



**École Supérieure en Génie  
Électrique et Énergétique  
(ESGEE)-Oran**



**Module Physique II**

**Polycopié de Cours**

# **Électromagnétisme à l'état statique**

**Mme Nassima Hamzaoui**

*Année Universitaire 2020-2021*

## **AVANT-PROPOS**

Ce polycopié est destiné aux étudiants de la première année de l'École Supérieure en Génie Électrique et Énergétique d'Oran. Pour leur permettre de surpasser les quelques difficultés rencontrées dans leurs études. Le contenu du programme se divise en Cinq parties:

- Chapitre1: Rappels mathématiques
- Chapitre2: Champ et potentiel électrostatique
- Chapitre3: Les conducteurs
- Chapitre4: Courant électrique
- Chapitre5: Magnétostatiques

L'étudiant pourra ainsi acquérir des connaissances en électricité et magnétisme, il mettra ces compréhensions en pratique vu qu'on a mis à la fin de chaque chapitre des exercices résolus. Enfin, j'espère que ce recueil polycopie puisse contribuer à apporter un plus aux étudiants de la première année.

Mme Nassima Hamzaoui

# TABLE DES MATIÈRE

CHAPITRE I: RAPPELS MATHÉMATIQUES.....	7
I.1. Introduction.....	7
I.2. Éléments de calcul vectoriel.....	7
I.2.1. Base orthonormée directe.....	7
I.2.2. Coordonnées d'un point et composantes d'un vecteur .....	7
I.2.3. Calcul vectoriel .....	7
I.2.3.1. Produit scalaire.....	7
I.2.3.2. Produit vectoriel.....	8
I.3. Principaux systèmes de coordonnées dans le l'espace.....	8
I.3.1. Coordonnées cartésiennes .....	8
I.3.2. Coordonnées cylindriques .....	9
I.3.3. Coordonnées sphériques.....	10
CHAPITRE II: CHAMP ET POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE.....	11
II.1. Introduction .....	11
II.2. Phénomène d'électrisation .....	11
II.2.1. Électrisation par frottement.....	11
II.2.2. Électrisation par contact (répulsion).....	11
II.2.3. Électrisation par influence .....	12
II.3. Charge électrique.....	12
II.4. Charge ponctuelle .....	12
II.5. La force électrique .....	12
II.6. Principe fondamental de l'électrostatique (PFE) Loi de coulomb.....	12
II.7. Principe de superposition.....	14
II.8. Champ électrostatique crée par une charge ponctuelle.....	15
II.9. Champ électrostatique crée par une distribution de charge .....	15
II.9.1. Distribution de charge discontinue (discrète).....	15
II.9.2. Distribution de charge continue .....	16
II.10. Notion de potentiel électrostatique.....	17
II.10.1. Circulation du champ électrostatique .....	17
II.10.2. Expression du potentiel électrostatique crée par une charge ponctuelle q .....	18
II.11. Potentiel électrostatique crée par une distribution de charge.....	19
II.11.1. Distribution de charge discontinue (discrète).....	19
II.11.2. Distribution continue de charge .....	20

II.12. Surfaces équipotentielle et ligne du champ électrique .....	21
II.12.1. Surface équipotentielle.....	21
II.12.2. Les lignes de champ.....	21
II.12.3. Tube de champ.....	22
II.13. Énergie potentiel d'interaction entre deux charges ponctuelles.....	22
II.13.1. Définition.....	22
II.13.2. Energie potentielle d'une distribution continue de charges .....	23
II.14. Théorème de Gauss.....	23
II.14.1. Définition.....	23
II.14.2. Le flux d'un vecteur à travers une surface .....	23
II.14.3. Le flux du champ électrostatique crée par une distribution de charge à travers .....	24
II.14.4. Énoncé du théorème de Gauss .....	25
II.14.5. Invariance et Symétrie .....	26
II.14.5.1. Les invariances d'une distribution de charge .....	26
II.14.5.2. La symétrie .....	26
II.14.6. Exemple d'application du Théorème de Gauss .....	26
II.14.7. Dipôle électrostatique .....	28
II.14.7.1. Définition.....	28
II.14.7.2. Potentiel et champ crée par un dipôle.....	28
II.14.7.3. Calcul du champ crée par un dipôle électrostatique .....	29
II.14.7.4. Action d'un champ électrique sur un dipôle.....	29
II.14.7.5. Énergie électrostatique d'un dipôle soumis à un champ électrostatique.....	30
Exercice d'application.....	31
Solution des exercices .....	33
<b>CHAPITRE III: LES CONDUCTEURS .....</b>	<b>38</b>
III.1. Introduction.....	38
III.2. Conducteur en équilibre.....	38
III.3. Notion d'équilibre électrostatique .....	38
III.4. Quelques propriétés des conducteurs en équilibre .....	39
III.5. Pouvoir des pointes (effet de pointe) .....	41
III.6. Influence de deux conducteurs chargés .....	42
III.6.1. Définition .....	42
III.6.2. Influence partielle.....	42
III.6.4. L'influence totale.....	43
III.6.5. Théorème des éléments correspondants.....	44
III.7. Condensateurs .....	45

III.7.1. Définition .....	45
III.7.2. Capacité d'un condensateur Plan .....	45
III.7.3. Capacité d'un condensateur sphérique.....	46
III.7.4. Capacité d'un condensateur cylindrique .....	46
III.7.5. Association de Condensateur.....	47
III.7.6. Énergie électrostatique.....	47
Exercice d'application.....	48
Solution des exercices .....	49
<b>CHAPITRE IV: COURANT ÉLECTRIQUE.....</b>	<b>51</b>
IV.1. Courants électriques .....	51
IV.1.1. Origine électrocinétique .....	51
IV.1.2. Origine du courant électrique .....	51
IV.1.3. Courant permanent .....	51
IV.1.4. Sens conventionnel du courant.....	51
IV.1.5. Intensité du courant .....	52
IV.1.6. Tension électrique .....	52
IV.1.7. Ligne de courant.....	52
IV.1.8. Vecteur densité de courant .....	53
IV.2. Loi d'ohm.....	53
IV.2.1. Loi d'Ohm à l'échelle macroscopique.....	53
IV.2.2. Forme locale de la loi d'Ohm .....	53
IV.2.3. Résistivité.....	54
IV.2.4. Mobilité.....	55
IV.2.5. Effet Joule .....	55
<b>CHAPITRE V: MAGNÉTOSTATIQUES .....</b>	<b>56</b>
V.1. Introduction .....	56
V.2. Origine du champ magnétique .....	56
V.3. La définition de la force de Lorentz.....	57
V.4. La force de Laplace .....	58
V.5. Invariances et symétrie .....	59
V.5.1. Invariances.....	59
V.5.2. Symétries .....	59
V.6. Principe de superposition.....	60
V.7. La loi de Biot et Savart .....	61
V.8. Le théorème d'Ampère .....	61
V.9. Exemples de calcul du champ magnétique créé par différentes distributions de courants .....	62

V.9.1. Champ créé par un fil infini parcouru par un courant I.....	62
V.9.2. Champ créé par une spire circulaire de rayon R, parcourue par un courant I.....	63
V.9.3. Champ créé par un solénoïde.....	64
V.9.4. Dipôle magnétique.....	64
V.10. Induction magnétique.....	65
V.11. L'énoncé des équations de Maxwell.....	66
V.11.1. Opérateurs vectoriels.....	66
V.11.2. Les équations de Maxwell.....	68
V.11.3. Equations de locales du champ électriques.....	68
Exercice d'application.....	70
Solution des exercices.....	71
ANNEXE A.....	74
ANNEXE B.....	75
BIBLIOGRAPHIE.....	76

# CHAPITRE I

## RAPPELS MATHÉMATIQUES

### I.1. Introduction:

L'objet de ce premier chapitre est d'expliciter les propriétés mathématiques indispensables à la compréhension du sens physique des lois de l'électromagnétisme.

### I.2. Éléments de calcul vectoriel:

#### I.2.1. Base orthonormée directe:

$(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est une base orthonormée si et seulement si:

- $\vec{u}_x \perp \vec{u}_y \perp \vec{u}_z$  : vecteurs orthogonaux.
- $\|\vec{u}_x\| = \|\vec{u}_y\| = \|\vec{u}_z\| = 1$  : vecteurs unitaires.

Nous considérerons toujours une base orthonormée directe telle que deux des vecteurs de la base définissent le sens positif du troisième.

En associant un point O de l'espace à cette base, nous obtenons alors un repère d'espace noté R.

#### I.2.2. Coordonnées d'un point et composantes d'un vecteur:

Soit  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  une base orthonormée directe associée à un repère d'espace R.

- Un point M est repéré par ses coordonnées dans le repère R:  $M(x, y, z)$ .
- Un vecteur  $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$  est défini par ses composantes dans la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ :

$$\vec{V} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

#### I.2.3. Calcul vectoriel:

Soient  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  une base orthonormée directe, et deux

vecteurs  $\vec{V}_1 = x_1 \vec{u}_x + y_1 \vec{u}_y + z_1 \vec{u}_z$  et  $\vec{V}_2 = x_2 \vec{u}_x + y_2 \vec{u}_y + z_2 \vec{u}_z$ .

Notons l'angle  $\theta = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

##### I.2.3.1. Produit scalaire

Le produit scalaire de  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  est le scalaire, noté  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$  défini par:

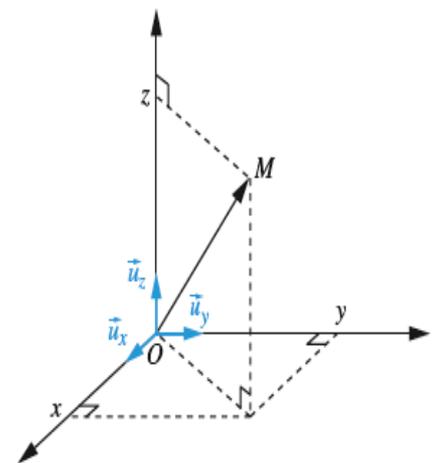


Figure I.1. Une base orthonormée.

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \times \|\vec{V}_2\| \times \cos\theta.$$

L'expression analytique de ce produit scalaire est:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

L'expression de la norme d'un vecteur est:  $\vec{V} \cdot \vec{V} = x^2 + y^2 + z^2 = \|\vec{V}\| \times \|\vec{V}\|$

d'où

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

### I.2.3.2. Produit vectoriel:

Le produit vectoriel de  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  est le vecteur, noté  $\vec{u} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ , défini par :

- sa direction, orthogonale au plan formé par  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ .
- son sens, tel que le trièdre  $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{u})$  soit direct.
- sa norme  $\|\vec{u}\| = \|\vec{V}_1\| \times \|\vec{V}_2\| \times \sin\theta$ .

L'expression analytique de ce produit vectoriel est:  $\vec{u} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{vmatrix}$

## I.3. Principaux systèmes de coordonnées dans le l'espace:

### I.3.1. Coordonnées cartésiennes:

Un point M quelconque de l'espace peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes x, y et z dans la base associée au repère cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

On peut alors écrire :

$$\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

x, y et z sont obtenus en projetant orthogonalement le vecteur position respectivement sur les trois axes Ox, Oy et Oz.

$$x = \vec{OM} \cdot \vec{i}, y = \vec{OM} \cdot \vec{j}, z = \vec{OM} \cdot \vec{k}.$$

- **Déplacement infinitésimal:**

On envisage le déplacement infinitésimal du point M (x,y,z) au point M'(x + dx, y + dy, z + dz). Le déplacement  $\vec{MM'}$  peut alors s'écrire:

$$\vec{MM'} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

- **Élément de volume infinitésimal:**

Le déplacement de M à M' engendre un volume élémentaire

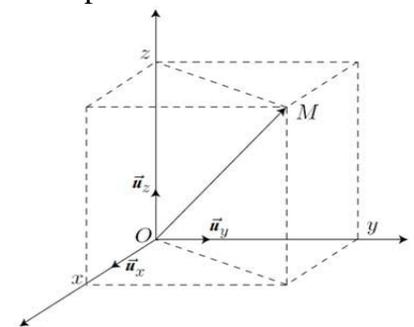


Figure I.2. Un repère cartésien.

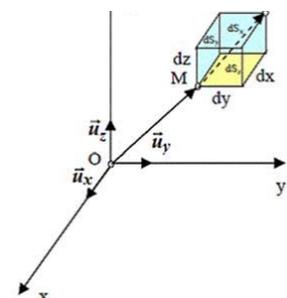


Figure I.3. Volume infinitésimal.

limité par six surface parallèles deux à deux dont  $\overline{MM}$  est une diagonale principale.

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

- **Élément de surface infinitésimal:**

Fixant l'une des coordonnées, le point M se déplace dans une surface élémentaire d'aire :

$$dS_x = dy \cdot dz, \text{ si l'on fixe l'abscisse } x.$$

$$dS_y = dx \cdot dz, \text{ si l'on fixe l'ordonnée } y.$$

$$dS_z = dx \cdot dy, \text{ si l'on fixe la cote } z.$$

### I.3.2. Coordonnées cylindriques:

Un point M de l'espace peut être repéré par ses coordonnées Cylindriques  $\rho, \theta$  et  $z$  dans la base associée au repère cylindrique  $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ .

On peut alors écrire :

$$\overline{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$$

avec  $\rho \geq 0$  et  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  et  $z \in \mathbb{R}$ .

Relations entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

avec  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $\tan \theta = \frac{y}{x}$

- **Déplacement infinitésimal:**

On envisage le déplacement infinitésimal du point  $M(\rho, \theta, z)$  au point  $M'(\rho + d\rho, \theta + d\theta, z + dz)$ .

Le déplacement  $\overline{MM'}$  peut alors s'écrire :

$$\overline{MM'} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z = d\overline{OM}$$

- **Élément de volume infinitésimal:**

On considère le volume infinitésimal  $dV$  engendré par le déplacement du point M précédemment décrit.

Ce volume est donné par:

$$dV = d\rho \cdot \rho d\theta \cdot dz$$

- **Élément de surface infinitésimal:**

Fixant l'une des coordonnées, le point M se déplace dans une surface élémentaire d'aire :

$$dS_\rho = \rho d\theta \cdot dz, \text{ Si l'on fixe le rayon } \rho.$$

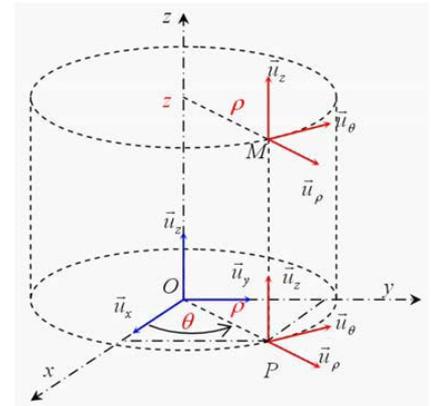


Figure I.4. repère cylindrique.

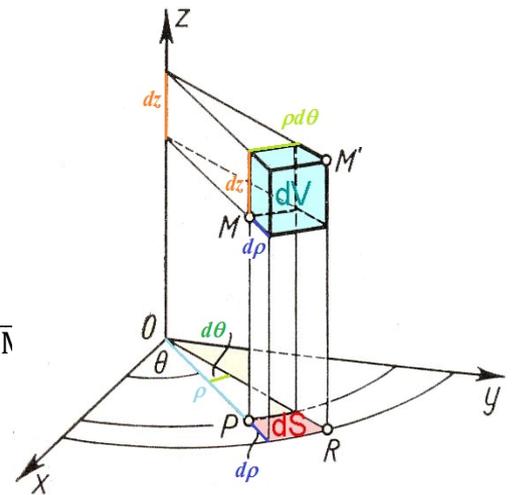


Figure I.5. Volume infinitésimal.

$dS_\theta = d\rho \cdot dz$  , Si l'on fixe l'angle  $\theta$ .

$dS_z = d\rho \cdot \rho d\theta$  , Si l'on fixe la cote  $z$ .

### I.3.3. Coordonnées sphériques:

Un point M de l'espace peut être repéré par ses coordonnées sphériques  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  dans la base associée au repère sphériques  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ . On peut alors écrire :

$$\vec{OM} = r\vec{u}_r$$

avec  $r \geq 0$  et  $0 \leq \theta \leq \pi$  et  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

#### Relations entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques:

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases} \quad \text{et} \quad r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

Ainsi que les vecteurs unitaires:

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta \cos\varphi \vec{u}_x + \sin\theta \sin\varphi \vec{u}_y + \cos\theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \vec{u}_x + \cos\theta \sin\varphi \vec{u}_y - \sin\theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi \vec{u}_x + \cos\varphi \vec{u}_y \end{cases}$$

- **Déplacement infinitésimal:**

On envisage le déplacement infinitésimal du point  $M(r, \theta, \varphi)$  au  $M'(r+dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$ . Le déplacement  $\vec{MM'}$  peut alors s'écrire :

$$\vec{MM'} = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

- **Élément de volume infinitésimal:**

On considère le volume infinitésimal  $dV$  engendré par le déplacement du point M précédemment décrit.

Ce volume est donné par :

$$dV = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin\theta d\varphi$$

- **Élément de surface infinitésimal:**

$$dS = r d\theta \cdot r \sin\theta \cdot d\varphi \quad \text{Si l'on fixe le rayon } r$$

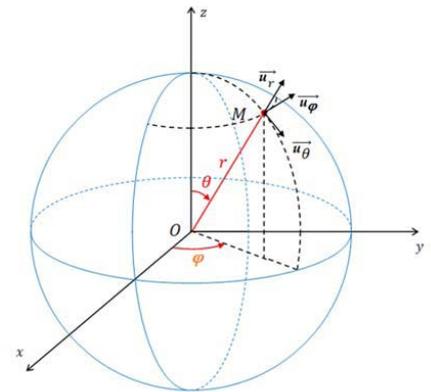


Figure I.6. Repère sphériques.

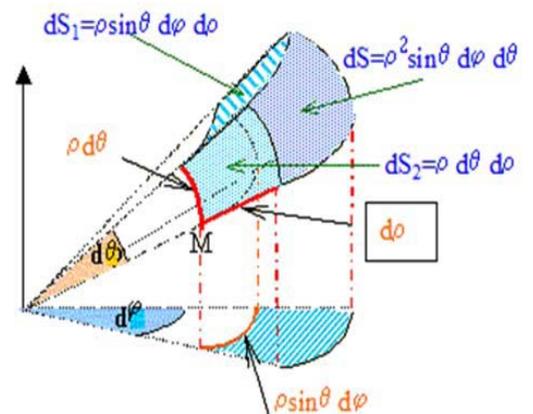


Figure I.7. Surface infinitésimal.

# CHAPITRE II

## CHAMP ET POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE

### II.1. Introduction:

C'est l'étude des phénomènes (le champ, le potentiel électrostatique) créés par des charges statiques (immobiles) dans un référentiel immobiles.

### II.2. Phénomène d'électrisation:

Le phénomène d'électrisation est dû à la migration des particules chargées d'électricité négative appelées des électrons d'un corps à un autre. Le corps qui reçoit les électrons devient chargé négative et celui qui cède les électrons devient chargé positive. Il existe trois modes d'électrifications:

#### II.2.1. Électrisation par frottement:

- **Expérience:**

Une tige en verre frottée à l'aide d'un tissu en soie tenue à la main, attire de petits morceaux de papier. Cette expérience montre que la tige en verre est un isolant électrique puisque les charges restent localisées sur la partie frottée et ne se répandent pas sur toute la surface du matériau. Donc ce phénomène est appelé électrisation.

On remplace la tige en verre par le bâton d'ébonite on obtient le même phénomène.



Figure II.1. Phénomène d'électrisation.

#### II.2.2. Électrisation par contact (répulsion):

Un pendule électrostatique en suspendant au fil de soie une boule de polystyrène recouverte d'une matière conductrice. Approchons



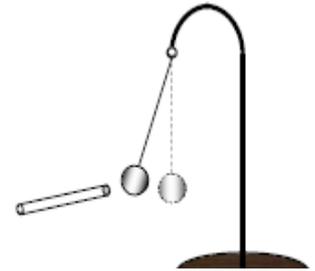
Figure II.2. Electrification par contact.

une tige en verre par frottement jusqu'au contact la boule est repoussée.

Cette expérience montre que lorsqu'un corps est neutre est mis en contact avec un objet chargé, alors cette charge se répartit en deux charges de même signe. C'est le phénomène électrisation par contact.

### **II.2.3. Électrisation par influence:**

Approchons une tige en verre électrisée de la boule neutre. Nous constatons que la boule est électrisée par influence. Lorsqu'on éloigne la tige électrisée le pendule reprend sa position initiale. Donc C'est le phénomène électrisation par influence.



**Figure II.3.** Electrisation par influence.

### **II.3. Charge électrique:**

La charge électrique est une propriété fondamentale de la matière qui caractérise les interactions électromagnétique. On appelle la charge une grandeur scalaire pouvant prendre des valeurs positives ou négatives. La charge électrique peut être directement mesurée avec un électromètre son unité est le coulomb (C).

D'après l'expérience de Robert Millikan a montré que la charge électrique est quantifiée peut varier de façon discontinue sous forme de quantité bien déterminée or toute charge  $q$  est un multiple entier de la charge élémentaire  $e$ , avec  $e \approx 1,609 \cdot 10^{-19}$  C.

### **II.4. Charge ponctuelle:**

Une particule qui possède une charge électrique localisée en un point dont les dimensions sont négligeables devant la distance d'interaction entre les charges ce qui est analogue à l'hypothèse du point matériel en mécanique.

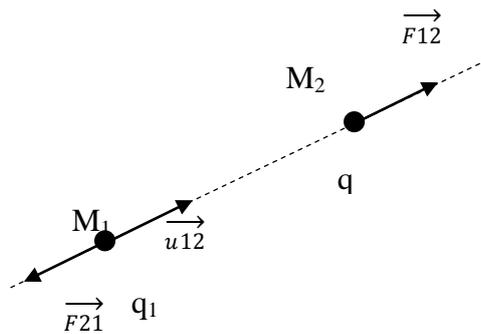
### **II.5. La force électrique:**

La force électrique c'est l'interaction entre deux particules chargées électriquement elle est dipolaire (répulsive entre charges de même signes ou attractives de charges différentes).

### **II.6. Principe fondamental de l'électrostatique (PFE) Loi de coulomb:**

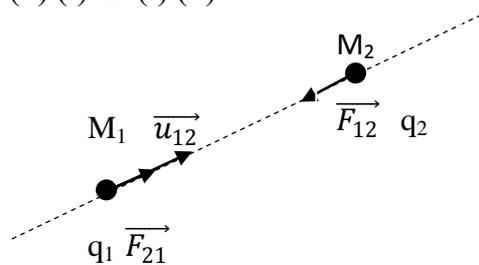
Soient deux charges ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$  placées dans le vide fixées aux points  $M_1$  et  $M_2$  placées à la distance  $r$  exercent l'une sur l'autre une force proportionnelle à chacune des charges.

1<sup>er</sup> cas:  $q_1 q_2 > 0$  charges de même signe (+) (+) ou (-) (-)



**Figure II.4.** Charges de même signe.

2<sup>ème</sup> cas:  $q_1 q_2 < 0$ : charge opposée (+) (-) ou (-) (+)



**Figure II.5.** Charges de signe opposé.

La loi de coulomb indique que la force exercée par  $q_1$  sur la charge  $q_2$  s'exprime sous la forme vectorielle par:

$$\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{M_1 M_2}}{r} = K \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{M_1 M_2}$$

Dans le système S.I:  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{Vm/c}$

Avec  $\epsilon_0$ : permittivité diélectrique du vide ( $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ )

$\vec{u}_{12}$  est un vecteur unitaire défini par:  $\vec{M_1 M_2} = |\vec{M_1 M_2}| \vec{u}_{12}$

$$\vec{u}_{12} = \frac{\vec{M_1 M_2}}{r}$$

donc:

$$\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12}$$

La force exercée par la charge  $q_2$  sur  $q_1$ :

$$\vec{F}_{21} = K \frac{q_2 q_1}{r^2} \vec{u}_{21}$$

En conséquence:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$$

## II.7. Principe de superposition:

Considérons trois charges  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q$  fixées aux points  $p_1$ ,  $p_2$  et  $M$  respectivement:

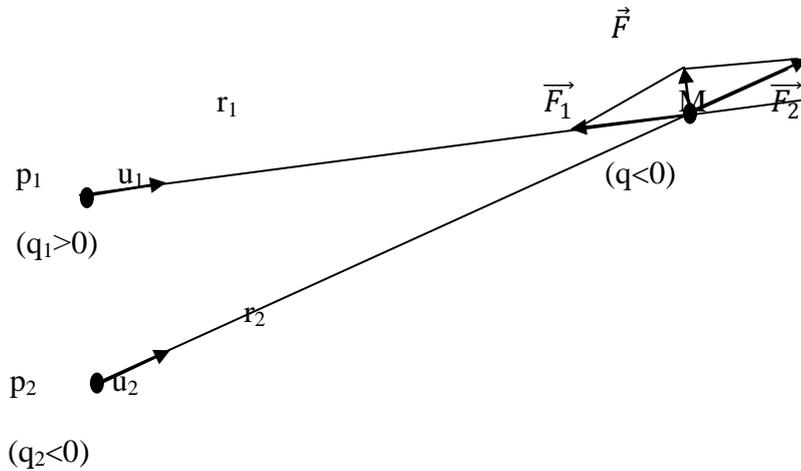


Figure II.6. Principe de superposition.

La force totale exercée par les charges  $q_1$  et  $q_2$  sur la charge d'essai  $q$  placée au point  $M$  est la somme des forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F} = K \frac{q_1 q}{r_1^2} \vec{u}_1 + K \frac{q_2 q}{r_2^2} \vec{u}_2$$

$$\vec{F} = K \frac{q_1 q}{r_1^2} \frac{\vec{p}_1 M}{\|\vec{p}_1 M\|^3} + K \frac{q_2 q}{r_2^2} \frac{\vec{p}_2 M}{\|\vec{p}_2 M\|^3}$$

En résumant que la force  $\vec{F}$  totale exercée par la distribution discrète au point  $M$  sur la charge  $q$  est:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i q}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}_i M}{|\vec{P}_i M|^3}$$

## II.8. Champ électrostatique crée par une charge ponctuelle:

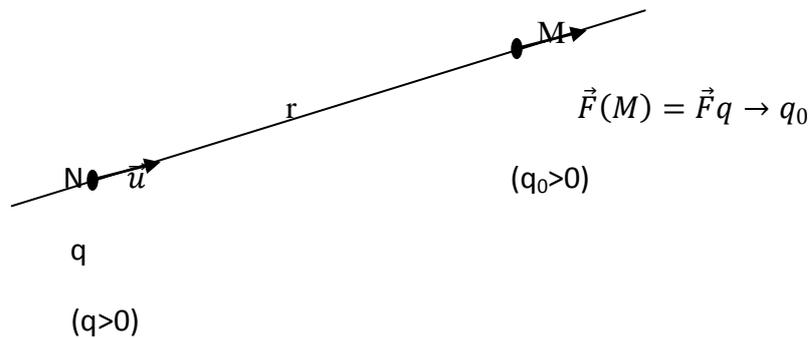


Figure II.7. Champ électrostatique crée par une charge.

$$\vec{F}(M) = \frac{q q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u} = q_0 \left( \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u} \right)$$

On pose

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \|NM\|^3} \overrightarrow{NM}$$

Donc

$$\vec{F}(M) = q_0 \vec{E}(M)$$

$\vec{E}(M)$  Le champ électrique crée par q au point M.

**Important!!!**

- Si  $q_0 < 0$ : alors  $\vec{E}$  et  $\vec{F}$  ont des sens opposant
- Si  $q_0 > 0$ : alors  $\vec{E}$  et  $\vec{F}$  ont le même sens

## II.9. Champ électrostatique crée par une distribution de charge:

### II.9.1. Distribution de charge discontinue (discrète):

$$\begin{aligned} \vec{E}_T(M) &= \sum_{i=1}^{i=n} \vec{E}_i(M) \\ &= \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r_1^2} \vec{u}_1 + \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 r_2^2} \vec{u}_2 + \dots + \frac{q_n}{4\pi \epsilon_0 r_n^2} \vec{u}_n \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi \epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i$$

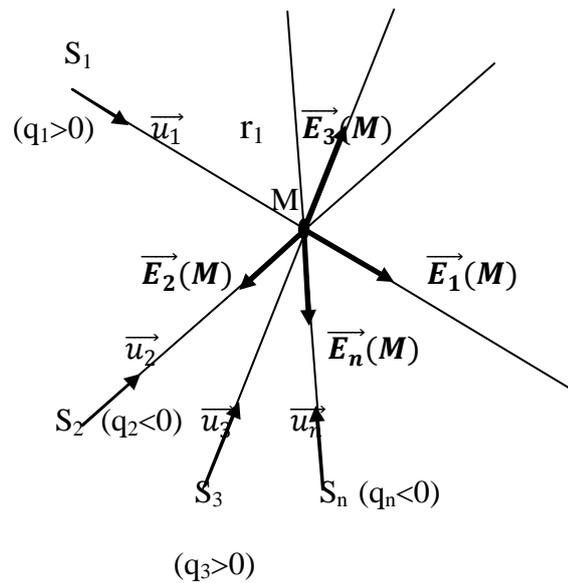


Figure II.8. Distribution de charge discontinue.

## II.9.2. Distribution de charge continue:

- Distribution de charge linéique:

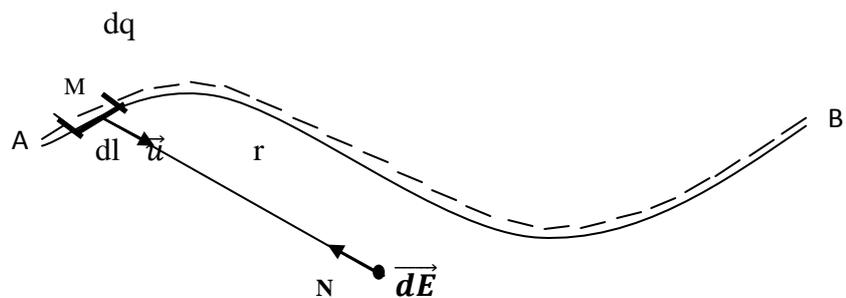


Figure II.9. Distribution de charge linéique.

Soient une ligne chargée (AB) avec une densité de charge ( $\lambda < 0$ ), alors le champ électrostatique élémentaire créé par la charge élémentaire dq au point N:

$$\vec{dE}(N) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overline{MN}}{\|\overline{MN}\|^3}$$

La densité de charge dq est:

$$dq = \lambda \cdot dl$$

Le champ total créé au point N par la ligne (AB):

$$\vec{E}(N) = \int_A^B \frac{\lambda \cdot dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \int_A^B \frac{\lambda \cdot dl}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overline{MN}}{\|\overline{MN}\|^3}$$

• **Distribution de charge surfacique:**

Soit une surface  $\Sigma$  chargée avec une densité de charge ( $\sigma > 0$ ), donc le champ électrostatique  $\vec{dE}$  au point M:

$$\vec{dE} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{SM}}{|\vec{SM}|^3}$$

avec  $dq = \sigma dS$

Le champ électrique total crée par toute la surface chargée

( $\Sigma$ ) au point M:

$$\vec{E} = \iint \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \iint \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{SM}}{|\vec{SM}|^3}$$

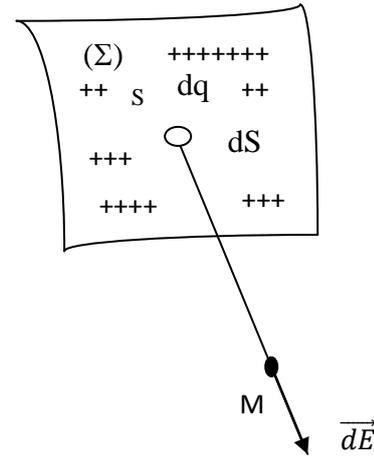


Figure II.10. Distribution de charge surfacique.

• **Distribution de charge volumique:**

Soit un volume  $\tau$  chargé avec ( $\rho > 0$ ), donc le champ électrostatique  $\vec{dE}$  au point M:

$$\vec{dE} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{SM}}{|\vec{SM}|^3}$$

avec  $dq = \rho dv$

Le champ électrique total crée par tout le volume chargé

$\tau$  au point M:

$$\vec{E} = \iiint \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \iiint \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{SM}}{|\vec{SM}|^3}$$

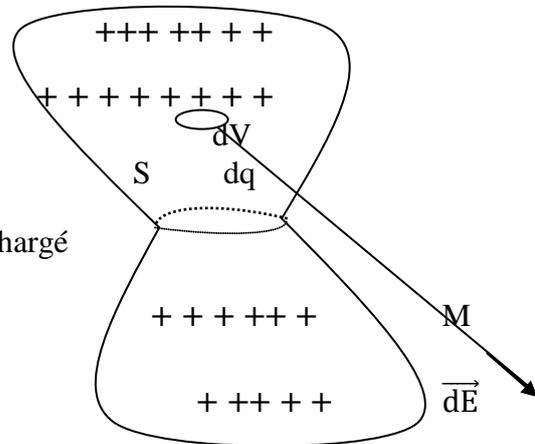


Figure II.11. Distribution de charge volumique.

**II.10. Notion de potentiel électrostatique:**

**II.10.1. Circulation du champ électrostatique:**

Soit une courbe (AB) et une charge ( $q > 0$ ) qui est soumise à une force  $\vec{F}$  alors le champ  $\vec{E}$  est en mouvement avec  $\vec{F}$ . Le déplacement de la charge  $q$  correspond que la force  $\vec{F}$  effectue un travail donc on peut définir que:

$$dw(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$dw(\vec{F}) = q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

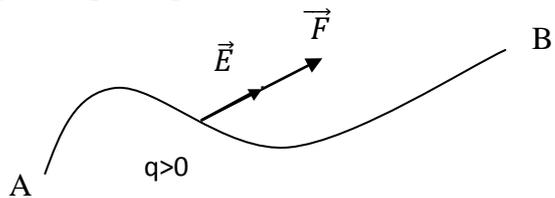


Figure II.12. Circulation du champ Électrostatique.

Puisque la force électrostatique dérive d'une énergie potentielle donc  $\vec{F}$  force conservatrice on peut écrire que:

$$-dE_p = q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\frac{dE_p}{q} = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

On pose

$$\frac{dE_p}{q} = dV$$

Or

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

On a

$$dC = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Donc

$$dC(\vec{E}) = -dV$$

$$C_A^B(\vec{E}) = V_{(A)} - V_{(B)} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Par définition la circulation d'un champ électrostatique le long d'une courbe (AB) est la différence de potentiel.

### Important !!!

Si la circulation du  $\vec{E}$  ne dépend pas du chemin suivi, elle dépend que du point A et du point B, on peut écrire que:

$$C_A^B(\vec{E})_1 = C_A^B(\vec{E})_2$$

$$C_A^B(\vec{E})_1 = -C_B^A(\vec{E})_2$$

$$C_A^B(\vec{E})_1 + C_B^A(\vec{E})_2 = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \vec{E} \text{ est un champ conservatif.}$$

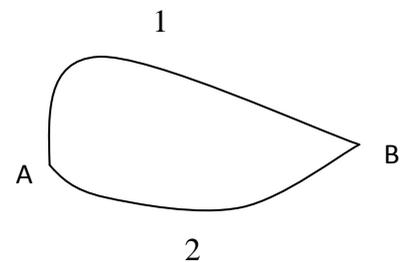


Figure II.13. Circulation du champ.

### II.10.2. Expression du potentiel électrostatique créée par une charge ponctuelle q:

Soit une courbe (AB) et une charge  $q_1$  au point M, un champ électrostatique  $\vec{E}$  créée par la charge q au point M. Il y'a un déplacement élémentaire de  $q_1$  au point M'.

Puisque M et M' sont très proche on peut écrire que:

$$\overline{MM'} = \overline{dl} = \overline{dOM}$$

Ou

$$\overline{MO} + \overline{OM'} = \overline{OM'} - \overline{OM} = \overline{dOM}$$

On peut écrire:

$$dV = -\vec{E} \cdot \overline{dOM}$$

$$dV = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \cdot \overline{dOM}$$

On a:

$$\overline{OM} = r\vec{u}$$

$$d\overline{OM} = dr\vec{u} + r\overline{du}$$

Puisque  $\vec{u}$  est perpendiculaire a  $\overline{du}$  alors:  $\vec{u} \cdot \overline{du} = 0$

Donc:

$$dV = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int -\frac{dr}{r^2}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + K$$

On choisit en général la valeur de la constante de façon à satisfaire à la condition  $V=0$  à l'infini dans ce cas la constante est nulle et le potentiel électrostatique crée par q au point M s'écrit:

$$V(r \rightarrow \infty) = 0 + K = 0$$

$$V(M) = V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

## II.11. Potentiel électrostatique crée par une distribution de charge:

### II.11.1. Distribution de charge discontinue (discrète):

Soit N charges placé dans le vide, le potentiel total crée par les charges s'écrit:

$$V(M) = \sum_{i=1}^{i=n} V_i$$

$$V(M) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}, \text{ avec } V(\infty) = 0.$$

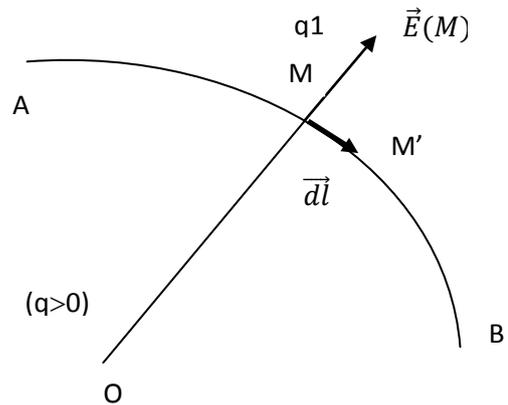


Figure II.14. Courbe AB.

### II.11.2. Distribution continue de charge:

- **Distribution de charge linéique:**

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V(M) = \int_A^B \frac{\lambda \cdot dl}{4\pi\epsilon_0 r}$$

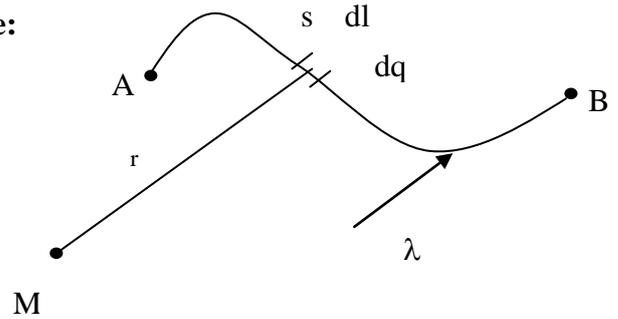


Figure II.15. Distribution de charge linéique.

- **Distribution de charge surfacique:**

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

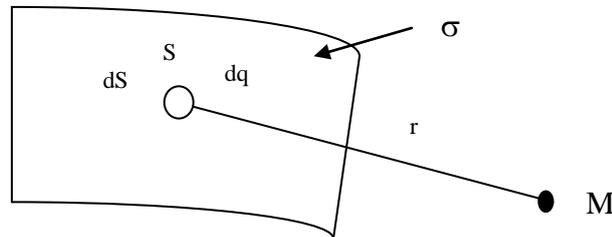


Figure II.16. Distribution de charge surfacique.

$$V(M) = \iint \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- **Distribution de charge volumique:**

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

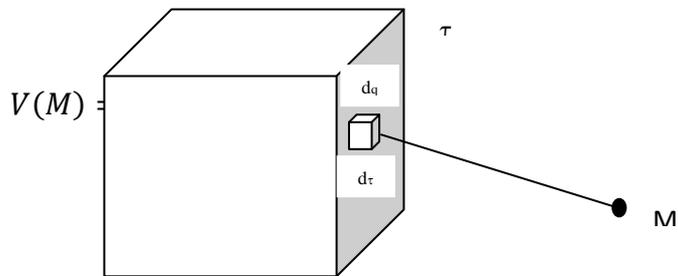


Figure II.17. Distribution de charge volumique.

## II.12. Surfaces équipotentielles et ligne du champ électrique:

Les équipotentiels et les lignes de champ sont des courbes et des surfaces qui permettent de représenter la topographie du champ et du potentiel électrique d'une distribution de charges donnée.

### II.12.1. Surface équipotentielle:

Les surfaces équipotentielles sont telles qu'en tout point le potentiel électrique  $V$  garde la même valeur donc il est constant.

### II.12.2. Les lignes de champ:

Une ligne de champ est une courbe orientée à laquelle est tangent au vecteur du champ électrique  $\vec{E}$ . Les lignes de champ se dirigent vers les charges négatives et partent des charges positives.

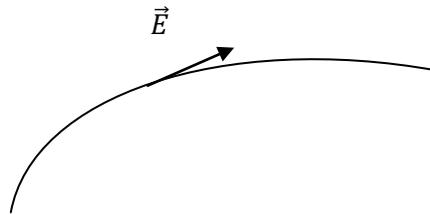


Figure II.18. Une ligne de champ.

### Important !!!

- a) Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles, en considérant un très petit déplacement  $\vec{dl}$  sur une surface équipotentielle on trouve:

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$$

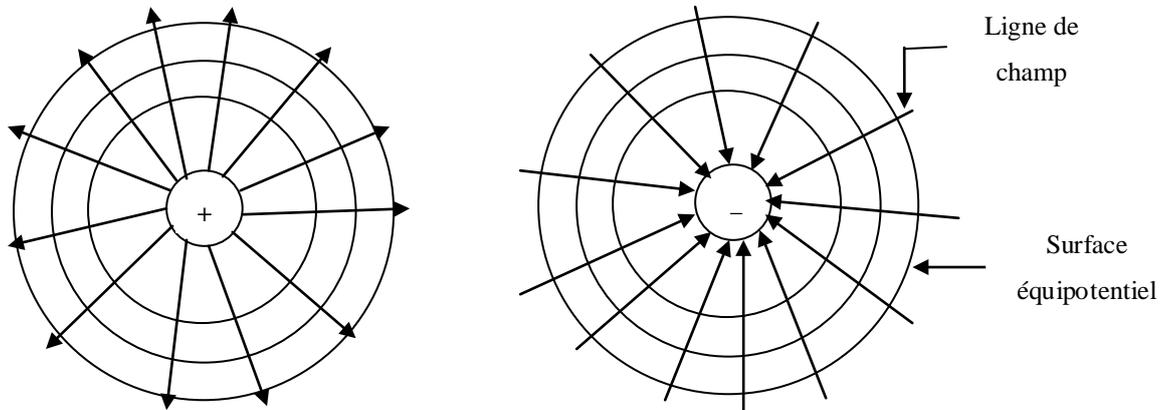
Par conséquent  $\vec{E}$  est perpendiculaire à  $\vec{dl}$ .

- b) Les lignes du champ vont dans le sens des potentiels décroissant. Entraîne que:

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl} < 0.$$

Les figures suivantes représentent les allures des lignes de champ et des surfaces équipotentielles relatives à certaines de distributions de charges:

- Si la charge est positive (+) le champ est dirigé de la charge vers l'extérieur.
- Si la charge est négative (-) le champ est dirigé de l'extérieur vers la charge.



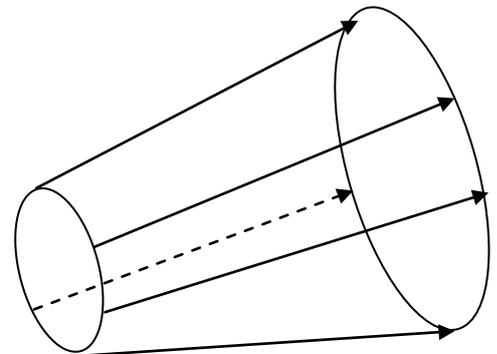
**Figure II.19.** Les allures des lignes de champ et des surfaces équipotentielles.

### Important!!!

On peut visualiser les lignes du champ électrique à l'aide de graine de gazon plongées dans un liquide isolant. Les charges de même signe se repoussent et les charges de signes contraires s'attirent. Dans le chapitre IV on va étudier les lignes du champ magnétique dues à un aimant d'après Faraday.

### II.12.3. Tube de champ:

Un tube de champ est une surface formée par des lignes de champ qui s'appuient sur une courbe fermée. Si on limite le tube de champ par des sections terminales il constitue une surface fermée.



**Figure II.20.** Tube de champ.

## II.13. Énergie potentiel d'interaction entre deux charges ponctuelles:

### II.13.1. Définition:

L'énergie potentiel électrostatique d'un système de charge supposées initialement éloignées les unes des autres correspond au travail qu'il faut fournir pour mener ces charges à leur positions finales.

On considère deux charges  $q_1$  et  $q_2$  placées respectivement aux points  $M_1$  et  $M_2$ . Afin de définir l'énergie potentielle du système des deux charges, on suppose que la charge  $q_1$  placée en  $M_1$  est fixe et que la charge  $q_2$  se rapproche jusqu'en  $M_2$  depuis une position infiniment éloignée. Calculons le travail pour rapprocher la charge  $q_2$  jusqu'en  $M_2$  est donné par:

$$w = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int -q_2 \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$w = \int \frac{-q_1 q_2 dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{kq_1 q_2}{r_{M_2}} - \frac{kq_1 q_2}{r_{M_1}}$$

Donc le travail ainsi fourni par la force est converti en énergie potentielle acquise par la charge  $q_2$ :

$$w = \Delta E_p = E_p(M_2) - E_p(M_1) = q_1 V_{M_2} - q_2 V_{M_1}$$

Pour un ensemble de  $N$  charges  $q_i$ :

$$E_p = \sum q_i V_j = \sum_{i=1}^N \sum_{j>1} \frac{kq_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$$

Alors l'énergie électrostatique est:

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$$

**Important!!!**

Le terme  $\frac{1}{2}$  provient du fait que dans l'interaction entre  $q_i$  et  $q_j$  est comptée deux fois.

### II.13.2. Energie potentielle d'une distribution continue de charges:

On se ramène à un ensemble de charges ponctuelles en divisant la charge totale en  $dq$ :

- **Distribution linéique:**

$$E_p = \frac{1}{2} \int \lambda \cdot V \cdot dl$$

- **Distribution surfacique:**

$$E_p = \frac{1}{2} \iint \sigma \cdot V \cdot ds$$

- **Distribution volumique:**

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint \rho \cdot V \cdot dV$$

### II.14. Théorème de Gauss:

#### II.14.1. Définition:

Le théorème de Gauss est un outil de calcul rapide du champ électrostatique créé par une distribution de charge possédant une symétrie élevée.

#### II.14.2. Le flux d'un vecteur à travers une surface:

Une surface réelle  $S$ , est constituée d'un grand nombre de surfaces élémentaires  $ds$ . On considère un vecteur unitaire  $\vec{n}$  porté par la normale à  $ds$ .

On appelle le flux élémentaire d'un vecteur  $\vec{V}$  à travers un élément de surface  $ds$  est le scalaire:

$$d\Phi(\vec{V}) = \vec{V} \cdot \vec{ds}$$

$$d\Phi(\vec{V}) = |\vec{V}| \cdot |\vec{ds}| \cdot \cos\theta$$

- $\theta = 0 \Rightarrow \phi_{\text{Max}}$
- $\theta = \pi \Rightarrow \phi_{\text{Min}}$
- $\theta = \pi/2 \Rightarrow \phi=0$

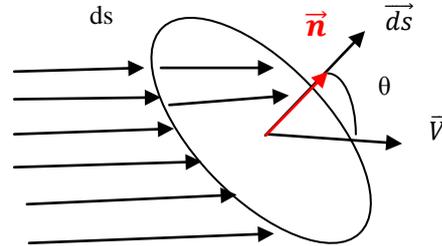


Figure II.21. Flux d'un vecteur à travers une surface.

### II.14.3. Le flux du champ électrostatique crée par une distribution de charge à travers une surface fermée (Théorème de Gauss):

- Charges extérieures à la surface  $\Sigma$ :

Soit une surface fermée  $\Sigma$  entourant un volume  $v$ , le cône de sommet  $O$  découpe la surface sur deux éléments  $ds_1$  en  $M_1$  et  $ds_2$  en  $M_2$ .

On peut dire que la surface élémentaire  $ds_1$  et  $ds_2$  sont vues avec le même angle solide  $d\Omega$ :

$$d\Omega_1 = \frac{\vec{ds}_1 \cdot \vec{u}}{r_1^2} = \frac{ds_1 \cdot \cos\theta_1}{r_1^2} < 0$$

$$d\Omega_2 = \frac{\vec{ds}_2 \cdot \vec{u}}{r_2^2} = \frac{ds_2 \cdot \cos\theta_2}{r_2^2} > 0$$

Puisque

$$d\Omega = -d\Omega_1 \text{ et } d\Omega = d\Omega_2$$

Alors

$$d\Omega_1 = -d\Omega_2 \text{ et } d\Omega_1 + d\Omega_2 = 0$$

Pour la surface élémentaire  $ds_1$ :

$$d\Phi_1(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega_1$$

Et pour la surface élémentaire  $ds_2$ :

$$d\Phi_2(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega_2$$

Donc

$$\begin{aligned} d\Phi_{ext}(\vec{E}) &= d\Phi_1(\vec{E}) + d\Phi_2(\vec{E}) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (d\Omega_1 + d\Omega_2) \\ d\Phi_{ext}(\vec{E}) &= 0 \end{aligned}$$

Le flux du  $\vec{E}$  crée par une charge  $q$  à travers la surface fermée  $\Sigma$  est:

$$\Phi_{ext}(\vec{E}) = \oiint d\Phi_{ext}(\vec{E})$$

- **Charges intérieures à la surface  $\Sigma$ :**

Soit un point  $M$  de la surface  $\Sigma$ , on peut écrire que l'angle solide est:

$$d\Omega = \frac{\vec{ds} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{ds \cdot \cos\theta}{r^2} > 0$$

$$d\Phi(\vec{E}) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \oiint d\Omega$$

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \Omega = \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

**Important!!!**

$\Omega_{\max} = \Omega_{\text{total}} = \Omega = 4\pi$  sr, (sr: stéradian).

Le flux total du champ électrostatique créée par une charge à l'intérieure de la surface  $\Sigma$  est:

$$\Phi_{int}(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

- **Cas général:**

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}, \text{ avec } Q_{int} = \sum_{i=1}^{i=n} q_i$$

La distribution de la charge à l'intérieure de la surface  $\Sigma$  est soit une distribution discontinue ou continue (linéique, surfacique, volumique).

**II.14.4. Énoncé du théorème de Gauss:**

« Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée quelconque est égale à  $\frac{1}{\epsilon_0}$  fois

la charge totale contenue à l'intérieure de la surface de Gauss ».

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

## II.14.5. Invariance et Symétrie:

### II.14.5.1. Les invariances d'une distribution de charge:

L'étude des invariances d'une distribution de charge permet de déterminer les variables dont dépend le champ électrostatique.

- Si la distribution de charge est invariante par translation le long d'un axe (OZ), alors le champ électrostatique ne dépend pas de Z:

$$\frac{dE}{dz} = 0 \Leftrightarrow E_z = 0$$

- La distribution est invariante par rotation autour de l'axe Z d'un angle  $\theta$ , donc  $\vec{E}$  est invariant par rotation d'un angle  $\theta$ , alors  $\vec{E}$  ne dépend pas de  $\theta$ , par conséquent  $\vec{E}$  ne dépend que de r.

### II.14.5.2. La symétrie:

L'utilisation de la symétrie des distributions des charges permet de simplifier le calcul de  $\vec{E}$ .

## II.14.6. Exemple d'application du Théorème de Gauss:

- **Champ d'un fil infini:**

Un fil infini et contenu de l'invariance de la symétrie on choisit une surface de Gauss qui est un cylindre, donc le calcul du flux:

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \sum \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iint_{sl} \vec{E} \cdot \vec{ds} + \iint_{sh} \vec{E} \cdot \vec{ds} + \iint_{sb} \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

sl: surface latérale

sh: haut de cylindre

sb: base de cylindre

$$\Phi = \iint_{sl} \vec{E} \cdot \vec{ds} = E \iint_{sl} ds = E2\pi r h = \sum \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E2\pi r h = \frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

L'application du théorème de Gauss nous donne finalement l'expression du module du champ électrostatique:

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \vec{U}_r$$

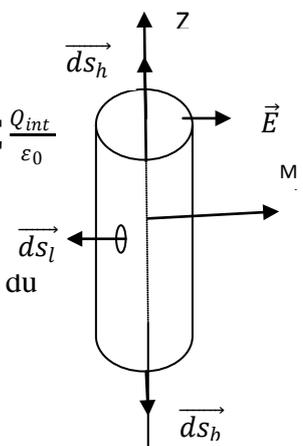


Figure II.22. Un fil infini.

- **Champ d'une sphère:**

- 1. Champ à l'extérieur:  $OM > R$**

Soit  $(S_1)$  la surface de Gauss passant par le point M extérieur (sphère de rayon r).

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \sum \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi = \vec{E} \oiint \vec{ds} = \sum \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

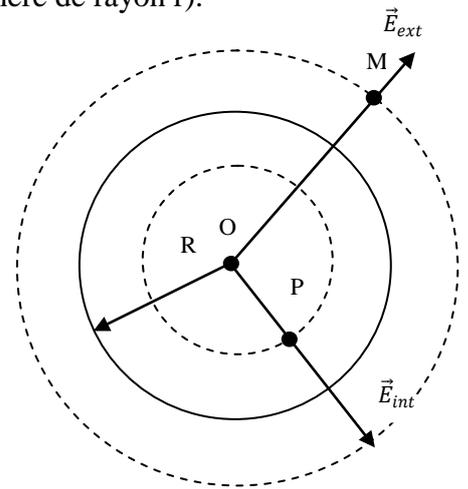


Figure II.23. Une sphère.

Le théorème de Gauss donne donc:

$$4\pi r^2 E = \frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{\epsilon_0} \rho \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \rho \frac{R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{U}_r}$$

- 2. Champ à l'intérieur:  $OP < R$**

Soit  $(S_2)$  la surface de Gauss passant par le point p intérieur (sphère de rayon r).

On a encore:

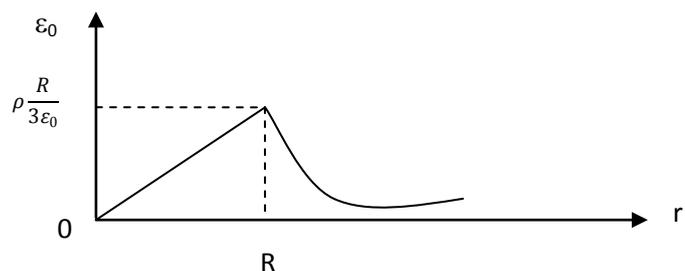
$$\vec{E} \oiint \vec{ds} = \sum \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E = \frac{4}{3} \pi \frac{r^3}{\epsilon_0} \rho$$

Le théorème de Gauss donne cette fois:

$$\boxed{\vec{E} = \rho \frac{r}{3\epsilon_0} \vec{U}_r}$$

D'où la variation de E en fonction de r représentée sur la figure:



## II.14.7. Dipôle électrostatique:

### II.14.7.1. Définition:

Un dipôle électrostatique est l'ensemble de deux charges ponctuelles égales et de signes opposées  $-q$  et  $+q$ , maintenues à une distance  $l$  fixe l'une de l'autre. La distance  $l$  est très inférieure à toutes les autres distances que l'on considère.

Le dipôle est caractérisé par son moment dipolaire  $\vec{p}$  défini:

$$\vec{p} = q\overline{AB}$$

avec:  $p = ql$ ,  $p$  s'exprime en C.m.

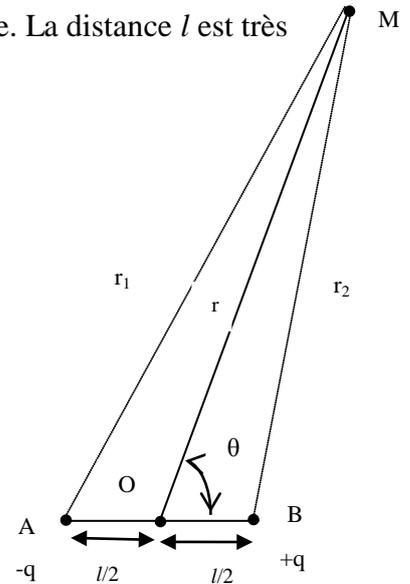


Figure II.24. Dipôle électrostatique.

### II.14.7.2. Potentiel et champ créé par un dipôle:

Le potentiel créé au point M par le dipôle est calculer par le théorème de superposition est donnée par:

$$V(M) = \frac{K(-q)}{r_1} + \frac{K(+q)}{r_2} = Kq\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

avec

$$r_2^2 = r^2 + \frac{l^2}{4} - 2r\frac{l}{2}\cos\theta = r^2\left(1 + \frac{l^2}{4r^2} - \frac{l\cos\theta}{r}\right)$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{l^2}{4r^2} - \frac{l\cos\theta}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$r_1^2 = r^2 + \frac{l^2}{4} - 2r\frac{l}{2}\cos(\pi - \theta) = r^2\left(1 + \frac{l^2}{4r^2} + \frac{l\cos\theta}{r}\right)$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{l^2}{4r^2} + \frac{l\cos\theta}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

En utilisant la formule du développement limité et en se limitant au premier terme de  $\frac{l}{r}$ , on obtient

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{l^2}{8r^2} + \frac{l\cos\theta}{2r}\right), \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{l^2}{8r^2} - \frac{l\cos\theta}{2r}\right)$$

et

$$\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} = \frac{l\cos\theta}{r^2}$$

D'où 
$$V(M) = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

or le moment dipolaire est défini comme:

$$P = ql \text{ et } ql \cos \theta = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r} = \vec{p} \cdot \vec{u}$$

Soit

$$V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

### II.14.7.3. Calcul du champ créé par un dipôle électrostatique:

Le champ  $\vec{E}$  au point M peut être décomposé en deux composantes:

$E_r$ : la composante radiale portée par OM, elle est comptée positivement de O vers M.

$E_\theta$ : la composante orthoradiale portée par la normale en M à OM, le sens positif de cette normale étant celui de l'angle  $\theta$ .

Pour déterminer l'expression de  $\vec{E}$  on utilise la relation locale  $\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V(M)$  dans le système des coordonnées polaires  $(r, \theta)$ :

$$\vec{E} = E_r \vec{U}_r + E_\theta \vec{U}_\theta = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{U}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{U}_\theta$$

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial V(M)}{\partial r} = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V(M)}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{cases}$$

Soit

$$\vec{E} = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \vec{U}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{U}_\theta$$

- son module:  $E(r, \theta) = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta}$

### II.14.7.4. Action d'un champ électrique sur un dipôle:

Soit un dipôle AB (support du moment dipolaire  $\vec{P}$ ) de milieu O. Plaçons-le dans un domaine où règne un champ électrostatique  $\vec{E}$ , on admet que le champ est uniforme dans

l'environnement proche du dipôle. Chacune des charges va subir une force de coulomb:

En A:  $\vec{F}_A = -q\vec{E}$  et en B:  $\vec{F}_B = +q\vec{E}$ ; la somme des forces est nulle mais le moment de couple de force est non nul que l'on peut calculer:

$$\begin{aligned}
\vec{M} &= \vec{M}(\vec{F}_A) + \vec{M}(\vec{F}_B) \\
&= \vec{OA} \wedge \vec{F}_A + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B \\
&= -\vec{AO} \wedge \vec{F}_A + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B \\
&= \vec{AO} \wedge (-\vec{F}_A) + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B \\
&= \vec{AO} \wedge \vec{F}_B + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B \\
&= (\vec{AO} + \vec{OB}) \wedge \vec{F}_B \\
&= \vec{AB} \wedge \vec{F}_B \\
&= \vec{AB} \wedge q\vec{E} \\
&= q \vec{AB} \wedge \vec{E}
\end{aligned}$$

$$\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

$$\vec{M} = -P E \sin \theta \vec{e}_r$$

Le dipôle sera en équilibre pour  $\theta = (\vec{P}, \vec{E}) = 0$  et instable pour  $\theta = \pi$ .

#### II.14.7.5. Énergie électrostatique d'un dipôle soumis à un champ électrostatique:

$$E_p = qV_B - qV_A$$

$$E_p = q (V_B - V_A)$$

$$E_p = +q (-\vec{E} \cdot \vec{AB})$$

$$E_p = -\vec{P} \cdot \vec{E}$$

$$E_p = -P \cdot E \cdot \cos \theta$$

L'énergie potentielle est minimum lorsque  $\theta = 0$ , indiquant que le dipôle est en équilibre stable.

## Exercice d'application

### Exercice II.1:

Soient trois charges positives et égales  $q$ , forment un triangle équilatéral de côté  $a$  (figure I.1). On place une charge ( $q' < 0$ ) au centre  $C$  de ce triangle.

1/ Calculer la force  $\vec{F}$  à laquelle est soumise la charge  $q'$  si  $r$  est la distance qui la sépare de chaque charge  $q$ .

2/ Quel est le potentiel  $V$  créé en  $C$  par les charges  $q$ .

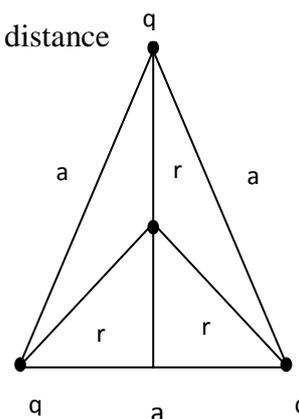


Figure II.25. Triangle équilatéral.

### Exercice II.2:

Une tige métallique de longueur  $l$  porte une charge  $Q$  répartie uniformément avec la densité de charges  $\lambda$ .

1. Déterminer le champ électrostatique en un point  $O$  situé sur l'axe de la tige à une distance  $r$  d'une des extrémités (figure I.2).

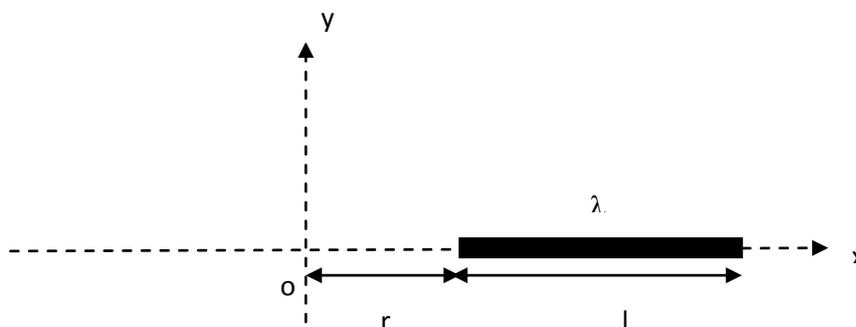


Figure II.26. Une tige métallique.

2. Un électron se déplaçant d'une distance  $d$  le long d'une ligne de champ d'un point  $A$  à un point  $B$  verra sa vitesse changer de  $v_A$  à  $v_B$ . On considérera que le point  $O$  se trouve loin du fil.

Déterminer la densité linéique de charges du fil.

*Application numérique:*

$l = 10 \text{ cm}$ ,  $r_A = 100 \text{ cm}$ ,  $r_B = 104 \text{ cm}$ ,  $v_A = 2.10^5 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $v_B = 3.10^6 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $e = 1.6.10^{-19} \text{ C}$ ,  $m_p = 9.1. 10^{-31} \text{ Kg}$ .

**Exercice II.3:**

Soit un disque de rayon  $R$  chargé uniformément en surface avec une densité surfacique  $\sigma > 0$ .

- 1) Calculer le champ électrique  $E(M)$  en un point quelconque  $M$  sur l'axe du disque.
- 2) On fait tendre  $R$  vers l'infini. En déduire l'expression du champ  $E(M)$ .

**Exercice II.4:**

On considère un dipôle électrostatique, formé de deux charges ponctuelles  $+q$  et  $-q$ , séparées par une distance  $a$ . On place ce dipôle à une distance  $r \gg a$  d'une charge ponctuelle  $Q$ . Le dipôle est aligné avec le champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par  $Q$ .

Déterminer la résultante des forces électrostatiques exercées sur le dipôle.

# Solution des exercices

## Exercice II.1:

$$1. \vec{F}_T = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\vec{F}_T = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_1 + \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_2 + \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_3$$

$$\vec{F}_T = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3)$$

$$\vec{u}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j}$$

$$\vec{u}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j}$$

$$\vec{u}_3 = -\vec{j}$$

$$\vec{F}_T = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j} - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j} - \vec{j} \right)$$

$$\boxed{\vec{F}_T = \vec{0}}$$

2. Le potentiel V au point C:

$$\boxed{V = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

## Exercice II.2:

1. On divise la tige de longueur  $l$  et de charge  $Q$  en éléments de longueur  $dl$  et de charge  $dQ$  (figure I.2). Chaque élément  $dl$  de la tige porte une charge  $dQ = \lambda dl = \lambda dx$ .

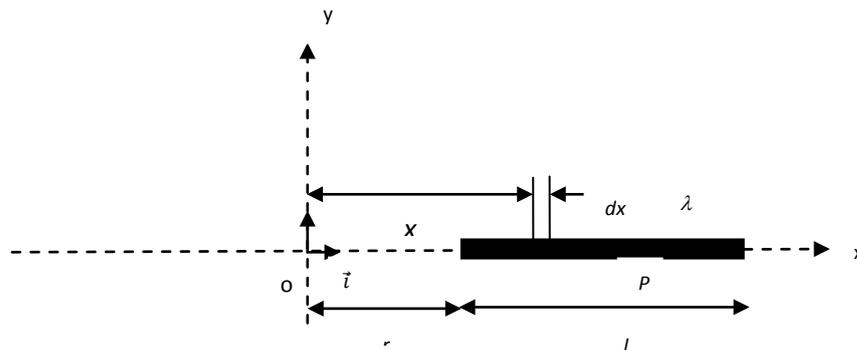


Figure II.28. Une tige métallique.

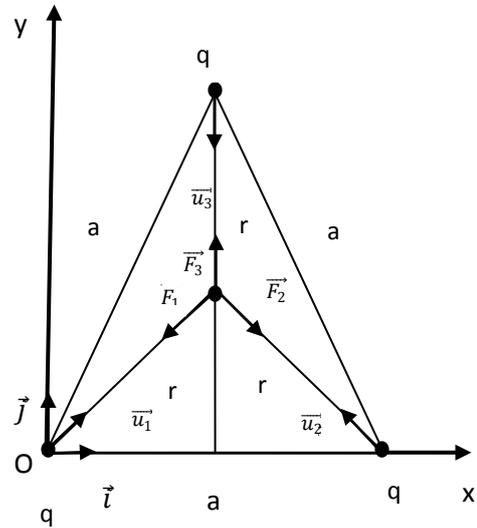


Figure II.27. Triangle équilatéral.

Le champ électrostatique  $\vec{dE}$  créé par la charge élémentaire  $dQ = \lambda dx$  s'exprime:

$$\vec{dE} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(po)^2} \vec{i}$$

Pour déterminer le champ électrique total créé par la tige chargée, on applique le principe de superposition qui consiste à faire la sommation (intégration de  $x = r$  à  $x = r + l$ ) de tous les champs électrique élémentaire créés par les charges élémentaire  $dQ$  réparties sur la longueur  $l$  de la tige.

Le champ électrique résultant créé par tous les éléments de la tige qui sont à des distances différentes de O s'obtient par intégration de  $x = r$  à  $x = r + l$  de l'expression:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \int_r^{l+r} \frac{dx}{(x)^2} \vec{i} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left[ -\frac{1}{x} \right]_r^{l+r} \vec{i}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{l+r} \right] \vec{i}$$

Donc

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda l}{r(l+r)} \vec{i}}$$

2. Lorsque la tige est loin du point O ( $r \gg l$ ), le champ électrique qu'elle crée au point O est donné par:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda l}{r^2} \vec{i} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{i}$$

Remarque:

Quand  $r$  est très grand devant  $l$ , la tige électrisée est équivalente à une charge ponctuelle  $Q = \lambda l$ .

Si l'électron se trouve en A où règne le champ électrique  $\vec{E}$ , il va être soumis à la force électrostatique:

$$\vec{F} = -e\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e\lambda l}{r^2} \vec{i}$$

Au cours d'un déplacement élémentaire  $\vec{dr}$  du proton, la force électrostatique effectue un travail élémentaire  $dw$  donné par:

$$dw = \vec{F} \vec{dr} = -e\vec{E} \vec{dr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e\lambda l}{r^2} \vec{i} (dr \vec{i}) = +\frac{e\lambda l}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

Au cours du déplacement du proton de A vers B, le travail effectué est donné par:

$$w_{A \rightarrow B} = \int_A^B dw = + \int_{r_A}^{r_B} \frac{e\lambda l}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{e\lambda l}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = \frac{e\lambda l}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

On trouve:

$$w_{A \rightarrow B} = \frac{e\lambda l}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{r_B - r_A}{r_A r_B} \right]$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a:

Travail de la force électrostatique = variation de l'énergie cinétique

Donc:

$$W_{A \rightarrow B} = \frac{e\lambda l}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{r_B - r_A}{r_A r_B} \right] = \frac{1}{2} m_p (v_B^2 - v_A^2)$$

On déduit la densité linéique de charges  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 m_p (v_B^2 - v_A^2)}{el} \left( \frac{r_A r_B}{r_B - r_A} \right)$$

Application numérique:

$l = 10 \text{ cm}$ ,  $r_A = 100 \text{ cm}$ ,  $r_B = 104 \text{ cm}$ ,  $v_A = 2.10^5 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $v_B = 3.10^6 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $e = 1.6.10^{-19} \text{ C}$ ,  $m_p = 9.1. 10^{-31} \text{ Kg}$ .

$$\lambda = \frac{2.9.1.10^{-31} ((3.10^6)^2 - (2.10^5)^2)}{9.10^9. 1.6.10^{-19}.0.1} \left( \frac{1.1.04}{1.04-1} \right)$$

Finalement, on trouve:  $\lambda = 2,44 10^{-6} [C. m^{-1}] = 3 [\mu C. m^{-1}]$

### Exercice II.3:

#### 1. Le calcul du champ électrique:

On choisit comme élément de surface  $dS$  une couronne circulaire comprise entre les cercles de rayon  $y$  et  $y+dy$ .

L'élément de surface  $dS$  porte une charge  $dq = \sigma dS$ .

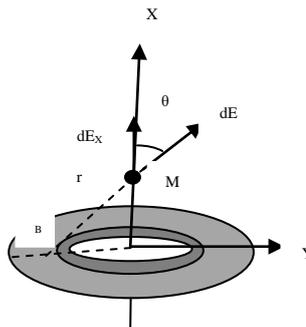


Figure II.29. Une couronne circulaire.

Par raison de symétrie (il s'agit d'une surface équipotentielle), le champ créé par cette couronne en un point  $M$  d'abscisse  $x$  est porté par  $OX$  et a pour expression:

$$\begin{aligned} dE_x &= dE \cos\theta = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta \\ &= K \frac{\sigma dS}{r^2} \cos\theta \end{aligned}$$

avec:

$$dS = 2\pi y dy, \cos\theta = \frac{x}{r}, r^2 = x^2 + y^2$$

d'où:

$$dE_x = K \frac{\sigma 2\pi y dy x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \frac{y dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Le champ total est donc également porté par OX, est:

$$E = \int dE_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{y dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left[ -(x^2+y^2)^{-1/2} \right]_0^R$$

$$E = \int dE_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right]_0^R$$

Si on fait tendre R vers l'infini, on déduit:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

## 2. Calcul du potentiel électrique:

D'après la relation:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

En chaque point P on a un champ  $E = E(X)$ , par conséquent:

$$E = -\frac{\partial V}{\partial X} \Rightarrow V = \int E dX$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{(R^2 + X^2)} + C$$

D'après la condition à  $X = 0, V \rightarrow 0$ , la constante est nulle.

Par conséquent:

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{(R^2 + X^2)}$$

### Exercice II.4:

La force exercée sur le dipôle est:

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r} + \vec{a}) - q\vec{E}(\vec{r})$$

où

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{U}_r$$

$\vec{E}$  est le champ électrique créé par la charge Q, il varie en  $\frac{1}{r^2}$ .

D'où

$$\vec{F} = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(r+a)^2} - \frac{1}{r^2} \right] \vec{U}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \left[ \frac{1}{\left(1+\frac{a}{r}\right)^2} - 1 \right] \vec{U}_r$$

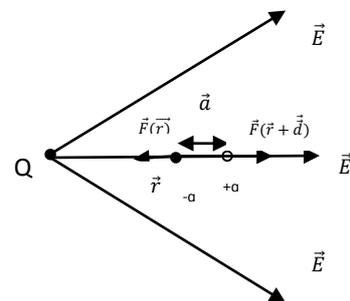


Figure II.30. Un dipôle électrostatique.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \left[ \left(1 + \frac{a}{r}\right)^{-2} - 1 \right] \vec{U}_r$$

Utilisons le développement en série:

$$(1 \pm \epsilon)^n = 1 \pm n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2.1} \epsilon^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3.2.1} \epsilon^3 + \dots$$

Pour  $n = -2$ , ce développement devient:

$$(1 + \epsilon)^{-2} = 1 - 2\epsilon + 3\epsilon^2 - 4\epsilon^3 + \dots$$

En négligeant les termes d'ordre 2 et plus, on obtient:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \left[ \left(1 - 2\frac{a}{r}\right) - 1 \right] \vec{U}_r$$

Soit:

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qQa}{r^3} \vec{U}_r$$

La force  $\vec{F}$  peut s'exprimer en fonction du moment dipolaire  $\vec{P} = qa\vec{U}_r$  :

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2QP}{r^3} \vec{U}_r$$

# CHAPITRE III

## LES CONDUCTEURS

### III.1. Introduction:

Un conducteur est un matériau qui contient des porteurs de charges libres peuvent se déplacer sous l'action d'une force ou un champ électrostatique, par exemple:

- les électrons libres dans un métal
- les ions dans une électrolyte

### III.2. Conducteur en équilibre:

Un conducteur est en équilibre électrostatique si les charges électriques qu'il contient sont en repos à l'échelle macroscopique.

### III.3. Notion d'équilibre électrostatique:

L'équilibre électrostatique d'un conducteur est atteint lorsqu'aucune charge électrique ne se déplace plus à l'intérieur du conducteur (ils sont au repos). Cela a pour conséquence:

- En tout point intérieur au corps, le champ interne est nul:

$$\begin{aligned} \text{A l'équilibre (le repos): } \sum \vec{F} &= \vec{F}_{\text{intérieure}} = \vec{0} \\ &= q\vec{E}_{\text{intérieure}} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{\text{intérieure}} = \vec{0}} \end{aligned}$$

Donc le champ macroscopique est nul en tout point d'un conducteur en équilibre électrostatique.

- Le potentiel est uniforme même valeur en volume et en surface:

$$\text{En tout point d'un conducteur: } \vec{E}_{\text{intérieure}} = -\overrightarrow{\text{grad}}_{V_{\text{intérieure}}} = \vec{0}$$

$$\boxed{V_{\text{intérieure}} = \text{constante} = V_0}$$

Donc le potentiel est une fonction continue.

- L'équation locale:  $\text{div } \vec{E}_{\text{intérieure}} = \frac{\rho_{\text{intérieure}}}{\epsilon_0}$ , entraîne que l'équilibre s'exprime finalement par  $\vec{E}_{\text{intérieure}} = \vec{0}$ ,  $\rho_{\text{intérieure}} = 0$

### III.4. Quelques propriétés des conducteurs en équilibre:

#### a) Lignes de champ:

Nous avons vu que à l'intérieur d'un conducteur le champ électrostatique total est nul. Mais ce n'est pas forcément le cas à l'extérieur en particulier si le conducteur est chargé. Puisqu'un conducteur à l'équilibre est équipotentiel. En appliquant la relation suivante, on a:

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$$

Ou

$$V_B - V_A = - \int_{AB} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$$

Donc

$$\vec{E} \perp \vec{dl}$$

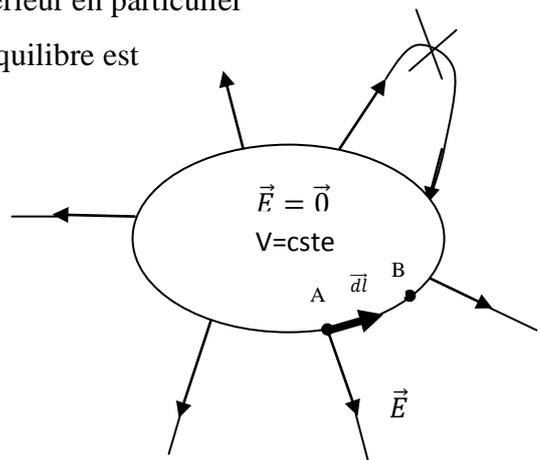


Figure III.1. Les lignes de champ.

Les lignes de champ sont perpendiculaires à la surface d'un conducteur chargé en équilibre électrostatique.

#### b) Distribution des charges:

Lorsqu'on a un conducteur chargé donc où se trouvent les charges non compensées ? Supposons qu'elles soient distribuées avec une distribution volumique  $\rho$ . Prenons un volume quelconque  $v$  situé à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre électrostatique. Donc en appliquant le théorème de Gauss, on a:

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iiint_{\epsilon_0} \rho \, dv = 0.$$

Puisque le champ  $\vec{E}$  est nul partout. Cela signifie que  $\rho = 0$ , donc à l'équilibre aucune charge non compensée ne peut se trouver dans le volume occupé par le conducteur.

Toutes les charges non compensées se trouvent donc nécessairement localisées à la surface du conducteur.

**c) Champ au voisinage d'un conducteur théorème de coulomb:**

Soit un conducteur plein en équilibre électrostatique chargé positivement, et un point M très proche de la surface du conducteur. On calcule le champ au voisinage d'un conducteur c'est-à-dire au point M.

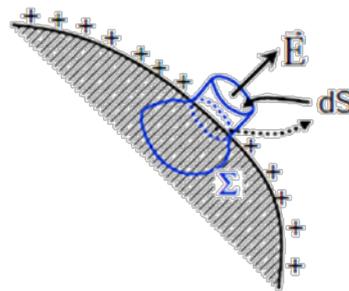
En appliquant le théorème de Gauss donc on choisit une surface de gauss comme un cylindre élémentaire sur cette surface fermée; on obtient:

$$\begin{aligned} \Phi &= \oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iint_{S_L} \vec{E} \cdot \vec{ds} + \iint_{S_{ext}} \vec{E} \cdot \vec{ds} + \iint_{S_{int}} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iint_{S_{ext}} \vec{E} \cdot \vec{ds} \\ &= ES_{ext} = \frac{\Sigma Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint \sigma \cdot ds = \frac{\sigma s}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\oiint_{S_L} = 0; \text{ car } \vec{E} \perp \vec{ds}.$$

$$\oiint_{S_{int}} = 0; \text{ car } E_{int} = 0.$$

$$\oiint_{ds} = E \cdot ds; \text{ car } \vec{E} // \vec{ds}.$$



**Figure III.2.** Champ au voisinage d'un conducteur.

**Théorème:**

**Au voisinage de la surface d'un conducteur, le champ électrostatique est perpendiculaire à cette surface et vaut :  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ , où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire normal au conducteur et dirigé vers l'extérieur.**

**d) Pression Électrostatique:**

Considérons un élément de surface  $ds$ , portant une charge  $dq = \sigma dq$ .

Le champ  $\vec{E}$  exerce sur la charge  $dq$  une force électrostatique :

$$\vec{dF} = dq \cdot \vec{E} = \sigma ds \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

Donc

$$\vec{dF} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} ds \cdot \vec{n}$$

Cette force est donc normale à la surface et dirigée vers l'extérieur quelque soit le signe de la charge. Elle est proportionnelle à l'élément de surface  $ds$  et présente, par conséquent, le caractère d'une force de pression. La force par unité de surface, c'est-à-dire la pression électrostatique, est alors donnée par :

$$P = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

### III.5. Pouvoir des pointes (effet de pointe):

Considérons deux sphères conductrices (chargées) de rayons  $R_1$  et  $R_2$  reliées par un fil conducteur. Les deux sphères ont une densité de charge uniforme  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

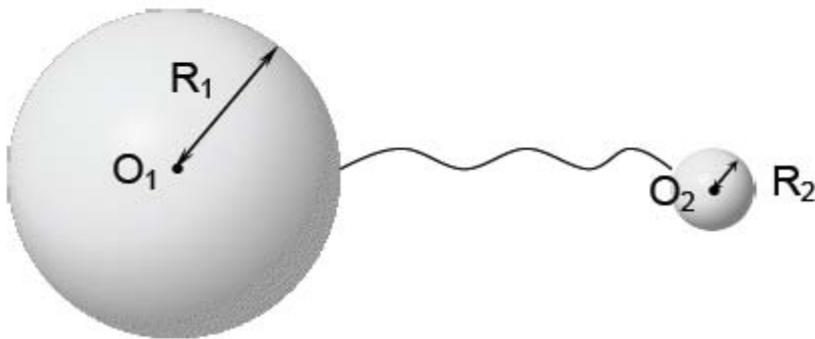


Figure III.3. Effet de pointe.

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{\sigma_1 S_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

$$= \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

$$V_1 = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{\sigma_2 S_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$= \frac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$V_2 = \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon_0}$$

A l'équilibre:  $V_1 = V_2 = V$

Donc

$$\frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

D'après le théorème de coulomb:  $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$

On a  $R_2 < R_1$

D'où  $\frac{R_2}{R_1} < 1 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < 1 \Rightarrow \sigma_2 > \sigma_1; E_2 > E_1$

**Donc:**

**La densité de charges d'un conducteur chargé est plus importante sur la surface ayant une courbure forte (petit rayon) que sur la surface ayant une courbure faible (grand rayon).**

Pour un même conducteur le champ au voisinage de la surface est d'autant plus grand que son rayon de courbure est plus petit.

### III.6. Influence de deux conducteurs chargés:

#### III.6.1. Définition:

C'est la modification de la charge surfacique d'un conducteur sous l'action d'une force créée par un corps quelconque chargé.

#### III.6.2. Influence partielle:

On considère un conducteur A chargé positivement s'approchant d'un conducteur B neutre. B influencé par A donc des charges négatives (-) apparaissent sur la partie de B proche de A et des charges positives (+) sur la partie la plus éloignée. Alors, modification de la répartition des charges sur la surface de B.

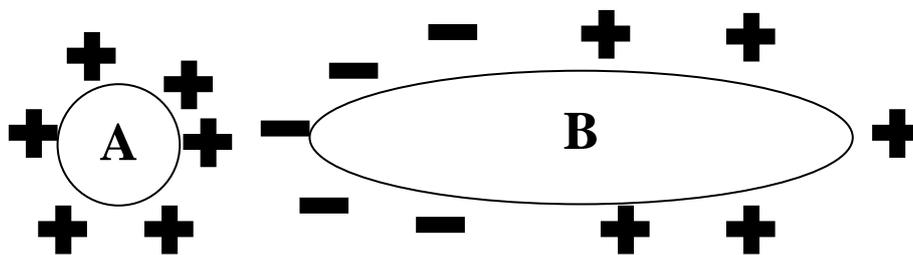


Figure III.4. Influence partielle.

#### **Important !!!**

Si le conducteur B était initialement chargé, il conserve la même charge mais la répartition en surface est modifiée.

### En résumé:

Le phénomène d'influence ne modifie pas la charge totale d'un conducteur neutre, mais modifie uniquement la répartition de cette charge sur sa surface et donc son potentiel.

### III.6.3. Influence subie par un conducteur maintenu à un potentiel constant:

Le conducteur B est relié à un générateur qui maintient son potentiel constant ou bien à la terre dont le potentiel est nul.

Lorsqu'on approche de B le corps A chargé positivement, il apparaît que des charges négatives (-) sur B, alors qu'il y'a déplacement des charges positives (+) vers la terre (c .à.d déplacement des e- de la Terre vers B).

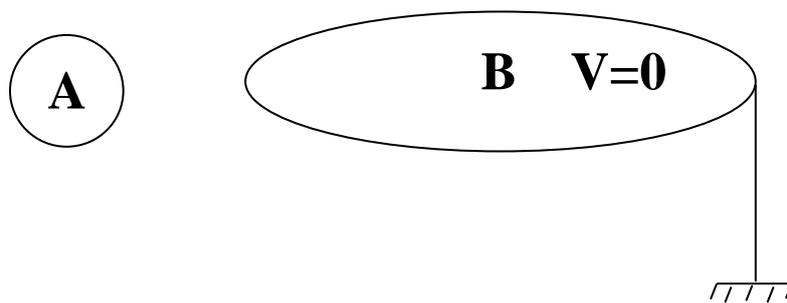


Figure III.5. Influence subie par un conducteur.

### En résumé:

Dans ce cas, le phénomène d'influence ne modifie pas le potentiel du conducteur, mais modifie sa charge totale et la répartition de cette charge.

### III.6.4. L'influence totale:

On parle d'influence totale lorsque toutes les lignes de champ partant de B aboutissent sur A. Ceci est obtenu lorsque A entoure complètement B.

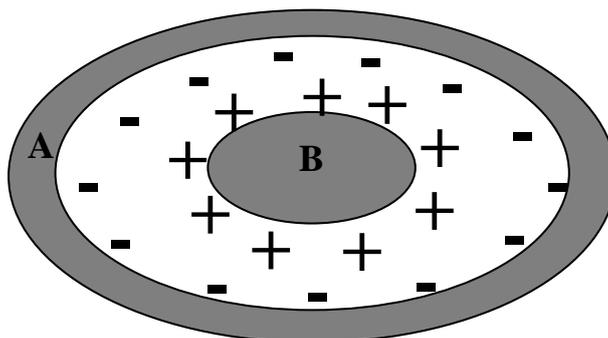


Figure III.6. Influence totale.

L'application du théorème des éléments correspondants, montre que la charge qui apparaît sur la surface interne de A est égale et opposée à la charge du conducteur B:

$$Q_B = Q_{Aint}$$

### III.6.5. Théorème des éléments correspondants:

Considérons deux conducteurs A et B en équilibre et portant des charges  $Q_A$  et  $Q_B$ . Et deux éléments de surfaces  $S_A$  sur A et  $S_B$  sur B découpées par le tube de force représenté sur la figure.  $S_A$  et  $S_B$  appelés « *éléments correspondants* » portent des densités de charges  $\sigma_A$  et  $\sigma_B$ .

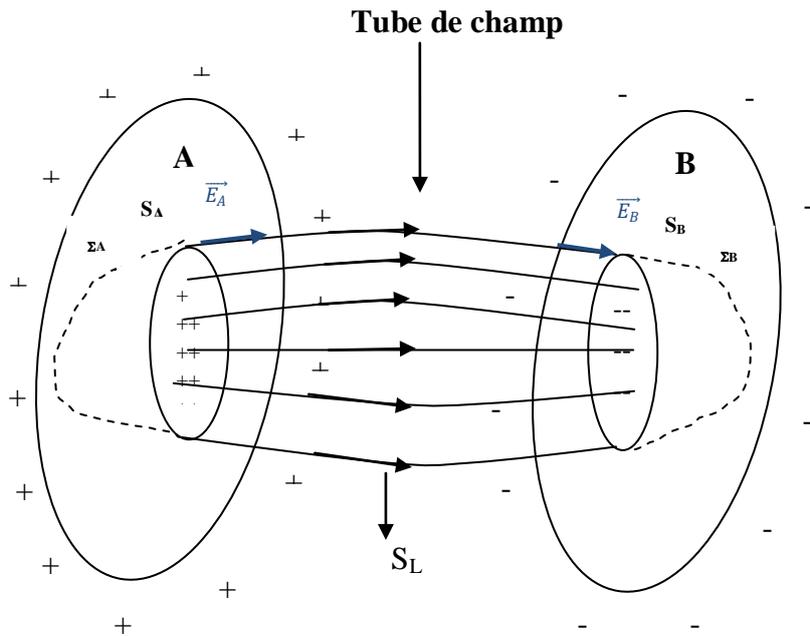


Figure III.7. Théorème des éléments correspondants.

$\vec{E}_A = \frac{\sigma_A}{\epsilon_0} \vec{n}_A$  Et  $\vec{E}_B = \frac{\sigma_B}{\epsilon_0} \vec{n}_B$ ; avec  $(\vec{n}_A$  et  $\vec{n}_B$  des vecteurs unitaire dirigés vers l'extérieure).

Appliquons le théorème de Gauss à une surface fermée  $S$  s'appuyant sur les surfaces  $SA$  et  $SB$  et limitée par les lignes de champ et deux surfaces à l'intérieur de A et B. D'où :

$$S_G = \sum A + S_L + \sum B$$

Donc:

$$\phi_{S_G}(\vec{E}) = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{\Sigma_A} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}_A + \oint_{\Sigma_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}_L + \oint_{\Sigma_B} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}_B = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

D'où:  $Q_{int} = 0$ .

$$Q_A + Q_B = 0. \Rightarrow Q_A = -Q_B$$

**Théorème des éléments correspondants :** Deux éléments correspondants portent des charges égales et opposées.

### III.7. Condensateurs:

#### III.7.1. Définition:

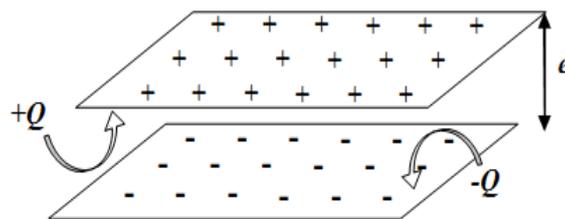
Un condensateur est un système constitué de deux conducteurs électrique en influence totale. Nous supposons que deux conducteurs dont l'un est creux et entoure complètement l'autre.

Un condensateur est un appareil qui sert à emmagasiner de l'énergie électrique. Il est largement utilisé en électronique et en électrotechnique. Le concept de capacité électrique, introduit dans le cas d'un seul conducteur, peut être étendu à un condensateur. On définit la capacité d'un condensateur par:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

#### III.7.2. Capacité d'un condensateur Plan:

Un condensateur plan est formé de deux conducteurs plans, parallèles, distants de  $e$ . L'espace  $e$  est très petit par rapport aux dimensions des armatures afin que celles-ci soient en influence totale, Le champ qui règne entre les armatures est uniforme, avec  $E = \frac{V_1 - V_2}{e}$ .



**Figure III.8.** Un condensateur plan.

E, s'exprime aussi en fonction de la densité de charge surfacique:  $\sigma = \frac{Q}{S}$ , telque  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

Le théorème de Gauss nous permet de connaître le champ, créé par un plan infini portant une charge de densité surfacique  $\sigma$ ,  $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ .

D'après le principe de superposition, le champ créé par deux plans infinis portant respectivement de densité  $+\sigma$ ,  $-\sigma$ .

Nous revenons au calcul de la capacité du condensateur plan  $c = \frac{Q}{(V_1 - V_2)}$ .

En exprimant la charge  $Q$  en fonction de la d.d.p,  $Q = \sigma \cdot s$ .

En remplaçons l'expression de  $E$   $\epsilon_0 = \sigma$  dans  $Q$ , donc:  $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ ,  $C \gg \epsilon_0$ .

### III.7.3. Capacité d'un condensateur sphérique:

Un condensateur sphérique, est constitué de deux sphères conductrices. La première de rayon  $R_1$  porte une charge positive  $+Q$  et son potentiel est  $V_1$ , la seconde de rayon  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ), porte une charge  $-Q$  et son potentiel est  $V_2$ . En appliquant le théorème de Gauss, on obtient le champ électrique entre les armatures d'un tel condensateur:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

Sachant que  $E = -\frac{dV}{dr}$

On a  $-dV = E \cdot dr$

En faisant circuler ce champ entre les deux armatures, il vient :

$$V = \int_{V_1}^{V_2} -dV = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2}$$

$$\text{Soit } \Delta V = V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\text{D'où } C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

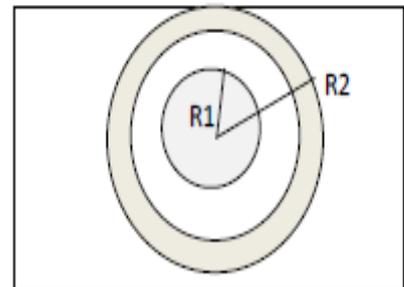


Figure III.9. Capacité d'un condensateur sphérique.

### III.7.4. Capacité d'un condensateur cylindrique:

Un condensateur cylindrique est formé de deux conducteurs cylindriques coaxiaux de rayon respectifs  $R_1$  et  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) de hauteur  $h$ . En supposant que le champ qui règne entre les armatures est le même que celui produit par un cylindre infiniment long portant une charge  $Q$ .

Alors

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}, \text{ avec } \lambda \text{ est une charge linéique telle que } Q = \lambda h.$$

Nous déduisons la capacité

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\log \frac{R_2}{R_1}}$$

Si la distance entre les armatures est très petite, alors:

$$R_2 = R_1 + e, \text{ avec } e \ll R_1$$

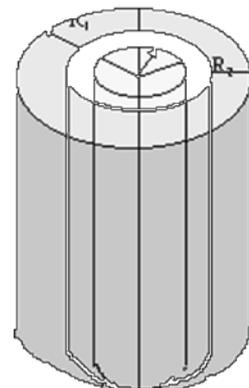


Figure III.10. Capacité d'un condensateur cylindrique.

$$D'où c = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Nous retrouvons l'expression de la capacité d'un condensateur plan.

### III.7.5. Association de Condensateur:

On utilise des associations de plusieurs condensateurs afin d'emmagasiner le plus d'énergie possible. On distingue deux types de condensateurs : en série et en parallèle.

- **Association série:**

Lorsqu'une différence de potentiel  $\Delta V = V_0 - V_N$  est appliquée entre les points extrêmes de l'ensemble des condensateurs en série. En supposant que tous les condensateurs sont initialement neutres. La différence de potentiel totale aux bornes de l'ensemble des condensateurs s'écrit alors simplement :

$$\Delta V = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \dots + (V_{N-1} - V_N)$$

Et 
$$\Delta V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots + \frac{Q}{C_N} = Q \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

Donc 
$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

- **Association en parallèle:**

Soient N condensateurs, placés en parallèle, avec la même différence de potentiel V. On désigne par  $Q_i$  et  $C_i$  la charge électrique et la capacité du *ième* condensateur, on a

$$Q_i = C_i V$$

La charge électrique totale portée par l'ensemble des condensateurs est alors donnée par :

$$Q = \sum_{i=1}^N Q_i = \sum_{i=1}^N C_i V = V \sum_{i=1}^N C_i$$

Avec 
$$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i$$

### III.7.6. Énergie électrostatique:

Considérons le cas d'un condensateur plan, dont les armatures ont une surface S, leurs charges +Q et -Q. L'énergie électrostatique d'un tel condensateur est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

## Exercice d'application

### Exercice III.1:

Un câble coaxial, rempli d'air, de longueur  $h$  est formé par:

- Un fil métallique de rayon  $R_1$  portant une charge positive  $+q$ .
  - Une couche isolante d'air de rayons intérieur  $R_1$  et extérieur  $R_2$ .
  - Un cylindre métallique creux, de rayon  $R$ , coaxial au fil (figure II.9).
1. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrique  $E(r)$  et le potentiel  $V(r)$  dans l'isolant à la distance  $r$  de l'axe.
  2. En déduire la capacité par unité de longueur du câble.
  3. Calculer la différence de potentiel entre le fil et cylindre pour laquelle il apparaît une étincelle disruptive dans l'air.

**Application numérique:**  $R_1 = 1\text{mm}$ ,  $R_2 = 1\text{ cm}$ ,  $E_{\text{max}} = 3.10^6\text{ V.m}^{-2}$  (le champ électrique disruptif).

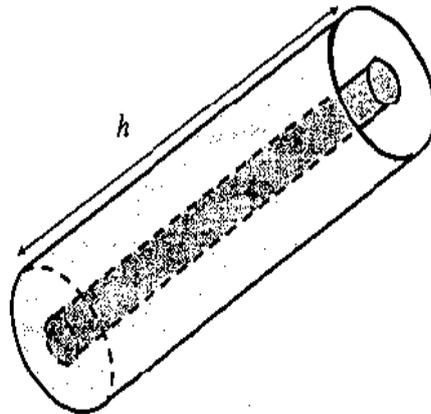


Figure III.11. Un cylindre métallique creux.

### Exercice III.2:

1. Une sphère conductrice pleine A de rayon  $R_1 = 9\text{ cm}$ , est seule dans l'espace et portée à un potentiel  $V_0 = 6\text{ 600V}$ . Quelle est sa charge  $Q_0$ .
2. L'ayant isolée de la source, on entoure la sphère A par une autre sphère conductrice creuse B, concentrique, de rayon intérieur  $R_2 = 11\text{ cm}$  et  $R_3 = 12\text{ cm}$ , initialement neutre et isolé.
  - a) Calculer les charges portées par les sphères A et B.
  - b) Calculer les potentiels  $V_A$  et  $V_B$  des deux sphères.

# Solution des exercices

## Exercice III.1:

1. La distribution de charges possède une symétrie cylindrique. On choisit une surface de Gauss cylindrique fermée  $\Sigma$ , de même axe que le câble coaxial, de longueur  $h$  et de rayon  $r$ , ( $R_1 < r < R_2$ ).

D'après le théorème de Gauss:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 2\pi r l = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{q}{r} \vec{u}_r$$

Dans cette formule, la charge  $q$  est celle du fil métallique.

Le potentiel est déterminé par:

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{q}{r} \Rightarrow dV(r) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 h} q \frac{dr}{r},$$

On obtient:  $V(r) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 h} q \ln r + C$ , où  $C$  est une constante.

Si  $V_1$  est le potentiel du fil métallique, alors on a:

$$V(r) = V_1 - \frac{1}{2\pi\epsilon_0 h} q \ln \frac{r}{R_1}$$

2. Pour déterminer la différence de potentiel entre le fil et le cylindre, faisons circuler le champ de  $r = R_1$  à  $r = R_2$ , le long d'une ligne de champ:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} (\vec{u}, d\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} [\ln r]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{q}{c}$$

D'où la capacité:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

On en déduit la capacité par unité de longueur du câble:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

3. Le champ électrique est maximal pour  $r = r_{\min} = R_1$ . Son expression est:

$$E_{max} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{q}{R_1} \Rightarrow E_{max} R_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h}$$

Dans ces conditions, la valeur maximale de la d.d.p. est:

$$(V_1 - V_2)_{max} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Soit

$$(V_1 - V_2)_{\max} = E_{\max} R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Application numérique:  $R_1 = 1 \text{ mm}$ ,  $R_2 = 1 \text{ cm}$ ,  $E_{\max} = 3 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ .

$$(V_1 - V_2)_{\max} = 3 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} \ln \frac{10^{-2}}{10^{-3}} \Rightarrow (V_1 - V_2)_{\max} = 691 \text{ KV.}$$

### Exercice III.2:

1. Le potentiel  $V_0$  de la sphère conductrice A est:  $V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{R_i}$

On en déduit la charge  $Q_0$  portée par la sphère conductrice A:  $Q_0 = 4\pi\epsilon_0 R_1 V_0$

**Application numérique:**  $R_1 = 9 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ;  $V_0 = 1800 \text{ V}$ .

$$Q_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot 9 \cdot 10^{-2} \cdot 1800 \Rightarrow Q_0 = 18 \text{ nC}$$

2. a) Les conducteurs A et B sont en influence totale:

$$Q_A = Q_0 = 18 \text{ nC} \quad \text{et} \quad Q_{\text{int}}^B = -Q_A = -Q_0 = -18 \text{ nC.}$$

La sphère conductrice B est neutre et isolée  $\Rightarrow$  Conservation de la charge électrique totale.

$$\Rightarrow Q_{\text{ext}}^B + Q_{\text{int}}^B = 0 \quad Q_{\text{ext}}^B = +Q_A = +Q_0 = 18 \text{ nC.}$$

b) En présence des charges  $Q_{\text{ext}}^B$  et  $Q_{\text{int}}^B$  le potentiel de la sphère conductrice A change il devient:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q}{r} \Rightarrow V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_0}{R_1} - \frac{Q_0}{R_2} + \frac{Q_0}{R_3} \right)$$

L'influence totale modifie le potentiel d'un conducteur isolé et maintient fixe sa charge électrique.

Le potentiel de la sphère conductrice B s'écrit:

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{ext}}^B}{R_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{R_3}$$

Applications numériques:  $R_1 = 9 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ;  $R_2 = 10 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ;  $R_3 = 11 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ;  $Q_0 = 18 \text{ nC}$ ;  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ .

On obtient:  $V_A = 1652,72 \text{ V}$  et  $V_B = 1472,72 \text{ V}$

# CHAPITRE IV

## COURANT ÉLECTRIQUE

### **IV.1. Courants électriques:**

#### **IV.1.1. Origine électrocinétique:**

L'électrocinétique est l'étude des phénomènes liés aux charges électriques mobiles en termes de courants et de tensions. Il s'agit ainsi d'étudier la circulation des courants électriques dans des circuits composés de sources, résistance, bobine, condensateur...

#### **IV.1.2. Origine du courant électrique:**

Le courant électrique est un déplacement collectif et organisé des porteurs de charges. Cet écoulement de charges peut se produire dans le vide ou dans la matière conductrice. Un courant électrique apparaît dans un conducteur quand une différence de potentiel est établie entre les bornes de ce dernier.

#### **IV.1.3. Courant permanent:**

Un courant permanent correspond à un déplacement ininterrompu de charges libres. Par exemple, lorsque on a deux conducteurs reliés A et B et Pour avoir une circulation permanente, il faut maintenir un état de déséquilibre entre les deux conducteurs A et B. A cet effet, il est nécessaire d'amener de façon continue des charges sur l'un des conducteurs. Ceci peut être réalisé à l'aide d'appareils que l'on appelle générateurs.

#### **IV.1.4. Sens conventionnel du courant:**

Le problème s'est posé aux physiciens est que Le courant électrique ne circule donc dans un seul sens, mais lequel ?

Le courant circule de la borne positive vers la borne négative à l'extérieur du générateur. C'est le sens conventionnel du courant électrique d'après Ampère.

#### IV.1.5. Intensité du courant:

Qu'est ce que l'intensité du courant ?

Soit un conducteur métallique de section  $S$ . L'intensité  $I$  du courant électrique est, par définition, la quantité d'électricité  $dq$  qui traverse la section  $S$  pendant un intervalle de temps  $dt$ . L'intensité se mesure à l'aide d'un appareil appelé ampèremètre. L'unité de l'intensité est l'*ampère*.

$$I = \frac{dq}{dt}$$

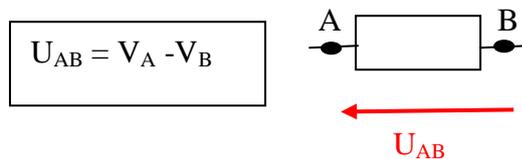
$I$ : est l'intensité du courant.

$q$ : la charge électrique.

$t$ : le temps.

#### IV.1.6. Tension électrique:

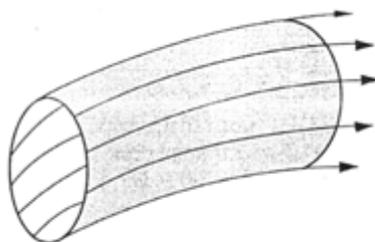
La tension est la différence de potentiel électrique (DDP) qui existe entre deux points d'un dipôle. Elle est mesurée grâce à un voltmètre son unité est le volt.



**Figure IV.1.** la différence de potentiel électrique.

#### IV.1.7. Ligne de courant:

Une ligne de courant est définie comme une courbe en tout point tangente au vecteur densité de courant.



**Figure IV.2.** Un tube de courant.

Un tube de courant est l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée.

#### IV.1.8. Vecteur densité de courant:

La densité de courant est un vecteur décrivant le courant électrique à l'échelle locale. Sa direction indique celle du déplacement des porteurs de charge et sa norme correspond à l'intensité du courant par unité de surface. Dans le système international la densité de courant se mesure en ampères par mètre carré ( $A.m^{-2}$ ). La densité de courant est relié au courant électrique par :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Cette expression est valable dans tous les cas où la surface S est une surface quelconque.

#### IV.2. Loi d'ohm:

##### IV.2.1. Loi d'Ohm à l'échelle macroscopique

Les travaux pratiques montrent que le rapport entre la tension  $u$  aux bornes de la résistance  $R$  et le courant  $i$  qui le traverse est une constante. La constante par définition est la résistance électrique du conducteur elle est exprimée en ohms  $\Omega$ .

$$R = \frac{u}{i}$$

, C'est la Loi d'Ohm à l'échelle macroscopique.

##### IV.2.2. Forme locale de la loi d'Ohm:

En tout point M d'un conducteur de conductivité  $\sigma$ , il existe un champ  $\vec{E}$  entraîne l'apparition d'une densité de courant  $J$  ;  $J = \sigma \cdot \vec{E}$

Cette expression elle constitue la forme locale de la loi d'Ohm.

La constante  $\sigma$  caractérise la nature du matériau, elle est exprimée en  $(\Omega.m)^{-1}$ .

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{E}{J}, E = \rho \frac{I}{S}$$

Pour un conducteur de longueur L, de section constante S, on définit la résistance R, par :

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

Si  $V_A - V_B$  désignent les potentiels entre deux points A et B distant de L dans le conducteur, la norme du champ électrique est égale aussi à :

$$V_A - V_B = \int_0^L E \cdot dl, E = \frac{V_A - V_B}{L}$$

Ainsi, La loi d'Ohm traduit l'effet du déplacement des charges au champ électrique  $E$  auquel correspond une différence de potentiel en fonction du matériau caractérisé par sa résistance.

A l'échelle microscopique, on peut écrire:

$$J = -nev = \frac{ne^2 \tau}{m}$$

Il vient :

$$\sigma = \frac{ne^2}{K}$$

En fonction du temps de relaxation, la conductivité s'écrit :

$$\sigma = \frac{ne^2}{m} \tau$$

L'expression sous forme vectorielle:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Cette expression est générale, elle constitue la forme.

#### IV.2.3. Résistivité:

La résistivité est une propriété intrinsèque représente la capacité d'un matériau à s'opposer à la circulation du courant électrique, généralement est représenté par la lettre  $\rho$ . elle est défini par:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

L'unité de la résistivité est:  $\Omega \cdot m$ .

Exemple: on va voir la résistivité de quelque matériau

Matériau	Résistivité x 10 <sup>-8</sup> $\Omega \cdot m$
Argent	1.6
Cuivre	1.7
Aluminium	2.7

Tableau IV.1. Quelques résistivités des matériaux.

#### IV.2.4. Mobilité:

La mobilité est utilisée en physique pour caractériser les milieux conducteurs du courant électrique et relie la vitesse d'un porteur de charge électrique du milieu au champ électrique qu'il subit via la relation:

$$\vec{v} = \mu \cdot \vec{E}$$

$\mu$  est la mobilité elle s'exprime en  $\text{m}^2/\text{V.S}$ .

En fonction de la conductivité:

$$\sigma = \frac{n e^2}{K} = n \cdot e \cdot \mu,$$

$$\mu = \frac{\sigma}{n \cdot e}$$

#### IV.2.5. Effet Joule:

La circulation d'un courant  $I$  à travers un conducteur électrique, entraîne une perte d'énergie qui se traduit par un échauffement de chaleur. On peut déterminer l'énergie dissipée pendant le passage du courant.

Si  $dq$  est la quantité de charge qui passe d'un point A à un point B du conducteur, le travail des forces électriques est:

$$dw = (V_A - V_B) dq$$

On peut écrire:

$$dw = (V_A - V_B) Idt$$

Si  $R$  est la résistance de ce conducteur, on a d'après la loi d'Ohm:

$$V = V_A - V_B = RI$$

Donc le travail s'écrit:  $dW = V I dt = RI^2 dt$

Remarque:

Cette énergie est dissipée sous forme de chaleur, c'est l'effet Joule. Elle correspond à une puissance:

$$P = \frac{dW}{dt} = RI^2, P = \frac{V^2}{R} = VI.$$

# CHAPITRE V

## MAGNÉTOSTATIQUES

### V.1. Introduction:

Nous avons étudié, au premier chapitre, l'interaction électrique qui intervient entre deux corps électrisés. À présent nous étudions une autre interaction c'est l'interaction magnétique qui fait intervenir le champ magnétique statique.

Le mot « magnétisme » dérive du nom de la région qui porte le nom de « magnésie », située sur la côte ouest de l'actuelle Turquie, où le phénomène magnétique a été observé depuis fort longtemps. Cette région renfermait des gisements du minerai appelé « magnétite » qui a des propriétés spécifiques.

### V.2. Origine du champ magnétique:

Le voisinage d'un aimant est caractérisé par l'existence d'un champ magnétique. C'est à partir de ces configurations que Michael Faraday eut l'idée d'introduire la notion du champ magnétique et les lignes de champ correspondantes. Le champ magnétique  $\vec{B}$  en un point est dirigé selon la tangente à une ligne de champ.

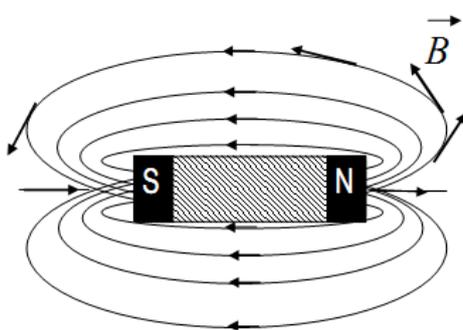


Figure V.1. Les lignes de champ.

Les lignes du champ magnétique sortent du pôle nord (N) de l'aimant et rentrent par le pôle sud (S). L'intensité du champ est proportionnelle au nombre de lignes traversant une surface unitaire normale au champ.

Unité: Dans le système M.K.S.A, le champ magnétique est mesuré en tesla (T).

Remarque: Les termes *champ magnétique permanent* et *champ magnétostatique* sont synonymes.

### V.3. La définition de la force de Lorentz:

Le physicien hollandais Hendrik Lorentz donne l'expression de la force  $\vec{F}$  qui s'exerce sur une charge ponctuelle  $q$ , se déplaçant à la vitesse  $\vec{V}$  dans des champs électrique et magnétique  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$$

Un champ magnétique est une région de l'espace où, en l'absence du champ électrique  $\vec{E}$  une charge  $q$  animée d'une vitesse  $\vec{V}$ , est soumise à l'action d'une force :

$$\vec{F} = q(\vec{V} \wedge \vec{B})$$

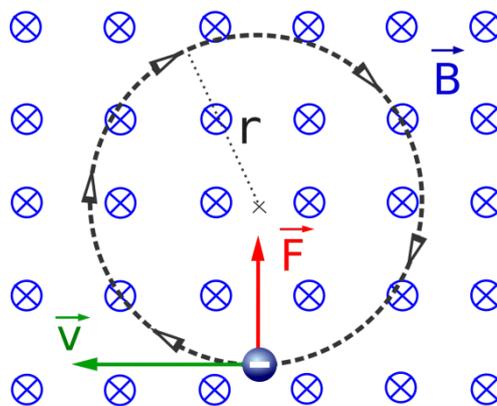


Figure V.2. La force dans le champ magnétique.

Cette nouvelle définition du champ magnétique est obtenue à partir de la force de Lorentz.

Cette force à :

- Son module:  $F = qVB |\sin(\vec{V}, \vec{B})|$
- Sa direction est la perpendiculaire au plan formé par  $\vec{V}$  et  $\vec{B}$ .
- Son sens est tel que, dans le cas d'une charge positive, les vecteurs  $\vec{V}$ ,  $\vec{B}$  et  $F$  forment un trièdre direct (règle de la main droite). Lorsque la charge est négative la force change de sens.

Le sens de cette force est également donné par la règle du bonhomme d'Ampère :

Le bonhomme d'Ampère, traversé des pieds vers la tête par la charge (+q) animée d'une vitesse  $V$ , voit fuir les lignes de champ, et à la force à sa gauche.

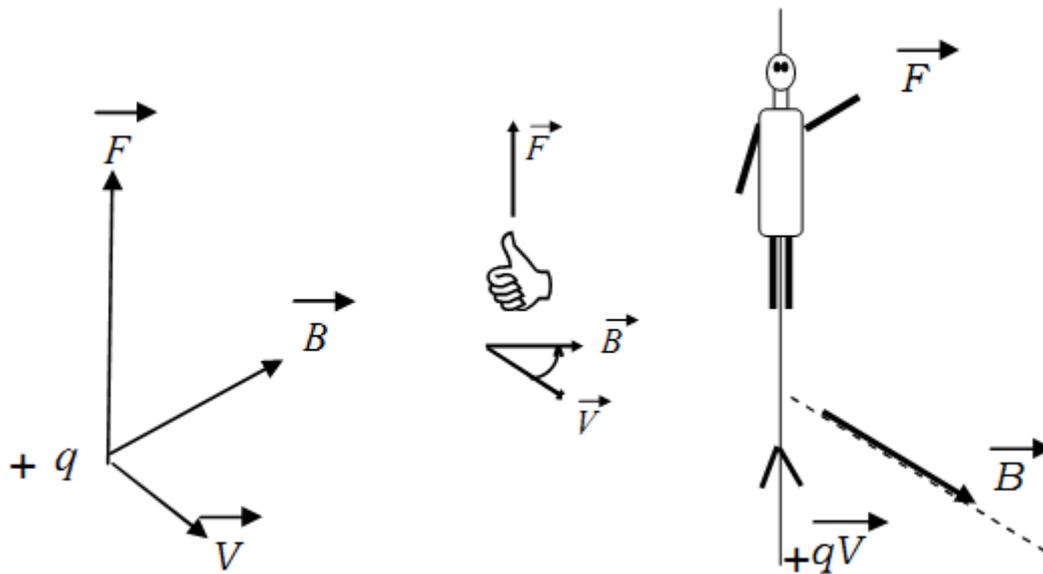


Figure V.3. La force de Lorentz.

#### V.4. La force de Laplace:

Lorsqu' un fil conducteur parcouru par un courant  $I$ , est placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , chaque élément  $l$  du fil subit une force: sous la forme:

$$\vec{F} = I \vec{l} \wedge \vec{B}$$

Cette force est perpendiculaire au plan formé par le champ et l'élément de courant considéré. Son sens est donné par la règle du bonhomme d'Ampère.

Les caractéristiques de la force de Laplace sont :

- Direction: est perpendiculaire à  $\vec{l}$  et à  $\vec{B}$ .
- Sens: déterminé à l'aide de la règle de la main droite.
  1. Pouce: sens de  $I$ .
  2. Index: sens du champ magnétique  $\vec{B}$ .
  3. Majeur: sens de la force de Laplace  $\vec{F}$ .
  4. Intensité:  $\vec{F} = |I \sin \alpha| l B$ , où  $\alpha$  est l'angle formé par  $\vec{l}$  et  $\vec{B}$ .

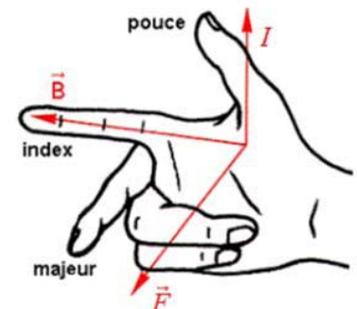


Figure IV.4. La force de Laplace.

## V.5. Invariances et symétrie:

### Lignes et tubes de champ de $\vec{B}$ :

On peut représenter les champs magnétiques par des lignes de champ, comme l'on a fait pour les champs électriques. Les règles s'appliquent en tout point, la direction de la tangente à une ligne de champ magnétique donne la direction de  $\vec{B}$ . Une ligne de champ commence au pôle nord (rouge) d'un aimant et se termine en son pôle sud (noir).

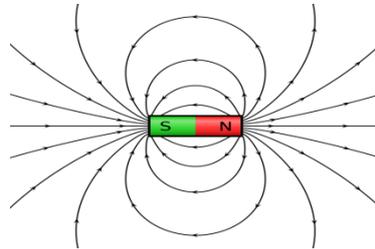


Figure V.5. Les lignes de champ.

Un tube de champ est la surface imaginaire engendrée par l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé  $C$ .

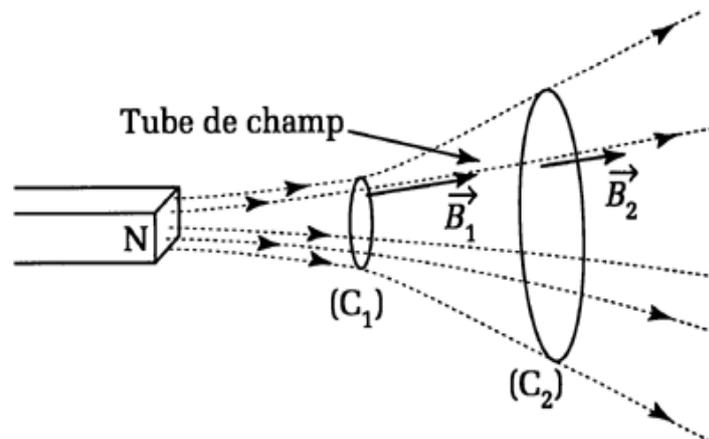


Figure V.6. Induction électromagnétique.

### V.5.1. Invariances:

- Si une distribution de courant est invariante par translation suivant l'axe (Oz):  $\vec{B}(M)$  est indépendant de  $z$ .
- Si une distribution de courant est invariante par rotation autour d'une d'axe (Oz) :  $B(M) = \|\vec{B}(M)\|$  ne dépend pas de  $\theta$ .

### V.5.2. Symétries:

- On prend une distribution de courant dont on peut trouver un plan de symétrie et calculons le champ magnétique en un point  $M$  de ce plan.

Un plan de symétrie  $\Pi$  pour la distribution de courant est un plan d'antisymétrie pour le champ  $\vec{B}$ . En particulier, pour  $M \in \Pi$  on a  $\vec{B} \perp \Pi$ .

Cela signifie que l'existence d'un seul plan de symétrie nous permet de trouver la direction du champ magnétique.

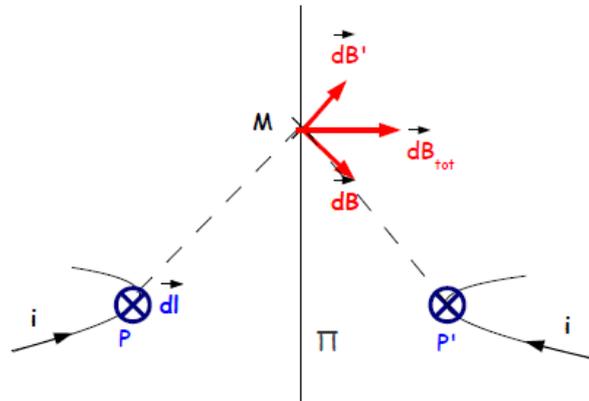


Figure. V.7. Symétrie de la distribution.

- Le champ magnétique est antisymétrique par rapport au plan  $\Pi$ .

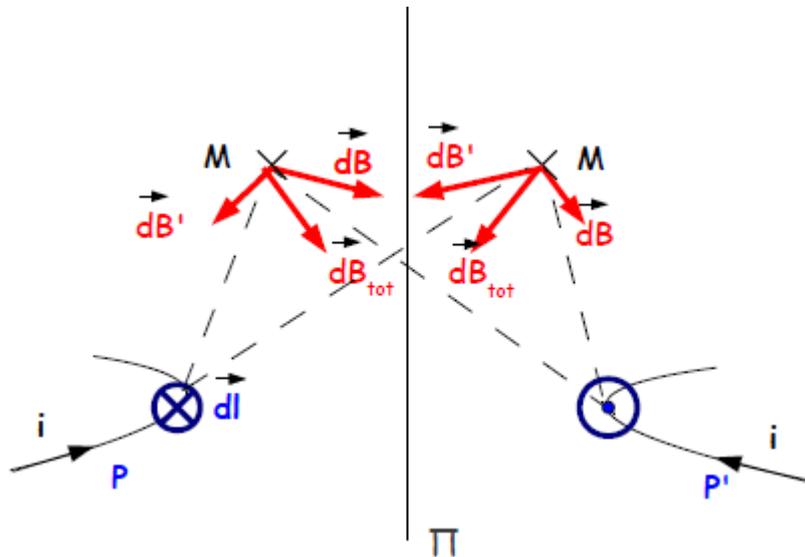


Figure V.8. Champ magnétique antisymétrique.

### V.6. Principe de superposition:

De même que pour le champ électrostatique, le principe de superposition s'applique au champ d'induction magnétique.

Etant donné que le champ magnétique est une grandeur vectorielle:

Si on superpose deux champs  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$ , le champ résultant est la somme vectorielle des deux alors  $\vec{B}_{TOTAL} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ .

### V.7. La loi de Biot et Savart:

Un fil conducteur rectiligne de longueur infinie, parcouru par un courant I, crée, en un point M de l'espace situé à une distance r du fil crée un champ magnétique.

Les physiciens français Biot et Savart ont trouvé l'expression du champ magnétique est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \vec{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

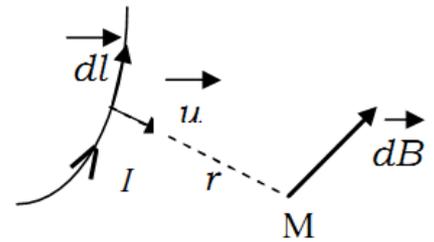


Figure V.9. Circuit fermé crée en M un champ élémentaire.

Avec  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide est égal à  $4\pi 10^{-7}$  henry par mètre: H/m.

### Important!!!!

- La formule de Biot et Savart, a été établie expérimentalement en 1820.
- La formule de Biot et Savart est un outil de calcul et ne doit être utilisée que pour calculer l'induction magnétique créée par des circuits fermés.
- Pour un fil conducteur considéré comme infiniment mince, le champ est nul en  $r = 0$ .

### V.8. Le théorème d'Ampère:

Le théorème d'Ampère joue un rôle analogue pour le champ magnétique à celui que joue le théorème de Gauss pour le champ électrostatique.

#### Enoncé du théorème:

La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé est égale au produit de la perméabilité du vide et de la somme algébrique des courants traversant la surface.

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dS} = \mu_0 \cdot I_{tot}$$

### Important!!!! :

- La notation de l'intégrale avec le cercle correspond à un contour fermé.

- Le vecteur  $\vec{dS}$  est tangent au contour en tout point de celui-ci. Le contour est arbitrairement orienté (selon la règle du tire-bouchon).

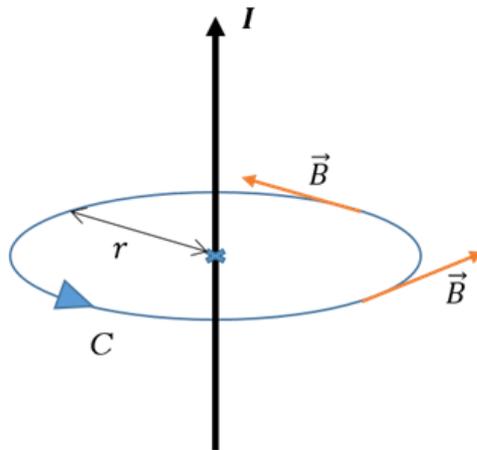


Figure V.10. La circulation du champ magnétique.

## V.9. Exemples de calcul du champ magnétique créé par différentes distributions de courants:

### V.9.1. Champ créé par un fil infini parcouru par un courant I:

Considérons un fil infini d'axe Oz, parcouru par un courant constant d'intensité I et cherchons le champ magnétique dB créé au point M, par un élément PP' = dl du fil considéré, À l'aide de la formule de Biot et Savart, on peut exprimer le champ magnétique dB produit par la portion de longueur dl:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

D'où :  $r = PM$ .

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cos\theta}{r^2}$$

D'après la figure IV.9:

$$r = \frac{OM}{\cos\theta}$$

$$PH = r d\theta \Rightarrow dl = \frac{r d\theta}{\cos\theta}$$

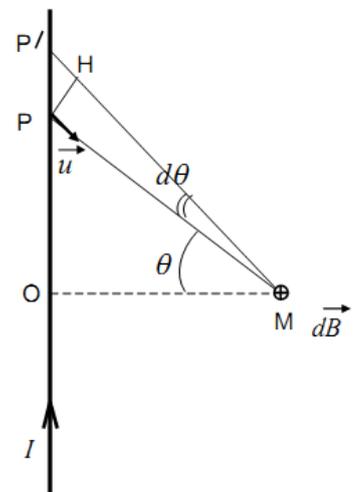


Figure V.11. Champ créé par un fil infini.

D'où:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{OM} \cos\theta \, d\theta$$

Alors:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{OM} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta$$

Finalement l'expression finale:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

### V.9.2. Champ créé par une spire circulaire de rayon $R$ , parcourue par un courant $I$ :

Un élément  $dl$  d'une spire, parcourue par un courant  $I$ , produit en un point  $M$  de l'axe de la spire, un champ magnétique  $dB$ . est donné par la règle du bonhomme d'Ampère et son module est :

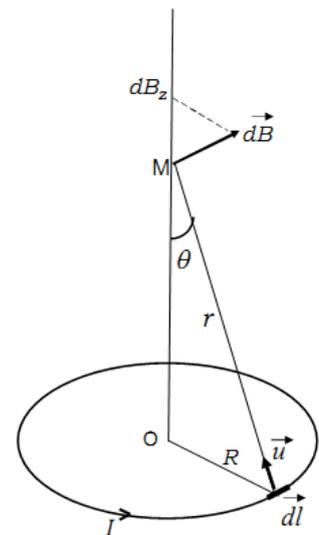
$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}$$

En raison de la symétrie du problème, toutes les composantes perpendiculaires à l'axe s'éliminent.

$$dB_z = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \sin\theta$$

Le champ résultant est porté par l'axe de la spire et a pour valeur:

$$B = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r^2} I \int_0^{2\pi R} dl$$



**Figure V.12.** Champ créé par une spire circulaire.

$$B(r) = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r^2} IR$$

R étant le rayon de la spire et sachant que  $\sin\theta = \frac{R}{r}$  on a:

$$B(r) = \frac{\mu_0 R^2}{4\pi r^3} I$$

Nous obtenons ainsi :

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} I$$

Le champ magnétique au centre de la bobine ( $z=0$ ) a pour valeur:

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2R} I$$

### V.9.3. Champ créé par un solénoïde:

#### Définition:

Une bobine est constituée d'un fil conducteur enroulé en plusieurs boucles de façon régulière autour d'un cylindre. Chaque boucle est une spire.

Un solénoïde est une bobine dont la longueur est très grande par rapport au rayon du cylindre.

#### Important!!!!

- A l'intérieur du solénoïde les lignes de champ sont des droites parallèles, le champ magnétique est uniforme.
- Un solénoïde parcouru par un courant présente une face nord et une sud (la nature de la face dépend du sens du courant).

#### Caractéristiques du vecteur champ:

- Direction: celle de l'axe du solénoïde.
- Sens: donné par la règle de la main droite.
- Intensité:  $B = \frac{\mu_0 NI}{L} = \mu_0 nI$

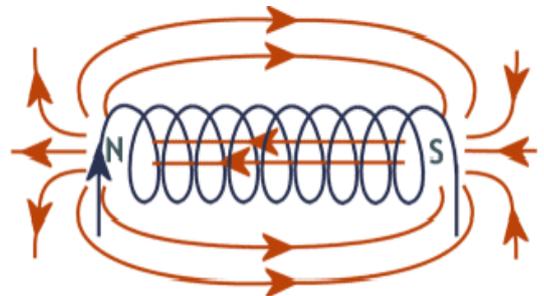


Figure. V.13. Solénoïde.

N: le nombre de spires,  $n = \frac{N}{L}$ : nombre de spires par unité de longueur.

### V.9.4. Dipôle magnétique:

#### Définition:

On appelle dipôle magnétique toute distribution de courants permanents dont le moment magnétique est non nul et dont les dimensions sont faibles par rapport aux distances de la

distribution au point M où l'on étudie le champ magnétique. On adopte comme modèle d'un dipôle magnétique une boucle de courant.

### Champ magnétique crée par un dipôle magnétique:

On peut écrire l'expression du champ sur l'axe de la spire sous la forme:

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\pi R^2}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} I$$

En remplaçons par M par  $\pi R^2 I$ , M est le module du moment magnétique de la spire.

Si le rayon R de la spire est très petit, il peut être négligé devant z, on a alors:

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M}{Z^3}$$

On retrouve une expression analogue à celle du champ électrique créé par un dipôle sur son axe :

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{Z^3}$$

C'est la raison pour laquelle on dit qu'une spire, de très faible rayon, parcourue par un courant constitue un dipôle magnétique.

Si on calcule le champ magnétique créé par un tel dipôle, on trouve un vecteur B dont les composantes radiale et tangentielle sont:

$$\begin{cases} B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M}{Z^3} \cos\theta \\ B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M}{r^3} \sin\theta \end{cases}$$

## V.10. Induction magnétique:

### a. La loi de Faraday-Henry:

La création d'un champ magnétique dans une bobine engendre un flux magnétique  $\Phi$ , la variation de ce flux magnétique induit de la loi de Faraday.

La force électromotrice (f.é.m) induite dans un circuit est égale à l'opposé de dérivée par rapport au temps du flux magnétique à travers ce circuit.

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

### Important!!!!

- La force électromotrice est mesurée en volts,  $\Phi$  en weber (Wb).
- La force électromotrice tend à s'opposer à la variation de flux magnétique d'où le signe (-).

## b. La loi de Lenz:

Le signe moins de la loi de Faraday résulte des conventions utilisées pour orienter la surface du circuit et définir la force électromotrice algébrique.

La loi de Lenz traduit qualitativement cet effet. Elle permet de prévoir le sens du courant induit dans les cas simples et de vérifier son signe une fois le calcul algébrique effectué.

### Énoncé de la loi de Lenz :

« Le courant induit a un sens tel que le flux induit qu'il crée s'oppose aux variations du flux inducteur. ».

## V.11. L'énoncé des équations de Maxwell:

James clerk Maxwell est un physicien et mathématicien devenu célèbre pour sa description mathématique des champs magnétiques et électrique, connues sous le nom « des équations de maxwell ». Il s'est basé sur les principes de la loi de l'induction découverts expérimentalement par Michael Faraday.

Maxwell constata que les relations expérimentales de Faraday n'étaient pas complètes et donnaient des résultats ambigus. Alors il a eu recours aux équations intégrales pour calculer ce champ de force et les lois générales qui régissent le comportement.

### V.11.1. Opérateurs vectoriels:

On donne les expressions suivantes des opérateurs mathématiques gradient, divergence, rotationnel, et Laplacien, en coordonnées scalaires dans un espace à trois dimensions. Tous ces opérateurs sont construits à partir de l'opérateur fondamental Nabla:  $\vec{\nabla}$ .

- **Gradient :**

La forme différentielle totale d'une fonction  $f(x, y, z)$ , où  $x, y$  et  $z$  sont les trois variables de l'espace, est:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

qui peut s'écrire sous la forme d'un produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{dl}$  avec:

$$\vec{u} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

Le champ vectoriel  $\vec{u}$  s'exprime par un opérateur nommé gradient que l'on définit:

$$\vec{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} = \vec{\nabla} f$$

Ce vecteur n'est autre qu'une extension du classique dérivée d'une fonction à un espace de dimension supérieure.

- **Divergence:**

La divergence d'un champ vectoriel  $\vec{u}$  est un scalaire défini par:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

- **Rotationnel:**

Le rotationnel d'un champ vectoriel  $\vec{u}$  est un vecteur défini par:

$$\operatorname{rot} \vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- **Laplacien:**

Le dernier opérateur que nous utiliserons est le laplacien. Le laplacien est défini comme la divergence du gradient. On distingue le laplacien scalaire.

$$\operatorname{laplacien}(f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

De même on définit le laplacien vectoriel comme:

$$\vec{\Delta} \vec{u} = \Delta^2 \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Le laplacien d'une fonction mesure la différence entre la valeur de la fonction en un point et sa moyenne autour de ce point. Ainsi le laplacien est nul ou très petit lorsque la fonction varie sans à-coups.

**Important!!!!**

- **Relations fondamentales:**

1.  $\operatorname{div}(\operatorname{grad}) = \operatorname{laplacien}$ .
2.  $\operatorname{div}(\operatorname{rot}) = 0$ .
3.  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}) - \operatorname{laplacien}$
4.  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}) = \vec{0}$

- **Relations impossibles:**

1.  $(\operatorname{grad})\operatorname{rot}$

Le gradient d'un rotationnel n'existe pas puisque l'opérateur gradient s'applique à un champ scalaire alors que le rotationnel est un vecteur.

## 2. $(\overline{\text{rot}})\text{div}$

Le rotationnel d'une divergence n'existe pas puisque l'opérateur rotationnel s'applique à un champ vectoriel alors que la divergence est un scalaire.

## 3. $(\overline{\text{rot}})\text{laplacien}$

Le rotationnel d'un Laplacien scalaire n'existe pas puisque l'opérateur rotationnel s'applique à un champ vectoriel alors que par construction le Laplacien scalaire est un scalaire.

### V.11.2. Les équations de Maxwell:

Les équations de Maxwell sont des lois fondamentales de la physique et sont quatre. L'ensemble de ces équations se rapportent à l'électromagnétisme et plus particulièrement à la description des phénomènes magnétiques, électriques et lumineux.

### V.11.3. Equations de locales du champ électriques:

#### 1. Equation de MAXWELL –GAUSS:

La formule de Maxwell –Gauss stipule que la divergence du champ électrique est proportionnelle à la distribution de charges électriques.

Si on applique le théorème de Green-Ostrogradski au champ  $\vec{E}$ :

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iiint_V \text{div}\vec{E} dV$$

Et sachant que pour une distribution volumique de charge le théorème de Gauss est:

$$\Phi = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

On obtient:

$$\iiint_V (\text{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}) dV = 0$$

Donc:

$$\boxed{\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Où:

E: le vecteur champ électrique en V/m

$\epsilon_0$  est la permittivité diélectrique du vide en C/V/m.

Cette expression représente la forme locale du théorème de Gauss. Elle est appelée aussi l'équation de poisson pour le champ.

## 2. Equation de MAXWELL –FARADAY:

La formule de Maxwell-Faraday correspond au phénomène d'induction et stipule que le rotationnel du champ électrique  $\vec{E}$  est inversement proportionnel à la variation du champ magnétique au cours du temps.

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Cette équation signifie que c'est la variation du champ magnétique qui produit un champ électrique et non le champ magnétique tout seul.

## 3. Equation de MAXWELL –Flux (ou Thomson ou Kelvin):

La formule de Maxwell-Flux stipule que la divergence du champ magnétique est nulle.

$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$

En effet les lignes de champ magnétique ne divergent pas, elles sortent d'un pôle positif ou négatif pour aller dans l'autre. Cela signifie qu'il n'existe pas de monopole magnétique nord ou sud. En effet, tous les aimants possèdent deux pôles.

## 4. Equation de MAXWELL –AMPÈRE:

La formule de Maxwell-Ampère stipule que le rotationnel du champ magnétique dépend d'une variation du champ électrique au cours du temps et dépend également d'un courant électrique.

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \left( \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Où:

$B$ : est le champ magnétique en Tesla.

$\mu_0$ : la perméabilité magnétique du vide en T/A.m.

$J$ : est le vecteur densité de courant

$\varepsilon_0$  est la permittivité diélectrique du vide en C/V/m.

$E$ : est le champ électrique.

## Exercice d'application

### Exercice V.1:

Déterminer le champ magnétique  $B$  créé en tout point de l'espace où il est défini par un fil cylindrique rectiligne d'axe  $Oz$ , de section circulaire de rayon  $R$ , parcouru par un courant volumique d'intensité totale  $I$  et de densité de la forme  $\vec{j} = J_0 \frac{r}{R} \vec{u}_z$ , où  $r$  désigne la distance à l'axe  $Oz$ .

### Exercice V.2:

Soit un cylindre métallique de conductivité  $\gamma$ , de rayon  $a$  et de longueur  $L$ , est placé à l'intérieur d'un long solénoïde de même axe que le cylindre, de rayon  $R$ , ayant  $n$  spires par mètre, parcouru par un courant de basse fréquence d'intensité  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ .

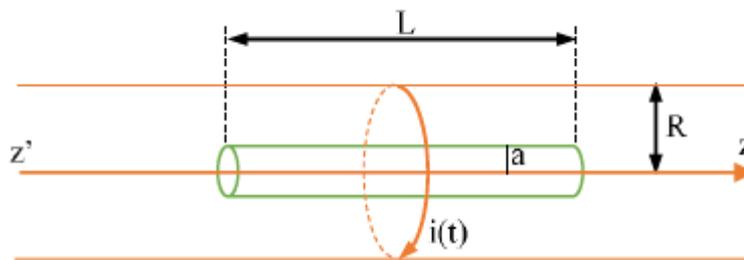


Figure. V.14. un cylindre métallique.

- 1- Rappeler l'expression du champ magnétique créé par ce solénoïde en tout point de l'espace.
- 2- En déduire que nécessairement, un champ électrique  $\vec{E}$  est créée. Le déterminer à l'intérieur du solénoïde.
- 3- En déduire la densité de courant volumique  $\vec{j}$  qui apparait dans le cylindre conducteur.

# Solution des exercices

## Exercice V.1:

La distribution de courant a une forme cylindrique, on travaille alors en coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ).

$\vec{B}$  est dirigé selon le vecteur unitaire  $\vec{u}_\theta$  de la base cylindrique. Donc la distribution est invariante dans toute rotation autour de son axe, ainsi que dans toute translation selon axe. On en déduit  $B = (r)$ .

Dans un système de coordonnées cylindriques, on a:

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$$

On connaît le champ magnétique sur l'axe, on commence donc à étudier l'équation de Maxwell dans le cylindre.

$$\text{Pour } r \leq R, \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \text{ d'où } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) \vec{u}_z = \mu_0 J_0 \frac{r}{R} \vec{u}_z$$

D'où:

$$\frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) = \mu_0 J_0 \frac{r^2}{R}$$

Donc:

$$rB(r) = \mu_0 J_0 \frac{r^3}{3R} + K$$

Où:

$K$  est la constante d'intégration.

Le champ magnétique est nul sur l'axe  $B(r=0)$  donne  $K=0$ .

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$B(r \leq R) = \mu_0 J_0 \frac{r^3}{3R}$$

Pour  $r \geq R, \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0}$ , puisqu'il n'y a pas de courant à l'extérieur du cylindre d'où :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) \vec{u}_z = \vec{0}$$

Donc  $\frac{\partial}{\partial r} (rB(r)) = 0$  donne  $rB(r) = K'$ , où  $K'$  est une constante d'intégration.

Le champ magnétique est continu à la surface du cylindre puisque l'on est en présence d'une distribution de courant volumique.

d'où

$$B(r=R) = \mu_0 J_0 \frac{R}{3}$$

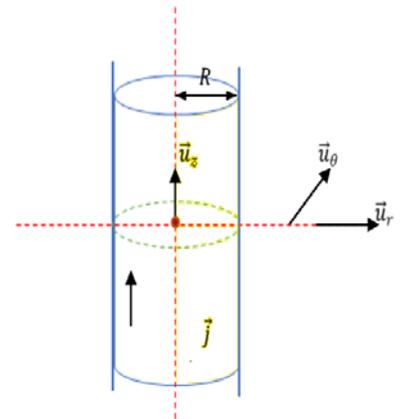


Figure.V.15. Fil cylindrique.

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$B(r \geq R) = \mu_0 J_0 \frac{r^2}{3R}$$

Enfin, on détermine  $J_0$  en fonction de  $I$ . Le courant dans le cylindre est:

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

Où  $S$  est la section circulaire de rayon  $R$  du cylindre.

Soit:

$$\vec{dS} = r dr d\theta \vec{u}_z$$

On en déduit :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \int_0^R J_0 \frac{r}{R} r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{3} \pi R^2 J_0$$

Soit

$$J_0 = \frac{3I}{\pi R}$$

d'où

$$\vec{j} = \frac{3I}{\pi R^3} r \vec{u}_z$$

On obtient alors:

$$B(r \leq R) = \mu_0 \frac{I r^2}{2\pi R^3}$$

$$B(r \geq R) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

### Exercice V.2:

1- Le champ magnétique créé par le solénoïde infini est :

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z & \text{à l'intérieur du solénoïde} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur du solénoïde} \end{cases}$$

Où  $\vec{u}_z$  est le vecteur directeur de l'axe du solénoïde

2- Le champ magnétique est dépendant du temps, donc  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  est non nul.

L'équation de Maxwell-Faraday permet d'en déduire qu'il existe un champ électrique tel que :

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Afin de déterminer le champ électrique, on étudie les symétries et invariances du dispositif. Le solénoïde possède une symétrie cylindrique. On utilise les coordonnées cylindriques et la base associé.

$\vec{u}_z$  est le vecteur directeur de l'axe du solénoïde. Donc le champ électrique est normal à ce plan:

$$\vec{E}(t) = E(t)\vec{u}_\theta$$

Le champ électrique sur l'axe ( $Oz$ ) ne peut être orthogonal à tous ces points : il est donc nul en tout point M de l'axe du solénoïde :

$$\vec{E}(r = 0, t) = \vec{0}.$$

On a :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE(r))\vec{u}_z = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

On trouve alors :

$$rE(r) = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r^2}{1} + k$$

où  $k$  est une constante d'intégration.

$E(r = 0) = 0$  donne donc :  $k = 0$ .

Ceci conduit à :

$$\vec{E}(r, t) = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \vec{u}_\theta$$

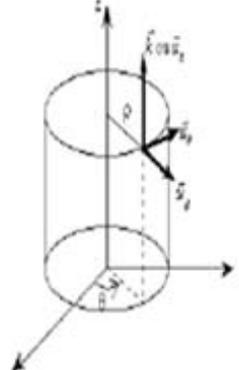
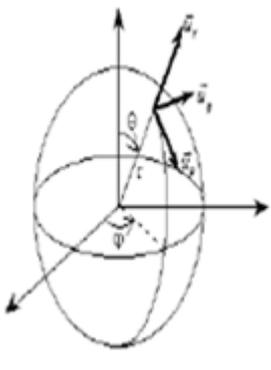
**3-** D'après la loi d'Ohm, on a :

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$

d'où :

$$\vec{J}(r, t) = \gamma \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t) \frac{r}{2} \vec{u}_\theta$$

# ANNEXE A

	Cartésienne	Cylindriques	Sphériques
			
	$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$	$\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi \text{ et } -\infty \leq z \leq +\infty$	$r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi \text{ et } 0 \leq \varphi \leq \pi$
	$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$	$d\vec{l} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{k}$	$d\vec{l} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$
	$dV = dx dy dz$	$dV = \rho d\rho d\theta dz$	$dV = r \sin\theta dr d\theta d\varphi$
<b>grad</b>	$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$	$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$	$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$
<b>div</b>	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \left\{ \frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right\}$
<b>rot</b>	$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial z} \right) \vec{u}_\rho + \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{k}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left( \frac{\partial(r \sin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r \sin\theta} \left( \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r \sin\theta A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{k}$

## ANNEXE B

### Les équations de Maxwell relatives au champ électromagnétique

Formulation Locale	Les relations intégrales
$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ <p><math>\epsilon_0</math>, est la permittivité absolue du vide</p> <p style="text-align: center;">équation de <b>Maxwell-GAUSS</b></p>	$\oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \sum \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ <p style="text-align: center;">Théorème de <b>GAUSS</b></p>
$\operatorname{div} \vec{B} = 0$ <p style="text-align: center;"><math>\vec{B}</math> est un champ rotationnel</p>	$\oiint \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0$ <p style="text-align: center;"><math>\vec{B}</math> est un flux conservatif</p>
$\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ <p style="text-align: center;">équation de <b>MAXWELL -FARADAY</b></p>	$\oint_{M \in \Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{OM} = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt}$ <p style="text-align: center;">S s'appuie sur <math>\Gamma</math></p> <p style="text-align: center;">Relation de <b>FARADAY</b></p>
$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ <p><math>\mu_0</math> est la perméabilité absolue du vide.</p> <p style="text-align: center;">équation de <b>MAXWELL -AMPÈRE</b></p>	$\oint_{M \in \Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \mu_0 \iint \vec{J}_{tot} \cdot \vec{dS} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt}$ <p style="text-align: center;">S s'appuie sur <math>\Gamma</math></p> <p style="text-align: center;">Forme généralisée du Théorème d'<b>AMPÈRE</b></p>

# BIBLIOGRAPHIE

1. Y. GRANJON ; Exercices et Problèmes d'Electricité ; Dunod, Paris, (2003).
- 2 José-Philippe Peres ; Robert Carles et Robert Fleckinger : "*Electromagnétisme : fondements et applications*". Dunod, 2002
3. J-P. PEREZ, R. CARLES, R. FLECKINGER. Electromagnétisme - Fondements et applications Ed. Masson Paris (2001).
4. R. A. SERWAY, J. W. JEWETT, JR., A. DUCHARME, M. PÉRIARD, Physique - Tome 2 Electricité et magnétisme, Ed. De Boeck, (2013)
5. Electricité Notion de Base, Electrostatique, Electrocinétique, Electromagnétisme. Dr. Samir Khene