $\vec{w}$ est obtenue par la règle du parallélogramme, avec,

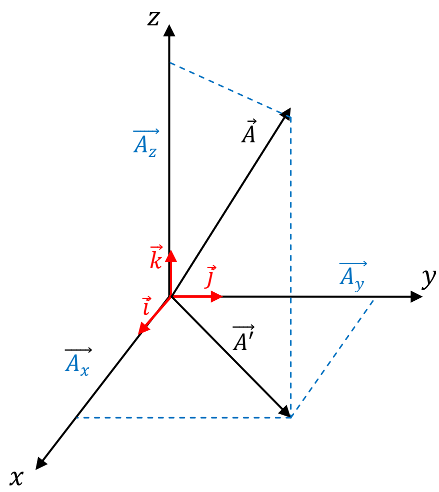
$$\|\vec{w}\| = \sqrt{u^2 + v^2 + 2.u.v\cos\theta}$$

θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Soustraction vectorielle: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{y}$

3.Composante d'un vecteur

Chaque vecteur peut être considéré comme étant la somme de deux vecteurs ou plus…



Pour simplifier la manipulation des vecteurs, il est commode d'introduire les vecteurs unitaires, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, situé sur les axes, $(Ox), (Oy), (Oz)$, respectivement.

4.un vecteur unitaire

Le vecteur unitaire est une grandeur sans dimension qui sert à définir une orientation dans l'espace. $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$. L'origine des vecteurs unitaire a été placée à l'intersection des axes pour des raisons pratiques. $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$, forment une base orthonormées. En général, un vecteur quelconque peut s'écrire comme la somme de 3 vecteurs parallèles à chacun des axes$(Ox), (Oy), (Oz)$, dans un système de coordonnées cartésiennes (O, x, y, z).

$\vec{A} = \overrightarrow{A'} + \overrightarrow{A_z}$, avec $\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y}$

D'où : $\vec{A} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y} + \overrightarrow{A_z} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$

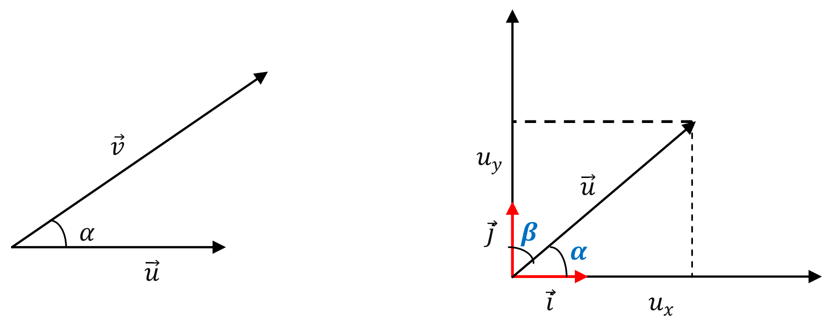
A_x, A_y, A_z sont les composantes du vecteurs $\vec{A}$ (Les projections algébriques sur les trois axes)

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Si on considère deux points $M_1\ (x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1)$, et $M_2(\ x_2\ ,\ y_2\ ,\ z_2)$, dans le repère (O, x, y, z) alors :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

Avec :



$$\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

5. Somme et Soustraction

$\vec{A}\begin{cases}A_x\\A_y\\A_z\end{cases}$ et $\vec{B}\begin{cases}B_x\\B_y\\B_z\end{cases}$,

Le vecteur $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}\begin{cases}A_x + B_x\\A_y + B_y\\A_z + B_z\end{cases}$

Le vecteur $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}\begin{cases}A_x - B_x\\A_y - B_y\\A_z - B_z\end{cases}$

6.Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le scalaire

$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$ Où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Si le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur unitaire $|\vec{v}| = 1$, alors le produit scalaire représente la projection du vecteur $\vec{u}$ sur la direction de $\vec{v}$

- Projection du vecteur $\vec{u}$ sur la direction du vecteur unitaire $\vec{\imath}$ est :

$$\vec{u}.\vec{i} = |\vec{u}\,|.|\vec{i}\,|.\cos\theta = u\cos\theta = u_x$$

- Projection du vecteur $\vec{u}$ sur la direction du vecteur unitaire $\vec{j}$ est :

$$\vec{u}.\vec{j} = |\vec{u}\,|.|\vec{j}\,|.\cos\beta = u\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = u.\sin\theta = u_y$$

6.1 Forme Analytique

$\vec{u}\begin{cases} u_x \\ u_y \\ u_z \end{cases}$ et $\vec{v}\begin{cases} v_x \\ v_y \\ v_z \end{cases}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

Car : $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0$

6.2 Propriétés

- Communtativité : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- Distribution par rapport à l'addition : $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$
- Linéarité : $(\alpha\vec{u}).(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta).(\vec{u}.\vec{v})$ avec α et β sont scalaires.

7.Produit Vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur $\vec{w}$, noté : $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ où $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

La direction de $\vec{w}$ est tel que $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$

$\vec{w}$ est perpendiculaire au plan contenant le vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le sens est déterminé par la règle de la main de droite et la règle de tire bouchon.

7.1 Règle de la main droite

- 1^{er} vecteur $\vec{u}$ est dans la direction du pouce
- 2^{eme} vecteur $\vec{v}$ est dans la direction de l'index
- le majeur indique le sens de $\vec{w}$

7.2 Règle du tire Bouchon

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont au dessus d'un tire-bouchon orienté perpendiculairement, si on tourne du vecteur $\vec{u}$ à $\vec{v}$ et le tire- bouchon monte alors le sens de $\vec{w}$ est vers le haut et vice –versa.

La norme du vecteur $\vec{w}$ est tel que : $|\vec{w}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\theta$

Avec, θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Car : $\vec{\imath}\wedge\vec{\imath} = \vec{\jmath}\wedge\vec{\jmath} = \vec{k}\wedge\vec{k} = \vec{0}$ et $\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{k}\wedge\vec{\imath} = \vec{\jmath}$, $\vec{\jmath}\wedge\vec{k} = \vec{\imath}$

$$|\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}| = |\vec{k}\wedge\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}\wedge\vec{k}| = 1$$

$\vec{w}$ mesure l'aire du parallélogramme.

7.3 Forme Analytique

$$\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (u_y v_z - u_z v_y)\vec{\imath} - (u_x v_z - u_z v_x)\vec{\jmath} + (u_x v_y - u_y v_x)\vec{k}$$

7.4 Propriétés

- Communtativité : $\vec{u}\wedge\vec{v} \neq \vec{v}\wedge\vec{u}$
- Distribution par rapport à l'addition : $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{w} + \vec{v}\wedge\vec{w}$
- Linéarité : $(\alpha\vec{u})\wedge(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta).(\vec{u}\wedge\vec{v})$ avec α et β sont scalaires.
- Non associatif : : $\overrightarrow{u_1}\wedge(\overrightarrow{u_2}\wedge\overrightarrow{u_3}) \neq (\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{v_2})\wedge\overrightarrow{v_3}$

7.5 Produit Mixte

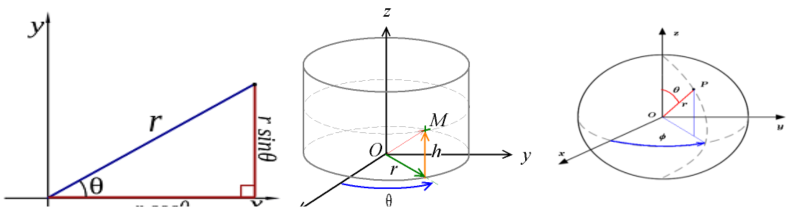
Le produit mixte des trois vecteurs $\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}$ est le scalaire $a = \vec{w}.(\vec{u}\wedge\vec{v})$, l'ordre des grandeurs est important.

a : mesure le volume du parallélépipède, constitué par les trois vecteur $\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}$

Dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, $a = (w_x\vec{\imath} + w_y\vec{\jmath} + w_z\vec{k}).\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = w_x(u_y v_z - u_z v_y) - w_y(u_x v_z - u_z v_x) + w_z(u_x v_y - u_y v_x)$

Chapitre I

Cinématique d'un point matériel



« *Le déplacement d'un objet dont l'accélération est constante pendant un certain intervalle de temps est égale à la vitesse de l'objet au milieu de l'intervalle multipliée par l'intervalle de temps* »

Théorème de Merton, XIV$^{\text{ème}}$ siècle, Université d'Oxford

A acquérir par l'étudiant en fin du chapitre

- ✓ Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$, le vecteur vitesse $\vec{v}$ (t) et le vecteur accélération $\vec{a}$ d'un point matériel à tout instant t dans les différentes bases, à savoir, cartésienne, cylindrique, sphérique et dans la base de Frenet.
- ✓ Déterminer la vitesse $\vec{v}$ (t) et accélération $\vec{a}$ d'un point matériel dans n'importe quel référentiel fixe ou mobile et être capable de faire la liaison entre eux.

Cours N°1 : Cinématique d'un point matériel

La cinématique est la branche de la physique qui décrit la manière dont un corps se déplace dans l'espace et dans le temps sans considérer les causes de ces mouvements.

La plupart des objets ou corps étudié par les physiciens sont en mouvement. Le mouvement apparait à toutes échelles de l'univers depuis les particules tels que les électrons, protons et les neutrons qui formes les atomes, jusqu'à la galaxie. On ne peut comprendre bien la nature si l'on n'est pas capable de définir clairement le mouvement. Le mouvement peut être ordonné, aléatoire, continue ou intermittent, ou même une combinaison de ces divers types de mouvements.

On peut citer par exemple :

Mouvement de translation : le mouvement de la voiture sur une route.

Mouvement de rotation : le mouvement de la terre sur elle-même ou le mouvement des électrons autours du noyau.

Mouvement de vibration : oscillation d'un système mass- ressort ou un pendule.

1.Un point matériel : un point matériel est tout corps dont les dimensions sont négligeable par rapport à la distance parcourut.

2.Notion de Référentiels

Le repos et le mouvement sont deux notions relatives : un observateur A immobile voit l'arbre dans une position fixe alors que le conducteur B d'une voiture roulant à proximité le voit en mouvement vers l'arrière, donc pour étudier le mouvement d'un point matériel, il faut à priori imposer un référentiel par rapport auquel le mouvement est analysé.

3.Le référentiel

Un référentiel est un ensemble de N point immobiles les un par rapport au autre.

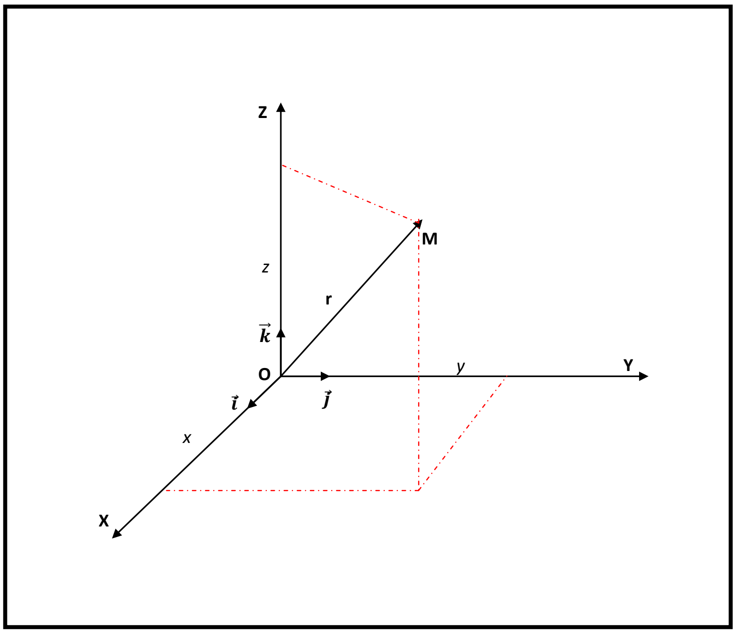
Exemple : Le référentiel de Kepler définit par le centre du soleil et trois étoiles lointain fixes.

Le repérage d'un point dans l'espace, une fois le référentiel choisi, consiste à définir un repère spatial ou système de coordonnés ou base.

Une base est constituée de trois vecteurs orthonormés directs, comme par exemple les coordonnées cartésiennes.

4.Repérage d'un point matériel dans l'espace avec les coordonnées cartesiennes

Si on considère un repère $R\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ dans le quel le point M est repéré par les positions x, y, z. Si les coordonnés du point M sont constante, le point M est au repos, cependant si au moins l'une d'elle varie, le corps est en mouvement par rapport au repère R.



Le vecteur $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ exprime le vecteur position en coordonnées cartésiennes.

5.La vitesse

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ d'un point matériel traduit le taux de variation de son vecteur position par rapport au temps.

5.1 La vitesse moyenne

La vitesse moyenne d'un point matériel entre deux instants t_i et t_f est définit par :

$$\overrightarrow{V_{moy}}\Big|_{t_i}^{t_f} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM_f} - \overrightarrow{OM_i}}{t_f - t_i}$$

$\Delta\overrightarrow{OM}$ est le vecteur déplacement du point matériel M du point M_i au point M_f entre les deux instants t_i et t_f

En valeur algébrique,

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

La vitesse moyenne elle dépend que du vecteur déplacement et l'intervalle du temps et elle ne dépend pas du trajet réel parcouru.

5.2 Vitesse instantanée

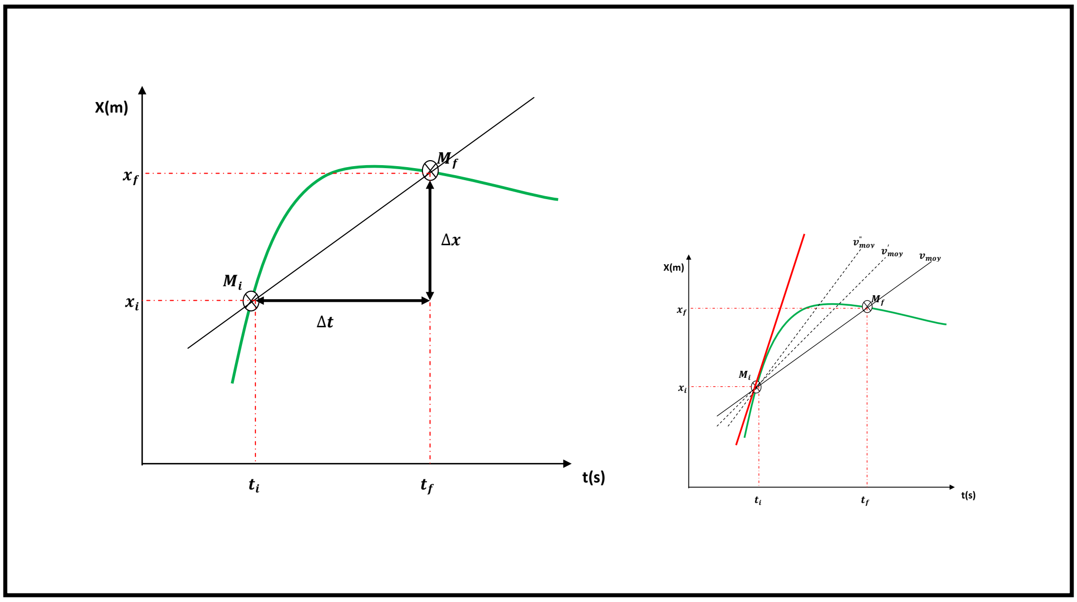
La vitesse instantanée est la vitesse d'un point matériel à un instant t à un point quelconque dans l'espace, obtenue en réduisant l'intervalle $[t_i, t_f]$ à $[t_i, t_i]$, tel que,

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Dans le cas d'un mouvement rectiligne, le repère est réduit à une origine O et un axe (Ox) , la vitesse du point matériel est la pente de la tangente du graphe de la composante de déplacement x en fonction de t au point t_i, comme indiqué dans la figure.

$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$

6.L'accélération



La vitesse pouvant varier avec le temps, ce changement introduit la notion accélération, par exemple quand une voiture dépasse un camion de 70 à 100 Km/h, on dit qu'elle accélère. Le vecteur accélération $\vec{a}$ traduit la variation de $\vec{v}$ en fonction du temps.

6.1 Accélération moyenne

$$\overrightarrow{a_{moy}}\Big|_{t_i}^{t_f} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{v_f} - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$

En valeur algébrique

$$a_{moy}\Big|_{t_i}^{t_f} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

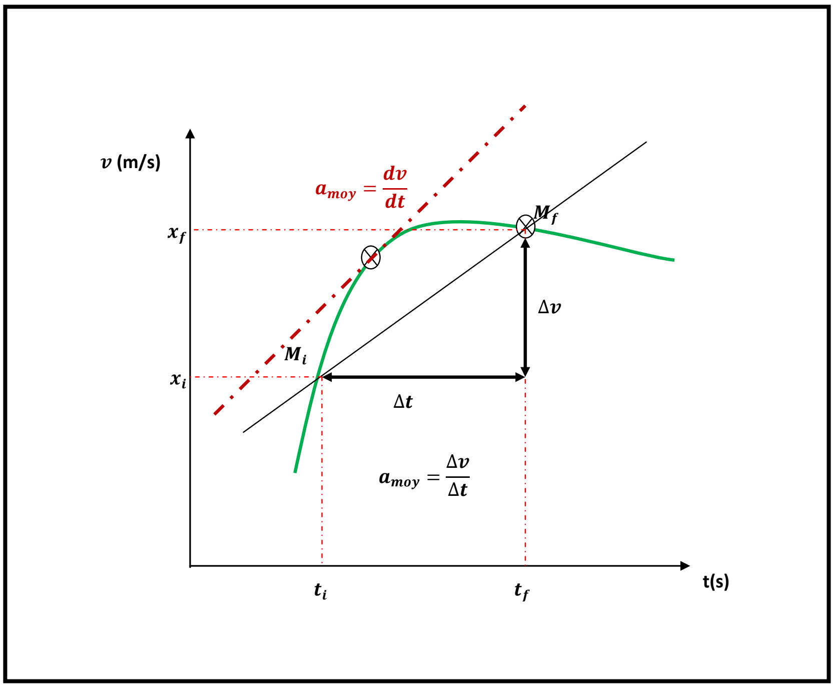
6.2 Accélération instantanée

Le passage à la grandeur instantanée s'effectue de façon analogue à celle de la vitesse, alors on définit

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Algébriquement, pour un mouvement rectiligne suivant(Ox), l'accélération instantanée est la ente de la tangente au diagramme de la vitesse en fonction du temps.

$$a_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$



6.3 Relations de passage de la vitesse v à la coordonné x

$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad dx = v_x(t).dt$

En intégrant, entre t_i et t_f

$$x(t_f) - x(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} v_x(t).dt$$

En connaissant la valeur de x à l'instant t_i et l'expression de la vitesse, on peux déterminer $x(t)$

6.4 Relations de passage de l'accélération a à la coordonné v

$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow dv_x = a_x(t)dt$

En intégrant, entre t_i et t_f

$$v(t_f) - v(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} a_x\,(t).\,dt$$

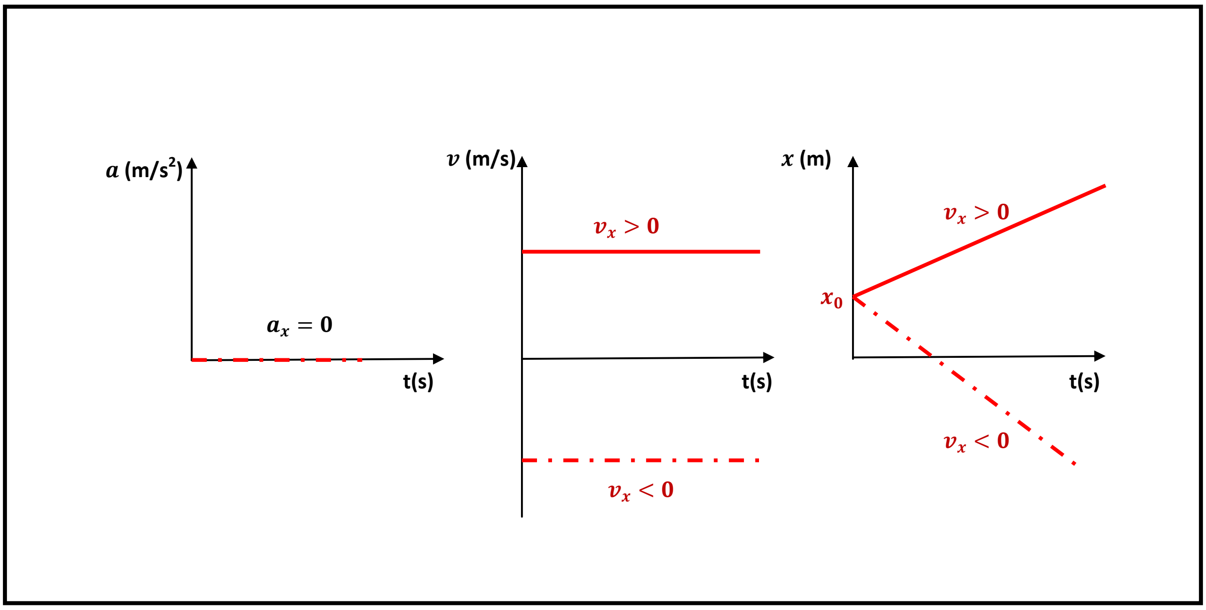
6.4.1 Mouvement rectiligne uniforme

v = cst $\Rightarrow a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_0^t v_x\,(t).\,dt = v_x.\,t + x_0$

6.4.2 Mouvement rectiligne uniformément varié

$a(t) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a.\,dt$

En intégrant,



$\int_{v_0}^{v} v = a \int_{t_0}^{t} dt = a\,(t - t_0) \Rightarrow v(t) = v_0 + a\,(t - t_0)$

En remplaçant l'expression de $v(t)$, dans l'équation ci-dessous, on obtient l'expression de $x(t)$.

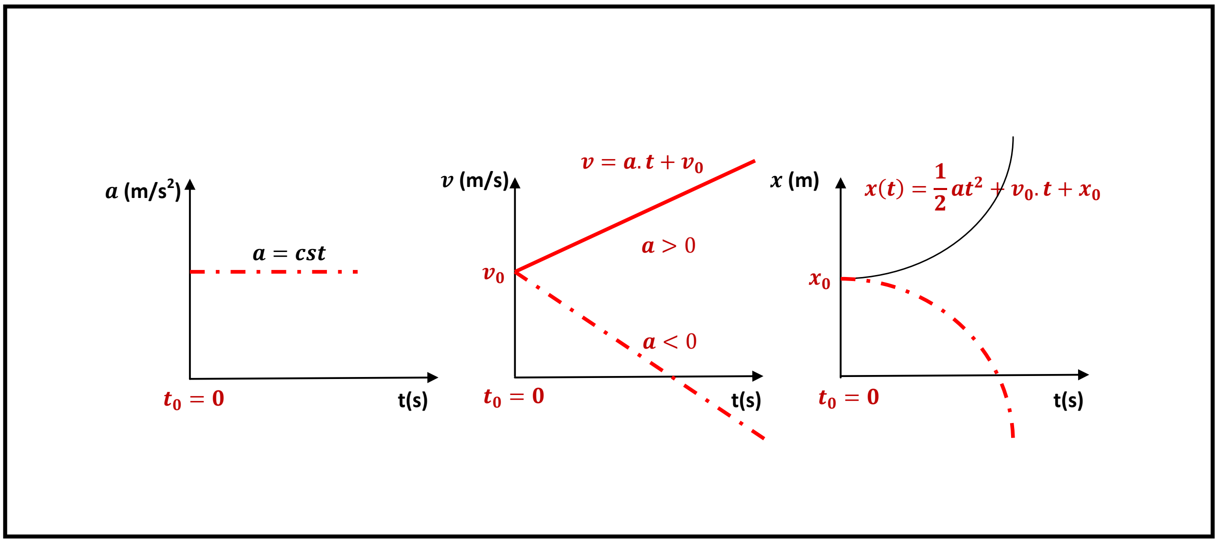
$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v.dt = \int_{t_0}^{t} v_0 + a\,(t - t_0).dt$$

$$x\,(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Pour $t = t_0 = 0$

$$x\,(t) = x_0 + v_0.t + \frac{1}{2}a.t^2$$

6.5 Formules indépendantes du temps pour un mouvement rectiligne



uniforme

A partir de l'expression de la vitesse et l'accélération du point matériel M

$v = \frac{dx}{dt}$ et $a = \frac{dv}{dt}$, on calcule l'intégrale de $\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a.dx$

Puisque le mouvement du point matériel M est uniforme, l'accélération a est constante, alors, on trouve que,

$$v^2 - v_0^2 = a\big(x - x_0\big)$$

Pour un mouvement rectiligne accéléré $\vec{a}.\vec{v} > 0$

Pour un mouvement rectiligne décéléré $\vec{a}.\vec{v} < 0$

Vecteur position, vitesse et accélération dans les différents systèmes de coordonnées.

Cours N°2 : Les Coordonnés cartésiennes

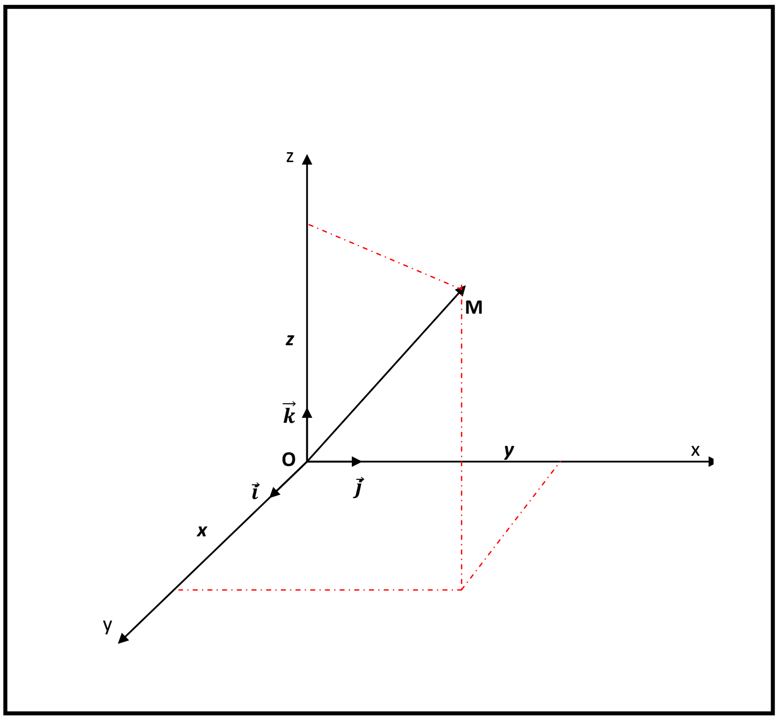
Le point matériel M est repéré par le vecteur position $\overrightarrow{OM} = X\,\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\,\vec{k}$

Le vecteur vitesse $\vec{V}$ est la dérivé du vecteur position $\overrightarrow{OM}$

Donc, $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{X}\,\vec{\imath} + \dot{Y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}$

Le vecteur accélération $\vec{a}$ est la dérivé du vecteur vitesse $\vec{V}$

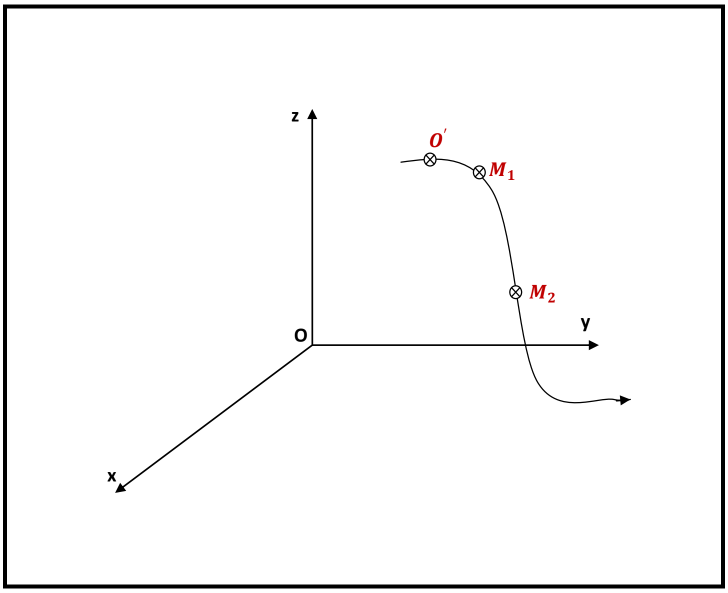
$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{X}\,\vec{\imath} + \ddot{Y}\,\vec{\jmath} + \ddot{Z}\vec{k}$$



Cours N°3 : La base de frénet

La trajectoire du point matériel M est curviligne, orienté dans un sens arbitraire. Le point O' est fixé, tel que, $\widehat{O'M}$ est l'abscisse curviligne du point M

$\widehat{M_1M_2} = \widehat{O'M_2} - \widehat{O'M_1} =$ s(t) représente la coordonnée curviligne.



On défini la vitesse et l'accélération curviligne par :

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

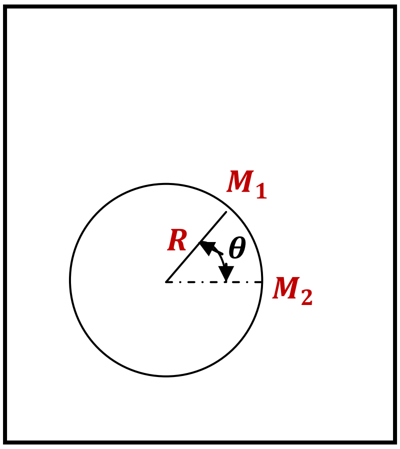
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

Pour un mouvement circulaire varié dont la trajectoire est un cercle de rayon R.

$$s = R.\theta$$

On peut calculer alors la vitesse et l'accélération curviligne à partir des équations précédentes et on trouve,

$$v = R.\frac{d\theta}{dt} \text{ et } v = R.\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



1.Projection algébrique de l'accélération et la vitesse dans la base de frenet

Le point M se déplace sur une courbe curviligne comme indiqué dans la figure, les vecteurs $\overrightarrow{u_t}$ et $\overrightarrow{u_N}$ forment une base orthonormé appelée la base de frenet. Cette base est lié au point M. Le vecteur $\overrightarrow{u_t}$ est orienté selon le sens choisit de la trajectoire et le vecteur $\overrightarrow{u_N}$ est orienté vers l'intérieure de la concavité de la courbe.

La vitesse du point M en coordonné de frenet est : $\vec{V} = v.\overrightarrow{u_t}$

L'accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} + v.\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt}$

Pour calculer le terme $\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt}$, on projette les vecteurs $\overrightarrow{u_t}$ et $\overrightarrow{u_N}$ sur la direction des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

$$\overrightarrow{u_t} = \cos\alpha\,\vec{\imath} + \sin\alpha\,\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{u_N} = -\sin\alpha\,\vec{\imath} + \cos\alpha\,\vec{\jmath}$$

Tel que : $\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\overrightarrow{u_N} = \dot{\alpha}\;\overrightarrow{u_N}$ et $\frac{d\overrightarrow{u_N}}{dt} = -\frac{d\alpha}{dt}\overrightarrow{u_t} = \dot{\alpha}\;\overrightarrow{u_t}$

On peut écrire aussi que $\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_t}}{d\alpha}.\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}\;\overrightarrow{u_N}$ et $\frac{d\overrightarrow{u_N}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_N}}{d\alpha}.\frac{d\alpha}{dt} = -\dot{\alpha}\;\overrightarrow{u_t}$

En remplaçant $\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt}$ dans l'expression de l'accélération, on trouve

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} + v.\dot{\alpha}\;\overrightarrow{u_N}$$

On sais que $ds = \rho.d\alpha$

avec ρ est le rayon de courbure de la trajectoire.

D'où l'expression de la vitesse curviligne $v = \frac{ds}{dt} = \rho\dot{\alpha}$

En remplaçant l'expression de $\dot{\alpha}$ dans l'expression de l'accéleration, on trouve que

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} + \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{u_N} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_N}$$

$\overrightarrow{a_t}$: l'accélération tangentielle dirigée dans le sens du mouvement.

$\overrightarrow{a_N}$: l'accélération normale orienté vers le coté de la concavité de la trajectoire.

$a_t = \frac{dv}{dt}$: indique que le module de la vitesse v change en fonction du temps.

$a_N = \frac{v^2}{\rho}$: indique que la direction du vecteur vitesse $\vec{V}$ varie au cours du mouvement et la trajectoire du point matériel M est curviligne

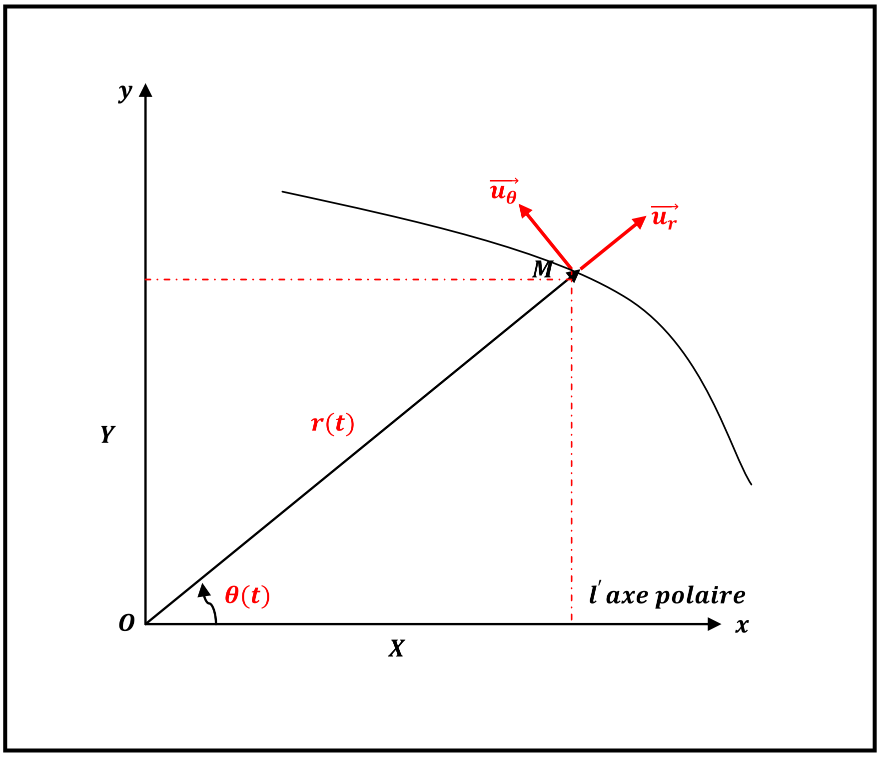
- ✓ Pour un mouvement rectiligne : $\rho \rightarrow \infty \Rightarrow a_N = 0$
- ✓ Pour mouvement circulaire uniforme : $\rho = R \Rightarrow a_N = \frac{v^2}{R}$ = cst et $a_t = 0$

Cours N°4 : Les coordonnés Polaires

Le système de coordonnée polaire est approprié pour l'étude des mouvements des mouvements en rotation

La position du point matériel M dans le plan (Oxy) est repéré par :

- Le rayon polaire $r(t) = \overrightarrow{OM}$
- L'angle polaire $\theta(t) = \left(\widehat{Ox,\overrightarrow{OM}}\right)$, (Ox) est l'axe polaire correspondant est la demi-droite d'angle $\theta = 0$
- $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$, vecteurs unitaires de la base polaire. $\overrightarrow{u_\theta}$ est obtenu par rotation de $\overrightarrow{u_r}$ d'un angle de $\pi/2$ dans le sens trigonométrique.



- Les coordonnés polaire r et θ du point matériel M sont lié au coordonnées cartésienne par :

$$\begin{cases} X = r\cos\theta \\ Y = r\sin\theta \end{cases}$$

1.Vecteur vitesse et accélération

$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$

$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\;\overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\overrightarrow{u_r}}$

tel que : $\begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\;\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases}$

En dérivant les deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$, on obtient : $\begin{cases} \dot{\overrightarrow{u_r}} = \dot{\theta}\;\overrightarrow{u_\theta} \\ \dot{\overrightarrow{u_\theta}} = -\dot{\theta}\;\overrightarrow{u_r} \end{cases}$

Le vecteur vitesse $\vec{V} = \dot{r}\;\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\;\overrightarrow{u_\theta} = V_r\overrightarrow{u_r} + V_\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$

V_r : la composante radiale de la vitesse

V_θ : la composante tangentielle de la vitesse

L'accéleration est la dérivé du vecteur vitesse $\vec{V}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + 2(\dot{r}\;\;\dot{\theta} + \;r\ddot{\theta}\;)\overrightarrow{u_\theta} = a_r\,\overrightarrow{u_r} + a_\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$$

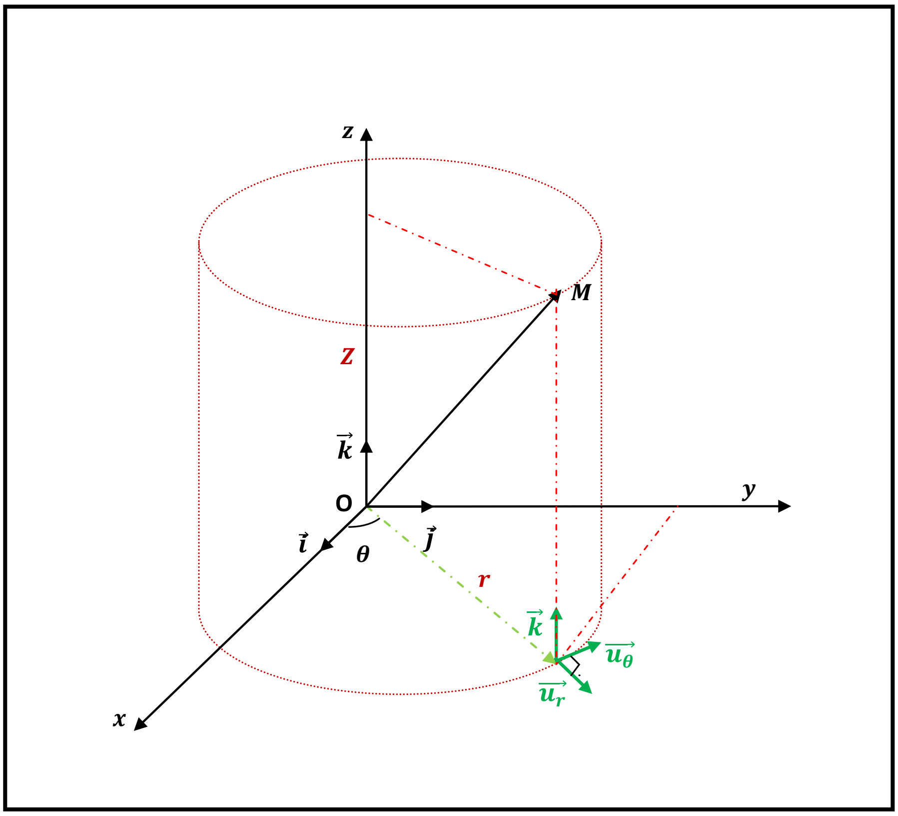
a_r : la composante radiale de l'accélération

a_θ : la composante tangentielle de l'accélération.

Cours N°5 Les coordonnées cylindriques

Le point matériel M est repéré en coordonnée cylindrique par les coordonnées polaire r , θ dans le plan (Oxy) et la coordonnée axiale z, comme indiqué dans la figure

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} + z\,\vec{k}$$



$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\ \overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\overrightarrow{u_r}} + \dot{z}\ \vec{k}$$

tel que : $\begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\ \vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases}$ et $\begin{cases} \dot{\overrightarrow{u_r}} = \dot{\theta}\ \overrightarrow{u_\theta} \\ \dot{\overrightarrow{u_\theta}} = -\dot{\theta}\ \overrightarrow{u_r} \end{cases}$

Le vecteur vitesse est :

$$\vec{V} = \dot{r}\ \overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\ \overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\ \vec{k} = V_r\overrightarrow{u_r} + V_\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + V_z\,\vec{k}$$

$$\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{\dot{r}^{\,2} + r\dot{\theta}^{\,2} + \dot{z}^{\,2}}$$

Le vecteur accélération est :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + 2\left(\dot{r}\;\;\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\;\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\,\vec{k} = a_r\,\overrightarrow{u_r} + a_\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + a_z\,\vec{k}$$

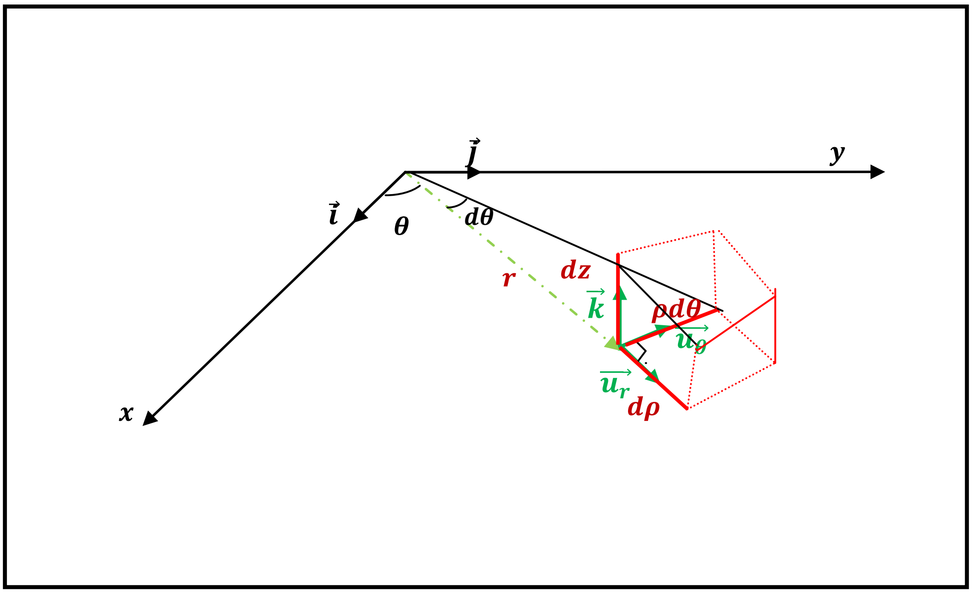
a_r : L'accélération radiale

a_θ : L'accélération transversale

a_z : L'accélération axiale

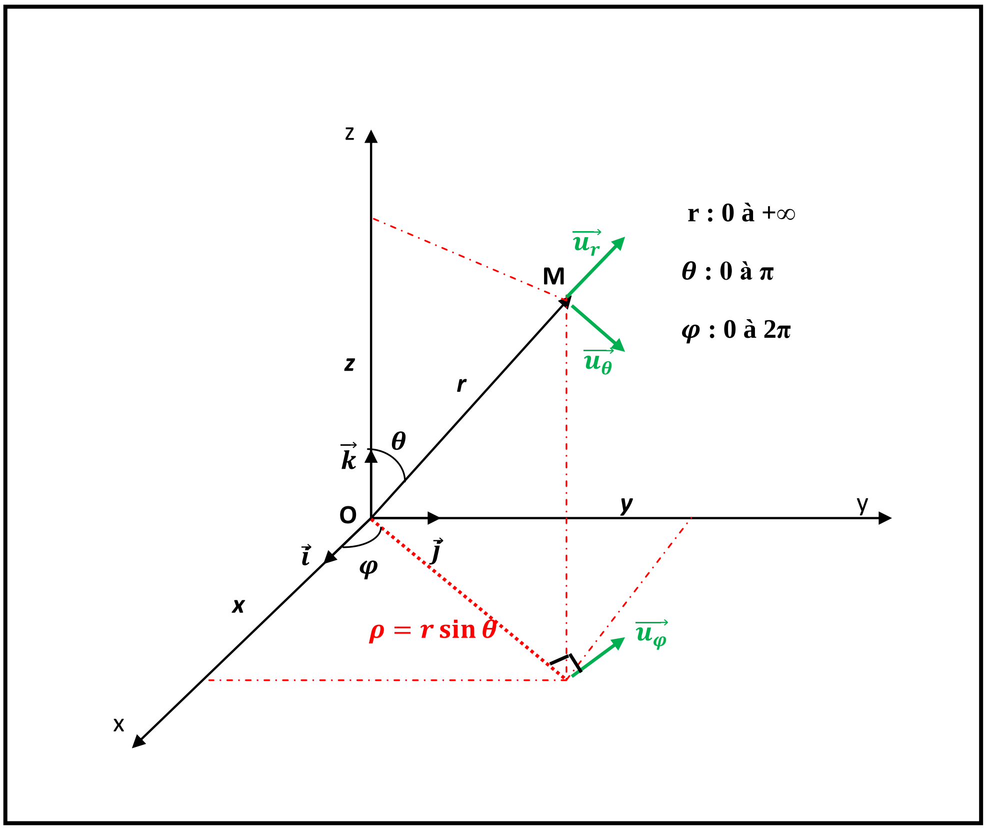
$$\overrightarrow{dOM} = dr\,\overrightarrow{u_r} + r\,\overrightarrow{u_\theta} + dz\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{dV} = dr\,.r\,d\theta.dz$$



Cours N°6 Les coordonnées sphériques

Le point matériel M est repéré en coordonnée sphériques par les coordonnées r , θ et φ, comme indiqué dans la figure ci dessous.



Dans ce système de coordonnées, la position du point matériel est définie pas le vecteur position$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$. La base orthonormée ($\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$, $\overrightarrow{u_\varphi}$) est une base mobile associé au point matériel M.

La relation entre les coordonnées cartésiennes et sphériques est comme suit :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\ \sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Afin de déterminer l'expression des vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$, $\overrightarrow{u_\varphi}$ dans la base cartésienne, on projette le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_r}$ initialement dans le plan $\vec{k}, \overrightarrow{u_\rho}$, tel que $\overrightarrow{u_\rho}$ est un vecteur unitaire dans le sens de ρ.

$$\overrightarrow{u_r} = \sin\theta\ \overrightarrow{u_\rho} + \cos\theta\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{u_\rho} = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$$

D'où l'expression de $\overrightarrow{u_r} = \sin\theta\ \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\vec{k}$

Le vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$ est calculé par :

$$\overrightarrow{u_\theta} = \frac{\partial\overrightarrow{u_r}}{\partial\theta} = \cos\theta\ \cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k}$$

Par contre, le vecteur $\overrightarrow{u_\varphi}$, est déterminé par deux méthodes

- projection sur le plan (Oxy)

$$\overrightarrow{u_\varphi} = -\sin\varphi\vec{\imath} + \cos\varphi\vec{\jmath}$$

- Le calcul du produit vectoriel $\overrightarrow{u_\varphi} \wedge \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\theta}$

Le vecteur vitesse est alors,

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\ \overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\overrightarrow{u_r}}$$

En dérivant le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ et le vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$ par rapport au temps en trouve :

$$\dot{\overrightarrow{u_r}} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\;\overrightarrow{u_\varphi}$$

$$\dot{\overrightarrow{u_\theta}} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{\varphi}\cos\theta\;\overrightarrow{u_\theta}$$

L'expression de la dérivé du vecteur $\overrightarrow{u_\varphi}$ est :

$$\dot{\overrightarrow{u_\varphi}} = -\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{\imath} - \dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{\jmath} = \dot{\varphi}(\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}\,)$$

En utilisant les deux expressions de $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$, on calcule

$$\overrightarrow{u_r}\sin\theta = \sin^2\theta\,\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin^2\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \sin\theta\cos\theta\vec{k}$$

$$\overrightarrow{u_\theta}\cos\theta = \cos^2\theta\,\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos^2\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \cos\theta\sin\theta\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{u_r}\sin\theta + \overrightarrow{u_\theta}\cos\theta = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$$

L'expression de la vitesse et l'accélération sont :

- ✓ $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\;\overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\overrightarrow{u_r}} = \dot{r}\;\overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\;\dot{\varphi}\,\overrightarrow{u_\varphi}$
- ✓ $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{r}\;\overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\overrightarrow{u_r}} + \dot{r}\;\dot{\theta}\;\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\;\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\,\dot{\overrightarrow{u_\theta}} + \dot{r}\,\dot{\varphi}\sin\theta\;\overrightarrow{u_\varphi} + r\,\ddot{\varphi}\sin\theta\;\overrightarrow{u_\varphi} +$
  $r\dot{\varphi}\;\dot{\theta}\;\cos\theta\;\;\overrightarrow{u_\varphi} + r\dot{\varphi}\;\;\sin\theta\,\dot{\overrightarrow{u_\varphi}}$

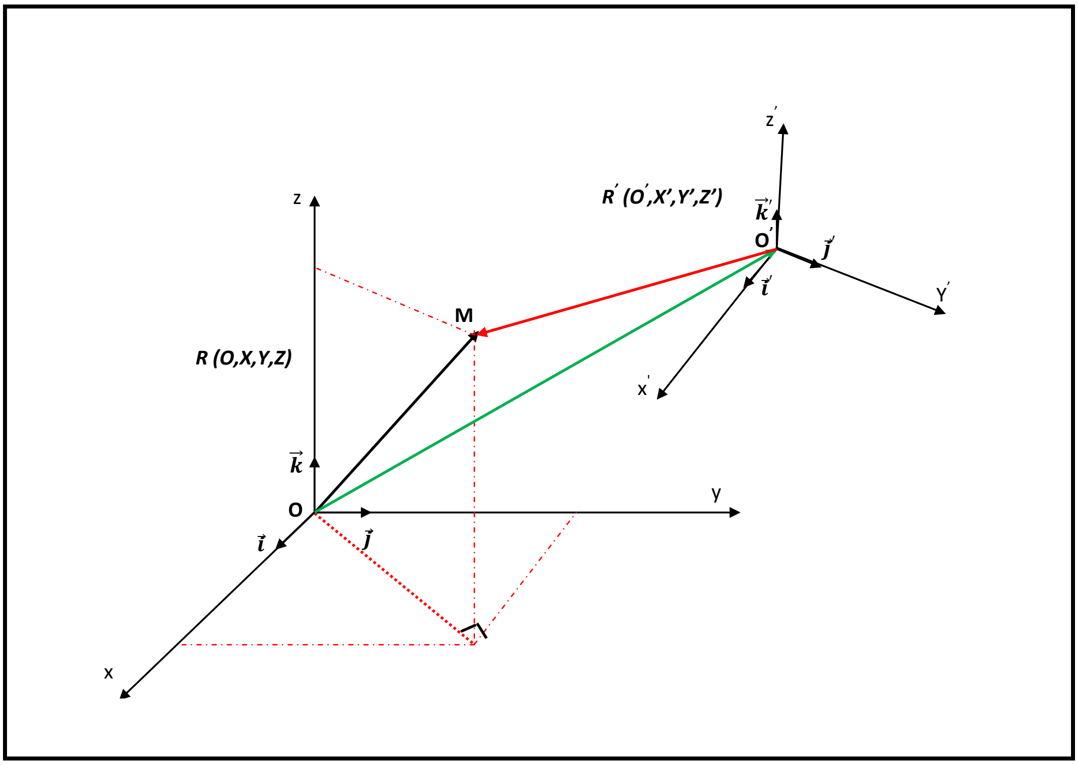
En remplaçant les expressions de $\dot{\overrightarrow{u_r}}$, $\dot{\overrightarrow{u_\theta}}$, $\dot{\overrightarrow{u_\varphi}}$, on trouve :

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\overrightarrow{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\;\dot{\theta} - r\;\dot{\varphi}^{\,2}\sin\theta\;\cos\theta\right)\overrightarrow{u_\theta}$$
$$+\left(r\;\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\,\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\;\dot{\theta}\;\;\right)$$

Cours N°7 Changement de référentiels

Le Mouvement et le repos sont des notions essentielles relative, car cela dépend de la position du Mobile vis-à-vis le référentiel choisi, jusqu'à là, on a étudié le Mouvement dans un repère fixe R mais si on a 2 mobile liés au même repère qu'elle est la vitesse de l'un par rapport à l'autre ?? et si on a 2 repères différents en mouvement l'un par rapport à l'autre quel serait le vecteur vitesse et accélération selon le repère choisit par l'observateur.

On considère deux repères R et R\`, R (O, x, y, z) est un repère absolu (repère fixe), R\` (O\`, x\`, y\`, z\`) est un repère relative (repère mobile par rapport à R)



Le point matériel M est repéré par rapport au repère R (O, x, y, z) par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Le point matériel M est repéré par rapport au repère R' (O', x', y', z') par le vecteur position $\overrightarrow{O'M}$

$$\overrightarrow{O'M} = x`\vec{\imath}` + y`\vec{\jmath}` + z`\vec{k}`$$

On sais que, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO`} + \overrightarrow{O`M}$

1.Loi de décomposition de vitesse

En dérivant le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par rapport à R (O, x, y, z) , on trouve que :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}_R = \frac{d\overrightarrow{OO`}}{dt}_R + \frac{d\overrightarrow{O`M}}{dt}_R = \frac{d\overrightarrow{OO`}}{dt} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}_R$ représente la vitesse absolu « vitesse de M par rapport à R(O, x, y, z) »

$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO`}}{dt} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$, représente la vitesse d'entrainement « vitesse de R′(O′, x′, y′, z′) par rapport à R(O, x, y, z) »

$\overrightarrow{v_r} = \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$, représente la vitesse relative « vitesse de M par rapport à R(O, x, y, z) «

D'où la loi de composition de vitesse :

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}$$

- ✓ Le repère R et R′ sont fixe l'un par rapport à l'autre, $\overrightarrow{v_e} = \vec{0}$
- ✓ R' est en mouvement de translation par rapport à R, les vecteurs unitaires $\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}'$ sont cste donc,

$$\frac{d\vec{\imath}'}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}'}{dt} = \frac{d\vec{k}'}{dt} = 0 \;\Rightarrow \overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO`}}{dt}$$

- ✓ Point matériel M fixe par rapport à R′, $\overrightarrow{v_r} = \vec{0}$

2.Loi de décomposition d'accélérations

L'accélération absolu $\overrightarrow{a_a}$ qui représente l'accélération du point M par rapport au repère R(O, x, y, z)

$$\vec{a_a} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R = \left.\frac{d\vec{v_a}}{dt}\right|_R$$

$$= \left[\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{\imath'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}\right] + \left[\vec{\imath'}\frac{d^2x'}{dt^2} + j'\frac{d^2y'}{dt^2} + k'\frac{d^2z'}{dt^2}\right]$$

$$+ 2\left[\frac{dx'}{dt}\frac{di'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{dj'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{dk'}{dt}\right] = \vec{a_e} + \vec{a_r} + \vec{a_c}$$

$\vec{a_e}$; Accélération d'entrainement

$\vec{a_r}$: Accélération relative

$\vec{a_C}$: Accélération de Coriolis

L'accélération de Coriolis $\vec{a_C} = \vec{0}$ dans les deux cas suivants :

- ✓ Le point matériel M fixe dans R′ , $\frac{dx\prime}{dt} = \frac{dy\prime}{dt} = \frac{dz\prime}{dt} = 0 \Rightarrow$
- ✓ R' est en translation rapport à R, $\frac{d\vec{\imath\prime}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath\prime}}{dt} = \frac{d\vec{k\prime}}{dt}$

3.Le repère R′ (O, x′,y′,z′) est mouvement en rotation par rapport à R (O, x, y, z) : relations vectorielles

Pour l'observateur au point O, les vecteurs unitaires $\vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'}$ changent de direction à chaque instant t, Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme.

$$\frac{d\vec{\imath'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\imath'} \quad , \qquad \frac{d\vec{\jmath'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\jmath'}, \qquad \frac{d\vec{k'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k'}$$

4.Relation entre les vitesses

En remplaçant ces trois expressions dans la relation $\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\overrightarrow{O`M}}{dt}\right|_{R'}$,

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + (x'\vec{\omega}\wedge\vec{\imath'} + y'\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath'} + z'\vec{\omega}\wedge\vec{k'}) + (\frac{dx'}{dt}\vec{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'})$$

$$\vec{v_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} + \left.\frac{d\overrightarrow{O`M}}{dt}\right|_{R'}$$

Avec, $$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}_R = \frac{d\overrightarrow{O`M}}{dt}_{R'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

5.Relation entre les accélérations

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}_R = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}_R = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{v_a} + \overrightarrow{v_r})_R = \frac{d}{dt}(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO`}}{\mathrm{dt}}_R + \frac{d\overrightarrow{O`M}}{\mathrm{dt}}_{R'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})_R$$

On calcul :

- ✓ $\frac{d}{dt}(\frac{d\overrightarrow{O`M}}{\mathrm{dt}}_{R'})_R = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\vec{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right) = \left(\ddot{x}'\vec{\imath`} + \ddot{y}'\vec{\jmath`} + \ddot{z}'\vec{k`}\right) + \frac{dx\prime}{dt}\frac{d\vec{\imath\prime}}{dt} + \frac{dy\prime}{dt}\frac{d\vec{\jmath\prime}}{dt} + \frac{dz\prime}{dt}\frac{d\vec{k\prime}}{dt} = \overrightarrow{a_r} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r}$
- ✓ $\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M})_R = \frac{d}{dt}\vec{\omega}\wedge(\overrightarrow{O'M}) + \vec{\omega}\wedge(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt})_R = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\wedge\left[\left(\dot{x}`\vec{\imath`} + \dot{y}`\vec{\jmath`} + \dot{z}`\vec{k`}\right) + \left(x'\frac{d\vec{\imath'}}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)\right] = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_r} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$

Donc,

$$\overrightarrow{a_a} = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OO`}}{\mathrm{d}t^2} + \overrightarrow{\gamma_r} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_r} + \frac{d}{dt}\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_r} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$$
$$= \overrightarrow{\gamma_r} + \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OO`}}{\mathrm{d}t^2} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)\wedge\overrightarrow{O'M} + 2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_r}$$

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$$

- ✓ L'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_r}$, cette accélération se manifeste quand le repère R' (O', x', y', z') est en mouvement de rotation par rapport à R (O, x, y, z) et le point matériel M doit être en mouvement par rapport au repère R' (O', x', y', z') (vitesse relative non nulle)
- ✓ L'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OO`}}{\mathrm{d}t^2} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)\wedge\overrightarrow{O'M}$
  - $\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}$ résulte de la non uniformité de rotation de R' par rapport à R.
  - $\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$ est l'accélération centripère qui maintient le point matériel dans la trajectoire circulaire etaui s'oppose à l'accélération normale

6.Cas particuliers

- ✓ R' en translation par rapport à R $\Rightarrow \vec{\omega} = \vec{0}$

$$\vec{v_a}(M)_R = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{v_r}(M)$$

$$\vec{\gamma_a}(M)_R = \frac{dOO'^2}{dt^2} + \vec{\gamma_r}(M)$$

- ✓ Si R' en translation uniforme par rapport à R $\Rightarrow \frac{d\overrightarrow{OO\prime}}{dt} = 0$

$$\vec{v_a}(M) = \vec{v_r}(M)$$

$$\vec{\gamma_a}(M) = \vec{\gamma_r}(M)$$

7.Applications

7.1 La pluie tombe avec une vitesse verticale de 2 m/s sur une voiture qui se déplace avec une vitesse horizontale de 40 m/s.

$\vec{v_a} = \vec{v_e} + \vec{v_r}$

$\vec{v_a}(M)$: vitesse de la pluie (point matériel M) par rapport au sol (repère absolu)

$\vec{v_e}$: vitesse de la voiture R′ (repère relative) par rapport à R, $v_e = 40$ m/s.

$\vec{v_r}$: vitesse de la pluie par rapport à la voiture R′ $v_r = 2m/s$

$|\vec{v_a}| = \sqrt{{v_e}^2 + {v_r}^2} = \sqrt{4 + 1600} = \sqrt{1604}$ m/s

$\tan\alpha = \frac{v_r}{v_e} = \frac{1}{20}$

7.2 Mouvement circulaires (Mouvement en rotation)

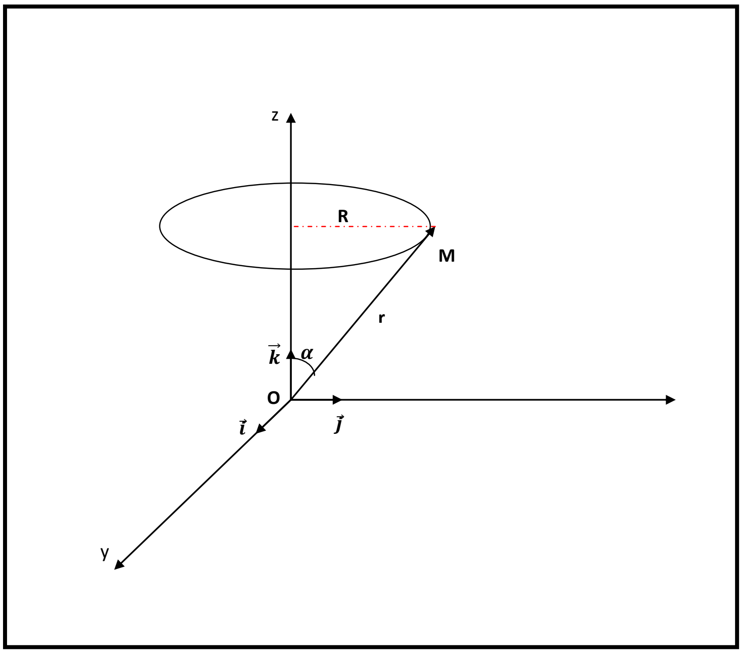
Un point matériel M est repéré par les coordonnés polaires r = R= cste, tel que le vecteur position $\overrightarrow{OM} = R.\overrightarrow{U_r}$

$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_r} + r\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt}$

$= \dot{r}\overrightarrow{U_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{U_\theta} = R\omega$ tel que, $\dot{r} = \dot{R} = 0$, $\omega = \dot{\theta}$ (vitesse angulaire[rad/s], $\vec{\omega}$ perpendiculaire au plan de rotation)

$\vec{v} = R\ \omega\ \overrightarrow{U_\theta}$ (vitesse curviligne)

Sachant que R = r sinα , alors $v = \omega R = \omega r sin\alpha$



On peut dire alors que, $\vec{v} = \omega r sin\alpha = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$, et $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{\imath}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.\vec{\jmath} = \dot{\varphi}(\vec{k} \wedge \vec{\imath}) = \vec{\omega} \wedge \vec{\imath}$$

$$\frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.\vec{\imath} = \dot{\varphi}(\vec{k} \wedge \vec{\jmath}) = \vec{\omega} \wedge \vec{\jmath}$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.\vec{\imath} = \dot{\varphi}(\vec{k} \wedge \vec{k}) = \vec{\omega} \wedge \vec{k}$$

Chapitre II

Dynamique du point matériel

A acquérir par l'étudiant en fin du chapitre

- *Analyser un système mécanique assimilé a un point matériel.*
- *Définir un système de coordonne d'étude*
- *Définir les différentes forces qui agissent sur le centre d'inertie du point matériel*
- *Utiliser le principe fondamental de la mécanique pour déterminer le mouvement d'un point matériel dans un référentiel galiléen.*
- *Comprendre la notion de référentiel Galiléen et non Galiléen*
- *Réussier à appliquer le PFD dans un référentiel non Galiléen.*

Cours N°1 : Dynamique du point matériel

Après avoir étudié le mouvement d'un point matériel du point de vue cinématique juste en s'intéressants a l'abscisse, vitesse et accélération pour pouvoir définir la nature du mouvement, nous essayons maintenant et en se basent sur les causes agissent sur le point matériel qui sont les forces pour définir aussi la nature du mouvement tout en exploitant les lois de Isaac newton. La dynamique est alors la partie de la mécanique qui traite le mouvement et sa relation avec les forces appliquées sur le point matériel

1.Enoncée du principe d'inertie : 1 er loi de Newton

En absence de forces extérieures, un objet au repos reste au repos et un objet en mouvement continue de se déplacer en mouvement rectiligne uniforme. A moins que les forces extérieures ayant une résultante non nulle n'agissent et ne contraignent à changer son état.

Cette là fait intervenir une propre appelée inertie

L'inertie d'un corps est sa tendance à résister à toute variation de son état de Mouvement qui est lié à la manne du corps.

2.Référentiel d'inertie ou référentiel Galiléen

Un système de référence dans lequel la 1[èr] loi de newton est valable. Dans un référentiel d'inertie, un corps soumis à une force résultante nulle reste au repos, ou se déplace avec une vitesse constante.

- ✓ Le référentiel R′ se déplace à une vitesse v constante par rapport à un référentiel d'inertie R, dans ce cas R′ est aussi Galiléen.
- ✓ Si l'accélération γ d'une particule est nulle dans un référentiel d'inertie R; elle est nulle dans tous les référentiels d'inertie.

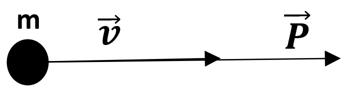
3.La quantité du Mouvement

De plus des caractéristiques cinématiques du mobile ou l'objet, le mouvement peut être influencé par la masse du mobile.

Le concept quantité de mouvement fournit une distinction quantitative entre le mouvement de deux particules de même vitesse mais de masse différentes

- La quantité de Mouvement est définie comme le produit de masse par son vecteur vitesse $\vec{v}$

$\vec{P} = m\vec{v}$



4.Conservation de la quantité de mouvement

Un corps qui se déplace avec une vitesse $\vec{v}$ constante implique qu'il conserve sa quantité de mouvement

Si on prend deux particules de masse m_1 et m_2 animés d'une vitesse $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, soumise qu'au influence mutuelle. La quantité de mouvement du système isolé avant choc est égale à la quantité de mouvement après choc,

$$m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = m_1\overrightarrow{v'_1} + m_2\overrightarrow{v'_2}$$

5.Notion de Forces

Le mouvement est le résultat de l'interaction entre la particule et son environnement. Cette interaction appelée force est caractérisé par les propriétés de la particule (masse, champ, moment dipolaire) et par la nature de l'environnement.

Il est possible de classer les forces en forces de contact et forces à distance

5.1 Force de contact

Traduit l'interaction entre deux corps, comme par exemple la force de frottement, la force de tension

5.2 Force à distance

Ces forces interviennent par l'intermédiaire de champs vectorielle, comme la force de gravitation, force électrique et la force magnétique.

6.La 2éme loi de Newton

La dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement $\vec{P}$ est égale à la résultante des forces appliquées surp la particule.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Cette équation est appelée relation fondamentale de la dynamique.

$$\vec{F} = \frac{d\overrightarrow{mv}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Quand la vitesse v est infèrieur à la vitesse de la lumière c, m est constante et dans ce cas $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

L'accélération $\vec{a}$ est dans la même direction que $\vec{F}$

7.La 3éme Loi du Newton

Lorsque deux corps sont en interaction, ils exercent l'un sur l'autre des forces opposées en sens mais égales en intensité et en direction. $\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}$

$\overrightarrow{F_{12}}$: Force exercée par le corps M_1 sur le corps M_2 (Action)

$\overrightarrow{F_{21}}$: Force exercée par le corps M_2 sur le corps M_1 (Réaction)

8.Loi de la mécanique en référentiel non galiléen (R.F.D)

Soit R un référentiel galiléen et R' un référentiel non galiléen ; on appelle $\vec{F}$ la résultante des forces appliqués sur un point matériel M. Dans le référentiel R Galiléen, la relation fondamentale de la dynamique dans un référentiel Galiléen

$$\vec{F} = m\vec{a}_R$$

En utilisant la loi de décomposition de vitesse $\vec{a}_R = \vec{a}_{R\prime} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$

$$\vec{F} = m\vec{a}_{R\prime} + m\vec{a}_e + m\vec{a}_c$$

$$\vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c = m\vec{a}_{R\prime}$$

$$\vec{F} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_{ic}} = m\vec{a}_{R\prime}$$

Tel que :

- ✓ $\overrightarrow{F_{ie}} = -\,m\vec{a}_e$ est la force d'inertie d'entrainement
- ✓ $\overrightarrow{F_{ic}} = -m\vec{a}_c$ est la force d'inertie Coriolis
- ✓ $\overrightarrow{F_{ie}}$ et $\overrightarrow{F_{ic}}$ ne sont pas des forces réels car elles ne traduisent pas une interaction physique.
- ✓ Les forces d'inertie dépendent du référentiel dans lequel l'observateur est placé pour étudier le mouvement du point matériel.

8.1 Référentiel similaire à un référentiel galiléen

On sait que l'accélération d'entrainement et l'accélération de Coriolis sont :

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO\prime}}{dt^2} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) \text{ et } \overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_r}$$

Si la vitesse angulaire $\vec{\omega}=\vec{0}$ et $\frac{d\overrightarrow{OO\prime}}{dt} = cste$, Le référentiel R' n'est pas en rotation par rapport au référentiel R, mais il a mouvement de translation uniforme, dans ce cas le référentiel R' est similaire à un référentiel galiléen.

8.2 Application: Le référentiel R' est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe par rapport à R

Le référentiel R lié au sol est le référentiel fixe absolu. Le point matériel M est un bonhomme en mouvement accéléré uniforme, tel que

$$\vec{\omega} = \omega\overrightarrow{e_z}$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_R$$

Si on utilise la base de Freinet, $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$

$a_n = \frac{v^2}{r}$ Avec $v = r.\dot{\theta}$

$a_n = r.\dot{\theta}^2$ Donc $m\,a_R = m\,r\omega^2$

$m\,\vec{a}_R = m\,\vec{a}_n = -\,m\omega^2\,\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{a_n}$ sens inverse de $\overrightarrow{HM}$

- ✓ Le bonhomme tente de se maintenir immobile sur le plateau, il doit ne tenir compte de son poids $\vec{P}$, et sa réaction $\vec{R}$

$\overrightarrow{F_{ie}}$ qui est une force centrifuge qui tend à éjecter le bonhomme du manège.

$$\overrightarrow{F_{ie}} = \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) = -m\omega\overrightarrow{e_Z}\wedge\left(\omega\overrightarrow{e_Z}\wedge \mathrm{r}\overrightarrow{U_r}\right) = -\,m\omega^2 r\left(\overrightarrow{e_Z}\wedge\overrightarrow{U_\theta}\right) = m\omega^2\,\overrightarrow{HM}$$

- ✓ Le point matériel M va se déplacer sur le plateau tournant avec une vitesse $\vec{v}_r = -v\overrightarrow{e_r}$, dans ce cas le point matériel M est soumi à une force de Coriolis

$\overrightarrow{F_{ic}} = -m\overrightarrow{a_c} = -m\left(2\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{v_r}\right) = -2m\omega\overrightarrow{e_z}\wedge v\overrightarrow{e_r} = 2m\omega v\overrightarrow{e_\theta}$, cette force doit vaincre la force centrifuge $\overrightarrow{F_{ie}}$.

Cours N°2 : Prévision des mouvement des corps « loi des forces »

1.Introduction

Les forces rencontrées dans la nature sont les manifestations de 4 interactions fondamentales

- ✓ **Gravitationnelle** : Forces d'attraction entre toutes les particules (Mouvement des astres, corps attirée par la terre montée des marée)
- ✓ **Electromagnétique** : interaction entre charges électrique, responsable de la plupart des phénomènes quotidien lumière, électricité, magnétisme, chimie.
- ✓ **Interaction forte** : interaction entre les nucléons, responsable de la cohésion du noyau
- ✓ **Interaction faible** : s'appliquer à toutes les particules de la matière (électrons, neutrons), se manifeste dans certains types de réactions nucléaire, tel que la radioactivité.

a. Loi de forces

Cette loi montre l'expression de la somme des forces $\vec{F}$ appliquées à un point matériel dans une situation bien définie.

1.1 Force gravitationnelle

La force gravitationnelle est une interaction physique qui causée par l'attraction entre objets ayant une masse.

- ✓ Tous les objets de l'univers s'attirent.
- ✓ La force s'effectue à distance.

$\overrightarrow{F_{Mm}}$: Force gravitationnelle exercé par la terre de masse M sur un objet de masse m (m est attiré vers M)

$\overrightarrow{F_{mM}}$: Force gravitationnelle exercé par le corps de masse m sur la terre de masse M (M est attiré vers m) . m du corps est faible par rapport à la masse de la terre, la $\overrightarrow{F_{mM}}$ est faible et non resentit.

- ✓ La masse du corps m est grande, la force gravitationnelle F_g est importante comme par exemple la force appliqué par la terre sur une planète, étoile….

La Force gravitationnelle appliquée par la terre :

$$\overrightarrow{F_g} = m\vec{g}$$

$\overrightarrow{F_g}$: La force gravitationnelle appliquée su l'objet A

m : La masse de l'objet A (kg)

$\vec{g}$: L'accélération gravitationnelle appliquée sur l'objet sous l'influence de la terre.

Entre m et lamasse de ma terre m_T s'exerce une force d'attraction d'intensité F_g

$$F_g = G\frac{m.\mathrm{m_T}}{r^2}$$

r : La distance entre l'objet A de masse m et la terre de masse m_T

G : constante de gravitation universelle ou cste de Cavendish mesurée par Henry Cavendish en 1775, $G = 6.67430.\ 10^{-11}\ m^3Kg^{-1}s^{-2}$

- ✓ Cette loi universelle de gravitation, appelée 4$^{\text{éme}}$ loi de Newton pour certain auteur s'associe au trois Lois de Newton.

1.2 Le champ gravitationnel

Le champ est une zone d'influence dans l'espace susceptible d'appliquer une force à distance sur un objet. Tout objet M produit un champ gravitationnel autour de lui. Ce champ est radial orienté vers M

$$F_g = mg \quad \text{et} \quad F_g = \frac{m.\mathrm{mT}}{r^2}G$$

$$m\,.g = \frac{m.m_T}{r^2}G$$

$g = \frac{G.m_T}{r^2}$, le champ g est donc proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$

Pour un objet à la surface de la terre , $g \approx 9.81ms^{-2}$, en considérant la terre de masse M_T=6010244kg et de rayon R_T=64004m

1.2.1 Application

Albert est sur la planète de Mars, sa masse est m_{albert} = 90 kg (masse qui subit la force). La planète de Mars est de masse m_{Mars} = $6{,}42.10^{23}$kg (masse qui applique la force) et de rayon r = 3397 km (distance entre le centre de Mars et albert). Le champ gravitationelle de la planète Mars est :

$g = G\frac{M}{r^2} = (6{,}67.10^{-11})\frac{6{,}42.10^{23}}{(3397.10^3)^2}$ = 3.71 N/kg

Le poids d'Albert sur la planète de mars est $F_g = m_{Albert}.g$

1.3 Force de contact

Deux objets en contact physique l'un avec l'autre par une surface, sont soumis à des forces de contact.

La force de contact ne s'applique pas sur toute la surface apparente.

- ✓ Interviennent que sur la surface spécifique.
- ✓ Les atomes des deux corps sont en interactions
- ✓ Les forces de contact sont déterminé expérimentalement afin d'identifier les différentes interactions physiques à l'échelle microscopique.

1.4 Force de réaction

Deux corps en contact exercent l'un sur l'autre des forces de contact tel que $\overrightarrow{C_{12}} = -\overrightarrow{C_{21}}$ (principe de l'action et de réaction)

$\vec{C}$: force de contact $\vec{C} = \overrightarrow{C_T} + \overrightarrow{C_N}$

$\overrightarrow{C_T}$: La composante tangentielle de la force de contact

$\overrightarrow{C_N}$: La composante normale de la force de contact

1.5 Force de frottement

C'est une force qui agit toujours pour s'opposer au Mouvement d'un objet qui glisse sur un autre.

1.5.1 L'origine de cette force

- ✓ Adhérence mécanique provenant de la rugosité des surfaces.
- ✓ Liaison faible énergie entre atomes, dites force de coulomb

1.5.2 Types de force de frottement :

- ✓ **Solide-solide :** ralentissement du mouvement
- ✓ **Solide-liquide :** réduction de la vitesse du sang, articulation (fluide synovial)
- ✓ **Solide-gaz :** chute libre, ralentissement des avions,..
- ✓ **Gaz-liquide :** ralentissement des gouttes de pluie.
- ✓ **Liquide-liquide :** ralentissement du sang.

1.6 Frottement Solide-Solide

En analysant le comportement de l'objet posé sur un plan horizontal, et en appliquant une force $\vec{F}$ graduellement croissante pour rompre l'équilibre physique de l'objet, 2 types de frottement statique $\boldsymbol{f_s}$ et dynamique $\boldsymbol{f_d}$ apparaissent suivant la nature de mouvement du corps.

1.6.1 Coefficient de frottement statique :

- ✓ On considéré un objet en équilibre : $\sum \vec{F} = \vec{0}$, $\vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$
- ✓ $\vec{N}$: La force de contact avec le sol ou de réaction.
- ✓ $\vec{P}$: La force du poids
- ✓ $\vec{P} = -\vec{C}$

Si la force $\vec{F}$ appliquée sur l'objet pour le déplacer augmente graduellement, il existe un $\overrightarrow{f_{r}}_{limit}$ ou $\overrightarrow{f_{r}}_{max}$ à partir de la quelle l'équilibre est rompu et l'objet commence à bouger. L'expérimentation a montré que $\overrightarrow{f_{r}}_{limit}$ est proportionnelle à $\vec{N}$ ($\vec{N}$ est la composante perpendiculaire de la force de contact dites force de réaction)

$\overrightarrow{f_{r}}_{limit}$: La composante tangentielle de la force de frottement statique (réaction horizontale qui s'oppose à la force $\vec{F}$), l'objet est toujours au repos.

$f_{r_{limit}} = \mu_s . N$ μ_s : Le coefficient de frottement statique

1.6.2 Coefficient de frottement dynamique :

Une fois le bloc est en mouvement, une force de résistance s'oppose au mouvement, dites force de frottement dynamique tel que,

$$f_{r_d} = \mu_d . N$$

μ_d : Le coefficient de frottement dynamique

Les coefficients de frottements sont déterminés expérimentalement et dépendent de la nature de la surface de contact, mais il ne dépendent pas de l'air de la surface de contact

Il existe deux types de frottement :

-frottement résistant : s'oppose au mouvement global du corps.

-frottement moteur : contribue au déplacement du corps.

1.7 Frottement Solide-fluide

Quand un objet se déplace dans un fluide (liquide ou gaz) subit une résistance qui s'oppose à son mouvement.

Si la vitesse du corps par rapport au fluide est faible, le fluide n'écoule de façon régulière est continu, une fine couche du fluide apparait sur le corps, la résistance exercée sur le corps est due à l'écoulement des couches du fluide l'une sur l'autre.

La force de résistance visqueuse est proportionnelle à la vitesse de l'objet en mouvement.

Pour des faibles vitesses la force de frottement visqueuse $\vec{f} = -k\vec{v}$

k: Constante qui dépend des dimensions de l'objet et de la viscosité.

Pour une sphère, $k = 6\pi R\mu$

$\vec{f} = -6\pi R\mu\overrightarrow{v}$ La loi de stocks.

μ : Coefficient de viscosité qui dépend de la température T et la pression P

Dans les liquides la viscosité μ augmente quand la température diminue

Un bloc immergé dans un fluide ou gaz, est frappée par les molécules de ce fluide. Ces chocs sont à l'origine de la poussée d'Archimède $\vec{\pi}$.

Force de contact

$$\vec{\pi} = f_{fluide}.\vec{\pi}.g$$

V: Volume du fluide déplacé

1.7.1 Application

Un solide se déplace dans un fluide, soumis à la force de frottement $\vec{f}$.

En appliquant la 2eme loi de Newton : $\vec{P} + \vec{\pi} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$

$\vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$

$$-k\vec{v} + \vec{T} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$T - kv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{k}{m}\left(\frac{T}{k} - v\right) = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = dt.\frac{k}{m}\left(\frac{T}{k} - v\right)$$

$$\frac{dv}{v - \frac{T}{k}} = -\ \frac{k}{m}dt$$

$$\ln\left(v - \frac{T}{k}\right) = -\ \frac{k}{m}t + cste$$

$$v - \frac{T}{k} = Be^{-\frac{k}{m}t}.$$

- ✓ A t = 0 ; $v_0 = 0$ $B = \frac{T}{k}$

$$v\ (t) = \frac{T}{k}(1 -\ e^{-\frac{k}{m}t})$$

1.8 Forces élastiques

Les forces élastiques provoquent des oscillations, tel que les systèmes Masse-ressort, pendules,…

Si on considère un ressort suspendu au plafond, une masse attaché à on extrémité. Le ressort est déformé, étire, il tend à revenir à sa longueur initiale, cette tendance traduit par une force exercée sur l'objet F.

Selon Robert Hooke , $F = k\Delta l$.

Δl : L'allongement du ressort, $\Delta l = l - l_0$

k est la constante élastique ou la constante de raideur unité (N/m).

La rigidité du ressort à tendance à rappeler l'extrémité étiré à sa position d'origine, k mesure la rigidité du ressort.

La force de rappel du ressort est s'oppose toujours à l'allongement d'où

$$\vec{F} = -k\overrightarrow{\Delta l}$$

1.8.1 Un ressort idéal

Un ressort idéal est une ressort linéaire de masse négligeable qui obéit parfaitement à la loi de Hooke, il doit se comprimer et s'étirer par rapport à sa position initiale naturellement. Ses spires doivent être séparées par un espacement.

1.8.2 Association des ressorts

- ✓ **Ressorts en série**

Les 2 ressorts sont soumis à la même $\vec{F}$

Pour : le ressort 1 : $\Delta l_1 = x_1 = \frac{F}{k_1}$ et le ressort 2 : $x_2 = \Delta l_2 = \frac{F}{k_2}$

$\vec{F} = k_{eq}.\Delta l$ avec : $\Delta l = x = (l_1 - l_{01}) + (l_2 - l_{02})$

$$x = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)F =$$

$F = \frac{k_1.k_2}{k_1+k_2}.x$ tel que $k_{eq} = \frac{k_1.k_2}{k_1+k_2}$

Donc pour deux ressorts en série la constante de raideurs est calculé en utilisant la relation $\frac{1}{k_{eq}} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$

- ✓ **Ressorts en parallèle**

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = k_1x + k_2x = (k_1 + k_2)x$$

Donc pour deux ressorts en parallèle la constante de raideur est calculé en utilisant la relation $k_{eq} = k_1 + k_2$

1.9 Force de tension d'un fil

La force de tension d'un fil est la force qui retient l'objet attaché à un fil idéal.

Pour un fil idéal

- La masse du fil est négligeable, le fil est parfaitement souple, ni rigide, ni élastique
- La tension le long d'un fil idéal est uniforme.
- La cohésion du fil : le fil est tendu $T>0$, le fil se détend $T=0$, Il est impossible d'avoir $T<0$ (Cela veut dire que le fil repousse le point matériel)

Chapitre III

Dynamique du mouvement en rotation

A acquérir par l'étudiant en fin du chapitre

- ✓ *Comprendre la notion moment de force et moment cinétique*
- ✓ *Utiliser le Théorème du Moment cinétique pour étudier les mouvements en rotation et obtenir l'équation de mouvement du point matériel.*

Cours N°1 : Dynamique du mouvement en rotation

La rotation d'un système est un cas particulier de mouvement, important notamment par ses applications industrielles (machines tournantes) mais aussi sur un plan plus fondamental pour la dynamique dans un référentiel tournant, dont le cas le plus important est donné par la dynamique terrestre.

Le moment cinétique joue, pour la rotation, un rôle équivalent à la quantité de mouvement pour la translation. Il est alors plus intéressant de substituer l'association force/Principe fondamental de la dynamique par l'ensemble moment d'une force/Théorème du moment cinétique. Ceci pour obtenir l'équation du mouvement d'un point matériel et son application pour l'étude du pendule simple et le mouvement des planètes et des satellites.

1.Moment de force

Le moment de force par rapport à un point ou un axe, donne une mesure de la tendance qu'à une force à provoquer la rotation d'un corps par rapport à un point ou un axe.

Le moment est de la force $\vec{F}$ appliquée en M par rapport au point O est :

$$\overrightarrow{M_{/o}(m)} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

- ✓ $\overrightarrow{M_{/0}}$ est perpendiculaire au plan formé par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et la force $\vec{F}$.
- ✓ Le sens de $\overrightarrow{M_{/0}}$ est déterminé par la règle du tire-bouchon
- ✓ $\|\overrightarrow{M_{/0}}\| = \|\overrightarrow{OM}\|.\|\vec{F}\|.\sin\theta = F.d$ Unité (N.M)
- ✓ Si $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$ sont Colinéaire , $\overrightarrow{M_{/0}} = \vec{0}$

2.Moment de force par rapport à un axe

Si (Δ) est un axe passant par le point O et de vecteur unitaire$\vec{u}$, le produit scalaire $M_{/\Delta} = \overrightarrow{M_{/0}}.\vec{u}$ est le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à (Δ).

- ✓ Propriété : cette grandeur est indépendante au choix du point O, point quelconque de l'axe (Δ).

$$M_{/\Delta} = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}).\vec{u}$$

3.Cas particuliers

✓ Force passant par l'axe

$$\overrightarrow{M_{/0}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

Donc $M_{/\Delta} = 0$ ceci est valable pour tout point 0 appartenant à (Δ).

✓ Force parallèle à l'axe

$\overrightarrow{M_{/0}}$ est toujours perpendiculaire au plan constitué par $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$

$$\overrightarrow{OM} \perp \vec{f}$$

Puisque la force est parallèle à l'axe : $\vec{F} \parallel (\Delta) \Longrightarrow \overrightarrow{M_{/0}} \perp (\Delta) \Longrightarrow M_{/\Delta} = \overrightarrow{M_{/0}}.\vec{u} = 0$

La composante de la force qui passe par l'axe (Δ) dans n'intervienne pas dans le moment de la force par rapport à un axe

✓ force perpendiculaire à l'axe

La force $\vec{F}$ appartient au plan perpendiculaire à (Δ)

$M_{/\Delta} = \overrightarrow{M_{H_1}}.\vec{u} = (\overrightarrow{H_1M} \wedge \vec{F}).\vec{u} = \left((\overrightarrow{H_1H_2} + H_2.\vec{M}) \wedge \vec{F}\right).\ \vec{u} = [(\overrightarrow{H_1H_2} \wedge \vec{F}) + (\overrightarrow{H_2M} \wedge \vec{F})].\vec{u} = (\overrightarrow{H_1H_2} \wedge \vec{F}).\ \vec{u} = (\|\overrightarrow{H_1H_2}\| \|\vec{F}\| \sin 90°).\vec{u} = F.d$

$\overrightarrow{H_2M}$ est parallèle à $\vec{F}$

- $M_{/\Delta} > 0$, La force $\vec{F}$ fait tourner le point matériel M autour de (Δ) au sens positive.
- $M_{/\Delta} < 0$, La force $\vec{F}$ fait tourner point matériel M autour de (Δ) au sens négative.

4.Moment cinétique d'un point matériel en un point

Le moment cinétique au point O du point matériel M dans un référentiel, R est le moment en O de la quantité de Mouvement P(M) du point M dans R.

$$\overrightarrow{L_{O/M}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v(M)}_R$$

5.Moment cinétique par rapport à un axe

Le moment cinétique du point matériel M par rapport à l'axe (Δ), orienté selon la direction de son vecteur unitaire $\vec{u}$ passant par O dans le référentiel R est le scalaire :

$$L_\Delta(M) = \overrightarrow{L_0(M)}_R . \vec{u}$$

6.Théorème du moment cinétique

O étant un point fixe par rapport à un référentiel galiléen R, calculons la dérivé par rapport à R du moment cinétique $\overrightarrow{L_0(M)}_R$ par rapport au temps.

$$\overrightarrow{L_0(M)}_R = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}_R = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}\Big|_R \wedge \vec{p} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d}{dt}\vec{P}\Big|_R$$

$$= m\vec{v} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

$\vec{F}$: La résultante des forces qui s'exercent sur M

Le dérivé par rapport au temps du moment cinétique L d'un point M par rapport à O fixe dans R est égal aux moments de la résultante des forces appliquée au point M :

$$\frac{d\overrightarrow{L_0(M)}}{dt}_R = \overrightarrow{M_{/O}}(\vec{F})$$

7.Théorème du moment par rapport à l'axe

$$M_{/\Delta} = \overrightarrow{M_{/O}} \cdot \vec{u} = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}_R \cdot \vec{u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\overrightarrow{L_0}.\vec{u})_R - \overrightarrow{L_0}.(\frac{d}{dt}\vec{u})_R$$

$\vec{u}$ **:** Un vecteur unitaire fixe dans R, donc $(\frac{d}{dt}\vec{u})_R = \vec{0}$

Théorème scalaire du moment cinétique par rapport à l'axe Δ :

$$M_{/\Delta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\overrightarrow{L_0}.\vec{u})_R = (\frac{d}{dt}L_\Delta(M)_R)$$

avec l'axe (Δ) fixe dans le référentiel R.

8.Conservation du moment cinétique, Notion de force centrale

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_{/0}} = M_0(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

$$\overrightarrow{L_0(M)} = cste \Rightarrow \frac{d}{dt}\overrightarrow{L_{/0}} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}\,, \\ \vec{F} \parallel \overrightarrow{OM}\ (\forall t) \end{cases}$$

Autrement dit, le moment cinétique est conservé si le système est isolé ou si la force appliqué sur le point matériel M passe constamment par le point O, la force est dite force centrale et le point de référence O est appelée centre de force

9.Interprétation et notion du moment d'inertie

Moment cinétique analogie à la quantité de mouvement $\vec{P} = m\vec{v}$. La masse m mesure l'inertie d'un corps, c'est à dire sa résistance à s'opposer à toute modification de son état de mouvement.

Le moment cinétique L_Δ est égale à la vitesse angulaire ω multiplié par une grandeur qui mesure l'inertie de rotation d'un corps c'est à dire sa résistance à toute modification de son état de rotation J_Δ

$$L_\Delta = \omega J_\Delta$$

Le moment cinétique caractérise la tendance d'un objet à continuer à tourner du fait de son inertie.

10.Application du théorème du moment cinétique au pendule simple

Théorème du moment cinétique : $\frac{d\overrightarrow{L_0(M)}}{dt}_R = \overrightarrow{M_{/O}}(\vec{F}) = \overrightarrow{M_0}(\vec{T}) + \overrightarrow{M_0}(\vec{P})$

- Calcul du moment cinétique $\overrightarrow{L_0(M)}_R$: $\overrightarrow{L_0(M)}_R = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = m.l.\overrightarrow{e_r} \wedge l.\dot{\theta}.\overrightarrow{e_\theta} = m.l^2.\dot{\theta}.\overrightarrow{e_z}$
- Calcul des moments de forces appliqués sur le point matériel M
  - ✓ $\overrightarrow{M_0}(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = l.\overrightarrow{e_r} \wedge m(\cos\theta\, \overrightarrow{e_r} - \sin\theta\, \overrightarrow{e_\theta}) = = -m.g.l.\sin\theta\, \overrightarrow{e_z}$
  - ✓ $\overrightarrow{M_0}(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$, la force de la tension du fil $\vec{T}$ est une force centrale et qui passe constamment par le point O

En appliquant le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d}{dt}\left(m.l^2.\dot{\theta}\right) = -m.g.l.\sin\theta$$

$$m.l^2.\ddot{\theta} + m.g.l.\sin\theta = 0$$

Pour des faibles angles θ<< , $\sin\theta \approx \theta$

Equation différentielle d'un oscillateur harmonique « pendule simple » est :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

La solution de cette équation est périodique : $\theta(t) = \theta_M \cos(\omega_0 t + \varphi)$

θ_M : l'amplitude maximale

ω_0 est la pulsation du mouvement

θ_M et ω_0 sont déterminés en utilisant les conditions initiales

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\theta}}$$

Chapitre VI

Travail et Energie

A acquérir par l'étudiant en fin du chapitre

- ✓ *Calculer le travail et la puissance d'une force sur un trajet donné*
- ✓ *Appliquer le théorème de l'énergie cinétique et déterminer l'énergie potentielle des forces conservatives.*
- ✓ *Utiliser le théorème d'énergie mécanique pour analyser et prédire qualitativement une trajectoire,*
- ✓ *Étudier les critères d'équilibres et les positions de stabilité dans le cas de mouvements à partir d'un diagramme d'énergie potentiel.*

Cours N°1 : Travail et Energie

En principe, les lois de newton nous permettent de résoudre tous les problèmes de la mécanique classique à condition de connaitre les positions, les vitesses initiales des particules d'un système ainsi que toutes les forces agissant sur lui mais en pratique, on a très peu de renseignements sur les forces mise en jeu et même si on les connaît, les équations obtenues sont difficiles à traiter. Dans ces conditions on fait appeler à une approche différente qui s'apparent sur des notions de **travail et énergie**

1.Impulsion

On définit le vecteur impulsion de la force $\vec{F}$ pendant un intervalle de temps Δt par le produit de $\vec{F}$ par le temps

$$I = F.\Delta t$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}.\Delta t = m.\Delta\vec{V} = \Delta\vec{P}$$

$$I = \vec{F}.\Delta t = P - P_0 = mv - mv_0$$

L'impulsion de la force est égale à la variation du vecteur quantité de Mouvement qui subit cette force. Autrement dit l'impulsion est le transfert de la quantité de Mouvement.

Pour des petites variations :

$$dp = F.dt$$

$$\triangle p = \int_{t_i}^{t_f} F\,dt = F\int_{t_i}^{t_f} dt = I$$

En coordonnées cartésiennes $\begin{cases} \triangle p_x = I_x = \int_{t_i}^{t_f} F_x\,dt \\ \triangle p_y = I_y = \int_{t_i}^{t_f} F_y\,dt \\ \triangle p_z = I_z = \int_{t_i}^{t_f} F_z\,dt \end{cases}$

2.Travail d'une force

2.1 Force constante sur un déplacement rectiligne

Soit une force $\vec{F}$ constante agissant sur un point matériel M. Sous l'effet de la force

$\vec{F}$, M se déplace entre les points A et B.

Par définition, le travail de la force $\vec{F}$ sur le déplacement rectiligne AB est :

$$\omega_{\vec{F}} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB.\cos\alpha$$

α : L'angle entre $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$

Le travail est positive, négative ou nul selon la direction de $\vec{F}$ par rapport au déplacement AB

- $\omega > 0$: travail moteur
- $\omega < 0$: travail résistant

Unité du travail dans MKSA est le Joule.

Un travail d'un joule correspond au travail fourni par une force de 1N qui déplace 1 point matériel de 1 m dans la même direction $1J = 1Nm$

2.2 Travail élémentaire

Si la force $\vec{F}$ varie au cours du déplacement du point matériel M, on ne peut utiliser l'expression précédente. On décompose le déplacement AB en succession de déplacement élémentaires $\overrightarrow{dl_i}$ infiniment petit pour pouvoir considérer la force F constante sur le déplacement élémentaire rectiligne dl.

Le travail élémentaire $d\omega_i$ est :

$$d\omega_i = \vec{F}.\overrightarrow{dl_i}$$

Pour obtenir le travail total sur le déplacement globale AB

$$\omega_{\vec{F}} = \int_A^B d\omega_i = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl}$$

3.Applications

3.1 Travail de la force de pesanteur

$$\omega = \int_M^{M\prime} \vec{P}\,.\,\vec{dl} = \int_M^{M'} -P\,\vec{k}\,.(dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}) == -\int_M^{M\prime} pdz = \omega = -p(z)|_M^{M'}$$

$$= -p(z_{m'} - z_m) = p(z_m - z_{m\prime}) = p.h$$

Avec : $h = (z_m - z_{m\prime})$

3.2 Travail d'une force élastique

$$\vec{F} = -k\,\overrightarrow{\Delta l} = -k\,\Delta l\,\vec{\imath} = -k(l - l_0)\vec{\imath} = -kx\vec{\imath}.dx\vec{\imath} = -kxdx$$

$\omega_{\vec{F}}$: Travail de force élastique entre x_1 vers x_2

$$\omega_{\vec{F}} = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx = -k\int_{x_1}^{x_2} xdx$$

$$\omega_{\vec{F}} = -k\frac{x^2}{2}\bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{-k}{2}({x_2}^2 - {x_1}^2)$$

L'expression du travail ω est indépendant du temps donc pour tenir compte de la vitesse d'exécution de ce travail, on définit la puissance.

4.Puissance d'une force

La puissance est la vitesse de variation du travail par rapport au temps

$$P = \frac{d\omega}{dt}$$

$$P = F.\frac{dl}{dt} = F.V$$

$$P_{moy} = \frac{\Delta\omega_{\vec{F}}}{\Delta t}\bigg|_{t_i}^{t_f}$$

$$P_{instantané} = \frac{d\omega_{\vec{F}}}{dt}$$

5.L'énergie cinétique

En définit l'énergie cinétique d'un point matériel M, de masse m, animé avec une vitesse $\vec{v}$, par la grandeur E_c, telle que : $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

Soit un point M de masse m, en déplacement entre les points A et B, sous l'action d'une force extérieur $\vec{F}$. Selon le principe fondamental de la dynamique on a :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Le travail élémentaire de $\vec{F}$ est donnée par

$$d\omega_{\vec{F}} = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v}dt$$

$$d\omega_{\vec{F}} = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = d(\frac{1}{2}mv^2)$$

Un objet en mouvement possède une énergie appelé énergie cinétique qui caractérise l'état du mouvement. Le travail effectué entre A et B est :

$$\omega_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int_A^B d(\frac{1}{2}mv^2) = \int_A^B dE_c$$

$$\omega_{\vec{F}} = E_c(B) - E_c(A)$$

6.Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, l'énergie cinétique E_c d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre deux instants une position A et B est égalent à la somme des travaux de toutes les forces appliqués sur le point M, entre ces deux points

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum \omega_{A\rightarrow B}(\vec{F})$$

1. C'est le travail des forces extérieur qui fait varier E_c donc ω est un mode de transfert de l'énergie.
2. Si ω > 0 : travail moteur qui engendre une augmentation de l'énergie cinétique du point matériel
3. Si ω < 0 : travail résistant qui engendre une perte d'énergie et une diminution de vitesse.

7.Forces conservatrices et non conservatrices

Les forces sont dites conservatrices lorsque leur travail ne dépend pas du chemin suivi mais que du point de départ et au point d'arrivée comme par exemple : la force de pesanteur, la force du poids, force de rappel des ressorts. Les forces non conservatrices ou forces vives lorsque leurs travails dépendent du parcourt ou le chemin suivi.

8.Energie potentielle :

Lorsque l'énergie cinétique E_c dépend du mouvement de la particule, l'énergie potentielle E_p dépend que de sa position. L'énergie potentielle est une grandeur définie seulement pour les forces conservatrices. Tout travail élémentaire d'une force conservative peut se mettre sous la forme d'une différentielle totale $d\omega$ et l'énergie potentielle est défini par :

$$dE_p = -d\omega(F_c)$$

E_p : S'exprime en Joule

$$dE_p = -\overrightarrow{F_c}.\overrightarrow{dl}$$

Le gradient d'une fonction f est un opérateur vecteur définit par :

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

La dérivée de la fonction f est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Si le point matériel M est repéré par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans le repéré cartésien,

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Alors ,

$$\overrightarrow{grad}f\ d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$$

$$dE_p = +\overrightarrow{grad}\,E_p\ \overrightarrow{dl} = -F_c\,.dl$$

$$F_c = -\overrightarrow{grad}\,E_p$$

9.Le gradient dans les différentes coordonnées

- ✓ **Coordonnées polaires**

$$\overrightarrow{dr} = r\overrightarrow{U_r} + rd\theta\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\mathrm{F_r} = -\frac{dE_p}{dr}$$

$$\mathrm{F_\theta} = -\frac{\partial E_p}{rd\theta}$$

- ✓ **Coordonnées cylindriques**

$$\overrightarrow{dr} = dr\overrightarrow{U_r} + rd\theta\overrightarrow{U_\theta} + dz\vec{k}$$

$$F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \,;\, F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} \;\; F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

- ✓ **Coordonnées sphériques**

$$\overrightarrow{dr} = dr\overrightarrow{U_r} + rd\theta\overrightarrow{U_\theta} + r\sin\theta\, d\varphi$$

$$F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r} \,;\, F_\theta = -\frac{\partial E_p}{rd\theta} \,;;F_\varphi = -\frac{\partial E_p}{r\sin\theta d\varphi}$$

10.Exemples de forces conservatrices dérivant d'une énergie potentielle

10.1 Force gravitationnelle

$$\overrightarrow{F_g}(\vec{r}) = G\frac{M.m}{r^2}\vec{u} = G\frac{M.m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = G\frac{M.m}{r^3}\vec{r}$$

$$\overrightarrow{F_g}(\vec{r}) = -\overrightarrow{grad}E_p(r) = -\frac{dE_p(r)}{dr}\vec{u}$$

$$\frac{dE_p(r)}{dr} = -G\frac{M.m}{r^2}$$

$$E_p(r) = -G.M\;.m\int\frac{1}{r^2}dr = -\frac{GmM}{r} + cste$$

10.2 Force élastique

$$\vec{F} = -kx\vec{\imath} = \vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p = -\frac{dE_p}{dx}\vec{\imath}$$

$$\frac{dE_p}{dx} = kx \Rightarrow E_p = \int kxdx = \frac{1}{2}kx^2 + cste$$

10.3 Force électrique

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = K\frac{Qq}{r^2}\vec{u} = -\overrightarrow{grad}\,E_p = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u}$$

$$\frac{dE_p}{dr} = K\frac{Qq}{r^2}$$

$$E_p = -K\frac{Qq}{r} + cste$$

Mathématiquement on peut montrer qu'une force $\vec{F}$ est conservative et dérive d'un potentiel si son rotationnelle est nulle $\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$ (Il faut que ses composantes soient nulle)

En effet si $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p \Rightarrow \overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \overrightarrow{rot}\left(-\overrightarrow{grad}\,E_p\right) = \vec{0}$

Le rotationnelle d'un vecteur est un vecteur tel que $\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

11.Energie mécanique :

L'énergie mécanique d'un point matériel qui se déplace entre A et B sous l'effet de forces conservatives F_C et forces non conservatives F_{nc} , à un instant donné est égale à la somme de l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p

$$E_M = E_c + E_p(x, y, t)$$

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum \omega_{A\to B}\left(\overrightarrow{F_c}\right) + \sum \omega_{A\to B}\left(\overrightarrow{F_{nc}}\right)$$

On a défini : $dE_p = -d\omega_{A\to B}\left(\overrightarrow{F_c}\right)$

$$E_p(B) - E_p(A) = -\sum\omega_{A\to B}\left(\overrightarrow{F_c}\right)$$

$$\sum\omega_{A\to B}\left(\overrightarrow{F_c}\right) = E_p(A) - E_p(B) = \left(E_c(B) - E_c(A)\right) - \sum \omega_{A\to B}\left(\overrightarrow{F_{nc}}\right)$$

$$E_c(B) - E_c(A) = \left[E_p(A) - E_p(B)\right] + \sum_1\omega_{A\to B}\left(\overrightarrow{F_{nc}}\right)$$

$$\left(E_c(B) + E_p(B)\right) - \left(E_c(A) + E_p(A)\right) = \sum\omega_{A\to B}\left(\overrightarrow{F_{nc}}\right)$$

On définit alors : $E_M(B) = E_c(B) + E_p(B)$

$$E_M(B) - E_M(A) = \sum \omega_{A\to B}\left(\overrightarrow{F_{nc}}\right)$$

12. Théorème de l'énergie mécanique E_M totale :

La variation de l'énergie mécanique E_M totale du système en mouvement entre A et B est égale à la somme de travaux de forces non conservatives appliquées au système. Si le système est isolé (ne subit aucune force non conservative), l'énergie mécanique totale E_M se conserve.

L'énergie mécanique totale E_M du système ne peut que décroitre car $\omega_{A\to B}\left(\overrightarrow{F_{nc}}\right)$ est toujours négative.

Cours N°2 : Conditions de stabilité de système

1.Discussion graphique des courbes de E_p

La conservation de l'énergie mécanique totale E_M permet de déterminer si le mouvement est lié ou libre, donc permet de repérer les positions d'équilibre accessible au point matériel M par la représentation graphique, sans résoudre d'équation. C'est l'intérêt du concept E_p et E_M appliquée aux systèmes en évolution conservative.

1.1 Position d'équilibre :

On appelle position d'équilibre toute position du point matériel M pour laquelle la $\sum\vec{F}=\vec{0}$ Si le point matériel M est initialement dans cette position sans vitesse, il y demeure.

Dans le cas d'un système soumis uniquement aux forces conservatives $\overrightarrow{F_c}$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{F_c}=\vec{0}\ ,\ \overrightarrow{F_c}=-\overrightarrow{grad}E_p$$

$$\text{Donc, } \frac{dE_p}{dx}=0 \qquad \overrightarrow{F_c}=-\frac{dE_p}{dx}\vec{\imath}$$

Position d'équilibre se traduit par un extremum de E_p minimum ou maximum d'énergie potentielle, un critère de stabilité de l'équilibre

1.2.1 Position d'équilibre stable : Sous l'effet d'une petite perturbation les forces qui apparaissent tendent à ramener le point matériel M vers sa position d'équilibre.

1.2.2 Position d'équilibre instable : une position d'équilibre est instable lorsque les forces tendent à écarter M de sa position d'équilibre.

Exemples :

En suppose que $\frac{dE_p}{dx}_{x=0}=0$

Si la perturbation amène le système à $x<x_0$

$E_T(a)=\frac{1}{2}ka^2 \quad (E_c=0)$ puisque $F_c=-\frac{dE_p}{dx} \quad F_c>0$

$$E_T(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ka^2 \qquad \Rightarrow \frac{dE_p}{dx} < 0$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = E_T - E_p = \frac{1}{2}k(a^2 - x^2)$$

Si la perturbation amène le $\sum$ a $x > x_0$

$$F_c < 0 \Rightarrow \frac{dE_p}{dx} > 0$$

Puisque :

$$F_c = -\frac{dE_p}{dx} \Rightarrow F_c < 0 \Rightarrow \frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$$

$$\frac{dF_c}{dx} = -\frac{d^2E_p}{dx^2} \Rightarrow F_c > 0 \Rightarrow \frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$$

Si la dérivée seconde >0, elle indique la concavité. La concavité est tournée vers les énergies croissantes (vers le haut), puit de potentiel.

13 $\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} = 0, \quad \frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$ Équilibre stable correspond minimum d'énergie potentiel

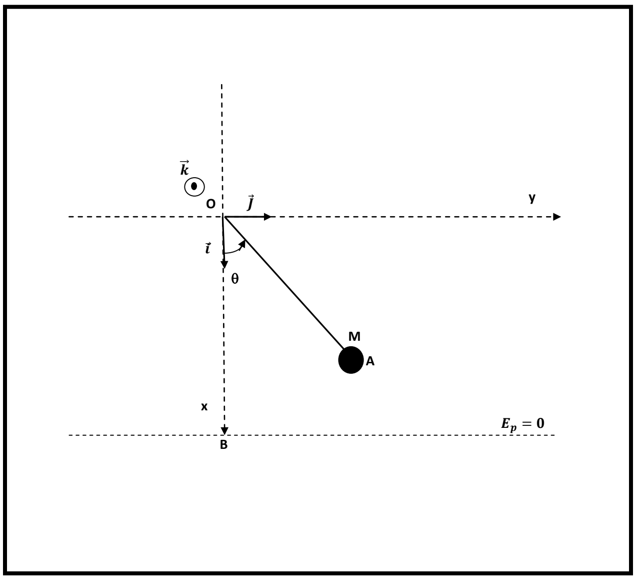
14 $\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} = 0, \quad \frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$ Équilibre instable correspond à un maximum d'énergie

Applications

APPLICATION

1. Le Pendule Simple

On considère une masse m accrochée à une extrémité M d'un fil de longueur l =2m et de masse négligeable. L'autre extrémité O du fil est fixe dans le référentiel terrestre considéré galiléen $\mathfrak{R}$ (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},,\vec{k}$). L'inclinaison du fil par rapport à la verticale est noté par l'angle θ, $\theta = 9°$.. La masse m est abandonnée sans vitesse initiale du point *A*, et on néglige tous les frottements.



1.1 Etude Cinématique

L'étude du mouvement du point matériel *M* dans le plan (O,x,y,z) se fait en coordonnées polaires (*r* = *l*,θ) et la base associée ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$)

1. Exprimer $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ en fonction des vecteurs de la base cartésienne $\vec{\imath},\vec{\jmath}$
2. Déterminer $\dot{\vec{u}}_r$ et $\dot{\vec{u}}_\theta$
3. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(\mathbf{M}/\mathfrak{R})$ en fonction de *l* et $\dot{\theta}$
4. Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}_M$ en fonction de *l* et $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$
5. Donner l'expression de la vitesse $\vec{V}(\mathbf{M}/\mathfrak{R})$ et l'accélération $\vec{a}_M$ en coordonnée cartésienne.
6. Donner l'expression de la vitesse $\vec{V}(\mathbf{M}/\mathfrak{R})$ et l'accélération $\vec{a}_M$ dans la base de Frenet.

1.2 : Etude Dynamique

1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au point ***M*** et projeter l'équation obtenue dans base polaire $\vec{\boldsymbol{u}}_r, \vec{\boldsymbol{u}}_\theta$.
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le cas de faibles oscillations.
3. Résoudre cette équation différentielle.
4. Etablir l'expression de la tension *T* du fil.

1.3 Etude de Dynamique en rotation

1. Déterminer le moment cinétique $\vec{L}_0(M/\mathfrak{R})$ en O du point M.
2. En appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à O, déterminer l'équation du mouvement de M en fonction de θ et ses dérivées.

1.4 Travail et Energie

On choisit le point B comme référence pour l'énergie potentielle de pesanteur .

1. Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m du point M lorsqu'il est en A, en fonction de m, g , α et l.
2. Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m du point M lorsqu'il passe en B, en fonction de m et v_B.
3. À partir des relations précédentes, déterminer l'expression puis la valeur de la vitesse v_B au point B.
4. Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le cas de faibles oscillations.

1.5 Corrigé pendule simple

Partie I

1. $\vec{u}_r = \cos\theta\ \vec{\imath} + \sin\theta\ \vec{\jmath}$, $\vec{u}_\theta = -\sin\theta\ \vec{\imath} + \cos\theta\ \vec{\jmath}$
2. $\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\ \vec{u}_\theta$, $\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\ \vec{u}_r$
3. Le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = l\,\vec{u}_r$

   La vitesse $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{l}\ \vec{u_r} + l\dot{\vec{u}}_r = l\,\dot{\theta}\ \vec{u}_\theta$, la longueur l du fil est constant
4. $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{l}\ \dot{\theta}\ \vec{u}_\theta + l\,\ddot{\theta}\ \vec{u}_\theta + l\,\dot{\theta}\ \dot{\vec{u}}_\theta = l\,\ddot{\theta}\ \vec{u}_\theta - l\,\dot{\theta}^{\,2}\,\vec{u_r}$

5. En coordonnés cartésiennes : $x = l\cos\theta \quad y = l\sin\theta$

   Le vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = l\cos\theta\,\vec{\imath} + l\sin\theta\,\vec{\jmath}$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -l\,\dot{\theta}\,\sin\theta\,\vec{\imath} + l\,\dot{\theta}\,\cos\theta\,\vec{\jmath}$$

Le module de la vitesse $\vec{v}$ est :

$$v = \sqrt{(-l\,\dot{\theta}\,\sin\theta)^2 + (l\,\dot{\theta}\,\cos\theta)^2} = l\,\dot{\theta}$$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -l\,\ddot{\theta}\,\sin\theta\,\vec{\imath} - l\,\dot{\theta}^2\cos\theta\,\vec{\imath} + l\,\ddot{\theta}\,\cos\theta\,\vec{\jmath} - l\,\dot{\theta}^2\sin\theta\,\vec{\jmath} = l\,\ddot{\theta}\,(-\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}) - l\,\dot{\theta}^2(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}) = l\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - l\,\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r}$

Dans la Base de Frenet :

$\vec{u}_\theta = \vec{u}_t$ et $\overrightarrow{u_r} = -\overrightarrow{u_N}$

$$\vec{v} = v\,\vec{u}_t = l\,\dot{\theta}\,\vec{u}_t$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{l}\,\overrightarrow{u_N} = l\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_t + l\,\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_N}$$

Partie II

1. $\sum\vec{F} = m.\vec{a}$ principe fondamentale de la dynamique.

- ✓ Projection de forces appliquées sur le point matériel M suivant la direction $\vec{u}_r$

$$\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{u}_r - mg\sin\theta\,\vec{u}_\theta$$
$$\vec{T} = -T\,\vec{u}_r$$

- ✓ Projeter l'équation du principe fondamentale de la dynamique dans la base polaire $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$

  $\vec{u}_r :\ mg\cos\theta - T = -m\,l\,\dot{\theta}^2$

  $\vec{u}_\theta :\ -mg\sin\theta = m\,l\,\ddot{\theta}\ ,\quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

Pour des faibles angles $\theta \ll \;\Rightarrow \sin\theta \approx \theta$, l'équation différentielle devient alors : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\theta = 0$

2. La solution de l'équation différentielle est : $\theta(t) = A\cos(\omega\, t + \varphi)$

   A : l'amplitude du Mouvement oscillatoire

   ω : La pulsation du mouvement $\omega = 2\pi f$ tel que f est la fréquence.

   φ : La phase

3. Pour obtenir l'expression de la tension T du fil, on utilise la projection de l'équation du principe fondamentale de la dynamique suivant $\vec{\boldsymbol{u}}_r$

$$T = mg\cos\theta + m\, l\, \dot{\theta}^{\,2}$$

Partie III :

1. Le moment cinétique $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v}$ et $\vec{v} = l\,\dot{\theta}\;\;\vec{u}_\theta$.

- ✓ $\vec{L}_0 = \; l\,\vec{u}_r \wedge m\, l\,\dot{\theta}\;\;\vec{u}_\theta = ml^2\dot{\theta}\;\vec{k}$
- ✓ $\overrightarrow{M_0(\vec{F})} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \; l\,\vec{u}_r \wedge (mg\cos\theta\,\vec{\boldsymbol{u}}_r - mg\sin\theta\;\vec{u}_\theta) = -mgl\sin\theta\;\;\vec{k}$
- ✓ $\overrightarrow{M_0(\vec{T})} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \; l\,\vec{u}_r \wedge -T\vec{u}_r = \vec{0}$

2. L'application du théorème du moment cinétique par rapport à $\boldsymbol{O}$

- ✓ $\left.\frac{d\overrightarrow{L_0(M)}}{dt}\right|_R = \overrightarrow{M_{/O}}(\vec{F})$
- ✓ $ml^2\ddot{\theta} \;=\; -mgl\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

3. Pour des faibles angles $\theta \ll \;\Rightarrow \sin\theta \approx \theta$, l'équation différentielle devient alors :

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\theta = 0$

Partie IV

1. L'energie mécanique au point M, $E_m = E_C + E_P = 0 + mgl(1 - \cos\theta)$

2. L'énergie mécanique E_m du point M lorsqu'il passe en B

$$E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$$

3. L'énergie Mécanique est conservée :

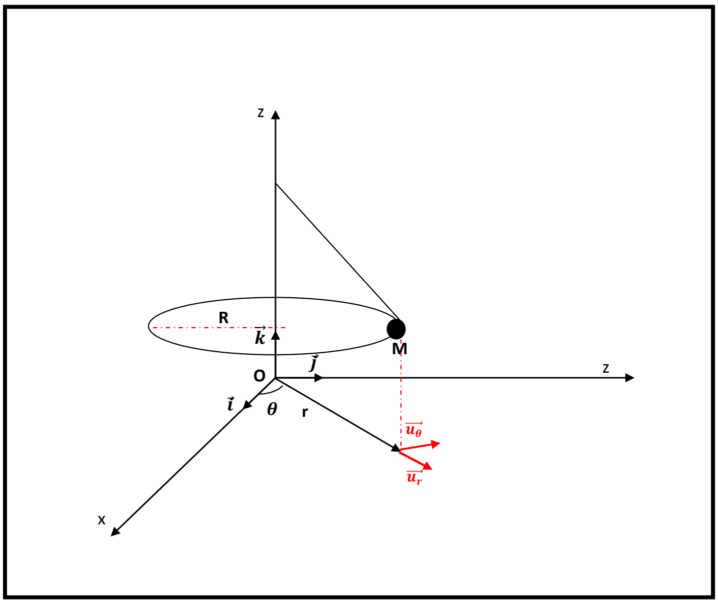
$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl(1 - \cos\theta) \Rightarrow v = \sqrt{2g(1 - \cos\theta)}$$

4. A un point M quelconque :

- ✓ $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl(1 - \cos\theta)$
- ✓ L'énergie cinétique est conservé donc, $\frac{dE_m}{dt} = ml^2\,\dot{\theta}\,\ddot{\theta} + mgl\,\dot{\theta}\sin\theta = 0 \Rightarrow$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

2. Le Pendule Conique



L'extrémité O d'un fil de masse négligeable et de longueur l est fixée. Un corps de masse m est fixé au point M est écarté d'un angle α de la verticale puis lancé.
On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les forces appliquées au point matériel sont le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du fil.

1. Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

2. Exprimer les composantes de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$ du point matériel M

3. En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer la vitesse initiale qu'il faut communiquer à M pour qu'il décrive des cercles horizontaux.
4. Reprendre la même question en utilisant la relation fondamentale de la dynamique.

2.1 Corrigé Pendule conique

1. $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{k}$
2. Le vecteur vitesse $\vec{v} = r\,\dot{\vec{u}}_r = r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ et le vecteur accélération est $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = r\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\dot{\vec{u}}_\theta = r\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - r\,\dot{\theta}^{\,2}\,\overrightarrow{u_r}$
3. L'application du théorème du moment cinétique par rapport à ***O***
   - ✓ $\vec{L}_0 = (r\,\vec{u}_r + z\,\vec{k}) \wedge m\,r\,\dot{\theta}\;\;\vec{u}_\theta = mr\dot{\theta}\;\vec{k} - mrz\,\dot{\theta}\,\vec{u}_r$
   - ✓ $\overrightarrow{M_0(\vec{F})} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = (r\,\vec{u}_r + z\,\vec{k}) \wedge -\mathrm{mg}\,\vec{k} = mgr\,\vec{u}_\theta$
   - ✓ $\overrightarrow{M_0(\vec{T})} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$

✓ $\left.\frac{d\overrightarrow{L_0(M)}}{dt}\right|_R = \overrightarrow{M_{/O}}(\vec{F})$

✓ $mr\ddot{\theta}\;\;\vec{k} - mrz\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_r - mr\,\dot{\theta}\;\;\dot{\vec{u}}_r = mgr\,\vec{u}_\theta$

✓ $mr\ddot{\theta}\;\;\vec{k} - mrz\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_r - mrz\,\dot{\theta}^{\,2}\,\vec{u}_\theta = mgr\,\vec{u}_\theta \Rightarrow \begin{cases} mr\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = cst \\ -mrz\,\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = cst \\ -mr\,z\,\dot{\theta}^{\,2} = mgr \Rightarrow z\dot{\theta}^{\,2} = -g \end{cases}$

✓ $\dot{\theta}^{\,2} = -\frac{g}{z}$ avec $z = -l\cos\alpha$

✓ $\frac{v^2}{r^2} = \frac{v^2}{(l\sin\alpha)^2}$

Donc $\frac{v^2}{(l\sin\alpha)^2} = \frac{g}{l\cos\alpha} \Rightarrow v^2 = \frac{gl}{\cos\alpha}\sin\alpha^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{gl}{\cos\alpha}}.\sin\alpha$

4. $\sum\vec{\mathrm{F}} = \mathrm{m}.\vec{\mathrm{a}}$ principe fondamentale de la dynamique.
   - ✓ $\vec{P} = -\mathrm{mg}\,\vec{k}$
   - ✓ $\vec{T} = \mathrm{T}\cos\alpha\,\vec{k} - \mathrm{T}\sin\alpha\;\vec{u}_r$
   - ✓ $\vec{a} = r\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - r\,\dot{\theta}^{\,2}\,\overrightarrow{u_r}$

$$\begin{cases} -\mathrm{mg} + \mathrm{T}\cos\alpha = 0 \Rightarrow T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} \\ -\mathrm{T}\sin\alpha = -mr\,\dot{\theta}^{\,2} \Rightarrow \dot{\theta}^{\,2} = \dfrac{g\sin\alpha}{r\cos\alpha} \\ 0 = m\,r\,\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = cst\ (Mouvement\ uniforme) \end{cases}$$

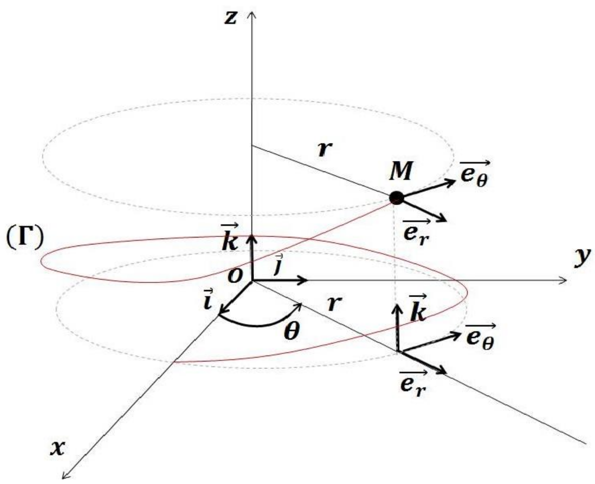
✓ $\frac{v^2}{r^2} = \dot{\theta}^{\,2} \Rightarrow v^2 = r^2\dot{\theta}^{\,2} = r^2\ \frac{g\sin\alpha}{r\cos\alpha} = r.\frac{g\sin\alpha}{\cos\alpha} = l.g.\frac{\sin\alpha^2}{\cos\alpha}$

✓ $\Rightarrow v = \sqrt{\frac{gl}{\cos\alpha}}.\sin\alpha$

3.Le mouvement hélicoïdal

Le mouvement hélicoïdal se décompose en un **mouvement circulaire dans le plan** $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ **et un mouvement de translation suivant l'axe (Oz).**

$$\begin{cases} x = r\cos\theta(t) \\ y = r\sin\theta(t) \\ z = 2r\,(1 - \theta(t)) \end{cases}$$



Avec r le rayon associé au mouvement circulaire est une constante, $\frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{cste} > 0$ et $\theta(t = 0) = 0$.

On étudie le mouvement du point M dans un référentiel galiléen d'abord dans la base cartésienne $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ puis dans la base cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$

3.1 Coordonnées cartésiennes

1. Donnez l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}(\,M/\mathcal{R})$ en fonction de R, ω et t.
2. Donnez l'expression du vecteur $\vec{a}\,(M/\mathcal{R})$ en fonction de R, ω et t.

3.2 Coordonnées cylindriques

1. Donner l'expression de $\overrightarrow{OM}$
2. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}(\,M/\mathcal{R})$ en fonction de R et ω.
3. Déterminer la vitesse $\vec{a}(\,M/\mathcal{R})$ en fonction de R et ω.
4. Calculer la norme de la vitesse $\vec{v}(\,M/\mathcal{R})$

3.3 Coordonnées de Frenet

1. Déterminer le vecteur tangentielle de la base de frenet $\vec{e}_t$.
2. Représenter le vecteur $\vec{e}_t$ dans le plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
3. Déterminer l'accélération tangentiel a_t puis a_N en fonction de R et ω.
4. Déduire le rayon de courbure ρ.

3.4 Corrigé

Partie I

1. Le vecteur position en coordonnées cartésienne est : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = r\cos\omega t\,\vec{\imath} + r\sin\omega t\,\vec{\jmath} + 2r(1-\omega t)\,\vec{k}$

1. Le vecteur vitesse $\vec{v}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k} = -r\omega\sin\omega t\,\vec{\imath} + r\omega\cos\omega t\,\vec{\jmath} - 2r\omega\,\vec{k}$
2. $\vec{a}(M) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -r\omega^2\cos\omega t\,\vec{\imath} - r\omega^2\sin\omega t\,\vec{\jmath}$

Partie II

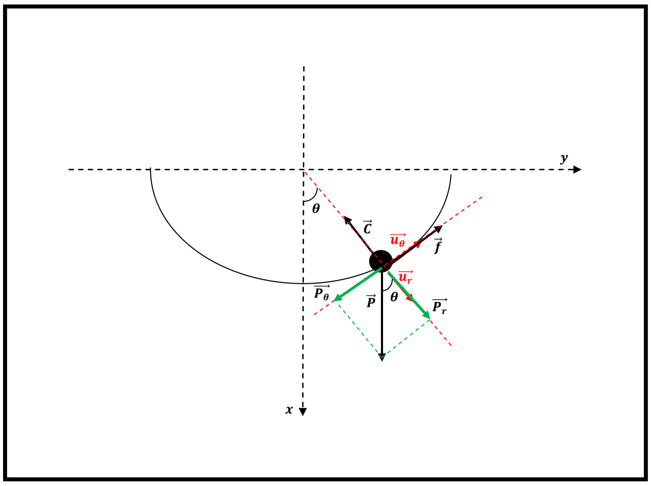
1. Le vecteur position $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e_r} + z\vec{k} = r\sin\theta + 2r(1-\omega t)$
2. Le vecteur vitesse $\vec{v}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = r\dot{\vec{e_r}} + \dot{z}\,\vec{k} = r\omega\overrightarrow{u_\theta} - 2rw\vec{k}$
2. Le vecteur accélération $\vec{a}\,(M) = r\omega\dot{\overrightarrow{e_\theta}} = r\omega^2\overrightarrow{e_r}$
3. La norme du vecteur vitesse $\vec{v}(M)$ est $v = \sqrt{(r\omega)^2 + (2rw)^2} = \sqrt{5}r\omega$

Partie III

1. Le vecteur tangentielle de la base de frenet en coordonées cylindrique $\vec{e}_t = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{e_\theta} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k}$
2. Le vecteur $\vec{e}_N$ dans le plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}$ est le vecteur $-\overrightarrow{e_r}$.

3. L'accélération tangentielle $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$ et l'accélération $a_N = \sqrt{a^2 - a_t^2} = r\omega^2$

4. Le rayon de courbure est $\rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{5r^2\omega^2}{r\omega^2} = 5r$



4.Mouvement avec frottement

Un point matériel M de masse m se déplace sur une piste circulaire de rayon R , sans glissement (cas statique). Le point est soumis à des forces de frottement solide de coefficient statique μ_S et de coefficient cinétique μ_C. On note g l'accélération de la pesanteur. On écarte le point M d'un angle θ par rapport à la verticale et on suppose qu'il n'ya pas de mouvement

1. Faire un bilan des forces qui s'appliquent sur le point M
2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au point M et projeter l'équation obtenue dans les directions données par la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$
3. En déduire que le point M ne glisse pas seulement si l'angle θ est plus petit qu'un angle limite θ_c tel que $\tan\theta_c = \mu_S$

3.1 Corrigé

1. Le bilan des forces
   4. $\vec{P} = m\vec{g}$
   5. $\vec{C}$: forces de contact où force de réaction de la piste
   6. $\vec{f}$: force de frottement solide/solide opposé au mouvement

Le point M ,

2. $\sum \vec{F} = m.\vec{a}$ principe fondamentale de la dynamique

$\vec{P} + \vec{C} + \vec{f} = \vec{0}$, cas statique, le point M est immobile

3. Projection de forces appliquées sur le point matériel M suivant la direction $\vec{u}_r$:
   $mg\cos\theta = C$
4. Projection de forces appliquées sur le point matériel M suivant la direction $\vec{u}_\theta$:

$$mg\sin\theta = f$$

3. $f = \mu_s .C$ donc $\mu_s = \frac{f}{c} = \tan\theta_c$, θ_c est l'angle critique

✓ Le point M glissepour un angle θ, tel que $\tan\theta \leq \tan\theta_c$

5.Mouvement en rotation

Dans le modèle de Bohr, l'atome d'hydrogène est un système à deux corps ponctuels constitué d'un proton de masse m_p , et d'un électron M , de masse m_e .

Le proton est considéré comme fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen $R(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ ou l'origine O correspond au noyau de l'atome.

L'électron n'est soumis qu'à la force d'interaction électrostatique : $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{u_r}$; K étant une constante positive.

1. Exprimer l'accélération $\vec{a}$ de l'électron dans la base polaire ($\vec{u}_r,\vec{u}_\theta$).
2. En utilisant la relation fondamentale de la dynamique, montrer que le mouvement circulaire de l'électron autour du noyau est uniforme et exprimer le carré de la vitesse v^2en fonction de r , m_e et k .
3. Exprimer l'énergie cinétique $E_c(r)$, l'énergie potentielle d'interaction $E_P(r)$ et l'énergie mécanique $E_M(r)$ de l'électron.

Pour quantifier l'énergie de l'électron, Bohr ajouta une troisième hypothèse ou condition de quantification: les seules trajectoires circulaires permises sont celles pour lesquelles le moment cinétique est un multiple entier de la constante de Planck h :

$L_o(M) = n\frac{h}{2\pi}$; n étant un entier naturel (n>1)

4. Calculer le moment cinétique de l'électron par rapport à O
5. Déterminer la vitesse v de l'électron en fonction de r, m_e, h et du nombre quantique principal n.
6. Quelles sont alors les rayons des orbites permises et les énergies permises ?

Corrigé

1. L'accélération $\vec{a}$ de l'électron dans la base polaire ($\vec{u}_r$,$\vec{u}_\theta$) est :

   $\vec{a} = -r\,\dot{\theta}^{\,2}\,\overrightarrow{u_r} + r\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta$, tel que r est le rayon de l'atome d'hydrogène qui est constant.

2. $\sum \vec{F} = m.\vec{a}$ principe fondamentale de la dynamique

$$m\left(-r\,\dot{\theta}^{\,2}\,\overrightarrow{u_r} + r\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta\right) = -\frac{k}{r^2}\overrightarrow{u_r} \Rightarrow \begin{cases} r\,\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow v = cst \\ -r\,\dot{\theta}^{\,2} = -\dfrac{k}{r^2} \end{cases}$$

$\dot{\theta} = \frac{v}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{k}{r.m_e}$

3. Exprimer l'énergie cinétique $E_c(r)$, l'énergie potentielle d'interaction $E_P(r)$ et l'énergie mécanique $E_M(r)$ de l'électron

✓ $E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{k}{r}$

4. $E_p = \int \vec{F}.\overrightarrow{dr} = -\frac{k}{r}$

5. $E_M = E_C + E_P = -\frac{1}{2}\frac{k}{r}$

4. Le moment cinétique $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = mrv\,\vec{k}$

   En valeur algébrique $L_O = m_e r v = n\frac{h}{2\pi}$

5. La vitesse de l'électron $v = n\frac{h}{2\pi m_e r}$

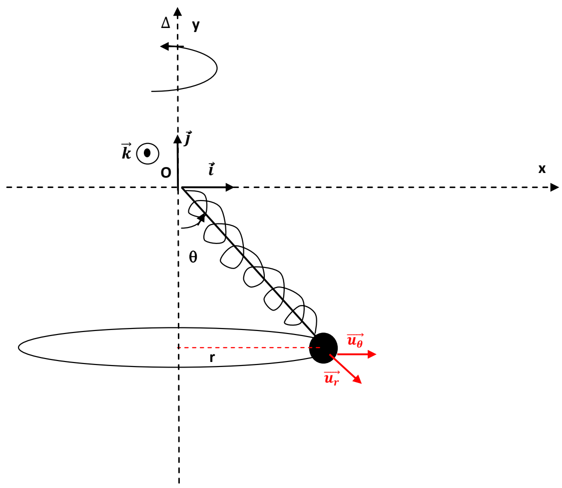
6. Les rayons et les énergies permises de l'électrons sont :

- ✓ $r = n^2 \frac{h^2}{2\pi m_e k}$
- ✓ $E_M = -\frac{k^2.2\pi^2.m_e}{h^2.n^2}$

6.Dynamique en référentiel non Galiléen

On dispose d'un ressort, de longueur au repos l_0 et de raideur k, enfilé sur une tige soudée en O à un axe vertical (Δ) et inclinée par rapport à la verticale d'un angle α constant. Une des extrémités du ressort est fixée en O tandis qu'à l'autre on accroche un corps M, de masse m, coulissant sans frottements sur la tige. L'ensemble tourne autour de (Δ) à la vitesse angulaire constante ω. Le ressort n'oscille pas et a une longueur constante l.

1. Quel est la trajectoire décrite par le point matériel M dans le référentiel terrestre $\boldsymbol{R}$ supposé Galiléen.
2. Exprimer la force d'inertie d'entrainement et de Coriolis en fonction de m, l, θ, ω dans la base $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{k}$
3. Donner la force de rappel du ressort $\vec{T}$ et la force de Réaction $\vec{R}$ dans la base $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$.
4. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le repère mobile $\boldsymbol{R'}$ **(O,** $\boldsymbol{\vec{u}_r}, \boldsymbol{\vec{u}_\theta}, \vec{k}$ **)** lié au point matériel M, déduire de sa projection suivant $\vec{e}_r$ la longueur l du ressort en fonction de m, g, θ, k, l_0, g.
5. Quelle condition sur ω en découle? Déduire l'expression de l'intensité de force de réaction $\vec{R}$ exercée par la tige sur M en fonction de m, g, θ, ω.



6.1 Corrigé

1. $r = l \sin\theta$
   - ✓ l et θ sont des constantes donc $r = cst$
   - ✓ Mouvement circulaire de rayon r et d'une vitesse angulaire ω

2. Les forces d'inertie sont :

La force de Coriolis est : $\overrightarrow{F_C} = -m\overrightarrow{a_C} = -m(2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_r})$

- ✓ $\overrightarrow{v_r}$ est la vitesse relative du point matériel C dans le référentiel $\boldsymbol{R'}$ **(O,** $\vec{\boldsymbol{u}}_r, \vec{\boldsymbol{u}}_\theta, \vec{k}$ **)**
- ✓ $\overrightarrow{v_r} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{F_C} = \vec{0}$

La force de Coriolis est : $\overrightarrow{F_e} = -m\overrightarrow{a_e} = -m\left(\frac{d^2\overrightarrow{O\acute{O}}}{dt^2} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM})\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{OM}$

- ✓ Le point $\acute{O}$ coïncide avec le point O $\Rightarrow \frac{d^2\overrightarrow{O\acute{O}}}{dt^2} = 0$

  $\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{OM} = 0 \Rightarrow \vec{\omega} = cst$
- ✓ $\overrightarrow{F_e} = -m\,\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM})$

La vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est égale à $\vec{\omega} = -\omega\cos\theta\,\vec{u}_r + \omega\,\sin\theta\,\vec{u}_\theta$

- ✓ $\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right) = -\omega^2 OM\ \sin^2\theta\,\vec{u}_r - \omega^2 OM\ \sin\theta\cos\varphi\,\vec{u}_\theta$
- ✓ $\overrightarrow{F_e} = m\,\omega^2\,l\,sin^2\theta\,\vec{u}_r + m\,\omega^2\,l\ \sin\theta\cos\varphi\,\vec{u}_\theta$,

Une autre méthode peut être utilisée pour calculer la force d'inertie d'entrainement :

- ✓ $\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}\right) = \ \omega\,\vec{\jmath}\wedge(\omega\,\vec{\jmath}\wedge \mathrm{OM}\,\vec{u}_r) = \omega\vec{u}_z\wedge(-\omega.OM\sin(\pi-\theta))\vec{k} = -\omega^2 l\sin\theta\ \vec{\imath}$,
  sachant que $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$
- ✓ $\vec{F_e} = m\,\omega^2\, l\sin\theta\ \vec{\imath}$, $\vec{\imath} = \ \sin\theta\ \vec{u}_r + \ \cos\theta\ \vec{u}_\theta$
- ✓ $\vec{F_e} = m\,\omega^2\, l\ sin^2\theta\,\vec{u}_r + \ m\,\omega^2\, l\ \sin\theta\cos\varphi\,\vec{u}_\theta$

3. La tension du ressort $\vec{T} = -k(l-l_0)\,\vec{u}_r$ et la force de réaction $\vec{R} = R_\theta\,\vec{u}_\theta + \ R_k\vec{k}$

4. La relation fondamentale de la dynamique dans un référentiels non galiléen $\boldsymbol{R'}$ **(O,** $\vec{\boldsymbol{u}}_r,\vec{\boldsymbol{u}}_\theta,\vec{\boldsymbol{u}}_\varphi$ **)** est :

$$m\overrightarrow{a_r} = m\,\overrightarrow{a_R} + \ \vec{F_e} + \vec{F_C} \ = \ \sum\vec{F} + \vec{F_e} + \vec{F_C} \ = \ \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \ \vec{F_e}$$

- ✓ $\overrightarrow{a_r}$ est l'accélération relative du point C dans le référentiel $\boldsymbol{R'}$ **(O,** $\vec{\boldsymbol{u}}_r,\vec{\boldsymbol{u}}_\theta,\vec{\boldsymbol{u}}_\varphi$ **)**
- ✓ $\vec{P} = mg\,\cos\theta\,\vec{u}_r - \mathrm{mg}\ \sin\theta\ \ \vec{u}_\theta$
- ✓ Projection suivant $\vec{u}_r$:

$$0 = mg\cos\theta - k(l-l_0) + 0 + \ m\,\omega^2\, l\ sin^2\theta$$

$$l = \frac{mg\cos\theta + kl_0}{k - m\omega^2 l\ sin^2\theta}$$

La longueur l du ressort doit être positive , donc $k - m\omega^2 l\ sin^2\theta > 0 \Rightarrow \omega < \sqrt{\frac{k}{m.sin^2\theta}}$

5. Projection de la relation fondamentale de la dynamique suivant $\vec{k}$

$$0 = \ R_k$$

Projection de la relation fondamentale de la dynamique suivant $\vec{u}_\theta$

$$0 = -mg\sin\theta + 0 + R_\theta + \ m\,\omega^2\, l\ \sin\theta\cos\varphi \Rightarrow R_\theta = \frac{m\sin\theta}{g} - l\omega^2\cos\theta$$

,