Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques d'Oran

Mécanique du point matériel

Cours et exercices résolus

Dr. Fatiha SAIDI

Novembre 2016

AVANT–PROPOS

Ce recueil de cours et exercices résolus de mécanique du point matériel est un support pédagogique destiné aux étudiants de la première année de l'Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques d'Oran. Ce manuel couvre les quartes chapitres du polycopié de cours de la mécanique du point matériel :

- Outil mathématique,
- Cinématique du point matériel,
- Dynamique du point matériel,
- Travail et énergie.

L'ensemble cours et exercices résolus devrait permettre aux étudiants :

- de consolider leurs connaissances,
- un entrainement efficace afin de s'assurer que le cours est bien assimillé,
- d'acquérir les outils et techniques nécessaires à leur formation,
- d'initier leurs cultures scientifiques en mécanique du point matériel.

Chaque chapitre s'ouvre par la précision des objectifs visés et des prérequis nécessaires. Pour ce mettre en situation d'épreuves, de nombreux exercices et problèmes supplémentaires sont proposés à la fin de chaque chapitre. Je dois souligner que ce document ne remplace en aucun cas le TD en présentiel.

Comme pour tous les exercices auto-correctifs, les solutions profitent plus aux étudiants qui fournissent l'effort nécessaire pour réfléchir et essayer de résoudre les exercices proposés.

Je souhaite que ce recueil de cours et d'exercices résolus de mécanique du point matériel puisse aider de manière efficace la majorité d'étudiants.

F.SAIDI

Table des matières

Chapitre I : Rappels Mathématiques

Chapitre II : Cinématique du point matériel

Chapitre III : Dynamique du point matériel

Chapitre Iv : Travail et Energie

CHAPITRE I

Rappels Mathématiques

I.1 ANALYSE DIMENTIONNELLE

I.1.1 Unités et dimensions

Les Sciences Physiques font appel à des grandeurs qui peuvent être mesurées ou repérées. A ces grandeurs physiques peut être associée une valeur numérique qui en traduit l'intensité. Mais il est une caractéristique essentielle d'une grandeur physique : son unité, qui en précise la nature.

I.1.2 Le système international d'unités (système SI)

Toutes les unités n'ont pas le même statut. Certaines ont été choisies comme fondamentales. Par conséquent, toutes les autres unités peuvent s'exprimer comme une combinaison des unités fondamentales (sous la forme d'une multiplication d'unités).
Le système fondamental contient 7 unités de base :

Nom	Symbole	Unité
Mètre	m	Longueur
Kilogramme	Kg	masse
Seconde	s	temps
Ampère	A	Intensité de courant électrique
Kelvin	K	Température
Candela	cd	Intensité lumineuse
Mole	mol	Quantité de matière

Tableau I.1 : Le système international d'unités (système SI)

I.1.3 Notion de dimension

Chacune des unités est rattachée à une grandeur physique mesurable qui définit sa nature. On l'appelle dimension. Pour autant, il ne faut pas confondre unité et dimension. Par exemple, le mètre est rattaché à la dimension longueur, tout comme le yard ou le mile.
La dimension d'une grandeur **G** se note **[G].**

Exemple :

i : intensité électrique, s'exprime en ampères. On écrit **[i] = I**. Le symbole I désigne la dimension intensité électrique.

I.1.4 Équations aux dimensions

Les équations aux dimensions sont des écritures conventionnelles qui résument simplement la définition des grandeurs dérivées des unités fondamentales : Longueur, Masse et Temps : symbolisées par les majuscules L, M et T.

Si une quantité physique A est mesurée en $(Kg)^{\alpha}\,(m)^{\beta}\,(s)^{\gamma}$, sa dimension est :

$[A]= M^{\alpha}\, L^{\beta}\, T^{\gamma}$ cette équation constitue l'équation au dimension de la grandeur A.

Exemple :

Une vitesse qui est le quotient d'une longueur L par un temps T est représentée par :

$$V= L/T = LT^{-1}$$

Remarque :

Une quantité physique est sans dimension si $\alpha=\beta=\gamma=0$

Grandeur	Formules de base	Equation aux dimensions
Surface	$S=Ll$	L^2
Vitesse	$v=l/t$	LT^{-1}
Accélération	$\Gamma=v/t$	LT^{-2}
force	$F=m\gamma$	MLT^{-2}
travail	$W=FL$	ML^2T^{-2}
Quantité de mouvement	$P=mv$	MLT^{-1}

Tableau I.2 : Equations aux dimensions de quelques grandeurs mécaniques

I.1.5 Homogénéité d'un calcul

Les équations aux dimensions servent à vérifier l'homogénéité des formules :

Il faut en effet se rappeler le principe suivant :

Tout résultat non homogène est nécessairement faux

Exemples :

- ✓ **Utilisation des équations aux dimensions ''analyse dimensionnelle'' pour vérifier**

l'homogénéité d'une formule :

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \quad \textbf{ou} \quad \boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

Ces deux expressions donnent la période d'oscillation d'un pendule simple de longueur l et g est l'accélération de la pesanteur. Le premier membre a la dimension d'un temps ; il faut que le deuxième membre ait la même dimension, sinon la formule est fausse.

1er cas : $T = 2\pi l^{1/2} g^{-1/2}$ $\qquad$ $[T] = L^{1/2}(LT^{-2})^{-1/2} = T$

1er cas : $T = 2\pi l^{1/2} g^{1/2}$ $\qquad$ $[T] = L^{-1/2}(LT^{-2})^{1/2} = T^{-1}$ faux

Règles d'homogénéités

- On ne peut additionner que des termes homogènes.
- L'argument d'une fonction mathématique transcendante (exp, ln, cos, sin, tan…) est nécessairement sans dimension.
- On doit éviter de remplacer le symbole d'une grandeur par sa valeur numérique.
- Un vecteur ne peut être ajoute qu'a un vecteur et non à un scalaire.

✓ **<u>Utilisation des équations aux dimensions ''analyse dimensionnelle'' pour prévoir des formules physiques</u> :**

La méthode consiste à identifier les quantités physiques qui peuvent entrer dans le problème posé, et à construire avec ces quantités une expression ayant la dimension recherchée.

Exemple: vitesse d'arrivée au sol d'un objet lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h.

Les quantités physiques qui peuvent « à priori » affecter la valeur de la vitesse v sont ; la hauteur de chute h, la masse de l'objet m et l'accélération de la pesanteur g. Essayons de construire une formule de vitesse avec ces quantités : $V = kh^{\alpha}g^{\beta}m^{\gamma}$

La constante k est sans dimension.

Ecrivons l'équation aux dimensions, c'est-à-dire utilisons l'analyse dimensionnelle, pour trouver les valeurs de α, β et γ. On sait que $[v] = LT^{-1}$, et utilisons la formule P=mg pour trouver la dimension de g (accélération de la pesanteur) ; $[g]=LT^{-2}$. Alors :

$$\mathbf{[v]=LT^{-1}=L^{\alpha}L^{\beta}L^{-2\beta}M^{\gamma}=L^{\alpha+\beta}T^{-2\beta}M^{\gamma}}$$

Par identification des deux termes on a : α + β=1, 2β=1 et γ=0. C'est-à-dire α =β=1/2 et γ=0. La vitesse v est donc de la forme : $v = k\sqrt{gh}$. L'analyse dimensionnelle ne permet pas de prédire la valeur de la constante k, seule la résolution complète du problème donnera la valeur de cette constante : $k = \sqrt{2}$.

I.2 CALCUL D'ERREUR ET EVALUATION D'INCERTITUDE

Nous voulons à travers cette section montrer la différence entre l'erreur d'une mesure et la notion d'incertitudes lors de la présentation d'un résultat.

I.2.1 Erreur

Toute mesure est entachée d'une erreur. On définit l'erreur comme étant l'écart entre la valeur obtenue par la mesure G et la valeur vraie x_0. Cette dernière est inconnue (puisqu'on la cherche) et elle ne peut jamais être une valeur exacte.

$$\delta x = G - x_0$$

On distingue deux catégories d'erreurs :

I.2.1.1 Erreurs aléatoires

En général, nous associons au terme aléatoire la notion de hasard ou d'imprévu. Si votre poids est 79.0 kg et si vous vous faites mesurer plusieurs fois avec la même balance, vous allez obtenir des valeurs rapprochées : 78.8, 79.4, 79, 79.1 kg.

Les erreurs aléatoires sont celles qui peuvent être du au hasard soit en plus soit en moins par rapport à la valeur exacte ; il est impossible d'en prévoir le sens. Elles proviennent de l'instabilité des appareils de mesure, de fluctuations des conditions ambiantes, d'erreurs de lectures..etc.

I.2.1.2 Erreurs systématiques

De nombreuses grandeurs mesurées dépendent légèrement de facteurs physiques qui sont liés à l'environnement, et qui sont par conséquent susceptibles d'évoluer au cours du temps de manière incontrôlée. Il s'agit là d'une erreur systématique qui introduit un décalage constant entre la valeur vraie et la valeur mesurée. Les erreurs systématiques regroupent les problèmes sur lesquels vous n'avez pas de contrôle. Elles sont causées par des appareils ou des méthodes fournissant des mesures erronées toujours plus hautes ou toujours plus basses que la valeur exacte. Par exemple, un instrument de mesure mal étalonné peut introduire systématiquement une erreur constante dans un seul sens. Plus généralement, elles ont des origines diverses :

a) Les Erreurs d'étalonnage de l'instrument.

b) Les erreurs personnelles (Oubli d'un paramètre par exemple.).

c) Les erreurs de méthode.

Les erreurs systématiques peuvent être éliminées à partir du moment où on les a décelées. On cite que l'étude statistique ne les évaluera pas ni elle pourra les délimiter.

Exemple d'erreurs

☒ **Les erreurs instrumentales** : Ce sont celles qu'entraîne l'emploi d'instruments imparfaits.

L'erreur est donnée par le fournisseur. Cette erreur peut provenir d'une erreur systématique de calibrage (d'un appareil à l'autre, d'un calibre à l'autre, effets de non-linéarité...) comme elle peut provenir d'une erreur aléatoire due au bruit. Nous considérons que l'erreur instrumentale (la classe par exemple) donnée par le fabricant est de type aléatoire car elle est déterminée d'une manière statistique.

☒ **Les erreurs de mesure :** Ces erreurs sont surtout liées à l'imperfection des sens de l'expérimentateur ou les conditions de l'expérience. Elles peuvent être aussi d'origine systématique et ou aléatoire.

☒ **Erreur de lecture :** Les scientifiques, d'un commun accord, ont établi par convention que l'erreur maximale due à un instrument de mesure est égale à la moitié de la plus petite graduation de l'instrument. Cette erreur est de type aléatoire. Il utile de préciser que, dans le cas des appareils numériques, l'erreur est de l'ordre de grandeur du dernier chiffre affiché.

I.2.2 Incertitude

L'incertitude absolue Δx sur une mesure est l'écart (l'erreur) maximum estimé entre la valeur mesurée et la valeur exacte.

Ainsi, si l'on désigne par x la valeur la plus probable de la grandeur mesurée G, par x_0 la vraie valeur (qui nous est inconnue) et par Δx l'incertitude absolue, on a :

$$x - \Delta x \leq x_0 \leq x + \Delta x$$

Sous une forme condensée, le résultat de la mesure s'écrit :

$$G = x \pm \Delta x$$

La détermination de l'incertitude n'est pas simple à priori. On rencontre en pratique deux choix :

➢ **Méthode Moderne ou incertitude de type A notée ($\Delta_A x$) :** Elle est évalué statistiquement. On cherche dans ce cas à caractériser la distribution de probabilité des valeurs de x, en évaluant le mieux possible la valeur moyenne et l'écart-type de cette distribution. Ceci se fait par l'analyse statistique d'un ensemble de mesures de x.

En l'absence d'erreur systématique, l'estimation de la valeur moyenne est la meilleure estimation de la valeur vraie x_0 tandis que l'incertitude Δx, directement reliée à l'estimation de l'écart-type de la distribution, définit un intervalle dans lequel la valeur vraie x_0 se trouve avec une probabilité connue.

- **Méthode à l'ancienne ou incertitude de type B notée ($\Delta_B x$) :** On cherche un majorant de l'erreur δx telle que :

$$\Delta x \geq |\delta x|$$

Ce majorant est estimé assez grossièrement à partir de l'appareil de mesure et des conditions expérimentales. Nous prenons comme incertitude finale la somme de toutes les contributions.

$$\Delta x = \Delta_{instrumentale} + \Delta_{lecture} + \Delta_{mesure}$$

Présentation d'un résultat expérimental

Un résultat expérimental peut être représenté comme suit :

$$La\ valeur\ mesurée\ de\ x = \bar{x} \pm \Delta x$$

$$ou\ x = \bar{x} \quad \text{à} \quad \left(\frac{\Delta x}{|x|} \times 100\right) \%\ prés$$

Propagation des Erreurs

On connaît les grandeurs expérimentales x, y, ... avec les incertitudes $\Delta x, \Delta y$ ... Quelle est l'incertitude Δq sur la grandeur $q = f(x, y, \dots)$?. Pour le faire suivant la méthode classique nous avons deux méthodes à savoir les dérivées partielles ou les dérivées logarithmiques.

Dérivée logarithmique : L'utilisation de la dérivée logarithmique est introduite pour faciliter les calculs lorsqu'il s'agit d'une fonction compliquée dépendant de plusieurs variables. Cette procédure est basée sur le fait que $\log(a * b) = \log(a) + \log(b)$et sur $d(\log q) = \frac{dq}{q}$.

Appliqué au calcul d'incertitude, on obtient par exemple :

$$\Delta(\log(xy) = \Delta \log x + \Delta \log y = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

Les dérivées partielles : En mathématiques, la dérivée partielle d'une fonction est la dérivée par rapport à l'une de ses variables, les autres étant gardées constantes. La dérivée partielle par rapport à la variable x est notée $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou $\partial_x f$. Elles sont très utiles pour le calcul d'incertitude car ils peuvent être appliquées à n'importe quelle forme de fonctions.

$$q = x + y \ \Rightarrow \ \Delta q = \Delta x + \Delta y$$

$$q = x - y \ \Rightarrow \ \Delta q = \Delta x + \Delta y$$

$$q = x * y \Rightarrow \frac{\Delta q}{|q|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|}$$

$$q = f(x, y) \Rightarrow \Delta q = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y$$

I.3 ANALYSE VECTORIELLE

Plusieurs quantités physiques sont déterminées par leur grandeur, exprimée dans une unité convenable. Ces quantités sont appelées scalaires ; température, temps, masse et charge.

D'autres grandeurs physiques, comme le déplacement $\overrightarrow{dl}$ et la force $\vec{F}$ exigent pour leur caractérisation à la fois une direction, un sens et un module. De telles quantités sont appelées vecteurs.

Lois de l'algèbre vectorielle

Si $\vec{A}$, $\vec{B}$ *et* $\overrightarrow{C}$ sont des vecteurs et p et q sont des scalaires, on a alors :

- $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ Loi de commutativité
- $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$ Loi d'associativité pour : +
- $p(q\overrightarrow{A}) = (pq)\vec{A} = q(p\overrightarrow{A})$ Loi d'associativité pour : x
- $(p + q)\vec{A} = p\vec{A} + q\vec{A}$ Loi de distributivité
- $p(\vec{A} + \vec{B}) = p\vec{A} + p\vec{B}$ Loi de distributivité

Vecteurs unitaires

Les vecteurs dont le module (la longueur) est l'unité de longueur sont appelés vecteurs unitaires. Si $\vec{A}$

est un vecteur de module A, alors $\overrightarrow{u} = \frac{\vec{A}}{A}$ est un vecteur unitaire de même direction et de même sens que $\overrightarrow{A}$, avec $\vec{A} = A\,\vec{u}$.

Vecteurs unitaires orthogonaux :

Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}$, et (ou $\vec{\imath}\,, \vec{\jmath}\ et\ \vec{k}$) sont dites orthogonaux s'ils sont perpendiculaires deux à deux, ils sont dirigés positivement le long des axes ox, oy et oz d'un système d'axes orthogonaux avec o l'origine du système. $\vec{\imath}\,, \vec{\jmath}\ et\ \vec{k}$ forment une base cartésienne. Cette relation d'orthogonalisation s'écrit :

$$\vec{u}_i . \vec{u}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

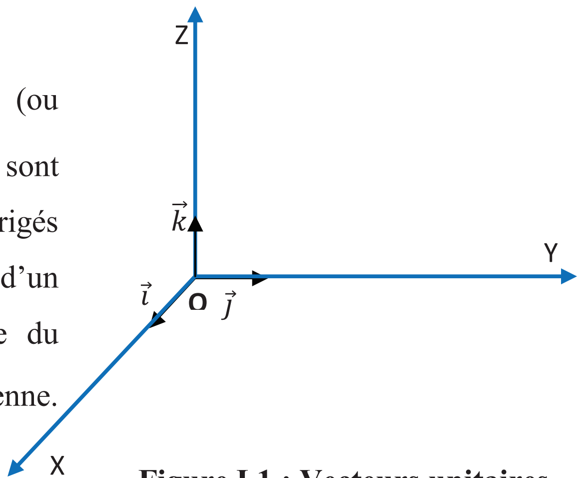


Figure I.1 : Vecteurs unitaires orthogonaux

où δ_{ij} est appelé le symbole de Kronecker.

I.3.1 Composantes d'un vecteur

Dans plusieurs situations physiques il est important d'utiliser un repère comme système de référence. Le repère *R(O; X,Y,Z)* est constitué d'un point d'origine *O*, et d'un système de trois axes (OX), (OY) et (OZ) définissant les trois dimensions de l'espace. On associe une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, à ce repère. C'est une base constituée de vecteurs qui sont orthogonaux entre eux et unitaires.

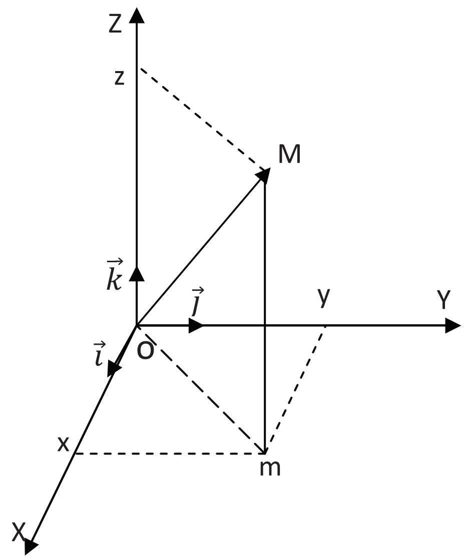


Figure I.2 : Composantes d'un vecteur

$\vec{\imath}$:Vecteur unitaire de l'axe (OX)

$\vec{\jmath}$: Vecteur unitaire de l'axe (OY)

$\vec{k}$: Vecteur unitaire de l'axe (OY)

Les composantes, *(x,y,z)*, d'un vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$ sont les projections orthogonales du vecteur position sur les trois axes du repère. Dans ce cas le vecteur position s'écrit :

$$\vec{V} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

I.3.2 Produit scalaire

Soit deux vecteurs $\vec{V}_1 = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$ et $\vec{V}_2 = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$ faisant un angle θ entre eux ; $0 \le \theta \le \pi$.

Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est le scalaire défini par :

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = |\vec{V}_1|\,|\vec{V}_2| \cos\theta$$

Le produit scalaire peut être aussi exprimé en termes des composantes des vecteurs :

$$\boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

Propriétés :

- En comparant les deux expressions du produit scalaire, on peut obtenir une expression de l'angle θ en fonction des coordonnées des deux vecteurs :

$$\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{|\vec{V}_1||\vec{V}_2|}$$

- Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux $\theta = \frac{\pi}{2}$ est nul.

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_1 \perp \vec{V}_2$$

- Le produit scalaire permet de définir le module d'un vecteur : $\vec{V}$

$$|\vec{V}| = \sqrt{\vec{V}.\vec{V}} = \sqrt{\vec{V}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

I.3.3 Produit vectoriel

Soit deux vecteurs $\vec{V}_1 = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$ et $\vec{V}_2 = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$ faisant un angle θ entre eux. Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V}_2$ est un vecteur noté $\vec{V} = \vec{V}_1 \Lambda \vec{V}_2$ et caractérisé par :

- Module: $|\vec{V}_1 \Lambda \vec{V}_2| = |\vec{V}_1||\vec{V}_2| \sin\theta$
- Direction : la direction du vecteur $\vec{V}_1 \Lambda \vec{V}_2$ perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V}_2$.
- Sens : Le sens du vecteur $\vec{V}_1 \Lambda \vec{V}_2$ est tel que le trièdre $((\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V})$est direct.

En termes de composantes des vecteurs, le produit vectoriel est exprimé de la façon suivante :

$$\boxed{\vec{V}_1 \Lambda \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ x_2z_1 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}}$$

Propriétés du produit vectoriel :

- Le produit vectoriel de deux vecteurs est nul si et seulement si les deux vecteurs ont la même direction (θ= 0) ou l'un des vecteurs est nul.
- Le produit vectoriel est anticommutatif (antisymétrique) : $\vec{V}_1 \Lambda \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \Lambda \vec{V}_1$
- <u>Interprétation géométrique du produit vectoriel :</u>

Le module, $|\vec{V}_1 \Lambda \vec{V}_2|$ du produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V}_1$ *et* $\vec{V}_2$ représente la surface du parallélogramme formé par $\vec{V}_1$ *et* $\vec{V}_2$.

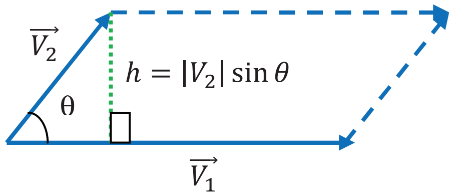


Figure I.3 : produit vectoriel

I.3.4 Moment d'un vecteur par rapport à un point

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur et O un point quelconque. On appelle moment de $\overrightarrow{AB}$ par rapport à O, le vecteur $\vec{\mathcal{M}}_O\,(\overrightarrow{AB})$ défini par :

$$\vec{\mathcal{M}}_O\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Remarque : moment par rapport à une droite :

Pour calculer le moment par rapport à une droite qui est un scalaire il faut le calculer par rapport à un point sur cette droite puis le projeter sur cette dernière.

Dérivées de vecteurs

Soit $\vec{A}(u) = \vec{A}_1\,(u)\vec{\imath} + \vec{A}_2(u)\vec{\jmath} + \vec{A}_3(u)\vec{k}$ une fonction vectorielle de u (champ de vecteurs), alors la dérivée de $\vec{A}(u)$ est défini par:

$$\frac{\overrightarrow{dA}}{du} = \frac{\overrightarrow{dA_1}}{du}\vec{\imath} + \frac{\overrightarrow{dA_2}}{du}\vec{\jmath} + \frac{\overrightarrow{dA_3}}{du}\vec{k}$$

Ainsi, si $\varphi(u)$ est une fonction scalaire et si $\vec{A}(u) et\ \vec{B}(u)$ sont des champs de vecteurs, on a alors :

$$\frac{d}{du}\left(\varphi\vec{A}\right) = \varphi\frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\varphi}{du}\vec{A}$$

$$\frac{d}{du}\left(\vec{A}\,.\vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{du}.\vec{B} + \vec{A}.\frac{d\vec{B}}{du}$$

$$\frac{d}{du}\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{du} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \frac{d\vec{B}}{du}$$

Intégrales de vecteurs

Soit le vecteur $\vec{A}(u) = \vec{A}_1\,(u)\vec{\imath} + \vec{A}_2(u)\vec{\jmath} + \vec{A}_3(u)\vec{k}$ qui est une fonction vectorielle de u. On défini une intégrale de $\vec{A}(u)$ par :

$$\int \vec{A}\,(u)du = \vec{\imath}\int \vec{A}_1\,(u)du + \vec{\jmath}\int \vec{A}_2\,(u)du + \vec{k}\int \vec{A}_3\,(u)du$$

I.4 DERIVATION ET INTEGRATION

I.4.1 La dérivation

I.4.1.1 La fonction dérivée

On définit la fonction dérivée de *f(x),* notée *f'(x)*. **En physique on la note aussi *df/dx.***

Cette fonction permet de traduire l'évolution ***f*** en fonction des valeurs de *x*.

A titre d'exemple, en considérant un problème sur un seul axe, l'axe des *x* :

- L'accélération se définit par $a = \frac{dv}{dt}$ c'est la manière dont la vitesse évolue en fonction du temps

- De même, la vitesse se définie par $= \frac{dx}{dt}$, c'est la manière dont la position évolue en fonction du temps

I.4.1.2 Détermination des fonctions dérivée

Pour déterminer la fonction dérivée d'une autre fonction, on se rapporte à un certain nombre de dérivées usuelles et de règles de calculs. Celles-ci sont à connaitre par cœur :

fonction	**Fonction dérivée**
K avec $k \in \Re$	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $avec\ x > 0$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Tableau I.3 : Quelques dérivées usuelles

Il arrive aussi que nous rencontrions des fonctions composées d'autres fonctions, c'est-à-dire des fonctions aux quelles sont appliqués d'autres fonctions, leurs dérivées sont aussi à connaitre : On note u la fonction à laquelle est appliquée une autre fonction et u' sa fonction dérivée de u :

Fonction composée	Dérivée de la composée
u^2	$2\,u'\,u$
u^n	$n\,u'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\cos\ (u)$	$-u'\sin(u)$
$\sin\ (u)$	$u'\cos(u)$
$\tan(u)$	$\frac{u'}{\cos(x)^2}$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

Tableau I.4 : Fonctions composées

Enfin, des règles de calculs de bases sont à connaitre pour le calcul de dérivée. Considérons deux fonctions notées u et v. On note u' et v' leurs dérivées respectives.

Opération sur les fonctions	Opération sur les dérivées
$k\,u$	$k\,u'$
$u+v$	$u'+v'$
$u\,v$	$u'v+v'u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$

Tableau I.5 : Opération sur les dérivées composées

Remarques sur la dérivation d'une fonction composée :

- Dans le cours, lorsqu'une fonction f qu'on dérive dépend d'une variable u qui elle-même dépend de x, on emploie souvent la notation suivante : $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$

I.4.2 L'intégration

I.4.2.1 La primitive d'une fonction

Soit une fonction *f* telle que $(x) = F'(x)$, on dit que *F* est une primitive de *f*. Autrement dit, c'est en quelque sorte « l'inverse de la dérivation ».

Note :

Comme la dérivée d'une constante est nulle, chaque fonction présente une infinité de fonctions primitives du fait de l'existence d'une constante d'intégration. L'ensemble des fonctions primitives d'une fonction *f* sont notées $F + k$, avec $k \in \Re$.

I.4.2.2 Détermination de la primitive d'une fonction

Pour déterminer la fonction primitive d'une autre fonction, on se rapporte à un certain nombre de primitives usuelles et de règles de calculs :

Fonction	**Fonction primitive**
0	$C \ avec \ C \in \mathbb{R}$
$k \ avec \ k \in \mathbb{R}$	$kx + C \quad avec \ k, C \in \mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C \quad avec \ C \in \mathbb{R}$
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + C \quad avec \ C \in \mathbb{R}$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad avec \ C \in \mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C \quad avec \ C \in \mathbb{R} \ et \ x > 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C \quad avec \ C \in \mathbb{R} \ si \ x > 0$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + C \quad avec \ C \in \mathbb{R} \ et \ x \neq 0$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C \quad avec \ C \in \mathbb{R} \ et \ x \neq 0$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
e^x	$e^x + C$

Tableau I.6 : quelques primitives usuelles

Il arrive aussi que nous rencontrions des fonctions composées d'autres fonctions, c'est-à-dire des fonctions auxquelles sont appliqués d'autres fonctions, ces fonctions composées correspondent à des primitives particulières, les voici : On note u la fonction à laquelle est appliquée une autre fonction et u' la fonction dérivée de u :

Fonction composée	**Primitive de la composée**
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2$
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u}$ $avec\ u \neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{(n-1)}}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$ln(u)$ si $u > 0$
$u'e^u$	e^u
$u'sin(u)$	$-cos(u)$
$u'cos(u)$	$sin(u)$

Tableau I.7 : Fonction composée

I.4.2.3 Les intégrales

Reprenons l'exemple précédent, en notant cette fois-ci :

$$F(x) = x^2 + 100$$

On note $\int_a^a f(x)dx$ la somme de toutes les valeurs prises par f entre les abscisses a et b. Comme il y a une infinité de point entre a et b, on considère que la primitive correspond à la somme d'un nombre infini de termes.

➡ **Il s'agit de l'aire sous la courbe représentant la fonction f entre a et b**.

Par exemple ici nous avons coloriés la grandeur $\int_a^a \boldsymbol{f(x)dx}$:

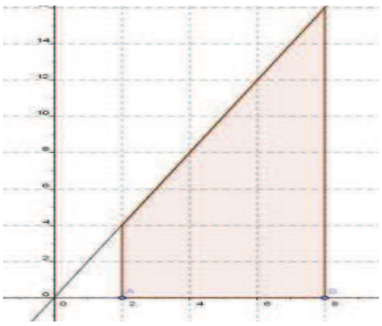
Comment calculer une intégrale ?

Le calcul de l'intégrale nécessite la connaissance d'une primitive de la fonction f.

On a : $\int_a^b \boldsymbol{f(x)\ dx = F(b) - F(a)}$

Aussi, on note souvent la grandeur ***F(b)-F(a)*** par l'écriture $[\boldsymbol{F(x)}]_a^b$

Ainsi, dans l'exemple choisi on a :



$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = b^{2+}100 - a^2 - 100 = b^{2-}a^2$$

On remarque que la constante d'intégration s'annule dans le calcul de l'intégrale, cette dernière n'y interfère donc pas.

- **Opération entre les intégrales**

Il y a un certain nombre d'opération mettant en jeu les intégrales à connaitre :

- $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ (relation de Chasles)
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b [kf(x) + k'g(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx + k'\int_a^b g(x)dx \quad avec\ k\ et\ k' \in \mathbb{R}$
- $Si\ pour\ tout\ x\ , f(x) < g(x)\ alors\ \int_a^b f(x) < \int_a^b g(x)$

Exercices d'application

<u>PARTIE A:</u> Analyse dimensionnelle

Exercice I.A.1:

Établir les équations aux dimensions en fonction des grandeurs masse, longueur, temps, etc. :

1) De la constante de Planck h sachant que l'énergie transportée par un photon est donnée par la relation :

$$E = h.v$$

où v représente la fréquence du rayonnement correspondant.

2) De la constante de Boltzmann k qui apparait dans l'expression de l'énergie cinétique d'une molécule d'un gaz monoatomique a la température T ; à savoir :

$$E_c = \frac{3}{2}k.T$$

3) De la permittivité du vide ε_0 qui apparait dans l'expression de la force d'interaction électrique (loi de Coulomb) :

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{qq'}{r^2}$$

4) De la perméabilité magnétique du vide μ_0 qui, apparaît dans la loi de Laplace qui permet de prévoir la force d'interaction entre deux fils conducteurs parallèles de longueur L, placés dans le vide, séparés par une distance d et parcourus par des courants I et I' :

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{I.I'}{d}.L$$

Exercice I.A.2:

1) Déterminez la dimension de l'énergie, de la puissance, du potentiel U et de la résistance R.

2) Déterminez la dimension de la capacité C d'un condensateur.

3) Vérifiez l'homogénéité de la relation $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ qui représente la fréquence f d'oscillation d'un système solide-ressort. Ou m est la masse du solide, k la constante de raideur. La force de rappel $\vec{F}$ est liée à l'allongement $\overrightarrow{\Delta l}$ par la relation : $\vec{F} = -k\overrightarrow{\Delta l}$.

4) En utilisant l'expression de la quantité de travail échangé avec un gaz parfait $\delta W = -p \, \mathrm{d}V$ et celle du travail d'une force, retrouver la dimension d'une pression.

Exercice I.A.3:

Un montage électrique est composé d'une résistance pure R, une capacité C et une inductance L. ces trois composantes sont reliées en série et traversées par un courant alternatif de fréquence f.

1) Donner les dimensions de C et L ainsi que leurs unités dans le système MKSA.

2) Montrer que la grandeur (L.C) est proportionnelle à un temps au carré. vérifier ce résultat en supposant que le circuit électrique est en résonance.

3) Vérifier que les grandeurs (R.C) et L/R) sont homogènes avec le temps.

4) Apres la coupure du courant, la décharge de la capacité est C est donnée par la relation :

$$Q = Q_0 . \exp\left(\frac{-a}{R.C}\right)$$ Où Q_0 représente la charge initiale de la capacité.

- Donner les dimensions des grandeurs $Q_0 et\ a$.

Exercice supplémentaire:

La fréquence de vibration d'une goutte d'eau va dépendre de plusieurs paramètres. On supposera que la tension superficielle est le facteur prédominant dans la cohésion de la goutte ; par conséquent, les facteurs intervenant dans l'expression de la fréquence de vibration f seront :

- R, le rayon de la goutte ;
- ρ, la masse volumique, pour tenir compte de l'inertie ;
- A, la constante intervenant dans l'expression de la force due à la tension superficielle (la dimension de A est celle d'une force par unité de longueur).

On écrira donc : $f = k_1 \, R^a \, \rho^b \, A^c$, ou $k_1$est ici une constante sans dimension ; a, b et c sont les exposants de R, ρ et A.

- En d´déduire les valeurs de a, b et c.

PARTIE B : **Calcul d'erreur et évaluation d'incertitude**

Exercice I.B.1:

L'accélération g de la pesanteur mesurée avec une pendule réversible est donnée par la relation suivante :

$$g = \frac{4 \times \pi^2 \times L}{T^2}$$

Avec L = 104.23 cm : la longueur du pendule et ΔL= 0,1 mm.

T : est la période des oscillations

1) Exprimer l'incertitude absolue sur g en fonction de ΔL, ΔT, L et T.

2) On veut mesurer la période T avec un chronomètre, pour cela on compte N périodes pendant un temps t.

3) Calculer t pour que l'incertitude relative sur T soit égale à 1% sachant que les incertitudes sur t sont dues à l'erreur d'enclenchement et à l'erreur de déclenchement du chronomètre sont de 0.1 s chacune.

4) Sachant que le nombre d'oscillations est de 22 oscillations pendant le temps t, déduire la période T.

5) Calculer g et Δg.

Exercice I.B.2:

La vitesse d'une masse suspendue par un fil à l'extrémité d'un pendule simple est donnée par la formule suivante :

$$V = \sqrt{g \times L \times (1 - \cos\theta)}$$

Avec

g : l'accélération de la pesanteur

L : la longueur du fil

θ : l'amplitude angulaire du pendule

1. En appelant Δg, Δl et Δq les incertitudes sur g, L et q. Calculer de deux manières différentes l'incertitude sur la vitesse V.

2. Application numérique :

g = 9.81 N/m , Δg = 0.01 N/m

L = 1,000 m , ΔL = 0.001 m

θ = 10° , Δθ= 1'

- Calculer V et ΔV

Exercice I.B.3:

Le débit d'un liquide est calculé en permettant l'écoulement d'un liquide dans une cuve cylindrique (placée verticalement sur un plan) et mesurant la hauteur de la surface du liquide avant et après l'écoulement pour une durée de dix minutes. Le volume collecté au bout de 10 minutes est donné par:

$$volume = (h_2 - h_1) \times \pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Où h_1 et h_2 sont les niveaux initial et final du liquide et d le diamètre du réservoir.

1. Si h_1 = 2 m, h_2= 3 m et d = 2 m calculer le débit du liquide en m^3/s.

2. Si l'erreur possible sur chaque mesure de h_1, h_2 et d est de ± 1%, estimer l'erreur possible sur la valeur calculée du débit liquide.

Exercice supplémentaire :

Une résistance R = 5.1 W est traversée pendant 60.0 s par un courant continu d'intensité 2.2 A. Quelle est l'énergie thermique dépensée dans cette résistance ?

Donner son incertitude absolue. (Donner le résultat en deux chiffres significatifs) Les incertitudes absolues des différents termes sont au plus égales a une unité de l'ordre du dernier chiffre.

<u>PARTIE C :</u> Analyse vectorielle

Exercice I.C.1:

En repère orthonormé, on donne $\vec{u}(1,2,-1)$,$\vec{v}(0,-1,1)$ et $\vec{w}(2,1,1)$.

- Calculer $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Exercice I.C.2:

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les vecteurs :

$\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ et $\vec{v} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$

1. Donner leurs normes des vecteurs$\vec{u}$, $\vec{u}$.
2. Calculer leurs produits scalaires.
3. Quelle est l'angle qu'ils forment ces deux vecteurs.

Exercice I.C.3:

I) Soit un vecteur : $\vec{A} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$.

1. Montrez que les angles α, β, γ, formés respectivement entre le vecteur $\vec{A}$ et les axes $\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oy}, \overrightarrow{oz}$, sont donnés par :

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{A}.\vec{\imath}}{|\vec{A}|}, \cos(\alpha) = \frac{\vec{A}.\vec{\jmath}}{|\vec{A}|}, \cos(\alpha) = \frac{\vec{A}.\vec{k}}{|\vec{A}|}$$

2. calculer$\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)$.
3. Vérifier que $cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) + cos^2(\gamma) = 1$.

II) soit $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteur quelconques , montrez que $\vec{A}.(\vec{A} \wedge \vec{B})$

Exercice supplémentaire :

On considère un triangle ABC de côtés a, b et c et d'angles α, β, γ.

(a) Montrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos a$ (formule d'Al Kashi, ou de Pythagore généralisé).

(b) Montrer que l'aire du triangle est $\frac{1}{2}bc\sin\alpha$; en déduire que $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\gamma}$

<u>PARTIE D :</u> Intégrales

Exercice I.D.1:

I) Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 2x^2 + 3x + 5, \quad g_1(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad h_1(x) = \frac{x}{x+1}$$

2) Calculer les primitives suivantes par intégration par parties :

$$f_2(x) = \int x^2 \ln(x)\, dx \ , \qquad g_2(x) = \int x \ \arctan(x)\, dx$$

Exercice I.D.2:

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$$

Exercice I.D.3:

Calculer les aires suivantes

a. Entre la courbe de la fonction $f(x) = 4x^2 + 2x - 5$ et les droites $y = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$

- Schématiser approximativement en hachurant l'aire.

b. Entre la courbe de la fonction $f(x) = 5x$, et les droites $y = 1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 4$

- Schématiser approximativement en hachurant l'aire.

Exercice supplémentaire :

1) Calculer les primitives suivantes :

$a) \int \frac{1}{x\ln(x)}dx$ b) $\int \arcsin(x)\,dx$ $c) \int \frac{x}{x+1}dx$

2) Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes d'équations : $y = \frac{x^2}{2}$ et $y = \frac{1}{1+x^2}$

Solution des exercices

<u>PARTIE A:</u> Analyse dimensionnelle

Exercice I.A.1:

1. La constante de Planck :

$$h = E/\upsilon$$

E exprime en N.m soit, en (kg. $m^{2/}s^2$), υ en s^{-1} .

Alors :

$$[h] = E/[\upsilon] = M.L^2.T^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{[h] = M.L^2.T^{-1}}$$

2. La constante de Boltzmann :

$$Ec = \frac{2}{3}.k.t \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2}{3}.\ E_c/T$$

E s'exprime en N. m soit, en (kg. m^2/s^2), T en θ

Alors :

$$[K] = [E_C]/[T] = M.L^2.T^{-2}.\theta^{-1}$$

$$\boxed{[K] = M.L^2.T^{-2}.\theta^{-1}}$$

3. La permittivité du vide :

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q\,q'}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi}\frac{q\,q'}{F.r^2}$$

Avec $q = I.t$ (q : s'exprime en C(coulomb) soit, en (A.s)).

Alors :

$$[\varepsilon_0] = [q]^2.[F]^{-1}.L^{-2} = I^2.T^{-2}.M^{-1}.L^{-1}.T^2L^{-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{[\varepsilon_0] = I^2.T^4.M^{-1}.L^{-3}}$$

4. **La perméabilité magnétique du vide :**

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{I.I'}{d}.L \ \mu_0 \Longrightarrow \mu_0 = \frac{4\pi.F.d}{I.I'.L}$$

Alors :

$$[\mu_0]= [F].L.I^{-2}.L^{-1}=M.L.T^{-2}.L.I^{-2}.L^{-1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{[\mu_0]=M.L.I^{2}.T^{-2}}$$

Exercice I.A.2:

1)

- **La dimension de l'énergie**

En partant de la relation $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, on obtient d'abord :

$$[E_c]=[m][v]^2$$

Par ailleurs comme la vitesse $v = \frac{dx}{dt}$ s'exprime en $m.s^{-1}$, on a donc

$$[v] = LT^{-1}.$$

On obtient finalement

$$\boxed{[E_c] = ML^2T^{-2}} \text{ (l'unité est le Joule)}$$

- **La dimension de la Puissance**

La puissance est l'énergie par unité de temps. On a donc :

$$\boxed{[P] = ML^2T^{-3}} \text{ (l'unité est le Watt)}$$

- **La dimension du Potentiel**

De $P = UI$ (Ou U est en Volt et I en Ampère) on déduit :

$$\boxed{[P] = [U][I] \Longrightarrow [U] = [P][I]^{-1} = ML^2T^{-3}I^{-1}}$$

- **La dimension de Résistance**

La loi d'ohm s'écrit $U = RI$, ce qui entraine :

$$\boxed{[R] = [U][I]^{-1} \implies ML^2T^{-3}I^{-2}}$$

2. La dimension de la capacité d'un condensateur

L'énergie emmagasinée par le condensateur est $E_c = \frac{1}{2} C U_c^2$

Avec l'exercice précédent, on sait que :

$$[E_c] = ML^2T^{-2} \text{ et } [U_c] = ML^2T^{-3}I^{-1}$$

On en déduit :

$$\boxed{[C] = \frac{[E_c]}{[U_c]^2} = M^{-1}L^{-2}T^4I^2}$$

3. vérification de l'homogénéités de la relation :

Il s'agit de vérifier que les deux membres de la relation ont la même dimension.

- Comme f est une fréquence, on a $[f] = T^{-1}$.
- Déterminations de la dimension du second membre. On a

$$\left[\frac{1}{2\pi}\right] = 1 \;\; et \;\; [m] = M$$

$. De\ l'égalité\ \vec{F} = -K\vec{\Delta}l\ on\ déduit\ que: [F] = [k]L.$

Comme $[F] = MLT^{-2}(voir\ le\ cours), on\ déduit\ que\ [k] = MT^{-2}, puis$

$$\boxed{\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\right] = \sqrt{\frac{[k]}{[m]}} = \sqrt{\frac{MT^{-2}}{M}} = T^{-1}}$$

Les deux membres ont la même dimension : la relation est homogène.

3. la dimension de la pression

En utilisant la formule donnée, on a :

$$[\delta W] = [p].[dV]$$

Comme : $[\delta W] = [F]L = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2} et\ [dV] = L^3$, on en déduit :

$$\boxed{[p] = ML^{-1}T^{-2}}$$

L'unité est le Pascal.

Exercice I.A.3:

1- La dimension de C et L :

on sait que :

- L'impédance aux bornes d'une résistance est : Z=R
- L'impédance aux bornes d'une inductance est : $Z = L.\omega$
- L'impédance aux bornes d'une capacité est : $Z = \frac{1}{C.\omega}$

Du point de vue dimensions, on écrit :

$$\left[\frac{1}{C.\omega}\right] = [L.\omega] = [R]$$

▹ $[\boldsymbol{C}]$ =?

On sait que : $\begin{cases} R = \frac{U}{I} = \frac{r.E}{I} & \Longrightarrow \quad [R] = M.L^2.T^{-3}.I^{-2} \\ [\omega] = T^{-1} & \quad pulsation:\ \omega = \frac{2\pi}{T} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{1}{C.\omega}\right] = \frac{1}{C.\omega} = \frac{1}{[C].[\omega]} = [R]$$

$$\Rightarrow \quad [C] = \frac{1}{[R].[\omega]} = \frac{1}{(M.L^2.T^{-3}.I^{-2}).(T^{-1})} = M^{-1}.L^{-2}.T^4.I^2$$

$$\Rightarrow \boxed{[C] = M^{-1}.L^{-2}.T^4.I^2 \ \ ;\ (kg^{-1}.m^{-2}.s^4.A^2)}$$

▹ $[\boldsymbol{L}]$ =?

$$[L\omega] = [R] \Rightarrow [L].[\omega] = [R] \rightarrow [L] = \frac{[R]}{[\omega]}$$

$$\Rightarrow \ [L] = \frac{M.L^2.T^{-3}.I^{-2}}{T^{-1}} = M.L^2.T^{-2}.I^{-2}$$

$$\Rightarrow \ \boxed{[L] = M.L^2.T^{-2}.I^{-2};\ (kg.m^2.s^{-2}.A^2)}$$

2.

$$[L.C] = [L].[C] = (M^{-1}.L^{-2}.T^4.I^2).(M.L^2.T^{-2}.I^{-2})$$

$$= M^{-1+1}.L^{-2+2}.T^{4-2}.I^{2-2} = M^0.L^0.T^2.I^0 = T^2$$

La grandeur (L.C) est proportionnelle à un temps au carré.

On peut alors ecrire : **(L.C)**$\propto$ $\boldsymbol{t^2}$ **.**

- On peut vérifier ce résultat si on prend le circuit en résonance c'est-à-dire :

$$L.\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow L.C = \frac{1}{\omega^2} \Rightarrow [L.C] = \left[\frac{1}{\omega^2}\right] = \frac{1}{[\omega]^2} = \frac{1}{(T^{-1})^2} = T^2$$

Donc le même résultat de la question précédente.

3.

$$[R.C] = [R].[C] = (M.L^2.T^{-3}.I^{-2}).(M^{-1}.L^{-2}.T^4.I^2) = M^0.L^0.T^{+1}.I^0 = T \Rightarrow \boxed{(R.C) \propto t}$$

$$\left[\frac{L}{R}\right] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{M.L^2.T^{-2}.I^{-2}}{M.L^2.T^{-3}.I^{-2}} = M^0.L^0.T^{+1}.I^0 = T \Rightarrow \boxed{\left(\frac{L}{R}\right) \propto t}$$

4. $[\boldsymbol{Q_0}]$ =? , $[\boldsymbol{a}]$ =?

$$Q = Q_0.exp\left(\frac{-a}{R.C}\right)$$

$\boldsymbol{Q_0}$ étant Une charge électrique, sa dimension est donnée par :

$$[Q] = [Q_0] = IT \quad \Rightarrow \quad \boxed{[Q_0] = I.T}$$

- L'argument $\left(\frac{-a}{R.C}\right)$ de la fonction exponentielle est sans dimension, on écrit :

$$\left[\frac{-a}{R.C}\right] = 1 \Rightarrow [a] = [-R.C] = [-1][R.C] = T \Rightarrow \boxed{[a] = T}$$

<u>PARTIE B :</u> Calcul d'erreur et évaluation d'incertitude

Exercice I.B.1:

1. **L'incertitude absolue sur g**

$$g = \frac{4 \times \pi^2 \times L}{T^2}$$

$$\ln g = \ln 4\pi^2 + \ln L - \ln T$$

$$\frac{dg}{g} = \frac{dL}{L} - 2\frac{dT}{T}$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta T}{T}$$

$$\boxed{\Delta g = g \times \left[\frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta T}{T}\right] = \frac{4 \times \pi^2 \times L}{T^2} \times \left[\frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta T}{T}\right]}$$

2. L'incertitude Δt

$$t = N \times T$$

Soit Δt_e et Δt_d les erreurs d'enclenchement et de déclenchement du chronomètre,

$$\boxed{\Delta t = \sqrt{\Delta t_e^2 + \Delta t_d^2} = \sqrt{(0{,}1)^2 + (0{,}1)^2} = \sqrt{0{,}02} = 0{,}14\ s}$$

3. La période T

$$\boxed{T = \frac{t}{N} = \frac{t}{22} = 0{,}64\ s}$$

4. Calcul du g et Δg

$$g = \frac{4 \times \pi^2 \times L}{T^2} = 10{,}04\ s$$

$$\boxed{\Delta g = g \times \left[\frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta T}{T}\right] = 0{,}208\ m.s^{-2}\ \ d'ou\ \ g = 9{,}96 \pm 0{,}21\ m.s^{-2}}$$

Exercice I.B.2:

1. L'incertitude $\frac{\Delta V}{V}$

$$V = \sqrt{g \times L \times (1 - cos\ \theta)}$$

1ere méthode (logarithmique)

$$\ln V = \frac{1}{2}[\ln g + \ln L + \ln\,(1 - \cos\theta]$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{1}{2}\left[\frac{dg}{g} + \frac{dL}{L} + \frac{\sin\theta}{(1 - \cos\theta)}d\theta\right]$$

On obtient alors :

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\sin\theta}{(1 - \cos\theta)}\Delta\theta\right]}$$

2eme méthode (différentielle)

$$dV = \frac{\partial V}{\partial g}dg + \frac{\partial V}{\partial L}dL + \frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta$$

$$dV = \frac{L(1-\cos\theta)}{2\sqrt{gL(1-\cos\theta)}}dg + \frac{g(1-\cos\theta)}{2\sqrt{gL(1-\cos\theta)}}dL + \frac{\sin\theta}{2\sqrt{gL(1-\cos\theta)}}d\theta$$

Or

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{2}\left[\frac{dg}{g} + \frac{dL}{L} + \frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)}d\theta\right]$$

Ainsi on obtient

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta)}\Delta\theta\right]}$$

2. Application numérique :

$V=0,38\ m.s^{-1}$ D'où , $\boxed{\Delta V = 0,01\ m.s^{-1}}$

Exercice I.B.3:

1. calculer le débit du liquide en m^3/s

$$V = (h_2 - h_1) \times \pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$\Longrightarrow V = (3-2) \times \pi \times \left(\frac{2}{2}\right)^2 = \pi = 3,14\ m^3$$

$$\Longrightarrow \boxed{Q_V = \frac{V}{t} = 5,23\ 10^{-3}\ m^3/s}$$

2. L'erreur sur le débit

$$\ln V = \ln(h_2 - h_1) + \ln\pi + 2\ln d - \ln 4$$

$$\Longrightarrow \frac{dV}{V} = \frac{dh_2}{(h_2-h_1)} - \frac{dh_1}{(h_2-h_1)} + 2\frac{dD}{D}$$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta h_2}{(h_2-h_1)} - \frac{\Delta h_1}{(h_2-h_1)} + 2\frac{\Delta D}{D}$$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta h_1}{h_1}\frac{h_1}{(h_2-h_1)} + \frac{\Delta h_2}{h_2}\frac{h_2}{(h_2-h_1)} + 2\frac{\Delta D}{D}$$

Or

$$\frac{\Delta h_1}{h_1} = \frac{\Delta h_2}{h_2} = \frac{\Delta D}{D} = 1\% = \varepsilon$$

Ce qui nous donne :

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon \times \left(\frac{h_1}{h_2-h_1} + \frac{h_2}{h_2-h_1} + 2\right)}$$

Application numérique

$$\frac{\Delta V}{V} = 0{,}01 \times \left(\frac{2}{1} + \frac{3}{1} + 2\right) = 0{,}07 = 7\%$$

Ainsi $\boxed{\Delta V = 0{,}07 \times \pi = 0{,}22\ m^3}$

<u>PARTIE C :</u> Analyse vectorielle

Exercice I.B.1:

$$\vec{u} = \vec{i} + \overrightarrow{2j} - \vec{k} \quad , \quad \vec{v} = -1\vec{j} + \vec{k} \quad , \quad \vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

1. **Calcul du produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$**

$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \times 0) + (2 \times -1) + (-1 \times 1) = -3$$

2. **Calcul du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$**

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= [(2 \times 1) - (-1 \times -1)]\vec{\imath} + [(0 \times -1) - (1 \times 1)]\vec{\jmath} + [(1 \times -1) - (0 \times 2)]\vec{k}$$

$$= \vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$$

3. **Calcul du produit mixte $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$**

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de $\vec{v} \wedge \vec{w}$:

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= [(-1 \times 1) - (1 \times 1)]\vec{\imath} + [(2 \times 1) - (0 \times 1)]\vec{\jmath} + [(0 \times 1) - (2 \times -1)]\vec{k}$$

$$= -2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\ \vec{k}$$

On déduit alors $\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})$

$$\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (1 \times -2) + (2 \times 2) + (-1 \times 2) = 0$$

Exercice I.C.2:

1) **Calcul de la norme de $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$:**

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

Donc $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{6}$

2) **Calcul du produit scalaire $\vec{u}\,.\,\vec{v}$:**

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 2 + 2 = 3$$

3) **L'angle entre $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$:**

Le produit scalaire est définit comme suit :

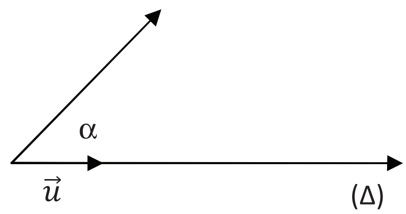
$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\Longrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

L'angle entre les deux vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ est donc de $\frac{\pi}{3}$, soit 60°.

Exercice I.C.3:

I- **Le vecteur $\vec{A} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ fait un angle α avec un axe (Δ) de vecteur unitaire $\vec{u}$.**



1) On sait que $\vec{A}.\vec{u} = \|\vec{A}\|.\|\vec{u}\|.\cos(\alpha) = \|\vec{A}\|.\cos(\alpha) \Longrightarrow \cos(\alpha) = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$

Donc les angles $\alpha, \beta, et\ \gamma$ respectivement entre $\vec{A}$ et les axes ox, oy et oz sont donnés par :

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{A}\,.\,\vec{\imath}}{\|\vec{A}\|}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\vec{A}\,.\,\vec{\jmath}}{\|\vec{A}\|}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{A}\,.\,\vec{k}}{\|\vec{A}\|}$$

2) $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2+2^2+1^1}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}}$ et $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}$

3) On obtient facilement :

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = \frac{3^2}{14} + \frac{2^2}{14} + \frac{1^2}{14} = 1$$

II- Pour montrer que $\vec{A}.\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = 0$, il suffit de monter que $\vec{A} \perp \left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right)$.

Si les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont dans un plan (P), alors le vecteur $\vec{C} = \left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right)$ est perpendiculaire au plan (P) et donc $\left(\vec{C} \perp \vec{A}\right)$ et $\left(\vec{C} \perp \vec{B}\right)$, on peut donc écrire que $\vec{A}.\vec{C} = 0$

D'où $\vec{A}.\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = 0$

<u>PARTIE D :</u> Intégrales

Exercice I.D.1:

1) Calcul des primitives :

Soit $f(x)$ une fonction $\Longrightarrow$ sa primitive est $F(x) = \int f(x)dx$ et $F'(x) = f(x)$.

$\boldsymbol{a)\ f_1(x) = 2x^2 + 3x + 5}$

$$\Longrightarrow F_1(x) = \int (2x^2 + 3x + 5)\, dx = \int 2x^2\, dx + \int 3x\, dx + \int 5\ dx$$

$$\Longrightarrow F_1(x) = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 5x + C$$

$\boldsymbol{b)\ g_1(x) = \frac{x}{x^2 + 1}}$

$$\Longrightarrow G_1(x) = \int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx = \int \frac{2x}{2(x^2 + 1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{2(x^2 + 1)} dx$$

$$\Longrightarrow G_1(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

c) $\boldsymbol{h_1(x) = \frac{x}{x+1}}$

$$\Longrightarrow H_1(x) = \int \frac{x}{x + 1}\, dx = \int \frac{x + 1 - 1}{x + 1}\, dx = \int dx - \int \frac{1}{x + 1}\, dx$$

$$\Longrightarrow H_1(x) = x - \ln(x + 1) + C$$

2) Calcul des primitives par parties :

a) $F_2(x) = \int x^2\, ln\,(x) dx$

Considérons l'intégration par parties avec $u = \ln x$ et $v' = x^2$. On a donc :

$$u' = \frac{1}{x} \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

On obtient donc :

$$F_2(x) = \int \ln(x) \times x^2 dx = \int u\, v' = [u\, v] - \int u'v$$

$$= \left[\ln\,(x) \times \frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{1}{x} \times \frac{x^3}{3} \mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow F_2(x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + \mathrm{C}$$

b) $G_2(x) = \int x \;\; arctan\,(x)\, dx$

Considérons l'intégration par parties avec $u = \arctan\,(x)$ et $v' = x$. On a donc :

$$u' = \frac{1}{1+x^2} \quad et \quad v = \frac{x^2}{2}$$

On obtient donc :

$$G_2(x) = \int x \;\; arctan\,(x)\, dx = \int u.v' = [u.v] - \int u'v$$

$$= \left[\arctan(x) \times \frac{x^2}{2}\right] - \int \frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^2}{2}\, dx$$

$$= \left[\arctan(x) \times \frac{x^2}{2}\right] - \int \frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^2}{2}\, dx$$

$$= \left[\arctan(x) \times \frac{x^2}{2}\right] - \frac{1}{2} \int (1 - \frac{1}{1+x^2})\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

$$\Rightarrow \; G_2(x) = \frac{1}{2}(1+x^2) \arctan x - \frac{1}{2} x + C$$

Exercice I.D.2:

Calculs des intégrales :

a)

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$$

Posons le changement de variable $u = e^x$ avec $x = \ln u$ et $du = e^x dx$. La variable x varie de $x = 0$ à $x = 1$, donc la variable $u = e^x$ varie de $u = 1$ à $u = e$.

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx = \int_1^e \frac{du}{\sqrt{u+1}} = \left[2\sqrt{u+1}\right]_1^e = 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2}$$

b)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{x \sin x \, dx}$

Par intégration par parties avec $u = x$, $v' = \sin x$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = [uv]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'v = [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$= [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - 0 + 1 - 0 = 1$$

Exercice I.D.3:

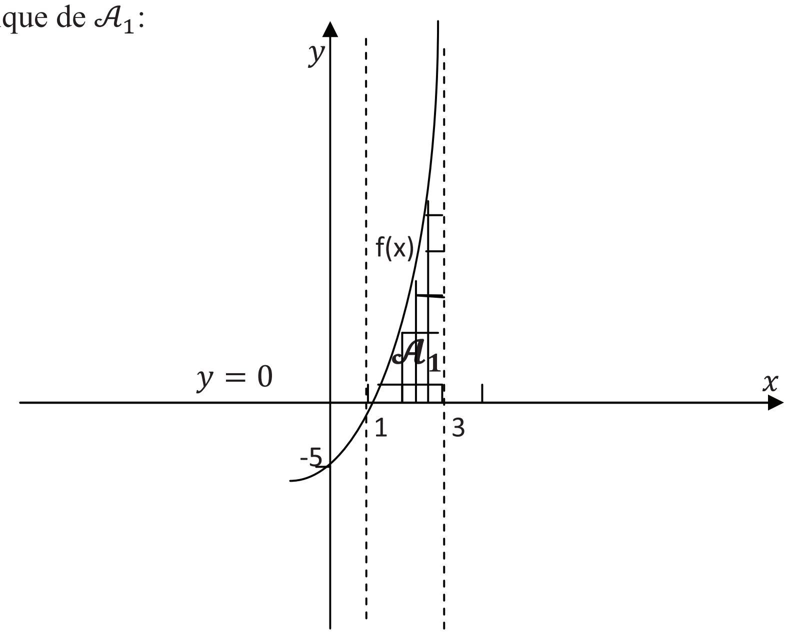
Calcul des aires :

1) L'aire $\mathcal{A}_1$ délimité par la fonction $f(x) = 4x^2 + 2x - 5$ et les droites $y = 0$, $x_1 = 1, et\ x_2 = 3$ est données par :

$$\mathcal{A}_1 = \int_a^b (f(x) - y)dx = \int_1^3 (4x^2 + 2x - 5) - 0 \, dx = \int_1^3 (4x^2 + 2x - 5) \, dx$$

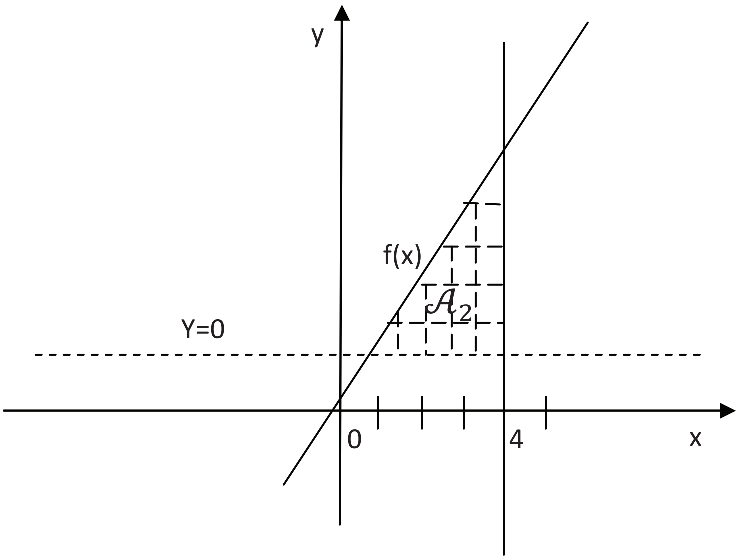
$$\mathcal{A}_1 = \left[\frac{4}{3}x^3 + x^2 + 5x\right]_1^3 = \frac{98}{3}$$

La représentation schématique de $\mathcal{A}_1$:



2) L'aire $\mathcal{A}_2$ délimité par la fonction $f(x) = 5x$ et les droites $y = 1$, $x_1 = 0, et\ x_2 = 4$ est données par :

$$\mathcal{A}_2 = \int_a^b (f(x) - y)dx = \int_0^4 (5x - 1)\, dx = \left[\frac{5x^2}{2} - x\right]_0^4 = 36$$



CHAPITRE II
Cinématique du point matériel

II.1 Cinématique sans changement de référentiel

II.1.1 Définitions Générales

La cinématique est l'étude du mouvement en fonction du temps indépendamment des causes produisant ce mouvement (les forces appliquées au point matériel).

II.1.2 Repère

Pour repérer la position d'une particule, il est nécessaire de définir un repère d'espace. Cela consiste à choisir une origine O et une base$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\ \vec{k})$.
Le trièdre $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\overrightarrow{k})$ est le repère d'espace.

II.1.3 Référentiel

Un référentiel est un repère spatial muni d'un repère temporel (repère + horloge). Un référentiel est donc un objet par rapport auquel on étudie le mouvement. Tout mouvement est relatif au référentiel utilisé.

II.1.4 Trajectoire

La trajectoire d'un point mobile M dans un repère donné est la courbe formée par l'ensemble des positions successives du point M dans ce repère.
La trajectoire d'un point mobile dépend du référentiel choisi.

II.1.5 Vecteur vitesse d'un point matériel

Puisque la trajectoire d'un point mobile dépend du référentiel choisi, les caractéristiques du mouvement doivent changer d'un référentiel à un autre. Une de ces caractéristiques est le vecteur vitesse du point mobile. C'est pour cette raison qu'on utilise la notation $\vec{V}(M/R)$ pour signifier qu'il s'agit de la vitesse du point M par rapport au référentiel R. On utilisera la même notation pour les deux types de vitesse qu'on va traiter dans la suite, la vitesse moyenne et la vitesse instantanée.

☒ Vitesse moyenne :

Soit un point matériel décrivant une trajectoire *(C)* dans un référentiel *R*. Le point matériel occupe la position *M* à l'instant *t* et a position *M'* à l'instant *t'=t+Δt*.

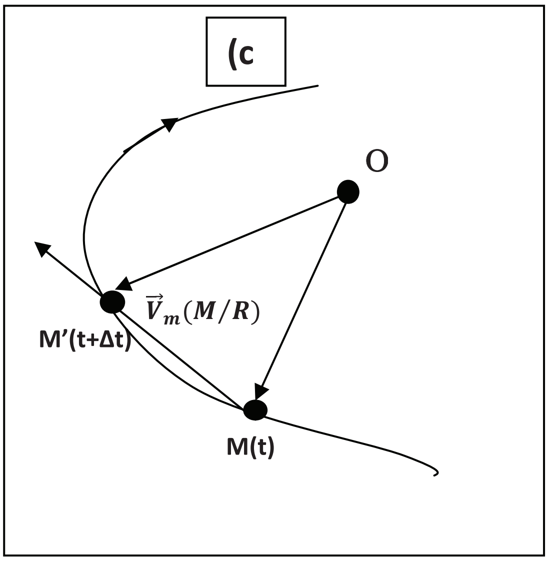


Figure II.1 : Vitesse moyenne

La vitesse moyenne du point matériel entre *t* et *t'* est alors donnée par:

$$V(M/R) = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t} = \frac{\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'}}{\Delta t}$$

Le vecteur vitesse est donc un vecteur qui a la même direction et le même sens que $\overrightarrow{MM'}$ (si $t' > t$).

☒ Vitesse instantanée :

Le vecteur vitesse instantanée de *M* par rapport au référentiel *R* à un instant *t* est obtenue en prenant la limite *Δt → 0* dans la définition de la vitesse moyenne, (*c.à.d.* les points *M* et *M'* sont infiniment proche):

$$V(M/R) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}' - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$$

Propriétés du vecteur vitesse instantanée

- Son origine est la position de la particule à l'instant *t*.
- Sa direction est tangente à la trajectoire à la position considérée.
- Son sens est donné par le sens de parcours de la trajectoire.

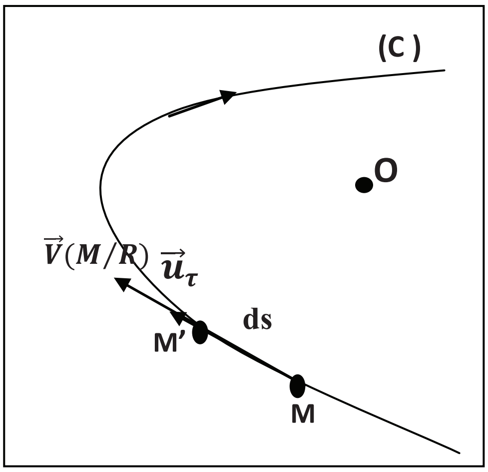


Figure II.2 : vitesse instantanée

- Son module est $\frac{ds}{dt}$ représente le déplacement curviligne élémentaire. On peut résumer ces propriétés dans l'expression :

$$V(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\bigg|_R = \frac{\overrightarrow{MM'}}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\vec{u}_\tau$$

où $\vec{u}_\tau$ dénote le vecteur unitaire tangent à la trajectoire de même sens que le sens du mouvement.

II.1.6 Vecteur accélération

Une autre caractéristique du mouvement d'un point matériel est le vecteur accélération. On utilise une notation similaire à celle pour la vitesse,$\vec{\gamma}(M/R)$, pour signifier qu'il s'agit de l'accélération du point M par rapport au référentiel R.
Le vecteur accélération est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse, ou de façon équivalente la dérivée seconde du vecteur position par rapport au temps:

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\bigg|_R = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\bigg|$$

On peut définir le vecteur accélération moyenne aussi de façon similaire au vecteur vitesse. Il mesure alors la variation moyenne de la vitesse sur un intervalle de temps Δt.

II.1.7 Systèmes de coordonnées

II.1.7.1 Coordonnées Cartésiennes

II.1.7.1.1 Définitions

Soit le repère fixe orthonormé directe *R(O;X,Y,Z)* de base orthonormé directe $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. La position d'un point *M* peut être repérer par ses trois composantes cartésiennes (x, y, z), projection orthogonales sur les trois axes du repère :
Le vecteur position s'écrit alors:

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}}$$

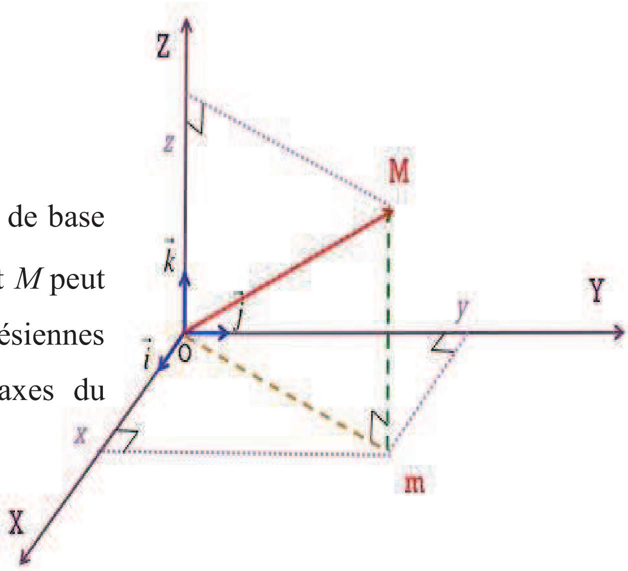


Figure II.3 : Coordonnées Cartésiennes

II.1.7.1.2 Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

En dérivant l'expression du vecteur position en coordonnées cartésiennes par rapport au temps, on obtient l'expression de la vitesse en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Les vecteurs de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ des coordonnées cartésiennes étant fixes, leurs dérivées par rapport au temps sont nulles:

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$$

On utilise aussi la notation suivante

$$\vec{V}(M/R) = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}$$

où le point sur la variable signifie la dérivée par rapport au temps.

II.1.7.1.3 Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

Pour obtenir les expressions des composantes du vecteur accélération dans les différents systèmes de coordonnées il faut dériver les expressions du vecteur vitesse obtenues dans le paragraphe précédent

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}\,(M/R)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

En utilisant l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes, on a :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d(\dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k})}{dt}$$

Puisque les vecteurs de la base des coordonnées cartésiennes sont fixes, on dérive seulement les composantes du vecteur vitesse, ce qui donne

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

On utilise parfois la notation suivante

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$$

où les deux points sur une variable signifie la dérivée seconde de la variable par rapport au temps.

II.1.7.2 Coordonnées polaires

II.1.7.2.1 Définitions

C'est un système de coordonnées utilisé pour repérer la position d'un point *M* à deux dimensions. Ainsi, la position du point *M*, est repérée par la donnée de la distance *r*, qui le sépare de l'origine O et de l'angle θ que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe *(OX)*.

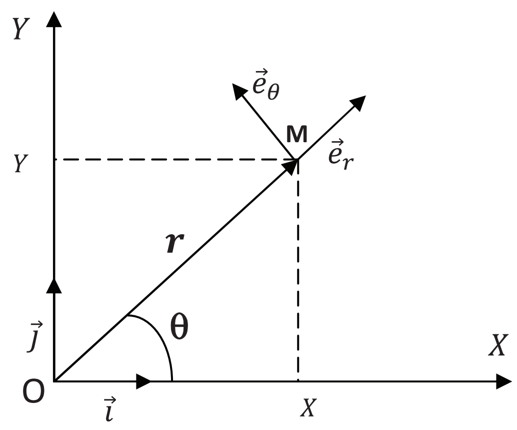


Figure II.4 : Coordonnés polaires

On a donc

$$r = \left|\overrightarrow{OM}\right| \ ; \quad 0 < r < +\infty$$

$$\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{OM},\vec{i}}\right) \ ; \quad 0 < \theta < 2\pi$$

☒ **Règles de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires :**

En utilisant le schéma dans la figure ci-dessus on peut trouver les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\, cos\ \theta \\ y = r\, sin\ \theta \end{cases}$$

Ou inversement

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

On définit la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ associées aux coordonnées polaires. Le vecteur $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire de la direction $\overrightarrow{OM}$, et le vecteur $\vec{e}_\theta$ est le vecteur directement perpendiculaire à $\vec{e}_r$.

Cette base est reliée à la base $\overrightarrow{(\imath, \jmath)}$:

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta\, \vec{\imath} + \sin\theta\, \vec{\jmath} \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\, \vec{\imath} + \cos\theta\, \vec{\jmath} \end{cases}$$

☒ **Le vecteur position :**

Le vecteur position en coordonnées polaire s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

II.1.7.2.2 Vecteur vitesse en coordonnées polaires

Pour obtenir l'expression du vecteur vitesse en coordonnées polaires on dérive le vecteur position en coordonnées polaires :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \frac{d(r)}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d(\vec{e}_r)}{dt}$$

$$\Longrightarrow \vec{V}(M/R) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

En effet, $\vec{e}_r$ dépend de façon implicite de *t*, à travers sa dépendance de l'angle θ. Ainsi

$$\frac{d(\vec{e}_r)}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

On obtient alors pour le vecteur vitesse:

$$\vec{V}(M/R) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

II.1.7.2.3 Vecteur accélération en coordonnées polaires

En coordonnées polaires le vecteur accélération est donné par l'expression suivante :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + (2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

<u>Preuve :</u>

On dérive l'expression du vecteur vitesse en coordonnées polaires :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \frac{d\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right)}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \frac{d\dot{\theta}}{dt}r\,\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

Sachant que :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \;\; et \;\; \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

En remplaçant dans l'expression de l'accélération ci-dessus, on obtient :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \ddot{\theta}r\,\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

Finalement

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{e}_\theta$$

II.1.7.3 Coordonnées cylindriques

II.1.7.3.1 Définitions

Il est possible de repérer la position, dans l'espace, d'un point *M* en utilisant le système de coordonnées cylindriques. Dans ce système la position du point est repérée par la donnée de la composante *z* (comme dans les coordonnées cartésiennes) et de ses coordonnées polaires qui permettent de repérer la position de la projection orthogonale du point *M* sur le plan horizontale.

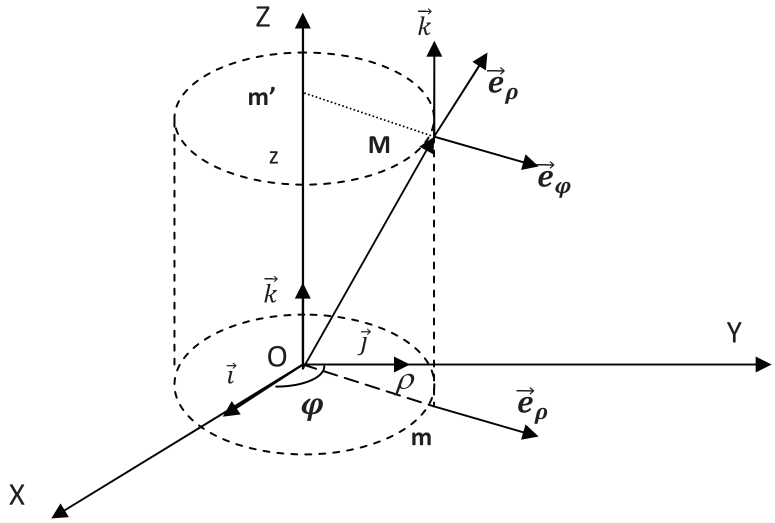


Figure II.5 : Coordonnés cylindriques

On a dons d'après la figure précédente

$$\begin{cases} \rho = \left|\overrightarrow{om}\right| \quad ; \quad 0 \leq \rho < +\infty \\ \varphi = (\widehat{\overrightarrow{om}, \vec{i}}) \quad ; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = \overline{om'} \quad ; \quad -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

☒ **Règles de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques :**

On peut passer du système de coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes en utilisant les relations :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

Ou inversement

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

On associe la base orthonormée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ aux coordonnées cylindriques, où le vecteur $\vec{e}_\rho$ est le vecteur unitaire de la direction $\overrightarrow{om}$, et le vecteur $\vec{e}_\varphi$ est défini de tel sorte à ce que le trièdre $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ soit directe.

Cette base est reliée à la base des coordonnées cartésiennes par les relations :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

☒ **Vecteur position**

Dans cette base le vecteur position s'écrit de la façon suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{om} + \overrightarrow{mM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}$$

II.1.7.3.2 Vecteur vitesse en coordonnées cylindriques

Pour obtenir l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques on dérive le vecteur position en coordonnées cylindriques :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(\rho\vec{e}_\rho + \overrightarrow{z k)}}{dt}$$

$$= \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

Sachant que $\vec{k}$ est un vecteur fixe sa dérivée est nulle $\frac{d\vec{k}}{dt} = 0$. Le vecteur $\vec{e}_\rho$étant mobile, sa dérivée n'est pas nulle en générale. En effet, $\vec{e}_\rho$ dépend de façon implicite de *t*, à travers sa dépendance de l'angle φ. Ainsi

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

En utilisant l'expression du vecteur $\vec{e}_\rho$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on obtient

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\rho$$

ou encore

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho$$

On obtient alors pour le vecteur vitesse:

$$\boxed{\vec{V}\,(M/R) = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \frac{dz}{dt}\vec{k}}$$

Ou encore

$$\boxed{\vec{V}\,(M/R) = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{k}}$$

II.1.7.3.3 Vecteur accélération en coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques le vecteur accélération est donné par l'expression suivante :

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\rho - \ddot{\rho}\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{k}$$

<u>Preuve:</u>

On utilise l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}}{dt}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d(\dot{\rho})}{dt}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\frac{d\dot{\varphi}}{dt}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{k}$$

On avait obtenu l'expression de la dérivée par rapport au temps du vecteur $\vec{e}_\rho$:

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

On obtient de façon similaire la dérivée du vecteur $\vec{e}_\varphi$:

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(-\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath})}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = (-\cos\varphi\;\vec{\imath} - \sin\varphi\;\vec{\jmath})\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho$$

En remplaçant dans l'expression de l'accélération ci dessus on obtient :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{k}}$$

II.1.7.4 Coordonnées sphériques

II.1.7.4.1 Définitions

Dans l'espace à trois dimensions on peut utiliser le système des coordonnées sphériques, dont la base associée est une base mobile. Ce système de coordonnées est adéquat dans les cas où le système étudié présente un point particulier O, de symétrie autour duquel les rotations sont privilégiées.

La position du point matériel est alors repéré par la distance r et deux angles φ et θ. r étant la distance qui sépare le point matériel M du point particulier O (l'origine). L'angle φ appelé *longitude* ou *azimut* est l'angle que fait la projection du vecteur position sur le plan horizontal avec l'axe *(OX)* (similaire au cas du système de coordonnées cylindriques). L'angle θ, appelé *colatitude*, est l'angle que fait le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe *(OZ)*.

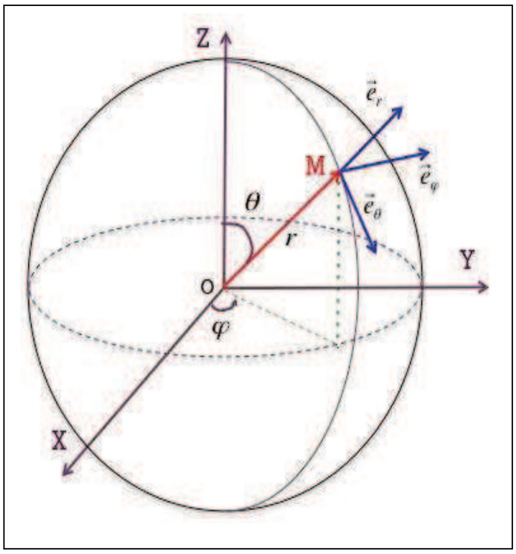


Figure II.6 : Coordonnées sphériques

On a donc

$$\begin{cases} r = \left|\overrightarrow{oM}\right| \quad ; \quad 0 \leq r < +\infty \\ \varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{om}, \vec{\imath}}\right) \quad ; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \\ \theta = \left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{k}}\right) \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

☒ **Règles de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques :**

On peut passer du système de coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes en utilisant les relations :

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

Ces relations peuvent être inversées, pour exprimer les coordonnées sphériques en termes des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

La base orthonormée associées aux coordonnées sphériques est notée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. Le vecteur $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire dans la direction et le sens de $\overrightarrow{OM}$. $\vec{e}_\theta$ est le vecteur unitaire obtenu par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ à partir de $\vec{e}_r$ dans le plan *(OZ, OM)*. Le vecteur $\vec{e}_\varphi$ est défini de tel sorte à ce que le trièdre $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ soit directe.

Cette base est reliée à la Base des coordonnées cartésiennes par les relations:

$$\begin{cases} \vec{e}_r = sin\,\theta\, cos\,\varphi\, \vec{\imath} + \sin\theta \sin\varphi\, \vec{\jmath} + \cos\theta\, \vec{k} \\ \vec{e}_\theta = cos\,\theta\, cos\,\varphi\, \vec{\imath} + \cos\theta \sin\varphi\, \vec{\jmath} - \sin\theta\, \vec{k} \\ \vec{e}_\varphi = -sin\,\varphi\, \vec{\imath} + \cos\varphi\, \vec{\jmath} \end{cases}$$

☒ **Vecteur position**

Dans cette base, le vecteur position s'écrit de la façon suivante :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

II.1.7.4.2 Vecteur vitesse en coordonnées sphériques

Le vecteur position en coordonnées sphériques dépend du vecteur $\vec{e}_r$. Ce dernier dépend des angles θ et φ, donc sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

En utilisant les expressions des vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ en fonction des vecteurs $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ données précédemment, on montre que

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \quad et \quad \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = \sin\theta\, \vec{e}_\varphi$$

Ainsi

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \sin\theta \frac{d\varphi}{dt}\, \vec{e}_\varphi$$

Le vecteur vitesse est obtenu en dérivant le vecteur position :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

Ainsi, en coordonnées sphériques, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$$

Ou encore

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi}$$

II.1.7.4.3 Vecteur accélération en coordonnées sphériques

Le vecteur accélération en coordonnées sphériques est :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{e}_r$$
$$+(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{e}_\theta$$
$$+(2\dot{r}\dot{\varphi}\ \sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\ \cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta)\vec{e}_\varphi$$

<u>Preuve :</u>

On utilise l'expression du vecteur vitesse en coordonnées sphériques:

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi)}{dt}$$

Pour dériver les vecteurs de la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ on utilise leurs expressions en fonctions des vecteurs de la base $((\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On obtient alors :

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r\ ,\quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\varphi} = \cos\theta\,\vec{e}_\varphi, \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{e}_\rho = -(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta)$$

Les dérivées temporelles des vecteurs de la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ sont alors données par :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\ \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{e}_\theta}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\ \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\ \vec{e}_\theta$$

Ainsi en dérivant les composantes du vecteur vitesse en coordonnées sphériques ainsi que les vecteurs de la base, on obtient alors l'expression finale du vecteur accélération en coordonnées sphériques donnée ci dessus.

II.1.8 Repère de Frenet

Dans le cas d'un mouvement plan on peut définir en chaque point M de la trajectoire la base de Frenet. Pour cela on définit en tout point M un vecteur $\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}$, tangent à la trajectoire et orienté dans le sens de celle ci, et on définit le vecteur $\vec{\mathcal{U}}_n$ perpendiculaire à $\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}$ et orienté vers la concavité de la trajectoire. Pour compléter le trièdre on définit un vecteur $\vec{B}$ tel que le trièdre $(\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{U}}_n, \vec{B})$ est un trièdre directe *c.à.d.* $\vec{B} = \vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}} \wedge \vec{\mathcal{U}}_n$. Le trièdre $(\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{U}}_n, \vec{B})$ est appelé repère de Serret-Frenet.

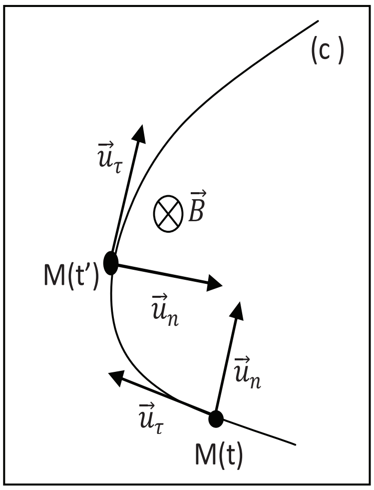


Figure II.7 : base de Frenet

Abscisse curviligne :

Dans le cas d'un mouvement curviligne il est parfois utile d'utiliser l'abscisse curviligne pour repérer la position du point matériel. Pour cela, on fixe un point *A* de la trajectoire (voir la *figure II.8*). L'abscisse curviligne s(t) est alors définie comme étant la distance curviligne du point fixe *A* au point *M(t)* qu'occupe le point matériel à l'instant t :

$$\widehat{AM} = arc(AM) = s(t)$$

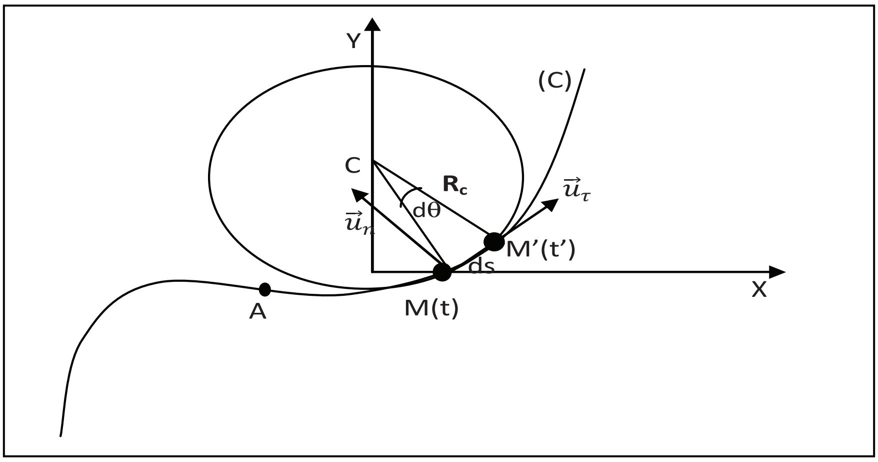


Figure II.8 : Abscisse curviligne

l'instant *t' =t+dt*, le point matériel occupant la position *M'(t')* on aura le vecteur position:

$$\widehat{AM'} = arc(AM') = s(t') \quad ; \quad t' = t + dt$$

Le déplacement élémentaire s'écrit alors :

$$\widehat{MM'} = arc(MM') = s(t') - s(t) = ds$$

ds est un arc de cercle de centre *C* et de rayon R_C , appelé rayon de courbure.

Les vecteurs $\vec{U}_{\mathcal{T}}$ et $\vec{U}_n$ peuvent alors être obtenue de façon analytique de la façon suivante

$$\vec{U}_{\mathcal{T}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \; ; \; \vec{U}_n = R_C \frac{d\vec{U}_{\mathcal{T}}}{ds}$$

Preuve :

On a $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = ds\,\vec{u}_{\mathcal{T}}$,ce qui donne la définition du vecteur tangent $\vec{u}_{\mathcal{T}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$.

Pour le vecteur normal, on remarque d'abord d'après le figure II.8 que $\vec{u}_n$ est le vecteur directement perpendiculaire au vecteur $\vec{u}_{\mathcal{T}}$ on a donc :

$$\vec{u}_n = \frac{d\vec{u}_{\mathcal{T}}}{d\theta}$$

D'autre part on a $ds = R_C\,d\theta \Longrightarrow d\theta = \frac{ds}{R_C}$ .Ce qui donne pour $\vec{u}_n$ l'expression

$$\vec{u}_n = R_C\,\frac{d\vec{u}_{\mathcal{T}}}{ds}$$

II.1.8.1 Vecteur vitesse dans le repère de Frenet :

En dérivant le vecteur position par rapport au temps on trouve l'expression du vecteur vitesse dans la base de Frenet :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{ds}{dt}\vec{u}_{\mathcal{T}}$$

En effet, on a déjà vu que $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = ds\,\vec{u}_{\mathcal{T}}$ ce qui donne pour le vecteur vitesse

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_{\mathcal{T}}$$

II.1.8.2 Vecteur accélération dans le repère de Frenet :

Le vecteur accélération dans la base de Frenet est donné par :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{u}_{\mathcal{T}} + \frac{V^2}{R_C}\vec{u}_n$$

Preuve :

Pour dériver l'expression du vecteur vitesse obtenue ci-haut, on doit dériver, entre autres, le vecteur tangentielle $\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}$ par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}}{dt} = \frac{d\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Sachant que $\frac{ds}{dt} = V$, le module du vecteur vitesse et que $\frac{d\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}}{dt} = \frac{1}{R_C}\vec{\mathcal{U}}_n$, on obtient :

$$\frac{d\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}}{dt} = \frac{V}{R_C}\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}$$

On dérive le vecteur vitesse pour obtenir l'expression du vecteur accélération :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \frac{d(\frac{ds}{dt}\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}})}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}} + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}} + \frac{V^2}{R_C}\vec{\mathcal{U}}_n$$

Le vecteur accélération peut être décomposé en une composante tangentielle, appelée accélération tangentielle :

$$\vec{\gamma}_{\mathcal{T}} = \frac{d\vec{V}}{dt}\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}$$

et une composante normale, appelée accélération normale :

$$\vec{\gamma}_{\mathcal{T}} = \frac{V^2}{R_C}\vec{\mathcal{U}}_n$$

Tel que

$$\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}_{\mathcal{T}} + \vec{\gamma}_n$$

ou encore en terme de modules

$$\gamma^2 = {\gamma_{\mathcal{T}}}^2 + {\gamma_n}^2$$

On peut remarquer que la composante de l'accélération normale est toujours positive, ce qui signifie que l'accélération normale est toujours orientée vers la concavité de la trajectoire.

II.1.9 Exemple de mouvement : Le mouvement circulaire

On considère le mouvement d'un point matériel M dont la trajectoire est un cercle dans le plan XOY, de centre O et de rayon
R.
Dans ce cas le vecteur position peut s'écrire dans la base cartésienne :

$$OM = R\,\cos\theta\,\vec{\imath} + R\sin\theta\,\vec{\jmath}$$

Ou encore dans le base des coordonnées polaires :
$\overrightarrow{OM} = R\,\vec{e}_\rho = R\,\vec{U}_r$

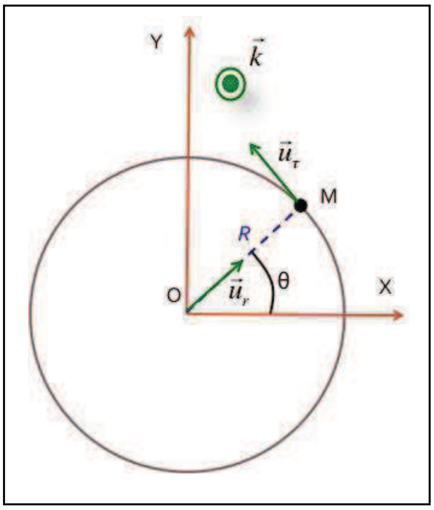


Figure II.9 : mouvement circulaire

Ici on a introduit le vecteur $\vec{U}_r = -\vec{U}_n$ .On remarque ainsi que le trièdre $(\vec{U}_r, \vec{U}_\mathcal{T}, \vec{k})$ *(à ne pas confondre avec la base de Frenet)* est un trièdre directe.

II.1.9.1 Le vecteur vitesse :

En utilisant les résultats dans la base de Frenet le vecteur vitesse s 'écrit :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{ds}{dt}\vec{U}_\mathcal{T} = V\,\vec{U}_\mathcal{T}$$

On avait aussi vu que $ds = R\,d\theta$, ce qui donne pour la vitesse $\vec{V}(M/R) = \frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\mathcal{T}$.

Ce qui permet d'écrire :

$$V = R\,\omega \qquad ou \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{est la vitesse angulaire}$$

La rotation étant autour de l'axe OZ, on définit le vecteur rotation angulaire dans ce cas de la façon suivante :

$$\vec{\omega} = \omega\,\overrightarrow{k} = \frac{d\theta}{dt}\,\vec{k}$$

On peut ainsi montrer que

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Preuve :

Le trièdre $(\vec{\mathcal{U}}_r, \vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T}, \vec{k})$ étant un trièdre directe on a $\vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T} = \vec{k} \wedge \vec{\mathcal{U}}_r$, ce qui permet d'écrire pour le vecteur vitesse :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = V\vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T} = R\,\omega\,\vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T} = R\,\omega\left(\vec{k} \wedge \vec{\mathcal{U}}_r\right) = \omega\vec{k} \wedge R\vec{\mathcal{U}}_r$$

En utilisant la définition du vecteur vitesse angulaire, $\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}$, et l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM} = R\,\vec{\mathcal{U}}_r$, on obtient alors $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$.

Remarque :

Si $\overrightarrow{OM}$ est un vecteur unitaire : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, alors on a le résultat important suivant :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

II.1.9.2 Le vecteur accélération :

En utilisant aussi les résultats obtenus dans la base de Frenet :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T} + \frac{V^2}{R_C}\vec{\mathcal{U}}_n$$

on réécrit le vecteur accélération en fonction de la vitesse angulaire de la façon suivante

$$\vec{\gamma}(M/R) = R\frac{d\omega}{dt}\vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T} + R\omega^2\,\vec{\mathcal{U}}_n$$

$\frac{d\omega}{dt}$ est l'accélération angulaire.

Remarque – Mouvement circulaire uniforme :

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme la vitesse angulaire est constante, c.à.d. que l'accélération angulaire est nulle :

$$\omega = cste \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = 0$$

L'accélération tangentielle étant nulle, l'accélération n'a qu'une seule composante, la composante normale :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}_n = R\omega^2\,\vec{\mathcal{U}}_n$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme l'accélération est toujours normale à la trajectoire et orienté vers le centre du cercle : l'accélération est centripète.

II.2 Cinématique avec changement de référentiel

II.2.1 Mouvement relatif et mouvement absolu

On considère deux référentiels $R_1(O_1; X_1, Y_1, Z_1)$ et $R_2(O_2; X_2, Y_2, Z_2)$, de base respectives $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ et $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ en mouvement l'un par rapport à l'autre. On suppose que R_1 est fixe, on l'appel référentiel absolu. Le référentiel R_2 est alors appelé référentiel relatif; il est en mouvement par rapport à R_1. On étudie le mouvement d'un point matériel M par rapport aux deux référentiels :

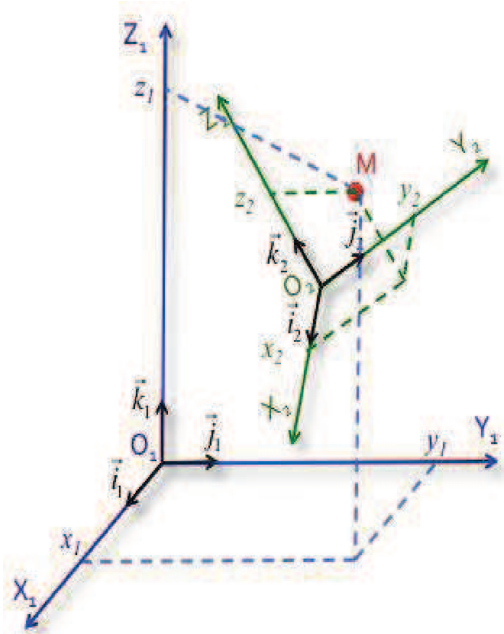


Figure II.10 : changement de référentiel

II.2.1.1 Le mouvement absolu de M

Le mouvement de M par rapport au référentiel absolu est appelé mouvement absolu. La position du point M est repéré par la donnée des coordonnées cartésiennes dans le référentiel *R1 (Figure II.10).*

$$\overrightarrow{O_1M} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$$

La vitesse absolue de M est la vitesse du point matériel M par rapport au référetiel absolu, elle est obtenue en dérivant par rapport au temps le vecteur position dans le référentiel R_1:

$$\vec{V}(M/R_1) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1}$$

Les vecteurs de la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ liés au référentiel R_1 leurs dérivées temporelles respectives sont nulles : $\left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right|_{R_1} = 0$

Il suffit alors de dériver les composantes : $\vec{V}(M/R_1) = \dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1 + \dot{z}_1\vec{k}_1$

L'accélération absolue est obtenue en dérivant la vitesse absolue par rapport au temps dans le référentiel absolu :

$$\vec{\gamma}(M/R_1) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R_1)}{dt}\right|_{R_1}$$

Là aussi, il suffit de dériver les composantes du vecteur vitesse absolue :

$$\vec{\gamma}(M/R_1) = \ddot{x}_1\vec{\imath}_1 + \ddot{y}_1\vec{\jmath}_1 + \ddot{z}_1\vec{k}_1$$

II.2.1.2 Mouvement relatif de M

Le mouvement de M par rapport au référentiel relatif est appelé mouvement relatif. La position du point M est repéré par la donnée des coordonnées cartésiennes dans le référentiel R_2 *(Figure II.10)*

$$\overrightarrow{O_2M} = x_2\vec{\imath}_2 + y_2\vec{\jmath}_2 + z_2\vec{k}_2$$

La vitesse relative de M est la vitesse du point matériel par rapport au référentiel relatif, elle est obtenue en dérivant par rapport au temps le vecteur position dans le référentiel R_2:

$$\vec{V}(M/R_2) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2}$$

Dans ce cas les vecteurs de la base $(\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2)$ étant liés au référentiel R_2 leurs dérivées temporelles respectives sont nulles : $\left.\frac{d\vec{\imath}_2}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d\vec{\jmath}_2}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d\vec{k}_2}{dt}\right|_{R_2} = 0$. Donc là aussi, il suffit de dériver les composantes :

$$\vec{V}(M/R_2) = \dot{x}_2\vec{\imath}_2 + \dot{y}_2\vec{\jmath}_2 + \dot{z}_2\vec{k}_2$$

L'accélération relative est obtenue en dérivant la vitesse relative par rapport au temps dans le référentiel relatif :

$$\vec{\gamma}(M/R_2) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R_2)}{dt}\right|_{R_2}$$

Elle a comme expression dans la base relative :

$$\vec{\gamma}(M/R_2) = \ddot{x}_2\vec{\imath}_2 + \ddot{y}_2\vec{\jmath}_2 + \ddot{z}_2\vec{k}_2$$

II.2.1.2.1 Cas particulier : R_2 en translation rectiligne par rapport à R_1

Dans ce cas, les vecteurs de la base relative $(\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2)$ sont aussi fixe par rapport au référentiel R_1:

$$\left.\frac{d\vec{\imath}_2}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{\jmath}_2}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{k}_2}{dt}\right|_{R_1} = \vec{0}$$

II.2.1.2.2 Cas particulier : R_2 en rotation par rapport à R_1

Si le référentiel R_2 est en rotation par rapport au référentiel R_1 avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}(R_2/R_1)$. Les vecteurs de la base relative sont alors aussi en rotation avec la même vitesse angulaire $\vec{\omega}(R_2/R_1) = \vec{\omega}$. En utilisant le résultat exprimé dans la remarque à la fin du paragraphe précédent on obtient les dérivées temporelles respectives des vecteurs de base :

$$\left.\frac{d\vec{\imath}_2}{dt}\right|_{R_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{\imath}_2 \ , \qquad \left.\frac{d\vec{\jmath}_2}{dt}\right|_{R_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{\jmath}_2 \ , \qquad \left.\frac{d\vec{k}_2}{dt}\right|_{R_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}_2$$

II.2.1.2.3 Cas général : R_1 en mouvement quelconque par rapport à R_2

Tout mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre peut être ramené à la composition d'un mouvement de translation rectiligne et d'un mouvement de rotation, d'où l'importance de ces deux types de mouvement.

II.2.1.3 Dérivation en repère mobile

Dans toute la suite (sauf si autrement précisé), on va considérer les deux référentiels *R_1 et R_2* liés respectivement au repères (O_1; X_1,Y_1 ,Z_1) et (O_2; X_2,Y_2 ,Z_2) et caractérisés, respectivement, par les bases orthonormées$(\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)$ et $(\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2)$. On considère que R_2 est en mouvement (quelconque) par rapport à R_1 et que ce mouvement est caractérisé par la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \vec{\omega}(R_2/R_1)$.

Soit un vecteur $\vec{A}$ défini par son expression dans le repère relatif R_2 :

$$\vec{A} = x_2\vec{\imath}_2 + y_2\vec{\jmath}_2 + z_2\vec{k}_2$$

Pour dériver le vecteur $\vec{A}$ par rapport au référentiel R_1 il faut dériver les composantes et les vecteurs de la base $(\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2)$ mobile par rapport à R_1 :

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_1} = \dot{x}_2\vec{\imath}_2 + x_2\frac{d\vec{\imath}_2}{dt} + \dot{y}_2\vec{\jmath}_2 + y_2\frac{d\vec{\jmath}_2}{dt} + \dot{z}_2\vec{k}_2 + z_2\frac{d\vec{k}_2}{dt}$$

On a vu que la dérivée d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ en rotation avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ par rapport à un repère fixe est donnée par $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$. En remplaçant $\vec{u}$ par les vecteurs de la base $(\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2)$ on obtient alors :

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_1} = \dot{x}_2\vec{\imath}_2 + \dot{y}_2\vec{\jmath}_2 + \dot{z}_2\vec{k}_2 + x_2(\vec{\omega} \wedge \vec{\imath}_2) + y_2(\vec{\omega} \wedge \vec{\jmath}_2) + z_2(\vec{\omega} \wedge \vec{k}_2)$$

$\dot{x}_2\vec{\imath}_2 + \dot{y}_2\vec{\jmath}_2 + \dot{z}_2\vec{k}_2 = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_2}$ est la dérivée du vecteur $\vec{A}$ dans le référentiel relatif

et $x_2(\vec{\omega} \wedge \vec{\imath}_2) + y_2(\vec{\omega} \wedge \vec{\jmath}_2) + z_2(\vec{\omega} \wedge \vec{k}_2) = \vec{\omega} \wedge (x_2\vec{\imath}_2 + y_2\vec{\jmath}_2 + z_2\vec{k}_2) = \vec{\omega} \wedge \vec{A}$

Ce qui permet d'écrire la dérivée du vecteur $\vec{A}$ dans le référentiel R_1 connaissant son expression dans le référentiel R_2.

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{A}$$

II.2.1.4 La loi de composition des vitesses

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

Ou

$\vec{V}_a = \vec{V}(M/R_1) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1} \Longrightarrow$ est la vitesse absolue du point matériel

$\vec{V}_r = \vec{V}(M/R_2) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2} \Longrightarrow$ est la vitesse relative du point matériel

$\vec{V}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2M} \Longrightarrow$ est la vitesse d'entrainement.

Preuve :

On commence par décomposer le vecteur position absolu en fonction du vecteur position relatif :

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M}$$

La vitesse absolue est obtenue en dérivant dans le référentiel absolu R_1 :

$$\vec{V}_a = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{R_1} + \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_1}$$

En utilisant les résultats obtenus dans le paragraphe précédent concernant la dérivation en repère mobile, on exprime le dernier terme en haut (on remplace $\vec{A}$ par $\overrightarrow{O_2M}$)

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

Ce qui donne pour l'expression de la vitesse absolue :

$$\vec{V}_a = \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2} + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

qui est le résultat cherché. Le premier terme est la vitesse relative et les deux derniers termes donnent la vitesse d'entrainement.

II.2.1.5 Composition des accélérations

La loi de décomposition des accélérations s'écrit de la façon suivante

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$$

Ou

$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}(M/R_1) = \left.\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right|_{R_1} \Longrightarrow$ est l'accélération absolue du point matériel

$\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M/R_2) = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_2M}}{dt^2}\right|_{R_2} \Longrightarrow$ est l'accélération relative du point matériel

$$\vec{\gamma}_e = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_{R_1} + \frac{d\vec{\omega}(R_2/R_1)}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\omega}(R_2/R_1) \wedge \left(\vec{\omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2M}\right) \Rightarrow$$

est l'accélération d'entrainement , et

$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{V}_r \implies$ est l'accélération complémentaire, aussi appelée accélération de Coriolis

Preuve :

$$\vec{\gamma}_a = \left.\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right|_{R_1} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_r + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right)\Bigg|_{R_1}$$

$$\implies \vec{\gamma}_a = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{R_1} + \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_{R_1} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\omega} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_1}$$

On développe le premier et le dernier terme.

$$\left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$$

où on a utilisé la règle de dérivation d'un vecteur dans un repère mobile. Pour le dernier terme on obtient

$$\vec{\omega} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_1} = \vec{\omega} \wedge \left(\left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right)$$

$$= \vec{\omega} \wedge \vec{V}_r + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_2M})$$

En rapportant dans l'expression initiale, on obtient l'expression complète de l'accélération absolue :

$$\vec{\gamma}_a = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{R_2} + \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_{R_1} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right) + 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$$

Le premier terme à droite est l'accélération relative, le dernier est l'accélération de Coriolis et les termes restants composent l'accélération d'entrainement.

II.2.1.6 Exemples de mouvements particuliers

On considère deux cas particuliers de mouvement du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu.

II.2.1.6.1 Mouvement rectiligne :

Si le référentiel R_2 est en translation rectiligne par rapport au référentiel absolu R_1, la vitesse de rotation angulaire est nulle

$$\vec{\omega}(R_2/R_1) = \vec{0}$$

La formule de décomposition des vitesses devient alors :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r(M) + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{R_1}$$

Le second terme n'étant rien d'autre que la vitesse absolue du point O_2 :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_a(O_2)$$

De même, l'accélération absolue s'écrit

$$\vec{\gamma}_a = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{R_2} + \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_{R_1}$$

Le premier terme étant l'accélération relative du point M et le second l'accélération absolue du point O_2 :

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_a(O_2)$$

Si en plus le mouvement relatif est rectiligne uniforme on aura la vitesse du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu qui est constante c à d $\vec{V}_a(O_2) = cste$ et $\vec{\gamma}_a(O_2) = \vec{0}$.

L'accélération relative est alors égale à l'accélération absolue :

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r(M)$$

II.2.1.6.2 Mouvement de Rotation uniforme :

On suppose que le référentiel R_2 est en rotation uniforme par rapport au référentiel absolu R_1, et que la rotation s'effectue autour d'un axe passant par l'origine commun aux deux référentiels $O = O_1 = O_2$. Dans ce cas $\vec{\omega}(R_2/R_1) = \vec{\omega} = cste; c.\text{à}.d.\frac{d\vec{\omega}(R_2/R_1)}{dt} = \vec{0}$

Les expressions de la vitesse d'entrainement et de l'accélération d'entrainement deviennent particulièrement simples :

$$\vec{V}_e(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Exercices d'application

Partie A: Cinématique sans changement de référentiel

Exercice II.A.1:

On considère un point matériel M se déplaçant dans un référentiel $\mathfrak{R}(O,xyz)$ muni de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Les coordonnées du point M dans le référentiel $\mathfrak{R}$ sont données par :

$x(t)= t+1$, $y(t) = t^2+1$ et $z(t) = 0$. (t étant le temps)

1) Donner l'équation de la trajectoire de M dans $\mathfrak{R}$. En déduire sa nature.

2) Calculer la vitesse $\vec{V}(M/\mathfrak{R})$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})$ du point M.

Exercice II.A.2:

Dans un repère cartésien (O, x, y, z), muni de la base $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$,un point M en mouvement a pour équations horaires :

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{(unités du système international)}$$

1) Déterminer l'équation de la trajectoire et montrer que c'est un cercle dont le centre **C** est sur l'axe Ox ($OC = +1$ m) et dont le rayon est $R = 1m$.

2) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}$. Préciser sa direction par rapport à la trajectoire. Donner la valeur de la vitesse V du point M et montrer que le mouvement est uniforme.

3) Exprimer le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ (ou vecteur rotation). Donner la valeur de ω.

4) Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}$. Le comparer avec le vecteur $\overrightarrow{CM}$. Que peut-on dire de ce vecteur par rapport au vecteur vitesse $\vec{V}$ et par rapport à la trajectoire. Donner la valeur de a.

5) Représenter la trajectoire, le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$, le vecteur vitesse $\vec{V}$ainsi que le vecteur accélération $\vec{a}$ en un point M quelconque.

Exercice II.A.3:

Une particule décrivant une trajectoire curviligne dans le plan (ox, oy) est repérées, en coordonnées polaires par les équations :

$$r(t) = r_0\, e^{-\frac{t}{a}} \text{ et } \theta(t) = \frac{t}{a} \text{(} r_0 \text{ et a sont des constantes positives)}$$

1) Donner l'expression du vecteur vitesse de cette particule.

2) Montrer que l'angle $(\vec{V}, \vec{u}_\theta)$ est constant. Quelle est sa valeur ?

3) Donner l'expression du vecteur accélération.

4) Montrer que l'angle entre le vecteur accélération et la normale $(\vec{a}_n, \vec{u}_n)$ est constant. Donner sa valeur (On se servira de la question 2)

5) Calculer le rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice II.A.4:

Une comète se déplace dans le système solaire. Sa position a pour expression :

$$\overrightarrow{OM} = (t-1)\,\vec{\imath} + \frac{t^2}{2}\vec{\jmath}$$

Où O est l'origine du repère (le soleil) et t représente le temps exprimé en secondes. On suppose que la comète reste dans le plan (O, x, y).

1) Déterminez les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur accélération $\vec{a}$.

2) En partant de l'expression de l'accélération normale en fonction du rayon de courbure ρ, démontrez la relation :

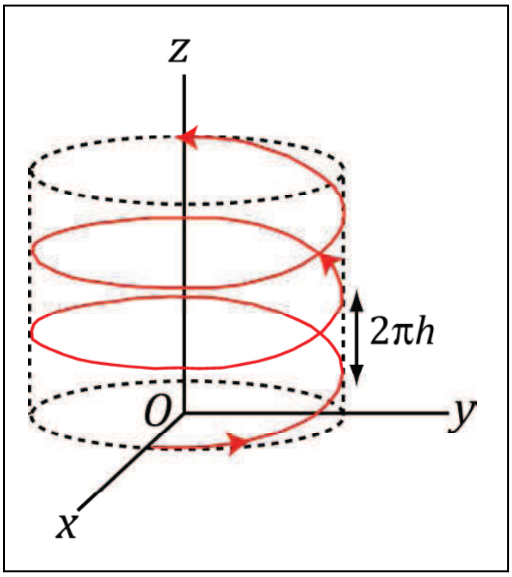
$$\rho = \frac{v^3}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}$$

- En déduire le rayon de courbure ρ de la trajectoire en fonction de t.

3) Déterminez l'expression l'accélération tangentielle $\vec{a}_t$.

4) En déduire celle de l'accélération normale $\vec{a}_n$.

Exercice II.A.5:



Le référentiel d'étude $(\mathcal{R})$ est associé au repère d'espace orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Soit l'hélice droite définie en coordonnées cylindriques dans $(\mathcal{R})$ par (h est une constante positive) :

$$\begin{cases} r = R_0 \\ z = h\theta \end{cases}$$

On s'intéresse à un point matériel M qui décrit cette hélice dans le sens des θ croissants.

1) Calculer les vecteurs vitesse et accélération de M dans $(\mathcal{R})$ en coordonnées cylindriques.

2) Calculer la vitesse v de M dans $(\mathcal{R})$.

3) M parcourt l'hélice à la vitesse constante V_0. En déduire les vecteurs vitesse et accélération De M dans $(\mathcal{R})$ en fonction de V_0, R_0 et h.

Exercice supplémentaire :

On considère un cercle (C) de centre 0 de rayon R dans le plan(XOY) un point M décrit le cercle (C) avec une accélération angulaire α.

1) Déterminer en fonction des coordonnées polaires, les composantes des vecteur : Position, vitesse et accélération du point M.

2) En posant $\alpha = \alpha_0 = c^{ste}$. A l'instant initial t=0, le point M se trouve en $M_0(R, 0)$.

3) Calculer la vitesse angulaire ω et l'angle $\theta(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM})$ en fonction du temps.

4) Déduire les accélérations normale et tangentielle γ_N et γ_t.

Partie B: Cinématique avec changement de référentiel (Mouvement relatif)

Exercice II.B.1:

Les coordonnées d'une particule mobile dans le référentiel $R_0(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont données en fonction du temps par : $X(t) = t^2 - 4t + 1$, $y(t) = -2t^4$ et $z(t) = 3t^2$

Dans un deuxième référentiel $R_1(O_1, \vec{\imath}_1 = \vec{\imath}, \vec{\jmath}_1 = \vec{\jmath}, \vec{k}_1 = \vec{k})$, elles ont pour expression :

$X_1(t) = t^2 + t = 2$ $\qquad$ $y_1(t) = -2t^4 + 5$ $\qquad$ $z(t) = 3t^4 - 7$

1) Déterminer les expressions des vitesses $\vec{V}(M/R_0)$ et $\vec{V}(M/R_1)$

2) Exprimer la vitesse $\vec{V}(M/R_0)$ en fonction de $\vec{V}(M/R_1)$

3) Exprimer l'accélération $\vec{\gamma}(M/R_0)$ en fonction de l'accélération $\vec{\gamma}(M/R_1)$

4) Quelle est la nature du mouvement du référentiel R_1 par rapport au référentiel R_0 ?

5) Supposant R_0 . R_1 est il aussi galiléen ? justifier votre réponse

Exercice II.B.2:

On considère la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ attacheé à un referentiel absolu $R(O,X,Y,Z)$. et la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$ lié à un referentiel $R_1(O,X_1,Y_1,Z_1)$. Un point M est assujetti à se déplacer sur une tige (T_1). La tige (T_1) est solidaire en O_1 avec une tige (T) en rotation autour de l'axe (OZ) d'ange $\varphi(t)$, (voir figure ci-dessous). La tige (T_1) est situe dans le plan vertical $(\vec{e}_\rho,\vec{k})$. Le point O_1 est repérée par $\overrightarrow{OO_1} = \rho(t)\vec{e}_\rho$ et le point M est repéré sur la tige (T_1) par :

$\overrightarrow{O_1M} = V_0 t\,\vec{u}\ (V_0 = cste)$. Le veteur fait un angle constant avec le vecteur $\vec{e}_\rho$

I. Etude de la cinématique de M par calcul direct :

a) Vérifier que la vitesse de rotation $\vec{\Omega}\,(R_1/R) = \dot{\varphi}\vec{k}$.

b) Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{e}_\rho$, $\vec{k}$ et l'angle .

c) Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

d) Déterminer la vitesse absolue de M, $\vec{V}(M/R)$.

e) Déterminer l'accélération absolue de M, $\vec{\gamma}(M/R)$.

II. Etude de la cinétique de M par décomposition de mouvement

a) Déterminer la vitesse relative de M, $\vec{V}_r(M/R_1)$

b) Déterminer la vitesse d'entrainement de M, $\vec{V}_e(M)$

c) En déduire la vitesse absolue de M, $\vec{V}_a(M/R)$

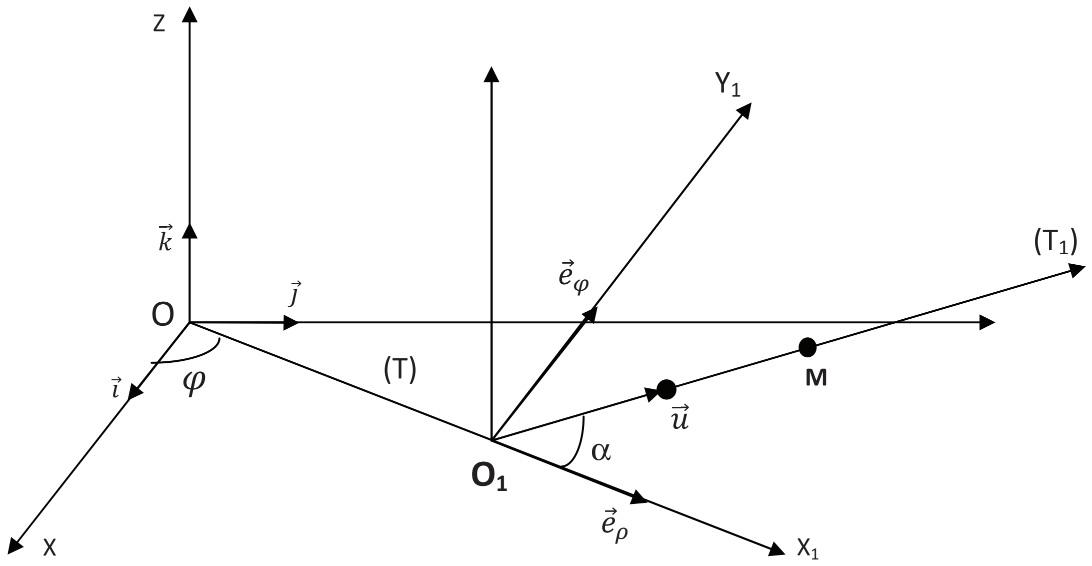
d) Déterminer l'accélération relative de M, $\vec{\gamma}_r(M/R_1)$

e) Déterminer l'accélération d'entrainement de M, $\vec{\gamma}_r(M)$

f) Déterminer l'accélération de Coriolis de M, $\vec{\gamma}_c(M)$

g) En déduire l'accélération absolue de M, $\vec{\gamma}_a(M/R)$.

N.B :Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dan la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$



Exercice II.B.3:

Soient $R_0(O, X_0, , Y_0, Z_0)$ un référentiel absolus fixe et $R(O\ , X\ , Y\ , Z_0)$ référentiel relatif en mouvement de rotation de vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt} = \ \dot{\theta}$ par rapport à $R_0(O, X_0, Y_0, Z_0)$

Un point M décrit un mouvement circulaire dans $R(O, X\ , Y\ , Z\ )$ autour de l'axe OZ_0. M est repéré par ses coordonnés cylindriques (ρ, φ, Z) (voir figure ci-dessous).

On pose : $\rho = om = a$ et $z = \overrightarrow{OH}$ ou a et b sont des constantes.

1) Rappeler les lois de composition des vitesses et des accélérations ?

2) Déterminer dans la base orthonormée directe $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$

a) Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$

b) Le vecteur rotation de $R\ (O\ , X, Y\ , Z_0\ )$ par rapport à $R_0\ (O\ , X_0, Y_0\ , Z_0\ )$

c) Le vecteur vitesse relative $\overrightarrow{V_r}(M)$.

d) Le vecteur vitesse d'entrainement $\overrightarrow{V_e}(M)$.

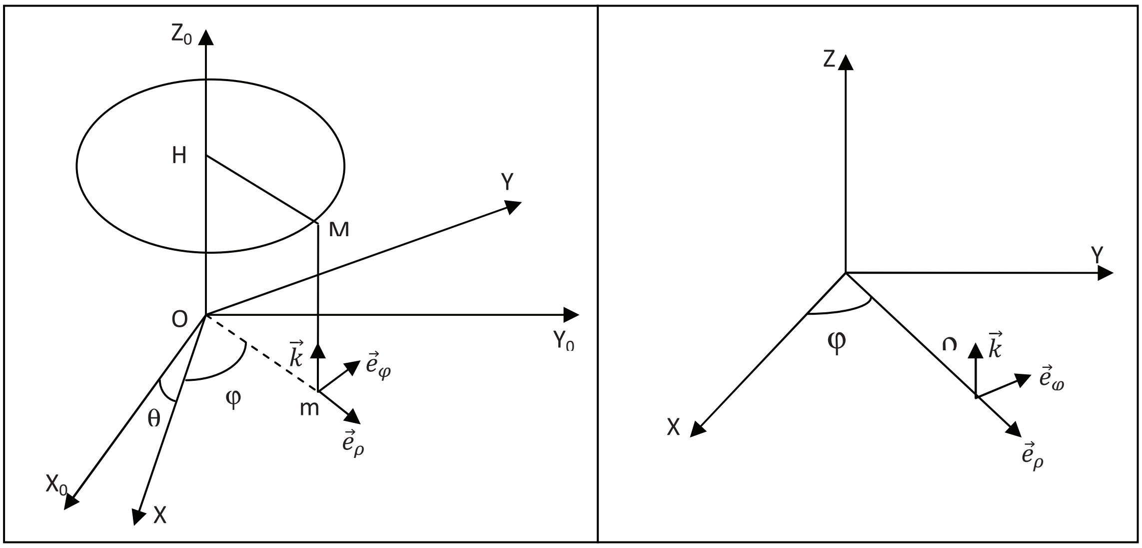
e) Le vecteur vitesse absolue $\overrightarrow{V_a}(M)$.

f) Le vecteur accélération relative $\overrightarrow{\gamma_r}(M)$.

g) Le vecteur d'entrainement $\overrightarrow{\gamma_e}(M)$.

h) Le vecteur accélération coriolis $\overrightarrow{\gamma_c}(M)$.

i) Le vecteur accélération absolue $\overrightarrow{\gamma_a}(M)$.



Exercice II.B.4:

Dans un plan Oxy, un cercle O' et le diamètre $OA = 2.R$ tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour du point O. On lie à son centre mobile O', deux axes perpendiculaires $O'x'$ et $O'y'$. L'axe $O'x'$ est dirigé suivant OA.

A l'intant $t = 0$, A est sur l'axe Ox parallèle à $O'x'$. Un point M initialement en A, parcourt la circonférence dans le sens positif avec la même vitesse angulaire ω .

a) Donner l'expression de $\overrightarrow{OM}$ dans le repère fixe $R(Oxy)$.

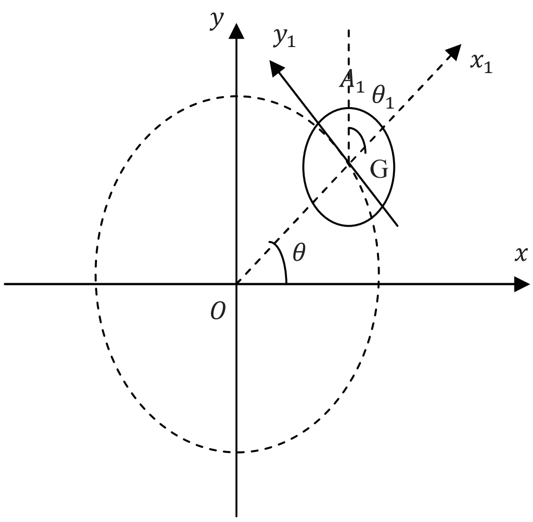
b) Calculer la vitesse absolue $\vec{v}_a$ et l'accélération absolue $\vec{\gamma}_a$ de M.

c) Calculer la vitesse relative $\vec{v}_r$ et l'accélération relative $\vec{\gamma}_r$ de M.

d) Calculer la vitesse d'entrainement $\vec{v}_e$ et l'accélération d'entrainement $\vec{\gamma}_e$

e) Calculer l'accélération de coriolis $\vec{\gamma}_r$ et vérifier que : $\overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_r} + \overrightarrow{\gamma_e} + \overrightarrow{\gamma_c}$

Exercice supplémentaire:



Le repère d'espace $\overrightarrow{Gx_1}$, $\overrightarrow{Gx_2}$ du référentiel R_1 tourne autour de l'axe $\overrightarrow{OZ}$ du référentiel R d'axes $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}$. Le point G décrit un cercle de rayon a constant, à la vitesse angulaire constante ω_0. Dans R_1 le point A_1 décrit un cercle de rayon r et de centre G, avec la vitesse angulaire constante ω_1 (figure si dessous).

- Exprimer la vitesse d'entraînement de A_1, son accélération d'entraînement et son accélération complémentaire.

Solution des exercices

Partie A: Cinématique sans changement de référentiel

Exercice II.A.1:

a) L'équation de la trajectoire :

Soit un point matériel M de coordonnées $x(t), y(t) et\ z(t)\ données\ par$:

$$x(t) = t + 1 \quad (1);\ \ y(t) = t^2 + 1\ \ (2)\ \ \ et\ \ \ z(t) = 0 \quad (3).$$

L'équation de la trajectoire de M dans R

(1)→ $t = x(t) - 1$ on remplace dans l'équation (2) on obtient :

(2)$\Longrightarrow\ y(t) = (x(t) - 1)^2\ + 1.$

Donc la trajectoire décrit par le point M est une parabole.

b) Calcul de la vitesse $\vec{V}(M/R)$:

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d[(t+1)\vec{\imath} + (t^2+1)\vec{\jmath}]}{dt}\right|_R \ \ 1\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath}$$

Alors : $$\boxed{\vec{V}(M/R) = 1\,\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath}}$$

$\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont fixe dans R donc $\left.\frac{d\vec{\imath}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{\jmath}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_R = 0$

$\text{l'accélération}\ \ \vec{\gamma}(M/R)$

$$\vec{\gamma}\left(\frac{M}{R}\right) = \left.\frac{d\vec{V}\left(\frac{M}{R}\right)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath})}{dt}\right|_R = 2\vec{\jmath}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = 2\vec{\jmath}}$$

Exercice II.A.2 :

1) L'équation de la trajectoire :

On a $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases}$

Donc

$(x-1)^2 + y^2 = cos^2 t + sin^2 \mathrm{t} = 1 \Rightarrow$ La trajectoire est un cercle de centre $x_0 = 1$m et

$y_0 = 0\ soit\ \overrightarrow{OC} = \vec{u}_x\ et\ de\ rayon\ R = 1$ m (dans le plan Oxy).

2) La vitesse $\vec{V}$:

$\begin{cases} \dot{x} = \sin t \\ \dot{y} = \cos t \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{V} = -\sin t\, \vec{u}_x + \cos t\, \vec{u}_y$

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{V}\| = sin^2 t + cos^2 t = 1\, m.s^{-1}.}$$

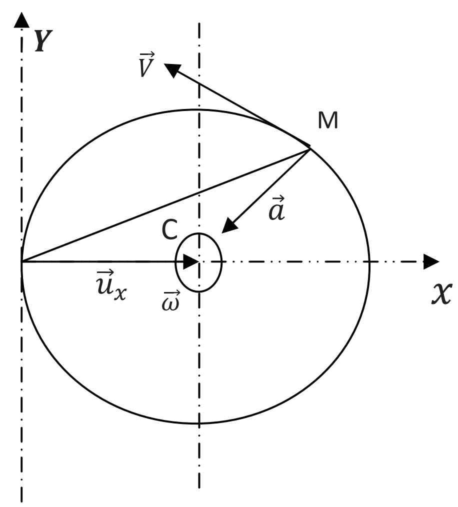
La vitesse est constante, le mouvement est donc uniforme. Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire circulaire (perpendiculaire au rayon correspondant).

3) La vitesse angulaire :

$$\boxed{\vec{\omega} = \omega.\vec{u}_{z,} \Rightarrow \omega = \frac{V}{R} = 1\, rad.s^{-1}}$$

4) La vecteur accélération :

$\begin{cases} \ddot{x} = -\cos t \\ \ddot{y} = -\sin t \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = -(\cos t)\vec{u}_x - (\sin t)\vec{u}_y.$



Ce vecteur est normal et centripète (mouvement circulaire uniforme) dirigé de M vers C. Ce vecteur est perpendiculaire au vecteur vitesse.

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} - \vec{u}_x$

$\overrightarrow{CM} = (1 + \cos t - 1)\vec{u}_x + (sin\ t\,)\vec{u}_y = -\vec{a}$

Exercice II.A.3:

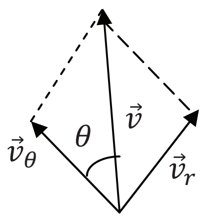
1- Calcul du vecteur vitesse :

$$\vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{r_0}{a}e^{-\frac{1}{a}}(-\vec{u}_r + \vec{u}_\theta)}$$

2- L'angle $(\vec{V}, \vec{u}_\theta)$ s'écrit :

$$tg\ \alpha = \frac{v_r}{v_\theta} = -1 \ \Rightarrow \boxed{\theta = -\frac{\pi}{4}}$$



3- Vecteur accélération :

$$\vec{a} = a_r\vec{u}_r + a_\theta\vec{u}_\theta \quad \Longrightarrow \boxed{\vec{a} = -2\frac{r_0}{a^2}e^{-\frac{t}{a}}\,\vec{u}_\theta}$$

4- Calcul de l'angle $(\vec{a}, \vec{u}_N)$:

$\vec{a}$ est porté par -$\vec{u}_\theta$ et à la question 2 on a vu que $(\vec{V}, \vec{u}_\theta) = -\frac{\pi}{4}\ donc\ (\vec{V}, \vec{a}) = \frac{3\pi}{4}$

Comme $(\vec{V}, \vec{u}_T) = 0$ donc $(\vec{u}_T, \vec{u}_N) = \frac{\pi}{2}$

donc :

$$\boxed{(\vec{a}, \vec{u}_N) = \frac{\pi}{4}}$$

5- Calcul du rayon de courbure :

A partir de la question 1 on déduit que :

$$v = \sqrt{2}\frac{r_0}{a^2}e^{-\frac{t}{a}}$$

$$a_N = a\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\frac{r_0}{a^2}e^{-\frac{t}{a}}$$

et comme :

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{v^2}{a_N} = \sqrt{2}r_0e^{-\frac{t}{a}}}$$

Exercice II.A.4:

1) Le vecteur vitesse et accélération :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x(t) = t - 1 \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x(t) = 1 \\ v_{y(t)} = t \end{cases} \Rightarrow \vec{a}\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 1 \end{cases}$$

La norme du v et a:

$$\boxed{v = \sqrt{1+t^2} \quad et \quad a = 1m/s^2}$$

2) Le rayon de courbure :

On sait que : $\|\vec{v}\times \vec{a}\| = v.a.sin\alpha \quad et \quad a_N = \frac{v^2}{\rho} = a\ sin\alpha$

On a :

$$\rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{v^2}{a \sin\alpha} \quad et\ \ \mathrm{sin}\alpha = \frac{\|\vec{v}\times \vec{a}\|}{v.a}$$

en remplaçant on a :

$$\rho = \frac{v^3}{\|\vec{v}\times \vec{a}\|}$$

Comme $v^3 = \left(\sqrt{1+t^2}\right)^3 = (1+t^2)^{3/2} \quad et \quad \|\vec{v}\times\vec{a}\| = 1 \Rightarrow \boxed{\rho = (1+t^2)^{3/2}}$

3) Composante a_t :

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$$

4) Composante a_N :

$$\boxed{a_N = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$$

Exercice II.A.5:

1) Le vecteur vitesse et accélération :

Le vecteur position M dans la base des coordonnées cylindriques est :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r = R_0 \\ z = h\theta \end{cases}$$

Donc $$\overrightarrow{OM} = R_0\vec{e}_r + h\theta\,\vec{e}_z$$

On peut alors calculer les vecteurs vitesse et accélération de M dans ($\mathcal{R}$)

La vitesse est donc :

$$\vec{v}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$$

$$\vec{v}(M/R) = \frac{d(R_0\vec{e}_r + h\theta\,\vec{e}_z)}{dt} = \frac{d(R_0\vec{e}_r)}{dt} + \frac{d(h\theta\,\vec{e}_z)}{dt}$$

$$\vec{v}(M/R) = R_0\frac{d\vec{e}_r}{dt} + h\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} \dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{v}(M/R) = R_0\dot{\theta}\vec{e}_\theta + h\dot{\theta}\,\vec{e}_z}$$

De même pour l'accélération :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{v}(M/R)}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d(R_0\dot{\theta}\vec{e}_\theta + h\dot{\theta}\,\vec{e}_z)}{dt}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = R_0\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{e}_\theta + R_0\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + h\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta} \\ \dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r \end{cases}$$

Finalement on obtient :

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = -R_0\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R_0\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + h\ddot{\theta}\vec{e}_z}$$

2) Calcul du module de la vitesse $v(M/R)$:

$$v = \|\vec{v}(M/R)\|$$

La base étant une base orthonormée, on peut écrire :

$$v = \sqrt{\left(R_0\dot{\theta}\,\right)^2 + (\,h\dot{\theta})^2} = |\dot{\theta}|\sqrt{{R_0}^2 + h^2}$$

Le point matériel M décrit l'hélice dans le sens des θ croissants donc $\theta \nearrow$ au cours de temps, ce qui signifie que $\dot{\theta} > 0$. On obtient donc finalement :

$$\boxed{v = \dot{\theta}\sqrt{{R_0}^2 + h^2}}$$

3) M parcourt l'hélice à la vitesse constante V_0 . on a donc :

$$v = \dot{\theta}\sqrt{{R_0}^2 + h^2} = V_0$$

$$\dot{\theta} = \frac{V_0}{\sqrt{{R_0}^2 + h^2}} = c^{ste} \quad et \quad \ddot{\theta} = 0$$

La vitesse devient :

$$\vec{v}(M/R) = R_0\dot{\theta}\vec{e}_\theta + h\dot{\theta}\,\vec{e}_z = \frac{R_0V_0}{\sqrt{{R_0}^2 + h^2}}\vec{e}_\theta + \frac{hV_0}{\sqrt{{R_0}^2 + h^2}}\vec{e}_z$$

De même pour l'accélération :

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = -R_0\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\frac{R_0{V^2}_0}{{R_0}^2 + h^2}\vec{e}_r}$$

Partie B: Cinématique avec changement de référentiel (Mouvement relatif)

Exercice II.B.1:

Soit $\begin{cases} X(t) = t^2 - 4t + 1 \\ Y(t) = -2t^4 \\ Z(t) = 3t^2 \end{cases}$; $\begin{cases} X_1(t) = t^2 + t + 2 \\ Y_1 = -2t^4 + 5 \\ Z_1(t) = 3t^2 - 7 \end{cases}$

1) Les expressions des vitesses $\vec{V}(M/R_0)$ *et* $\vec{V}(M/R_1)$:

- **L'expression de la vitesse $\vec{V}(M/R_0)$**

$$\vec{V}\left(\frac{M}{R_0}\right) = \frac{d}{dt}((t^2 - 4t + 1)\vec{\imath} - 2t^4\vec{\jmath} + 3t^2\vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(M/R_0) = (2t - 4)\vec{\imath} - 8t^3\,\vec{\jmath} + 6t\,\vec{k}}$$

- **L'expression de $\vec{V}(M/R_0)$**

$$\vec{V}(M/R_1) = \frac{d\,\overrightarrow{O_1M}}{dt}\bigg|_{R_1} = \frac{d\left(\left(t^2+t+2\right)\vec{\imath}\,(-(2t^4+5)\vec{\jmath}+(3t^2-7)\vec{k}\right)}{dt}\Bigg|_{R_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(M/R_1) = (2t+1)\vec{\imath} - 8t^3\vec{\jmath} + 6t\vec{k}}$$

2) $\vec{V}(M/R_0)$ en fonction de la vitesse $\vec{V}(M/R_1)$:

On a

$$\vec{V}(M/R_0) = (2t-4)\vec{\imath} - 8t^3\vec{\jmath} + 6t\vec{k} = (2t+1)\vec{\imath} - 5\vec{\imath} - 8t^3\vec{\jmath} + 6t\vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}(M/R_1) - 5\vec{\imath}}$$

3) $\vec{\gamma}(M/R_0)$ *en fonction de* $\vec{\gamma}(M/R_1)$:

$$\vec{\gamma}(M/R_0) = \frac{d\vec{V}(M/R_0)}{dt}\,/R_0 = \frac{d}{dt/R}\,\left(\vec{V}(M/R_1) - 5\vec{\imath}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(M/R_0) = \vec{\gamma}(M/R_1) + \vec{0}\begin{pmatrix}\vec{\imath} = \vec{\imath_1}\\ \vec{\jmath} = \vec{\jmath_1}\\ \vec{k} = \vec{k_1}\end{pmatrix}$$

$\vec{\gamma}\left(\frac{M}{R_0}\right) = \vec{\gamma}\left(\frac{M}{R_1}\right)$ ou bien on a:

$$\vec{V}(M/R_0) = (2t-4)\vec{\imath} - 8t^3\vec{\jmath} + 6\,t\vec{k}\ et\ \vec{V}(M/R_1) = (2t+1)\vec{\imath} - 8t^3\vec{\jmath} + 6t\vec{k}$$

$$\vec{\gamma}(M/R_0) = \frac{d(V(M/R_0))}{dt}\bigg|_{R_0} = 2\vec{\imath} - 24t^2\vec{\jmath} + 6\vec{k}$$

$$et\quad \vec{\gamma}(M/R_1) = \frac{d(V(M/R_1) =}{dt}\bigg|_{R_1} = 2\vec{\imath} - 24t^2\vec{\jmath} + 6\vec{k}$$

Finalement $\boxed{\vec{\gamma}(M/R_1) = \vec{\gamma}(M/R_0)}$

4) La nature du mouvement du R_1 par rapport à R_0

- On a $\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \vec{0}$ $\Rightarrow$ *translation*

- $\vec{V}(M/R_0) - \vec{V}(M/R_1) = -5\vec{\imath}$ $\Longrightarrow Rectiligne$
- $\vec{\Upsilon}(M/R_0) = \vec{\Upsilon}(M/R_1)$ $\Longrightarrow Uniform$

R_1 est en translation rectiligne uniforme

5) Si R_0 est galiléen alors R_1 est aussi galiléen

6) Car R_1 est en translation rectiligne uniforme par rapport à R_0.

Exercice II.B.2:

$R(O,x,y,z) \rightarrow (\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et $R1(O,x1,y1,z1). \rightarrow (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ Référentiel relatif.

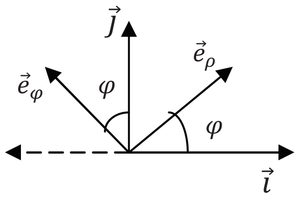
$\overrightarrow{OO_1} = \rho(t)\vec{e}_\rho ; \overrightarrow{O_1M} = V_0 t\vec{u}\ avec\ V_0 = Cst\ et\ (\widehat{\vec{u},\vec{e}_\rho}) = \alpha = Cst.$

$\left.\frac{d\vec{\imath}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{\jmath}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_R = 0\ \ car\ (\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}) base\ de\ R\ \ et\ \ \left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{R1} = \left.\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_{R1} = \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{R1} =$ $0\ \ car\ (\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ base de R_1

Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$

I. Etude de la cinématique de M par calcul direct :

a) La vitesse de rotation $\vec{\Omega}(R_1/R)$



$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\vec{\jmath}$$
$$\vec{e}_\varphi = \cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\vec{\jmath}$$
$$\left.\frac{d(\cos\varphi)}{dt}\right|_R = \frac{d\cos\varphi}{d\varphi} \times \frac{d\varphi}{dt} = -\sin\varphi \times \dot{\varphi}$$

en effet :

$$\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{R1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{e}_\rho$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{d(\cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\vec{\jmath})}{dt}\right|_R = 0 + \vec{\Omega}(R1/R) \wedge \vec{e}_\rho$$

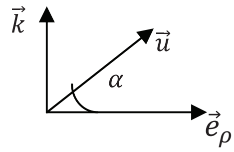
$$\left.\frac{d(\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\vec{\jmath})}{dt}\right|_R = \dot{\varphi}(-\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}) = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\left.\frac{d'(\cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\vec{\jmath})}{dt}\right|_R = \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho$$

Alors : $\boxed{\vec{\Omega}(R1/R) = \dot{\varphi}\vec{k}}$

b) L'expression de $\vec{u}$ en fonction de $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k}$ et α

$$\vec{u} = \cos\alpha\vec{e}_\rho + \sin\alpha\vec{k}$$



c) L'expression de $\overrightarrow{OM}$

on a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = \rho(t)\vec{e}_\rho + V_0t\vec{u}$

$$\overrightarrow{OM} = \rho(t)\vec{e}_\rho + V_0t\left(cos\alpha\vec{e}_\rho + sin\alpha\vec{k}\right)$$

Alors :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = (\rho(t) + V_0t\ cos\ \alpha)\vec{e}_\rho + V_0t\sin\alpha\vec{k}}$$

a) La vitesse absolue de M, $\vec{V}(M/R)$

On a :

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M})}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(\rho(t) + V_0t\ cos\alpha)\vec{e}_\rho + V_0t\ sin\alpha\vec{k})}{dt}\right|_R$$

Avec V_0 et α sont les constantes et $\vec{k}$ fixe dans R

$$\vec{V}(M/R) = (\dot{\rho}(t) + V_0cos\alpha)\vec{e}_\rho + (\rho(t) + V_0t\ cos\alpha)\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_R + V_0t\ sin\alpha\vec{k}$$

Avec

$$\left.\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_R = \frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\varphi} \times \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_R = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = (\dot{\rho}(t) + V_0\ cos\alpha)\overrightarrow{e_\rho} + (\rho(t) + V_0t\ cos\alpha)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + V_0t\ sin\alpha\ \vec{k}}$$

b) L'accélération absolue de M :

$$\vec{\gamma}\left(\frac{M}{R}\right) = \left.\frac{d\vec{V}\left(\frac{M}{R}\right)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R$$

$$= \left.\frac{\overbrace{d(\dot{\rho}(t) + V_0cos\alpha)\overrightarrow{e_\rho}}^{A} + \overbrace{(\rho(t) + V_0t\ cos\alpha)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}}^{B} + \overbrace{V_0t\ sin\alpha\ \vec{k}}^{C}}{dt}\right|_R$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_R = \ddot{\rho}(t)\overrightarrow{e_\rho} + (\dot{\rho}(t) + V_0\ cos\alpha)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\left.\frac{dB}{dt}\right|_R = \ddot{\varphi}(\rho(t) + V_0 t\ cos\alpha)\overrightarrow{e_\varphi} + (\dot{\rho}(t) + V_0\ cos\alpha)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\varphi}^2(\rho(t) + V_0 t\ cos\alpha)(-\overrightarrow{e_\rho})$$

$$= \big(\ddot{\varphi}(\rho(t) + V_0 t\ cos\alpha) + (\dot{\rho}(t) + V_0\ cos\alpha)\big)\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2(\rho(t) + V_0 t\ cos\alpha)\overrightarrow{e_\rho}$$

avec $\left.\frac{\overrightarrow{de_\varphi}}{dt}\right|_R = \frac{\overrightarrow{de_\varphi}}{d\varphi} \times \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_R = -\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$

$\left.\frac{dC}{dt}\right|_R = 0$ *donc :*

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = \begin{cases} \ddot{\rho}(t) - \dot{\varphi}^2(\rho(t) + V_0 t\ cos\alpha)\overrightarrow{e_\rho} \\ \ddot{\varphi}(\rho(t) + \rho(t) + V_0 t\ cos\alpha) + 2\dot{\varphi}(\rho(t) + V_0\ cos\alpha)\overrightarrow{e_\varphi} \\ 0\,\vec{k} \end{cases}}$$

II. Etude de la cinétique de M par décomposition de mouvement

a) La vitesse relative de M, $\vec{V}(M/R_1)$

$\vec{V}(M/R_1) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1}$ avec O_1 l'origine de R_1 et $\overrightarrow{O_1M} = V_0 t\ (cos\alpha\ \overrightarrow{e_\rho} + \sin\alpha\ \vec{k})$

$\left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1} = V_0\left(\cos\alpha\ \overrightarrow{e_\rho} + \sin\alpha\ \vec{k}\right) \Longrightarrow \boxed{\vec{V}(M/R_1) = V_0(\cos\alpha\overrightarrow{e_\rho} + \sin\alpha\ \vec{k})}$

b) Vitesse d'entrainement de $\boldsymbol{M}, \vec{V}_e(\boldsymbol{M})$

$$\vec{V}_e(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega}(R_1/R), \overrightarrow{O_1M}$$

$$= \left.\frac{d(\rho(t)\overrightarrow{e_\rho}}{dt}\right|_R + \dot{\varphi}\vec{k}\ \wedge (\cos\alpha\ \overrightarrow{e_\rho} + \sin\alpha\ \vec{k})V_0 t$$

$$\vec{V}_e(M) = \dot{\rho}(t)\overrightarrow{e_\rho} + \rho(t)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\varphi}V_0\ t\cos\alpha\ \overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{V}_e(M) = \dot{\rho}(t)\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\varphi}(\rho(t) + V_0\ t\cos\alpha)\overrightarrow{e_\varphi}}$$

c) La vitesse absolue de M, $\vec{V}(M/R)$

$$\vec{V}(M/R) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M) = \vec{V}(M/R_1) + \vec{V}_e(M)$$

$$= V_0(\cos\alpha\ \overrightarrow{e_\rho} + \sin\alpha\ \vec{k}) + \dot{\rho}(t)\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\varphi}(\rho(t) + V_0\ t\cos\alpha)\ \overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = (\dot{\rho}(t) + V_0\cos\alpha)\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\varphi}(\rho(t) + V_0\, t\cos\alpha)\overrightarrow{e_\varphi} + V_0\sin\alpha\,\vec{k}}$$

d) L'accélération relative de M , $\vec{\Upsilon}(M/R_1)$

$\left[(V_0,\alpha)\right.$ sont des constantes et $(\overrightarrow{e_\rho},\vec{k})$fixe dans $\left.R_1\right]$

$$\boxed{\vec{\Upsilon}(M/R_1) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R_1)}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\left[V_0(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\rho} + \sin\alpha\,\vec{k}\right]}{dt}\right|_{R_1} = \vec{0}}$$

e) L'accélération d'entrainement de $\boldsymbol{M}, \vec{\Upsilon}_e(\boldsymbol{M})$

$$\vec{\gamma}_e(M) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right|_R + \left.\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\left[\vec{\Omega}(R_1/R)\,,\overrightarrow{O_1M}\right]$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_R = \left(\dot{\rho}(t)\overrightarrow{e_\rho} + \rho(t)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}\right) \qquad ∡ : \left[\overrightarrow{OO_1} = \rho(t)\overrightarrow{e_\rho}\right]$$

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right|_R = \ddot{\rho}(t)\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}\dot{\varphi}(t)\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{\varphi}\dot{\rho}(t)\overrightarrow{e_\varphi} + \rho(t)\ddot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} - \rho(t)\dot{\varphi}\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\rho}$$

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right|_R = [\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\varphi}^2]\overrightarrow{e_\rho} + [2\dot{\varphi}\dot{\rho}(t) + \rho(t)\ddot{\varphi}]\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\left.\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O_1M} = (\ddot{\varphi}\vec{k}) \wedge (V_0t(\cos\alpha\,\vec{k} + \sin\alpha\ \vec{k})$$

$$Or: \left.\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(\dot{\varphi}\vec{k})}{dt}\right|_R = \ddot{\varphi}\vec{k}\ \ et\ \ \vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\varphi}\vec{k}$$

$$\left.\frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O_1M} = (\ddot{\varphi}\vec{k})\wedge\left(V_0\left(\cos\alpha\,\vec{e}_\rho\,\right)\right) = \ddot{\varphi}V_0t\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\left[\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\overrightarrow{O_1M}\right] = (\dot{\varphi}\vec{k})\wedge\left[(\dot{\varphi}\vec{k})\wedge(V_0t(cos\alpha\,\vec{e}_\rho + \sin\alpha\,\overrightarrow{k))}\right]$$

$$= (\dot{\varphi}\vec{k})\wedge\left[\dot{\varphi}V_0t\cos\alpha\,\vec{e}_\varphi + 0\right]$$

$$= -\dot{\varphi}^2V_0t\cos\alpha\,\vec{e}_\rho \qquad ∡: \vec{k}\wedge\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\rho$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_e(M) = \left[\ddot{\rho}(t) - \dot{\varphi}^2[\rho(t) + V_0t\cos\alpha]\right]\vec{e}_\rho + [\ddot{\varphi}(V_0t\cos\alpha + \rho(t)) + 2\dot{\varphi}\dot{\rho}(t)]\overrightarrow{e_\varphi}}$$

f) L'accélération de coriolis : $\vec{\gamma}_C(M)$

$\vec{\gamma}_C(M) = 2\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge(M/R_1)$ $\measuredangle$: $\vec{V}(M/R_1)$ est la vitesse relatif de M

$$\vec{\gamma}_C(M) = 2(\dot{\varphi}\vec{k})\wedge\left[V_0\left(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\rho} + \sin\alpha\,\vec{k}\right)\right] = 2\dot{\varphi}V_0 t\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\varphi} + \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}_C(M) = 2\dot{\varphi}V_0 t\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\varphi}}$$

g) L'accélération absolue de $M, \vec{\gamma}(M/R)$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}(M/R) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_C(M)$$

$$= \vec{0} + [\ddot{\rho}(t) - \dot{\varphi}^2[\rho(t) + V_0 t\cos\alpha]]\overrightarrow{e_\rho}$$
$$+ [\ddot{\varphi}(V_0 t\cos\alpha + \rho(t)) + 2\dot{\varphi}\dot{\rho}(t)]\overrightarrow{e_\varphi}$$
$$+2\dot{\varphi}V_0 t\cos\alpha\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \vec{\gamma}\left(\frac{M}{R}\right) = \begin{cases} [\ddot{\rho}(t) - \dot{\varphi}^2[\rho(t) + V_0 t\cos\alpha]] & \overrightarrow{e_\rho} \\ \ddot{\varphi}(V_0 t\cos\alpha + \rho(t) + 2\dot{\varphi}(\dot{\rho}(t) + V_0 t\cos\alpha) & \overrightarrow{e_\varphi} \\ 0 & \vec{k} \end{cases}}$$

Exercice II.B.3:

Soit $R_0(O\,X_0\,Y_0\,Z_0)$ un référentiel abolu et $R(O\,X\,Y\,Z_0)$ un référentiel relatif

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{R_0} = \dot{\theta}\ , om = a = cst\ \ et\ \overline{oh} = b = cst$$

1) Les lois de compositions des vitesses :

$$\vec{V}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = \vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right) + \vec{V_e}(M) \qquad avec \qquad \vec{V}\left({}^{M}/_{R}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$$ ou O origine de R

$$\vec{V_e}(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{(oo)}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\overrightarrow{OM}$$

Les de composition d' accélérations :

$$\vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R_0}\right) = \vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R}\right) + V_e(M) + \vec{V_c}(M)\ \ avec\ \ \vec{\gamma}\left({}^{M}/_{R}\right) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R$$

- $\vec{\gamma_e}(M) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO}}{dt^2}\right|_{R_0} + \left.\frac{d\vec{\Omega}(R/R_0)}{dt}\right|_R \wedge\overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\overrightarrow{OM}$
- $\vec{\gamma_c}(M) = 2\vec{\Omega}(R/R_0)\wedge\vec{V}(M/R)$ ou $\vec{V}(M/R)$ est la vitesse relative

2) Déterminons dans la base orthonormée directe $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{k})$

c) Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$

on a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$ (relation de shale) $\qquad \overrightarrow{OM} = \rho\vec{e_\rho} = a\vec{e_\rho}$

$\overrightarrow{OM} = a\vec{e_\rho} + b\vec{k} \qquad \overrightarrow{mM} = \overrightarrow{OH} = b\vec{k}$

d) Le vecteur rotation $\vec{\Omega}(R/R_0)$

On a : $\left.\frac{d\vec{\imath}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{\Omega}(R/R_0)\Lambda\vec{\imath} + \left.\frac{d\vec{\imath}}{dt}\right|_{R}$

$\vec{\imath}$: fixe dans R donc $\left.\frac{d\vec{\imath}}{dt}\right|_{R} = \vec{0}$ $avec$ $\vec{\imath} = \cos\theta\,\vec{\imath_0} + \sin\theta\,\vec{\jmath_0}$

$$\frac{d}{dt}(\cos\theta\,\vec{\imath_0} + \sin\theta\,\vec{\jmath_0}) = \vec{\Omega}(R/R_0)\Lambda\vec{\imath}$$

$\frac{d}{dt}(\cos\theta\,\vec{\imath_0}) + \frac{d}{dt}\sin\theta\,\vec{\jmath_0}) = \vec{\Omega}(R/R_0)\Lambda\vec{\imath}$ $\qquad R_0(\vec{\imath_0}, \vec{\jmath_0}, \vec{k_0})$:Référentiel absolu

$$\frac{d(\cos\theta)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\vec{\imath_0} + \frac{d(\sin\theta)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\vec{\jmath_0} = \vec{\Omega}(R/R_0)\Lambda\vec{\imath}$$

$R(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$: Référentiel relatif

$(-\sin\theta)\dot{\theta}\vec{\imath_0} + (\cos\theta)\dot{\theta}\vec{\jmath_0} = \vec{\Omega}(R/R_1)\Lambda\vec{\imath}$

$\dot{\theta}(-\sin\theta\,\vec{\imath_0} + \cos\theta\,\vec{\jmath_0}) = \vec{\Omega}(R/R_0)\Lambda\vec{\imath}$

$\dot{\theta}\vec{\jmath} = \vec{\Omega}(R/R_0)\Lambda\vec{\imath} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\theta}(\vec{k}\Lambda\vec{\imath}) = \vec{\Omega}(R/R_0)\Lambda\vec{\imath} \quad \Longrightarrow \quad (\dot{\theta}\vec{k})\Lambda\vec{\imath} = \vec{\Omega}(R/R_0)\,\Lambda\vec{\imath}$

$\dot{\theta}\vec{k} = \vec{\Omega}(R/R_0)$ $\quad$ finalement on trouve $\boxed{\dot{\Omega}(R/R_0) = \dot{\theta}\vec{k}}$

3- Le vecteur vitesse relative $\vec{V}_r(M)$:

$$\vec{V}_r(M) = \vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \frac{d}{dt}(a\vec{e}_\rho + b\vec{k})$$

Puisque : $a = cste$ et $\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_R = 0$ car $\vec{k}$ est $fixe$ $dans$ R

Alors

$$\vec{V}_r(M) = \frac{d(a\vec{e}_\rho)}{dt} + \vec{0} = a\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad avec \quad \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Finalement

$$\boxed{\vec{V}_r(M) = a\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi}$$

a) Le vecteur vitesse d'entrainement $\vec{V}_e(M)$:

$$\vec{V}_e(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{OM}$$

Puisque le point O est fixe dans le repère R_0 et de plus $\overrightarrow{OO'} = \vec{0} \Rightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{V}_e(M) = 0 + \dot{\theta}\vec{k} \wedge \left(a\vec{e}_\rho + b\vec{k}\right) = \left(\dot{\theta}\vec{k}\right) \wedge \left(a\vec{e}_\rho\right) + \left(\dot{\theta}b\vec{k}\right) \wedge \left(\vec{k}\right) = \dot{\theta}a\vec{e}_\varphi + \vec{0}$$

Finalement

$$\boxed{\vec{V}_e(M) = \dot{\theta}a\vec{e}_\varphi}$$

b) Le vecteur vitesse absolue $\vec{V}_a(M)$:

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M) = a\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + a\dot{\theta}\vec{e}_\varphi = (a\dot{\varphi} + a\dot{\theta})\vec{e}_\varphi$$

Finalement

$$\boxed{\vec{V}_a(M) = a(\dot{\varphi} + \dot{\theta})\vec{e}_\varphi}$$

c) Le vecteur accélération relative $\vec{\gamma}_r(M)$:

$$\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}_r(M) = \left.\frac{\vec{V}_r(M)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d}{dt}(a\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi)\right|_R = a\frac{d}{dt}(\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + a\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = a\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - a\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho$$

Finalement

$$\boxed{\vec{\gamma}_r(M) = a(\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho)}$$

d) Vecteur d'accélération d'entrainement $\vec{\gamma}_e(M)$

$$\vec{\gamma}_e(M) = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \left.\frac{d\vec{\Omega}(\mathrm{R}/\mathrm{R}_0)}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}(\mathrm{R}/\mathrm{R}_0) \wedge \vec{\Omega}(\mathrm{R}/\mathrm{R}_0) \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{\gamma}_e(M) = 0 + \ddot{\theta}\vec{k} \wedge \left(a\vec{e}_\rho + b\vec{k}\right) + \dot{\theta}\vec{k} \wedge \left(\dot{\theta}\vec{k} \wedge \left(a\vec{e}_\rho + b\vec{k}\right)\right) = \ddot{\theta}a\vec{e}_\varphi + \left(\overrightarrow{\dot{\theta}k \wedge} a\theta\vec{e}_\varphi\right)$$

Finalement

$$\boxed{\vec{\gamma}_e(M) = -a\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho + \ddot{\theta}a\vec{e}_\varphi}$$

e) Le vecteur accélération Coriolis $\vec{\gamma}_c(M)$

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(\mathrm{R}/\mathrm{R}_0) \wedge \vec{V}(M/R) = 2\vec{\Omega}(\mathrm{R}/\mathrm{R}_0) \wedge \vec{V}_r(M) = 2\dot{\theta}\vec{k} \wedge a\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Finalement

$$\boxed{\vec{\gamma}_c(M) = -2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\vec{e}_\rho}$$

f) Vecteur accélération absolue

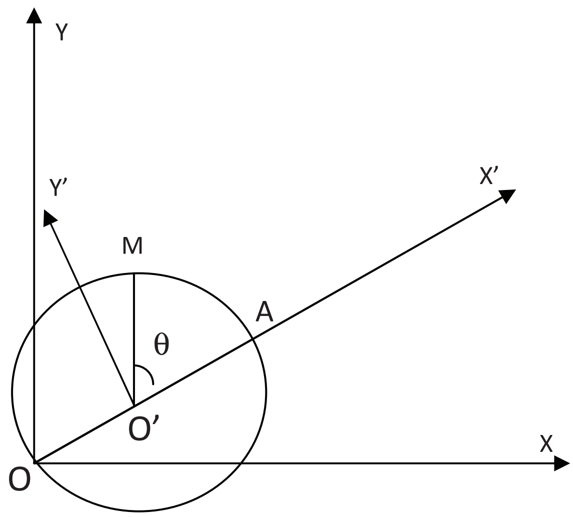
$$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M)$$

$$\vec{\gamma}_a(M) = a\left(\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho\right) - a\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho + \ddot{\theta}a\vec{e}_\varphi - 2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\vec{e}_\rho$$

Finalement

$$\boxed{\vec{\gamma}_a(M) = -a(\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2\vec{e}_\rho + (\ddot{\varphi} + \ddot{\theta})\vec{e}_\varphi}$$

Exercice II.B.4:



a) Expression de $\overrightarrow{OM}$ dans le repère fixe $R(oxy)$:

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}($ …….(1)

D'après la figure on remarque que :

$\left|\overrightarrow{OO'}\right| = \left|\overrightarrow{O'M}\right| = R$ avec R : rayon du cercle

Par projection on trouve $\left.\overrightarrow{OO'}\right|_R$:

$\left.\overrightarrow{OO'}\right|_R = R\cos\theta\ \vec{\imath} + R\sin\theta\ \vec{\jmath}$

$\Rightarrow \left.\overrightarrow{OO'}\right|_R = R[\cos\theta\ \vec{\imath} + \sin\theta\ \vec{\jmath}]$……(2)

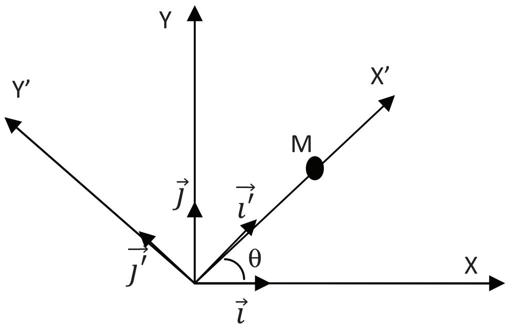
De même pour $\left.\overrightarrow{O'M}\right|_R$:

$$\left.\overrightarrow{O'M}\right|_R = R\cos\theta\ \vec{\imath}' + R\sin\theta\ \vec{\jmath}'$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{O'M}|_R = R\left[\cos\theta\ \vec{\imath}' + \sin\theta\ \vec{\jmath}'\right]……(3)$$

Avant d'additionner ces deux équations, on doit remplacer les vecteurs unitaires $\vec{\imath}'$ et $\vec{\jmath}'$ par leurs expressions dans le repère $R\ (OXY)$

$$\begin{cases} \vec{\imath}' = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \vec{\jmath}' = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases}$$



La relation (3) devient alors :

$\overrightarrow{O'M}|_R = R\{[\cos^2\theta\ \vec{\imath} + \cos\theta\sin\theta\ \vec{\jmath}] + [-\sin^2\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\ \cos\theta\,\vec{\jmath}]\}$

$\quad = R\{[\cos^2\theta\ - \sin^2\theta\ ]\vec{\imath} + [\sin\theta\cos\theta + \ \cos\theta\sin\theta]\vec{\jmath}\}$

$$= R\{[\cos^2\theta \ - \sin^2\theta\ ]\vec{\imath} + [2\sin\theta\cos\theta]\vec{\jmath}\}$$

$$\Longrightarrow\ \overrightarrow{O'M}\big|_R = R[\cos\ (2\theta)\ \vec{\imath} + \sin\ (2\theta)\ \vec{\jmath}]......(4)$$

Le point M est le cercle de diamètre OA, tournent avec la même vitesse angulaireω, on peut alors écrire l'angle de rotation en fonction de cette vitesse : $\theta = \omega t$

$$(2)\text{ et }(4) \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OO'}\big|_R = R[\cos\omega t\ \ \vec{\imath} + \sin\omega t\ \ \vec{\jmath}] \\ \overrightarrow{O'M}\big|_R = R[\cos\ (2\omega t)\ \vec{\imath} + \sin\ (2\omega t)\ \vec{\jmath}] \end{cases}$$

En remplaçant ces deux dernières équations dans la relation (1) on obtient :

$$(1) \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = R[\cos\omega t\ \ \vec{\imath} + \sin\omega t\ \ \vec{\jmath}] + R[\cos\ (2\omega t)\ \vec{\imath} + \sin\ (2\omega t)\ \vec{\jmath}]$$

D'où $$\boxed{\overrightarrow{OM} = R([\cos(\omega t)\ + \cos\ (2\omega t)\ ]\vec{\imath} + [\sin\ (\omega t)\ + \sin\ (2\omega t)]\vec{\jmath})}$$

3) Vitesse et accélération absolue :

- $\vec{v}_a$ =?

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\bigg|_R = \frac{d}{dt}\{R([\cos(\omega t)\ + \cos\ (2\omega t)\ ]\vec{\imath} + [\sin\ (\omega t)\ + \sin\ (2\omega t)]\vec{\jmath})\}$$

$$= R\frac{d[\cos(\omega t)\ + \cos\ (2\omega t)\ ]}{dt}.\vec{\imath} + R[\cos(\omega t)\ + \cos\ (2\omega t)\ ].\frac{d\vec{\imath}}{dt}\bigg|_R$$

$$+R\frac{d[\sin\ (\omega t)\ + \sin\ (2\omega t)]}{dt}\vec{\jmath} + R[\sin\ (\omega t)\ + \sin\ (2\omega t)].\frac{d\vec{\jmath}}{dt}\bigg|_R$$

$$\text{Avec} \begin{cases} \dfrac{d\vec{\imath}}{dt}\bigg|_R = 0 \\ \dfrac{d\vec{\jmath}}{dt}\bigg|_R = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}_a = R[-\omega\sin(\omega t) - 2\omega\sin(2\omega t)]\vec{\imath} + R\ [\omega\cos(\omega t) + 2\omega\cos(2\omega t)]\vec{\jmath}$$

finalement on obtient:

$$\boxed{\vec{v}_a = R\omega\{-[\sin(\omega t) + 2\sin(2\omega t)]\vec{\imath} + [\cos(wt) + 2\cos(2\omega t)]\vec{\jmath}\}}$$

$\vec{\gamma}_a$ =?

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt}\bigg|_R = \frac{d}{dt}[R\omega\{-[\sin(\omega t) + 2\sin(2\omega t)]\vec{\imath} + [\cos(wt) + 2\cos(2\omega t)]\vec{\jmath}\}]$$

$$= R\omega\left\{-\frac{d[\sin(\omega t) + 2\sin(2\omega t)]\vec{\imath}}{dt} + \frac{d\cos(wt) + 2\cos(2\omega t)]\vec{\jmath}}{dt}\right\}$$

$$= R\omega\left\{-\frac{d[\sin(\omega t) + 2\sin(2\omega t)]}{dt}.\vec{\imath} + \left[\sin(\omega t) + 2\sin(2\omega t)\frac{d\vec{\imath}}{dt}\right]\right\}$$

$$+R\omega\left\{\frac{d\cos(wt) + 2\cos(2\omega t)}{dt}.\vec{\jmath} + [\cos(wt) + 2\cos(2\omega t)]\frac{d\vec{\jmath}}{dt}\right\}$$

Finalement on obtient :

$$\boxed{\vec{\gamma}_a = -R\omega^2\{[\cos\omega t) + 4\cos(2wt)]\vec{\imath} + [\sin(wt) + 4\sin(2\omega t)\vec{\jmath}\}}\ldots(5)$$

c- Vitesse et accélération relatives :

- $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}}$ =?

$$\vec{v}_r = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R'} = \frac{d}{dt}\{R[\cos(\omega t)\vec{\imath}' + \sin(\omega t)\vec{\jmath}'\}\Big|_{R'}$$

$$= R\left\{\frac{d}{dt}[\cos(\omega t)\vec{\imath}'] + \frac{d}{dt}[\sin(\omega t)\vec{\jmath}']\right\}$$

$$= R\left\{\frac{d\cos(\omega t)}{dt}.\vec{\imath}' + \cos(\omega t).\left.\frac{d\vec{\imath}'}{dt}\right|_{R'} + \frac{d\sin(\omega t)}{dt}.\vec{\jmath}' + \sin(\omega t).\left.\frac{d\vec{\jmath}'}{dt}\right|_{R'}\right\}$$

Sachant que $\begin{cases} \left.\dfrac{d\vec{\imath}'}{dt}\right|_{R'} = 0 \\ \left.\dfrac{d\vec{\jmath}'}{dt}\right|_{R'} = 0 \end{cases}$

Finalement on obtient $\boxed{\vec{v}_r = R\omega[-\sin(\omega t).\vec{\imath}' + \cos(\omega t).\vec{\jmath}']}$

- $\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\boldsymbol{r}}$ =?

$$\vec{\gamma}_r = \left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right|_{R'} = \frac{d}{dt}\{R\omega[-\sin(\omega t).\vec{\imath}' + \cos(\omega t).\vec{\jmath}']\}$$

$$= R\omega\left\{\frac{d[-\sin(\omega t).\vec{\imath}']}{dt} + \frac{d[\cos(\omega t).\vec{\jmath}']}{dt}\right\}$$

$$= R\omega\left\{\frac{d[-\sin(\omega t)]}{dt}.\vec{\imath}' + -\sin(\omega t).\left.\frac{d\vec{\imath}'}{dt}\right|_{R'} + \frac{d[\cos(\omega t)]}{dt}.\vec{\jmath}' + \cos(\omega t).\left.\frac{d\vec{\jmath}'}{dt}\right|_{R'}\right\}$$

Avec $\begin{cases} \left.\dfrac{d\vec{\imath}'}{dt}\right|_{R'} = 0 \\ \left.\dfrac{d\vec{\jmath}'}{dt}\right|_{R'} = 0 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \vec{\gamma}_r = R\omega[-\omega\cos(\omega t).\vec{\imath}' - \sin(\omega t).\vec{\jmath}'$$

Finalement on obtient :

$$\boxed{\vec{\gamma}_r = -R\omega^2[\cos(\omega t).\vec{\imath}' - \sin(\omega t).\vec{\jmath}']} \dots\dots(6)$$

d- Vitesse et accélération d'entrainement :

- $\vec{\gamma}_e = ?$

$$\vec{\gamma}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})\Big|_{R'}$$

✓ $\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R = ?$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R = \frac{d}{dt}\{R.[\cos(\omega t)\vec{\imath} + \sin(\omega t).\vec{\jmath}]\}$$

$$= R\left\{\frac{d[\cos(\omega t)}{dt}.\vec{\imath} + \cos(\omega t).\left.\frac{d\vec{\imath}}{dt}\right|_R + R\frac{d[\sin(\omega t)}{dt}.\vec{\jmath} + \sin(\omega t).\left.\frac{d\vec{\jmath}}{dt}\right|_R\right\}$$

Donc on obtient :

$$\boxed{\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R = R\omega[-\sin(\omega t)\,\vec{\imath} + \cos(\omega t)\,\vec{\jmath}} \dots\dots\dots(7)$$

✓ $(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})\Big|_{R'} = \left((\omega k') \wedge R(\cos(\omega t)\vec{\imath}' + \sin(\omega t)\vec{\jmath}')\right)$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R.\cos(\omega t) \\ R.\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0 - \omega.R.sin(\omega t) \\ \omega.R.\cos(\omega t) - 0.0 \\ 0.R.\sin(\omega t) - 0.R.\cos(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\omega.\sin(\omega t) \\ R\,\omega.\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc on obtient :

$$\boxed{(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})\Big|_{R'} = R\omega[-\sin(\omega t)\vec{\imath}' + \cos(\omega t)\vec{\jmath}'} \dots\dots\dots(8)$$

En remplaçant les relations (7) et (8) dans la relation du $\vec{v}_e$, on trouve :

$$\vec{v}_e = R\omega.[-\sin(\omega t).\vec{\imath} + \cos(\omega t).\vec{\jmath}] + R\omega[-\sin(\omega t).\vec{\imath}' + \cos(\omega t).\vec{\jmath}']$$

On doit remplacer les vecteurs unitaires $\vec{\imath}'$ et $\vec{\jmath}'$ par leurs expressions respectives dans le repère $R(OXY)$

Finalement $\vec{v}_e$ devient :

$$\boxed{\vec{v}_e = R\omega\{[-\sin(\omega t) - \sin(2\omega t)].\vec{\imath} + [cos(\omega t) + \cos(2\omega t)].\vec{\jmath}\}}$$

- $\vec{\gamma}_e = ?$

$$\vec{\gamma}_e = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)_{R'} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge O'M)$$

✓ $\left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R = ?$

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\{R\omega[-\sin(\omega t).\vec{\imath} + \cos(\omega t).\vec{\jmath}]\}$$

$$\Longrightarrow \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R = -R\omega^2[\cos(\omega t).\vec{\imath} + \sin(\omega t).\vec{\jmath}] \ldots..(9)$$

✓ La vitesse de rotation est constante $\Longrightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$

$$\Longrightarrow \left.\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)\right|_{R'} = \vec{0} \ldots\ldots\ldots.(10)$$

✓ $\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}) = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-R\omega.\sin(\omega t)\\R\omega\cos(\omega t)\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-R\omega^2\cos(\omega t)\\-R\omega^2\sin(\omega t)\\0\end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}) = -R\omega^2[\cos(\omega t).\vec{\imath}' + \sin(\omega t).\vec{\jmath}'] \ldots\ldots.(11)$$

En remplaçant les relations (8), (9) et (10) dans la relation du $\vec{\gamma}_e$ on obtient :

$$\vec{\gamma}_e = -R\omega^2[\cos(\omega t).\vec{\imath} + \sin(\omega t).\vec{\jmath}] - R\omega^2[\cos(\omega t).\vec{\imath}' + \sin(\omega t).\vec{\jmath}']$$

Remplaçant les vecteurs unitaires $\vec{\imath}'$ et $\vec{\jmath}'$ par leurs expressions dans le repère $R(OXY)$:

$$\vec{\gamma}_e = -R\omega^2[\cos(\omega t).\vec{\imath} + \sin(\omega t).\vec{\jmath}] - R\omega^2\{\cos(\omega t)[\cos(\omega t).\vec{\imath} + \sin(\omega t).\vec{\jmath}] + \sin(\omega t)[-\sin(\omega t).\vec{\imath} + \cos(\omega t).\vec{\jmath}$$

Finalement on trouve :

$$\boxed{\vec{\gamma}_e = -R\omega^2\{[\cos(\omega t) + \cos(2\omega t)].\vec{\imath} + [\sin(\omega t) + \sin(2\omega t)].\vec{\jmath}]\}} \ldots..(12)$$

e- Accélération de Coriolis :

- $\vec{\gamma}_c = ?$

$$\vec{\gamma}_c = (2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r)|_{R'}$$

$$\vec{\gamma}_c = 2\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-R\omega.\sin(\omega t)\\-R\omega.\cos(\omega t)\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.0 - \omega R\omega\cos(\omega t)\\-\omega R\omega\sin(\omega t) - 0.0\\0.R\omega\cos(\omega t) + 0.R\omega\sin(\omega t)\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\gamma}_c = -2R\omega^2[\cos(\omega t).\vec{\imath}' + \sin(\omega t).\vec{\jmath}'} \ldots\ldots.(13)$$

- $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$

(6)+(12)+(13) $\Longrightarrow \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c = -R\omega^2[\cos(\omega t).\vec{\imath}' - \sin(\omega t).\vec{\jmath}'] - R\omega^2\{[\cos(\omega t) + \cos(2\omega t)].\vec{\imath} + [\sin(\omega t) + \sin(2\omega t)].\vec{\jmath}]\} - 2R\omega^2[\cos(\omega t).\vec{\imath}' + \sin(\omega t)\,.\vec{\jmath}']$

En remplaçant $\vec{\imath}'$ et $\vec{\imath}'$ par leurs expressions dans le repère (OXY), on obtient :

$$\boxed{\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c = -R\omega^2\{[\cos(\omega t) + 4\cos(2\omega t)].\vec{\imath} + [\sin(\omega t) + 4\sin(2\omega t)].\vec{\jmath}\}}$$

CHAPITRE III

Dynamique du point Matériel

Nous avons appris en cinématique à décrire les mouvements. A l'issue de ces chapitres, nous serons capables de les prévoir. On dit parfois que la dynamique étudie, ou détermine les " les causes des mouvements" ; nous préférons dire qu'elle décrit les mouvements en termes de force et que la connaissance des lois de force lui permet de prévoir d'autres mouvements. En effet, rechercher la cause des mouvements implique dans le langage courant les expliquer. Cette formulation doit être utilisée en physique avec précaution : pour le physicien, un événement est expliqué lorsqu'il peut montrer que cet événement est la conséquence logique d'une loi qu'il pense vraie. Au cours de ce chapitre, nous décrirons des mouvements, nous en déduirons des lois de force, puis nous passerons à l'étape suivante : la prévision d'autres mouvements.

III.1 Lois fondamentales de la dynamique

III.1.1 Définitions

- **Le Référentiel de Copernic**

Le référentiel de Copernic a pour centre le centre du système solaire et ses axes sont donnés par les directions de trois étoiles très éloignées (supposées fixes par rapport au soleil).

- **Référentiel géocentrique**

Le référentiel géocentrique a pour centre le centre de la terre et ses axes ont des directions fixes qui sont celles du référentiel de Copernic.

- **Référentiel terrestre**

Un référentiel terrestre est un référentiel lié à la terre. Son origine est donc un point de la planète et ses axes sont fixes par rapport à elle.

III.1.2 Première loi de Newton – Principe d'inertie

III.1.2.1 Enoncé du principe d'inertie :

Dans un référentiel Galiléen, un système isolé est soit au repos soit en mouvement rectiligne uniforme.

Un système isolé est un système qui n'est soumis à aucune force. Un référentiel Galiléen est aussi appelé référentiel d'inertie.

III.1.2.2 Référentiel Galiléen :

Le principe d'inertie permet en même temps de définir le référentiel Galiléen, Il s'agit en effet, de tout référentiel où le principe d'inertie est applicable.

Le principe d'inertie stipule donc que l'accélération d'un point matériel isolé est nulle dans un référentiel Galiléen. Or, d'après les résultats du chapitre précédent, l'accélération du point matériel sera aussi nulle dans tout référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel Galiléen. Ceci conduit au résultat suivant :

Tout référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel Galiléen est aussi Galiléen.

III.1.2.3 Exemples de référentiel Galiléens

- **<u>Référentiel de Copernic</u>**

Le référentiel de Copernic est un référentiel Galiléen.

- **<u>Référentiel géocentrique</u>**

On considère que le référentiel géocentrique est un référentiel Galiléen pour des expériences dont la durée est très petite par rapport à la période de révolution de la autour du soleil. En effet, la terre tourne autour du soleil et son mouvement (comme on le verra ultérieurement) est elliptique avec une période de révolution de, à peu près, 365 jours. Son mouvement n'est donc pas rectiligne uniforme par rapport au repère de Copernic. Cependant, on peut considérer qu'il est en translation rectiligne uniforme pour une durée très petite comparée à la période de révolution de la terre autour du soleil.

- **<u>Référentiel terrestre</u>**

Le référentiel terrestre est en rotation par rapport au référentiel géocentrique avec une période de 24 heures. Donc il n'est pas réellement un référentiel galiléen. Cependant, pour des phénomènes physiques dont la durée est très petite par rapport à 24 heure, on peut le considérer comme étant Galiléen.

III.1.3 Deuxième loi de Newton – Principe fondamental de la dynamique (PFD)

- ✓ **<u>Enoncé du principe fondamental de la dynamique :</u>**

Dans un référentiel Galiléen la somme vectorielle des forces extérieures qui s'exercent sur un point matériel est égale au produit du vecteur accélération et de la masse du point matériel :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{\gamma}(M)$$

Cette loi permet de relier la cinématique du point matériel aux causes du mouvement. Ainsi les systèmes dit pseudo---isolés (systèmes pour lesquels la somme des forces appliquées est nulles) ont une accélération nulle.

III.1.4 Troisième loi de Newton – Principe de l'action et de la réaction

Si un objet (1) exerce une force, $\vec{F}_{1\to 2}$, sur un autre objet (2), ce dernier exerce en retour une force, $\vec{F}_{2\to 1}$, d'intensité égale mais de sens opposée:

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$$

Il est important de noter que cette loi, aussi appelée principe des actions réciproques, est indépendante du référentiel d'étude.

III.1.5 Expression du PFD en utilisant la quantité de mouvement

Définition :

Pour un point matériel M, de masse m en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$, la quantité de mouvement de M par rapport à $\mathcal{R}$ est définie par

$$\vec{p}(M/R) = m\,\vec{V}(M/R)$$

Relation avec l'accélération :

En dérivant la définition ci-haut, on montre que la dérivée de la quantité de mouvement est proportionnelle à l'accélération. En effet, on a

$$\left.\frac{d\vec{p}(M/R)}{dt}\right|_R = m\,\vec{\gamma}(M/R)$$

PFD :

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors en terme de la quantité de mouvement :

$$\left.\frac{d\vec{p}(M/R)}{dt}\right|_R = \sum \vec{F}_{ext}$$

III.2 Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non Galiléen

L'énoncé du principe fondamental de la dynamique donné auparavant est valide dans un référentiel Galiléen. Cependant nous avons vu, avec la loi de composition des accélérations, que l'accélération n'est pas nécessairement la même dans tous les référentiels. En particulier, l'accélération dans un référentiel Galiléen n'est pas la même que dans un référentiel non Galiléen.

III.2.1 PFD et forces d'inertie.

Considérant un référentiel non Galiléen $\mathcal{R}'$ en mouvement par rapport à un référentiel Galiléen $\mathcal{R}$.

Le PFD, dans le référentiel Galiléen $\mathcal{R}$ s'écrit

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{\gamma}(M/R)$$

$\mathcal{R}$ étant le référentiel absolu et $\mathcal{R}'$ le référentiel relatif, la loi de composition des accélérations s'écrit alors:

$$\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M)$$

Le PFD dans $\mathcal{R}$ devient alors

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{\gamma}_r(M) + m\,\vec{\gamma}_e(M) + m\,\vec{\gamma}_c(M)$$

Ceci permet d'écrire le PFD, dans le référentiel non---Galiléen (relatif) $\mathcal{R}'$:

$$\begin{aligned} m\,\vec{\gamma}(M/R') &= m\,\vec{\gamma}_r(M) \\ &= \sum \vec{F}_{ext} - m\,\vec{\gamma}_e(M) - m\,\vec{\gamma}_c(M) \\ &= \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} \end{aligned}$$

où on a appelé les termes $-m\,\vec{\gamma}_e(M) - m\,\vec{\gamma}_c(M)$, les forces d'inertie. En particulier nous avons

$\vec{F}_{ie} = -m\,\vec{\gamma}_e(M)$: est la force d'inertie d'entrainement.

$\vec{F}_{ic} = -m\,\vec{\gamma}_c(M)$: est la force d'inertie de Coriolis.

Dans un référentiel non Galiléen il faut, en plus des forces extérieures agissant sur le point matériel, tenir compte des forces d'inertie. Cependant il est important de noter que les forces d'inertie ne sont pas dues à une interaction particulière. Elles ne sont donc pas considérées comme des forces réelles au même titre que les autres forces, même si leurs effets physiques sont réels.

Remarques :

- Si $\mathcal{R}'$ est un référentiel Galiléen, les forces d'inertie sont nulles, et le PFD s'y applique donc sans modifications.
- Le PFD dans un référentiel non galiléen s'exprime aussi en utilisant la quantité de mouvement :

$$\left.\frac{d\vec{p}(M/R')}{dt}\right|_{R'} = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

Si R′ n'est pas Galiléen.

III.2.2 Exemples particuliers

$\mathcal{R}'$ en translation rectiligne par rapport à $\mathcal{R}$:

Dans ce cas on a

$$\vec{\gamma}_e(M) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_R \quad et\ \vec{\gamma}_c(M) = 0$$

Ce qui donne pour les forces d'inertie :

$$\vec{F}_{ie} = -\left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_R \quad et\ \ \vec{F}_{ic} = 0$$

***R' en rotation par rapport à R*:**

On considère le cas où le référentiel R_2 est en rotation par rapport au référentiel absolu R_1, et que la rotation s'effectue autour d'un axe passant par l'origine commun aux deux référentiels O : $\vec{\omega}(R_2/R_1) = \vec{\omega}$. On alors

$$\vec{\gamma}_e(M) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) \ \ et\ \ \vec{\gamma}_c(M)$$

$$= 2\omega\vec{\gamma}_e(M) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) \wedge \vec{V}_r$$

Les forces d'inerties sont obtenues en multipliant ces accélérations par le facteur (-m):

$$\vec{F}_{ie} = -m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} - m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) \quad et\ \vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$$

Si on plus, le mouvement de rotation de *R'* par rapport à *R* est uniforme :

$\vec{\omega} = cste,$ les forces d'inertie s'écrivent alors sous la forme :

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) \quad et\ \vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$$

III.3 Théorème du moment cinétique

Dans plusieurs cas, il est plus commode d'utiliser le théorème du moment cinétique que le PFD.

Le moment cinétique du vecteur quantité de mouvement de la particule M est défini par rapport à un point O par :

$$\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}$$

La dérivation du moment cinétique par rapport au temps donne :

$$\frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\,\vec{V}\right) + \left(\overrightarrow{OM} \wedge \frac{d(m\vec{V})}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = \left(\vec{V} \wedge m\vec{V}\right) + \left(\overrightarrow{OM} \wedge m\frac{d(\vec{V})}{dt}\right)$$

$\vec{V}$ est colinéaire avec $m\vec{V}$ ce qui donne $\vec{V} \wedge m\vec{V} = 0$

L'équation précédente devient :

$$\frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m\frac{d\vec{V}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\vec{F})$$

Donc le moment de force par rapport à O est :

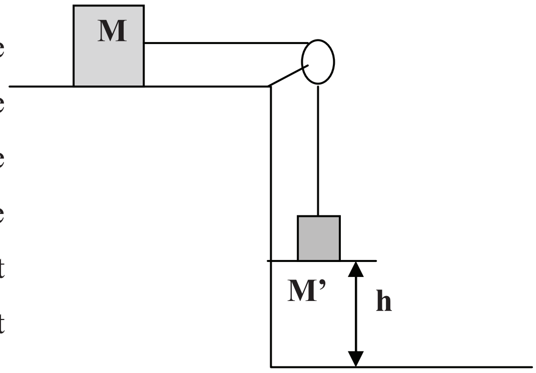
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Si $\overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}}(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_{/O} = C^{ste}$.

Exercices d'application

Exercice III.1:

Deux corps M et M' de masse m et m' respectivement, sont reliés par un fil inextensible passant par la gorge d'une poulie de masse négligeable. Initialement le corps M' se trouve à une hauteur h du sol, il est lâché sans vitesse initiale. Le contact entre le corps M et le plan horizontal est caractérisé par des coefficients de frottement statique μ_s et glissement μ_g .



1) Donner l'expression de la masse m'min pour que le système se mette en mouvement, en fonction de m et μ_s.

2) On prend maintenant un masse m'= 4 kg, le système se met en mouvement. En considérant les deux phases du mouvement de la masse M jusqu'à son arrêt:

a- Quelle est la nature du mouvement de la masse M. Justifier.

b- Calculer l'accélération dans la première phase.

c- Déduire la vitesse à la fin de cette phase.

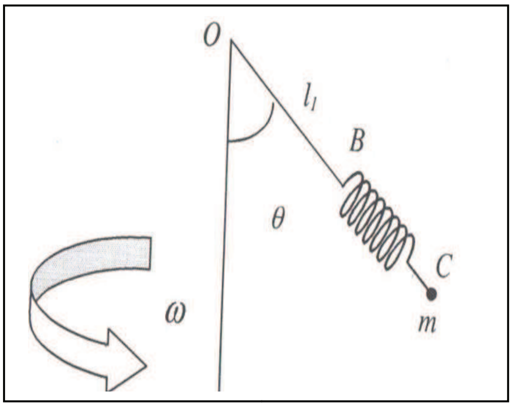
d- Calculer l'accélération dans la deuxième phase

e- Déduire la distance totale D parcourue par la masse M. Donner sa valeur.

Données :

μ_s= 0.6, μ_g = 0.4, m = 6 kg,
h = 1.5 m et g = 10 m/s^2

Exercice III.2:



On dispose d'un ressort à boudin BC, de raideur k = 20 N.m^{-1}, de masse négligeable, de longueur à vide l_o = 10 cm et d'une masse m = 100 g considérée comme ponctuelle fixée à l'une de ses extrémités.

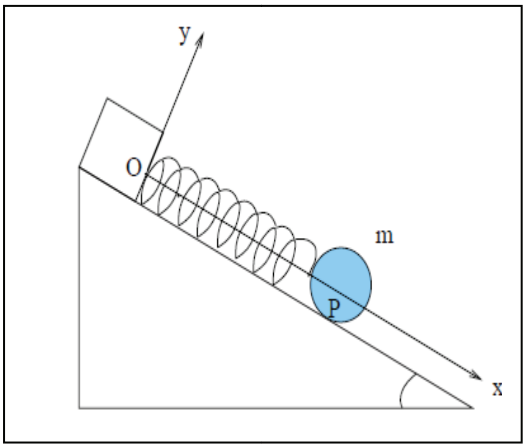
On attache l'extrémité B du ressort à un fil inextensible de masse négligeable, de longueur l_1 = 40 cm.

L'autre extrémité du fil est fixée à l'extrémité supérieure d'une tige verticale qui, en tournant, entraîne le fil, le ressort et la masse d'un mouvement de rotation uniforme (figure). Après un régime transitoire, l'angle θ entre le fil et la tige verticale prend une valeur constante égale à 60◦.

1) Calculer la tension du ressort et sa longueur.

2) Quelle est, en nombre de tours par seconde, la vitesse de rotation de la tige ? On prendra g = 10 m.s^{-2}.

Exercice III.3:



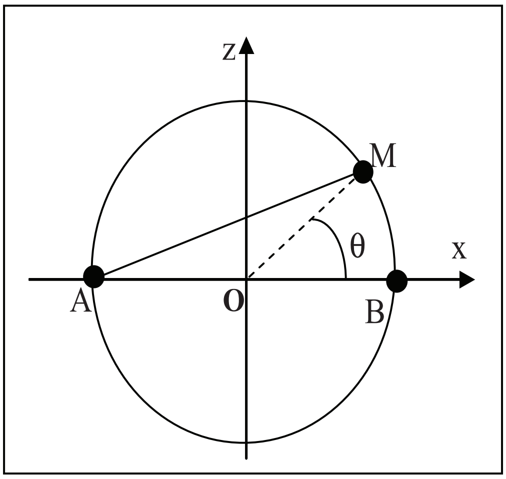
Un objet ponctuel de masse m, fixé à un ressort de constante de raideur k et longueur à vide L_0, attaché en O, se déplace le long d'un plan incliné d'angle α . On suppose la masse du ressort nulle, ainsi que sa longueur quand il est comprimé. La position de la masse est x_e à l'équilibre. On néglige les frottements. À l'instant initial, on lance la masse, située en x_e, avec une vitesse v_0 vers O.

1) Déterminer le mouvement $x(t)$.

2) À quelle condition sur v_0 la masse frappe-t-elle le point O ?

3) À quel instant le choc a-t-il lieu et quelle est alors la vitesse de la masse ?

Exercice III.4:



Un point M de masse m est lié à un cercle fixe dans le plan vertical, de centre O et de rayon R . La liaison est supposée sans frottements. Le point M est attiré par l'extrémité A du diamètre horizontal AB par une force toujours dirigée vers A et dont le module est proportionnel à la distance AM . La position du point M est repérée par l'angle $\theta = (AB, OM)$.

1) Déterminer les positions $\theta = \theta_e$ d'équilibre du point M sur le cercle.

2) Quand le point n'est pas en équilibre, déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ en utilisant la relation fondamentale de la dynamique, puis le théorème du moment cinétique en O .

3) On suppose que θ reste proche de θ_e et on pose $\theta = \theta_e + u$ avec $u << \theta_e$. Déterminer alors l'équation différentielle vérifiée par u. Les conditions initiales sont $u = u_0$ et $\dot{u} = 0$. Déterminer entièrement $u(t)$. Que peut-on dire quant à la stabilité de la (des) position(s) d'équilibre déterminée(s) au **1)** ? Une position d'équilibre est stable si, quand on écarte légèrement le point de cette position, il tend à y revenir, elle est instable dans le cas contraire.

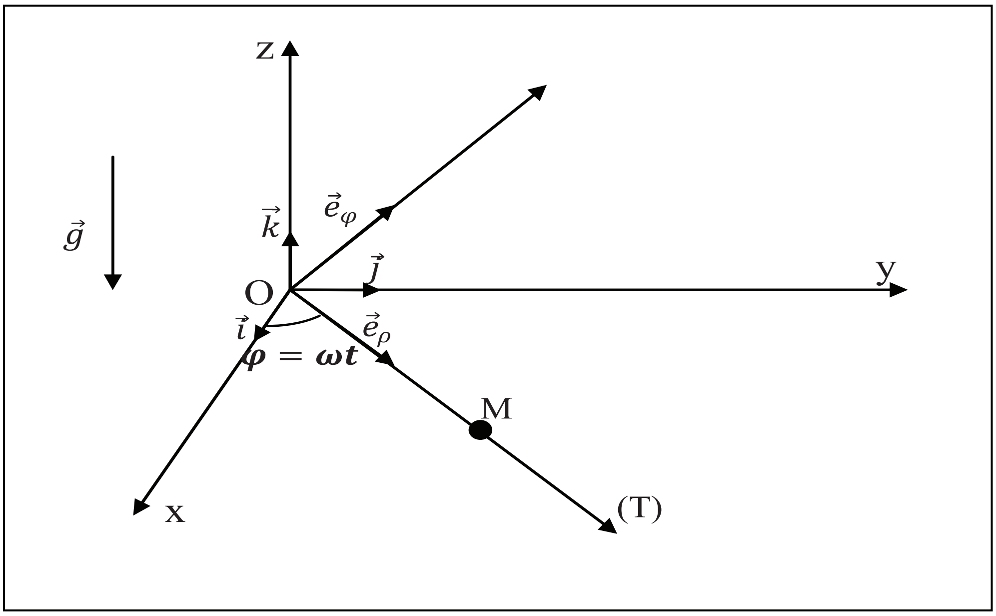
Exercice III.5:

Soit $\Re(O,xyz)$ un référentiel orthonormé direct et Galiléen, muni de la base$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit M un point matériel de masse m. Le point M glisse sans frottement le long de la tige (T) qui tourne dans le plan horizontal (xoy) autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω ($\varphi = \omega t$ et $\omega > 0$). M est soumis, en plus de son poids $\vec{P}$ et de la réaction de la tige $\vec{R}$, à une force $\vec{F} = \vec{F}\vec{e}_\rho$. Dans ces conditions, le mouvement de M le long de la tige suit la loi $\overrightarrow{OM} = at\,\vec{e}_\rho$($t$ étant le temps et a une constante positive). $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est la base cylindrique liée à la tige.

1) Calculer la vitesse $\vec{V}(M/\Re)$ et l'accélération $\vec{\gamma}\,(M/\Re)$ de M dans $\Re$ en fonction de a, t et ω.

2) Déterminer $\vec{\sigma}_0(M/\Re)$ le moment cinétique en O du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\Re$.

3) Déterminer les moments dynamiques de chacune des forces agissant sur le point M.



4) En appliquant le théorème du moment cinétique, trouver les expressions des composantes de R.

5) Déterminer les puissances de chacune des forces agissant sur le point M.

Exercice supplémentaire:

Un satellite de masse m_1 est en orbite autour de la terre, de masse M et de rayon R, à une distance r1.

1) Donner l'expression de l'accélération de la pesanteur g de ce satellite en fonction de g_0 accélération de la pesanteur à la surface de la terre, R et de l'altitude h du satellite.

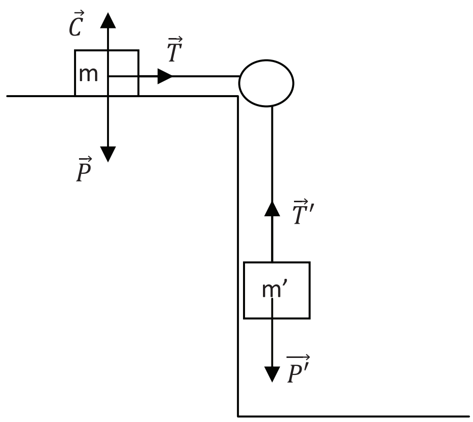
2) Un autre satellite de masse m_2 est en orbite autour de la terre à une distance r_2.

- Etablir la relation liant les périodes de rotation de ces deux satellites en fonction des rayons de leurs orbites (3ème loi de Kepler).

3) Si le rayon du premier satellite est R et celui du deuxième est 4R, quelle est le rapport entre leur période.

Solution des exercices

Exercice III.1 :



1) L'expression de m' :

Sur M' : $\vec{P}' + \vec{T}' = 0 \Rightarrow \vec{P}' - \vec{T}' = 0$

Sur M : $\vec{P} + \vec{C} + \vec{T} = 0 \Rightarrow \begin{cases} T - C_x = 0 \\ C_y - P = 0 \end{cases}$

comme T=T' on a :

$P' = C_x \; et \; C_x = \mu_g C_y = \mu_g mg \Rightarrow \boxed{m' = \mu_g m}$

A.N : m'=3.6 kg

2- a- le mouvement de M se décompose en deux phases :

- **1 ère phase :** M et M' ensemble, les forces sont constantes donc a est constante et v augmente ⇒ mouvement uniformément accéléré
- **2ème phase :** M seule et il ya frottements donc a est constante et v diminue ⇒ mouvement uniformément décéléré.

b-accélération, de la 1ère phase :

Sur M' : $\vec{P}' + \vec{T}' = m'\vec{a}_1 \Rightarrow P' - T' = m'a_1$

Sur M : $\vec{P} + \vec{C} + \vec{T} = ma_1$

$\Rightarrow \begin{cases} T - C_x = ma_1 \\ C_y - P = 0 \end{cases}$ en combinant les deux premières équations :

$$P' - C_x = (m + m')a_1 \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{m' - \mu_g m}{m + m'} g}$$

A.N : $\boldsymbol{a_1}$**=1.6 m/s²**

c- vitesse à la fin de la 1ère phase :

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a_1 h \Rightarrow \boxed{v_1 = \sqrt{2gh}}$$

A.N : $\mathbf{v_1}$**=2.2 m /s**

d- accélération dans la 2ème phase : M est seul donc :

$P + C = ma_2 \Rightarrow \begin{cases} -C_x = ma_2 \\ C_y - P = 0 \end{cases} \Rightarrow -\mu_g mg = ma_2 \Rightarrow \boxed{a_2 = \mu_g g}$

$\boldsymbol{A.N: a_2 = -4 m/s^2}$

d- Distance parcourue par M :

1ère phase : Elle parcourt la distance D_1=h=1.5m

2ème phase : Elle parcourt la distance D_2 telle que :

$$v_f^2 - v_1^2 = 2a_2D_2 \Rightarrow \boxed{D_2 - \frac{V_1^2}{2a_2}}$$

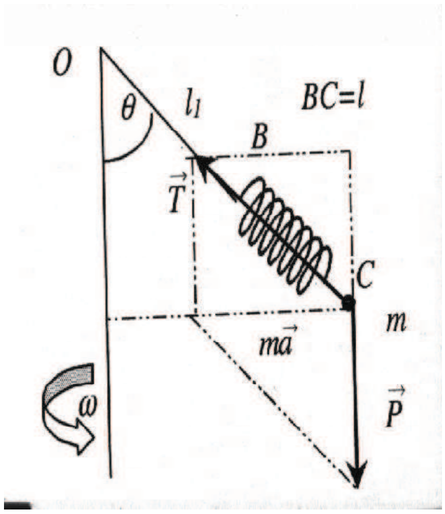
A.N : D_2=0.6 m

Et enfin : $\boxed{D=D_1+D_2=2.1\ m}$

Exercice III.2:

1) La tension T :

Système de la masse m=0.1 kg, référentiel terrestre est Galilien.



Bilan des forces :

$$\vec{P}(P = mg = 1N)\ \ et\ \ \vec{T}(T = k(l - l_0)).$$

Principe fondamental de la dynamique (PFD):

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}.$$

La masse m est un mouvement circulaire uniforme autour de l'axe vertical. Elle décrit un cercle de rayon : $r = (l_1 + l)sin\theta$ à la vitesse angulaire ω .

L'accélération est donc normale et centripète et a pour expression :

$$a = \omega^2 r = \omega^2(l_1 + l)sin\theta \quad (\text{ suivant l'horizontale et vers l'axe}).$$

En projetant, on obtient :

$$\begin{cases} Tcos\,\theta = mg \\ T\,sin\theta = m\omega^2(l_1 + l)sin\theta \end{cases}$$

On a donc :

$$k(l - l_0)cos\theta = mg \Rightarrow \boxed{T = k(l - l_0) = \frac{mg}{cos\theta} = 2N}$$

2) La vitesse angulaire ω :

$$Tsin\theta = m\omega^2(l_1 + l)sin\theta \Rightarrow \frac{mg}{cos\theta} = m(l_1 + l)\omega^2$$

$$(l - l_0) = \frac{mg}{kcos\theta} = 0{,}1m \Rightarrow l = l_0 + 0{,}1 = 0{,}2m$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \left(\frac{g}{(l_1 + l)cos\theta}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{10}{0,3}} = 5,77\,rad.s^{-1} = 0,92\,tr.s^{-1}}$$

Exercice III.3:

1) Le mouvement $x(t)$:

A l'équilibre, les forces qui agissent sur m sont l'action du ressort, le poids et la réaction du support, parallèle à Oy en l'absence de frottements.

En projetant sur Ox : $0 = -k(x_e - L_0) + mg\sin\alpha$.

Au cours du mouvement : $m\ddot{x} = -k(x - L_0)\,mg\sin\alpha$

$$m\ddot{x} = -k(x - x_e).$$

En introduisant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, on obtient :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e.$$

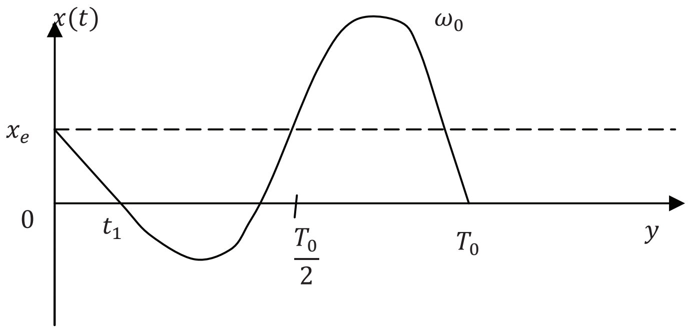
D'où $x(t) = Acos\omega_0 t + Bsin\,\omega_0 t + x_e$.

A $t = 0$: $x(0) = A + x_e = x_e \quad \Rightarrow \quad A = 0$

$$\dot{x}(0) = B\omega_0 = -v_0 \quad \Longrightarrow \quad B = \frac{-v_0}{\omega_0}$$

Donc

$$\boxed{x(t) = -\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + x_e}$$



2) La condition sur v_0 :

$x(t) peut\ s'annuler si\ x_e - \frac{v_0}{\omega_0} < 0$

$$\Longrightarrow \boxed{v_0 > x_e\omega_0}$$

3) L'instant de choc et la vitesse de la masse :

- **L'instant t :**

On a impact en O à t_1 avec : $t_1 < \frac{T_0}{4}$. $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$sin\omega_0 t_1 = \frac{\omega_0 x_e}{v_0} \quad alors \quad \boxed{t_1 = \frac{1}{\omega_0} \ Arc\ sin\frac{\omega_0 x_e}{v_0}}$$

- **La vitesse au moment du choc vérifie :**

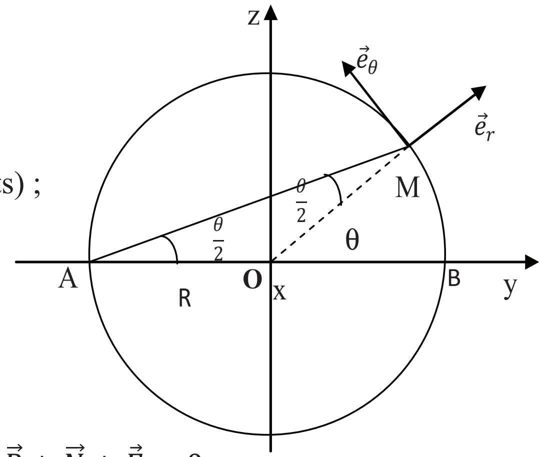
$$\dot{x}(t_1) = -v_0 cos\ \omega_0 t_1$$

$$\Longrightarrow \boxed{\dot{x}(t_1) = -v_0\left(1 - \frac{\omega_0^2 x_e^2}{v_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Exercice III.4:

1) Les positions d'équilibre du point M :

Les forces appliquées au point M sont :



- Son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg(sin\theta\vec{e}_r + cos\theta\vec{e}_\theta)$;
- La réaction du cercle $\vec{N} = N\vec{e}_r$ (pas de frottements) ;
- La force de rappel $\vec{F} = k\overrightarrow{MA}$:

$$\vec{F} = -k2Rcos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e_r - sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e_\theta\right).$$

Application de **RFD** :

Quand le point M est à l'équilibre, $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = 0$.

La force $\vec{N}$ étant inconnue, on projette cette équation sur $\vec{e}_\theta$:

$$-mg\ cos\theta + 2kRcos\left(\frac{\theta}{2}\right)sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow tan\theta = \frac{mg}{kR}$$

Il y a donc deux positions d'équilibre :

$$\boxed{\theta_1 = arc\ tan\left(\frac{mg}{kR}\right)\ et\ \ \theta_2 = \pi + \theta_1}$$

2) L'équation différentielle :

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \ \Longrightarrow \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}$$

Comme à la question précédente, on la projette sur $\vec{e}_\theta$ pour éliminer N :

$$mR\ddot{\theta} = -mg\ cos\theta + 2kRcos\left(\frac{\theta}{2}\right) sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\boxed{mR\ddot{\theta} = -mg\ cos\theta + kRsin\theta.}$$

3) L'équation différentielle vérifiée par u :

$\theta_c = \theta_1\ ou\ \ \theta_2.$

$\theta = \theta_e + u\ \ avec\ \ u \ll\ \theta_e\ , d'ou:$

$$cos\theta\ = cos\theta_e\ cosu - sin\theta_e sinu = cos\theta_c - usin\theta_e.$$

$au\ premier\ ordre\ en\ u.$

De même :

$$sin\theta\ = sin\theta_e cosu + cos\theta_e sinu = sin\theta_e + u\ cos\theta_e.$$

L'équation du mouvement devient, au premier ordre en u :

$$mR\ddot{u} = -mgcos\theta_e + kRsin\theta_e + u(kRcos\theta_e + mgsin\theta_e).$$

Le terme constant est nul (définition de θ_e).Il reste :

$$\boxed{\ddot{u} - \left(\frac{k}{m}cos\theta_e + \frac{g}{R}sin\theta_e\right)u = 0}$$

(On remarque que $\frac{k}{m}\ et\ \frac{g}{R}$ sont homogènes à des pulsations au carré).

La nature des solutions de cette équation dépend du signe du terme facteur de u :

Pour $\theta_e = \theta_1, cos\theta_1\ et\ sin\theta_1$sont positifs. On pose alors :

$$\omega_2 = \frac{k}{m}cos\theta_1 + \frac{g}{R}sin\theta_1.$$

Or, $sin\theta_1 = tan\theta_1 cos\theta_1 = \left(\frac{kR}{mg}\right)^{-1} cos\theta_1$, d'où :

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m\cos\theta_1} = \left(\frac{k^2}{m^2} + \frac{g^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Exercice III.5:

1) **Calcul de la vitesse $\vec{V}(M/R)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$de M en fonction de a, t et ω :**

$\overrightarrow{OM} = at\,\vec{e}_\rho$

- **La vitesse :**

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = a\vec{e}_\rho + at\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}$$

$$= a\vec{e}_\rho + at\frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \quad avec \quad \begin{cases} \dfrac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = \vec{e}_\varphi \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{V}(M/R) = a\vec{e}_\rho + at\omega\vec{e}_\varphi$$

- **L'accélération :**

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = a\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + a\omega\vec{e}_\varphi + at\omega\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \qquad avec \quad \begin{cases} \dfrac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \omega\vec{e}_\varphi \\ \dfrac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\omega\vec{e}_\rho \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \vec{\gamma}(M/R) = \ a\omega\vec{e}_\varphi + a\omega\vec{e}_\varphi - at\omega^2\vec{e}_\rho$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{\gamma}(M/R) = -at\omega^2\vec{e}_\rho + 2\,a\omega\vec{e}_\varphi$$

2) **Détermination du moment cinétique $\vec{\sigma}_0(M/R)$ en O du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans R :**

- $\vec{\sigma}_0(M/R)$ =?

$$\vec{\sigma}_0(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/R) = at\,\vec{e}_\rho \wedge m(a\vec{e}_\rho + at\omega\vec{e}_\varphi)$$

$$= \begin{pmatrix} at \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} ma \\ mat\omega \\ 0 \end{pmatrix} = (0.0 - 0.mat\omega)\vec{e}_\rho + (ma.0 - at.0)\vec{e}_\varphi + (at.mat\omega - 0.am)\vec{k}$$

$$= 0\,\vec{e}_\rho + 0\,\vec{e}_\varphi + ma^2t^2\omega\,\vec{k}$$

Finalement :

$$\boxed{\vec{\sigma}_0(M/R) = ma^2t^2\omega\,\vec{k}}$$

- $\left.\dfrac{\boldsymbol{d}\vec{\sigma}_0(M/R)}{\boldsymbol{dt}}\right|_R = ?$

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_0(M/R)}{dt}\right|_R = 2ma^2t\omega\,\vec{k} + ma^2t^2\omega\,\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_R \quad avec \quad \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_R = 0$$

Finalement :

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{\sigma}_0(M/R)}{dt}\right|_R = 2ma^2t\omega\,\vec{k}}$$

3) Les moments dynamiques de chacune des forces agissant sur le point M :

$$\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Trois forces agissent sur le point M : $\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{F}$.

- $\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = (at\,\vec{e}_\rho) \wedge (-mg\vec{k}) = -atmg(\vec{e}_\rho \wedge \vec{k}) \quad avec \begin{cases} \vec{P} = -mg\vec{k} \\ \vec{e}_\rho \wedge \vec{k} = -\vec{e}_\varphi \end{cases}$

$$\Longrightarrow \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = atmg\,\vec{e}_\varphi$$

- $\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = (at\,\vec{e}_\rho) \wedge (R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_k\vec{k}) = (at\,\vec{e}_\rho) \wedge (R_\varphi\vec{e}_\varphi) + (at\,\vec{e}_\rho) \wedge (R_k\vec{k})$

$$avec \begin{cases} \vec{R} = R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_k\vec{k} \\ \vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\varphi = \vec{k} \\ \vec{e}_\rho \wedge \vec{k} = -\vec{e}_\varphi \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{R}) = atR_\varphi(\vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\varphi) + at\,R_k(\vec{e}_\rho \wedge \vec{k})$$

$$\Longrightarrow \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{R}) = atR_\varphi\vec{k} - at\,R_k\vec{e}_\varphi$$

Finalement :

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = at(-R_k\vec{e}_\varphi + R_\varphi\vec{k})}$$

- $\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = (at\,\vec{e}_\rho) \wedge (F\vec{e}_\rho) = \vec{0}$

4) Les composantes de $\vec{R}$ par le théorème du moment cinétique :

- Théorème du moment cinétique :

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_0(M/R)}{dt}\right|_R = \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{R}) + \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F})$$

$$\Longrightarrow 2ma^2t\omega\,\vec{k} = atmg\,\vec{e}_\varphi + atR_\varphi\vec{k} - at\,R_k\vec{e}_\varphi$$

$$\Longrightarrow 2ma^2t\omega\,\vec{k} = at(mg - R_k)\,\vec{e}_\varphi + atR_\varphi\vec{k} \Longrightarrow \begin{cases} atR_\varphi = 2ma^2t\omega \\ at(mg - R_k) = 0 \end{cases}$$

Finalement les composantes de $\vec{R}$ sont :

$$\boxed{R_\varphi = 2ma\omega \qquad et \qquad R_k = mg}$$

5) La puissance de chacune des forces agissant sur le point M :

- $\vec{\mathcal{P}}(\vec{P}/R) = \vec{P}.\vec{V}\,(M/R) = -mg\vec{k}.\left(a\vec{e}_\rho + at\omega\vec{e}_\varphi\right) = -mga\left(\vec{k}.\vec{e}_\rho\right) + (-mgat\omega((\vec{e}_\rho.\vec{e}_\varphi)$

$$\boxed{\vec{\mathcal{P}}(\vec{P}/R) = \vec{P}.\vec{V}\,(M/R) = 0}$$

- $\vec{\mathcal{P}}(\vec{R}/R) = \vec{R}.\vec{V}\,(M/R) = (R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_k\vec{k}).\left(a\vec{e}_\rho + at\omega\vec{e}_\varphi\right) = R_\varphi\,at\omega\left(\vec{e}_\varphi.\vec{e}_\varphi\right)$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\mathcal{P}}(\vec{R}/R) = \vec{R}.\vec{V}\,(M/R) = R_\varphi\,at\omega = 2ma^2\omega^2t}$$

- $\vec{\mathcal{P}}(\vec{F}/R) = \vec{F}.\vec{V}\,(M/R) = F\vec{e}_\rho.\left(a\vec{e}_\rho + at\omega\vec{e}_\varphi\right) = Fa\left(\vec{e}_\rho.\vec{e}_\rho\right) + Fat\omega((\vec{e}_\rho.\vec{e}_\varphi)$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\mathcal{P}}(\vec{F}/R) = \vec{F}.\vec{V}\,(M/R) = Fa}$$

CHAPITRE IV

Travail et Energie

IV.1 Travail et Puissance d'une force

IV.1.1 Puissance d'une force

Soit un point matériel M de vitesse $\vec{V}(M/R)$, par rapport à un référentiel R, soumis à une force $\vec{F}$. La puissance de $\vec{F}$ dans le référentiel R est définie par:

$$P(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{V}(M/R)$$

La puissance dépend du référentiel et son unité est le Watts (W).

$$P(\vec{F}) > 0$$

- Si la puissance est positive, $P(\vec{F}) > 0$, la force est dite ***motrice*** .
- Si la puissance est négative, $P(\vec{F}) > 0$, la force est dite ***résistante.***
- Si la puissance est nulle, $P(\vec{F}) = 0,$ Il s'agit d'une force qui ne travail pas. C'est le cas d'une force perpendiculaire au mouvement du point matériel ou d'un point matériel immobile.

IV.1.2 Travail d'une force

IV.1.2.1 Travail élémentaire d'une force :

Lorsqu'on veut déplacer un objet, l'effort fourni est d'autant plus grand que la distance parcourue est grande et que la force à appliquer est grande. Cet effort peut dépendre aussi de la trajectoire suivie pour déplacer l'objet. Le travail, est une notion physique qui va rendre compte de cet effort.

Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ appliqué au point matériel M lors de son déplacement élémentaire $d\vec{r}$ est donné par :

$$\delta W = \vec{F}.d\vec{r} = P(\vec{F})dt$$

IV.1.2.2 Travail d'une force :

Soit un point matériel *M*, décrivant une trajectoire *(C)* par rapport à un référentiel *R*. On suppose que le point matériel passe par le point M_1 à l'instant t_1 et par le point M_2 à l'instant t_2. Le travail de la force $\vec{F}$ lors de ce déplacement est:

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = \int_{t_1}^{t_2} P(\vec{F})dt$$

L'unité du travail est le Joule [Joule=N.m]

- ♠ La force est dite motrice si son travail est positif $W > 0$.
- ♠ La force est résistante si son travail est négatif $W < 0$.
- ♠ La force ne travail pas si son travail est nul $W = 0$.

IV.2 Forces conservatives – Energie potentielle

IV.2.1 Définition

Une force est dite conservative si son travail entre deux point M_1 et M_2 dépend uniquement de la position de départ et de la position d'arrivée. Autrement dit, le travail est indépendant du chemin suivi pour aller de M_1 vers M_2.

Définition équivalente :

Une force $\vec{F}$ est dite conservative si elle dérive d'un potentiel; c.à.d. qu'il existe une fonction scalaire E_p tel que

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$$

Est alors appelé l'énergie potentielle du point M

Remarques :

- ✓ L'énergie potentielle n'est définie qu'à une constante près ; *c.à.d.* que E_p et $E'_p = E_p + C$ (ou C est une constante), donnent lieu à la même force conservative :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E'_p = -\overrightarrow{grad}\,(E_p + C) = -\overrightarrow{grad}\, E_p$$

- ✓ Puisque $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\, f) = \vec{0}$, quelque soit la fonction *f*, pour vérifier qu'une force $\vec{F}$ est conservative, il suffit de vérifier que $\overrightarrow{rot}\, \vec{F} = \vec{0}$.

IV.2.2 Exemples :

IV.2.2.1 La force de Pesanteur

Dans un référentiel Galiléen $R(O, X, Y, Z)$, on considère le mouvement d'un point matériel M de masse *m* soumis à la pesanteur terrestre: $\vec{P} = -mg\vec{k}$

Le travail du poids quand le point matériel se déplace de M_1 vers M_2 est :

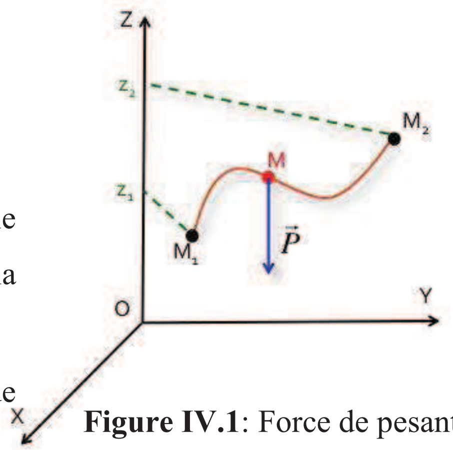


Figure IV.1: Force de pesanteur

$$W_{M_1\to M_2}(\vec{P}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{P}.d\overrightarrow{OM} = \int_{Z_1}^{Z_2} -mgdz$$

$$W_{M_1\to M_2}(\vec{P}) = -mg(z_2 - z_1) = -mg\Delta h$$

L'énergie potentielle peut être calculer en utilisant la relation $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p$ et elle est donnée par :

$$E_p = mgz + C$$

où C est une constante d'intégration.

IV.2.2.2 La force de rappel d'un ressort

On considère le mouvement d'un point matériel attaché à un ressort de raideur k. En se basant sur le schéma à coté, la force de rappel du ressort est donnée par

$$\vec{F} = -k\Delta l\,\vec{\imath} = -kx\,\vec{\imath}$$

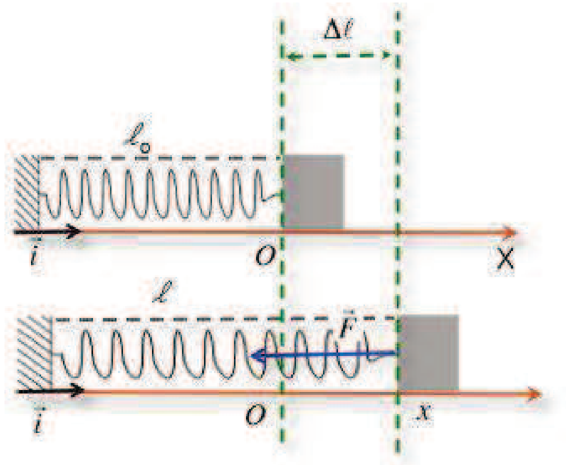


Figure IV.2 : Force de rappel d'un ressort

Le travail de cette force quand le point matériel se déplace de M_1 vers M_2 est :

$$W_{M_1\to M_2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = \int_{x_1}^{x_2} -kx\,dx$$

$$W_{M_1\to M_2}(\vec{F}) = -\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

L'énergie potentielle dont dérive la force de rappel est donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

IV.3 Travail d'une force conservative

On remarque d'après les exemples précédents que le travail fourni par la force quand le point matériel se déplace de M_1 vers M_2 est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle entre ces deux positions :

$$W_{M_1\to M_2}(\vec{F}) = -\Delta E_p = -(E_p(M_2) - E_p(M_1))$$

Travail élémentaire:

C'est un résultat général puisqu'on a

$$dE_p = \overrightarrow{grad}\, E_p . d\overrightarrow{OM}$$

Et pour le travail élémentaire

$$\delta W = \vec{F} . d\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{grad}\, E_p . d\overrightarrow{OM}$$

On obtient donc :

$$\delta W = -dE_p$$

Le travail élémentaire peut être exprimé en fonction de la puissance de la façon suivante $\delta W = P(\vec{F})dt$ ce qui permet de trouver la relation suivante entre l'énergie potentielle et la puissance d'une force :

$$P(\vec{F}) = -\frac{dE_p}{dt}$$

IV.4. Energie cinétique

IV.4.1 Définition

L'énergie cinétique d'un point matériel M de masse m animé d'une vitesse $V(M/R)$ par rapport à un référentiel Galiléen, R, est définie par :

$$E_c = \frac{1}{2} m\, V^2(M/R)$$

Ou encore, en fonction de la quantité de mouvement

$$E_c = \frac{1}{2m}\, p^2(M/R)$$

IV.4.2 Théorème de la puissance:

Enoncé :

La puissance de la résultante, $\vec{F}_{ext}$, de toutes les forces extérieures appliquées à un point matériel dans un référentiel Galiléen est égale à la dérivée de son énergie cinétique:

$$P(\vec{F}_{ext}) = \frac{dE_c}{dt}$$

La puissance de la résultante des forces extérieures peut être exprimée de la façon suivante

$$P(\vec{F}_{ext}) = \vec{F}_{ext} . \vec{V}(M/R) = m\vec{\gamma}(M/R) . \vec{V}(M/R) = m\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} . \vec{V}(M/R)$$

où on a utilisé le PFD dans un référentiel Galiléen.

D'autre part nous avons la relation suivante

$$\frac{dV^2}{dt} = \frac{d\vec{V}^2(M/R)}{dt} = \frac{d(\vec{V}.\vec{V})}{dt} = 2\frac{d\vec{V}}{dt}.\vec{V}$$

En remplaçant dans la première relation on trouve

$$P(\vec{F}_{ext}) = \frac{1}{2}m\frac{dV^2}{dt} = \frac{dE_c}{dt}$$

IV.4.3 Théorème de l'énergie cinétique

Enoncé :

Dans un référentiel Galiléen, la variation de l'énergie cinétique, entre deux position M_1 et M_2 d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieurs (dont la résultante est noté$\vec{F}_{ext}$) est égal au travail de cet résultante entre ces deux points :

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}_{ext}) = \Delta E_c = E_c(M_2) - E_c(M_1)$$

Preuve :

Pour le travail élémentaire on a la relation suivante

$$\delta W(\vec{F}_{ext}) = P(\vec{F}_{ext})dt = dE_c$$

qui est l'expression locale du théorème de l'énergie cinétique :

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}_{ext}) = \Delta E_c$$

IV.5 Energie mécanique

IV.5.1 Définition

Dans un référentiel Galiléen, l'énergie mécanique (énergie totale) d'un point matériel est égale à la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle:

$$E_m = E_c + E_p$$

IV.5 .2 Théorème de l'énergie mécanique

La variation de l'énergie mécanique d'un point matériel entre deux positions M_1 et M_2 est égale au travail des **forces non conservatives** agissant sur le point matériel:

$$\Delta E_m = E_m(M_2) - E_m(M_1) = W_{M_1 \to M_2}(f_{NC})$$

Preuve :

Le travail de la résultante des forces extérieures agissant sur un point matériel M est égale à la variation de l'énergie cinétique. D'autre part le travail de cette résultante est égal à la somme des travaux des forces conservatives et des forces non conservatives :

$$W_{M_1\to M_2}(\vec{F}_{ext}) = \Delta E_c = \Delta E_m - \Delta E_p \ \ et \ \ W_{M_1\to M_2}(\vec{F}_{ext}) = W_{M_1\to M_2}(\vec{f}_C) + W_{M_1\to M_2}(\vec{f}_{NC})$$

où

$\vec{F}_{ext}$: dénote la résultante de toutes les forces agissant sur M.

$\vec{f}_C$: dénote la résultante de toutes les forces conservatives agissant sur M.

$\vec{f}_{NC}$: dénote la résultante de toutes les forces non-conservatives agissant sur M.

On a donc l'égalité suivante :

$$\Delta E_m - \Delta E_p \ = W_{M_1\to M_2}(\vec{f}_C) + W_{M_1\to M_2}(\vec{f}_{NC})$$

Or $W_{M_1\to M_2}(\vec{f}_C) = -\Delta E_p$ ce qui donne le résultat :

$$\Delta E_m = W_{M_1\to M_2}(\vec{f}_{NC})$$

IV.5.3 Conservation de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un système conservatif est conservée au cours du temps:

$$E_m = E_C + E_P = E_0 = cste$$

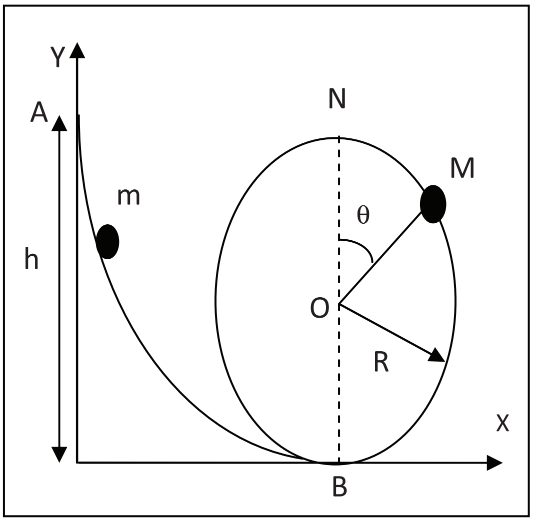
Ou encore

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

Exercices d'application

Exercice IV.1:

Un bloc de masse m glisse, sans frottements, sur un rail formé d'une partie curviligne AB et d'une boucle circulaire de rayon R (figure).



1) Le bloc est lâché sans vitesse initiale d'un point A situé à une hauteur h. Quelle est la vitesse V_B du bloc au point B.

2) Le bloc aborde ensuite la partie circulaire (BMN) sur laquelle on repère sa position par l'angle θ entre les points M et N. Quelle est l'expression de la vitesse du bloc au point M en fonction de h, R et θ. Calculer cette vitesse.

3-a) En utilisant la relation fondamentale de la dynamique, déterminer l'expression de la force de contact C au point M en fonction de V_M, m, R et θ.

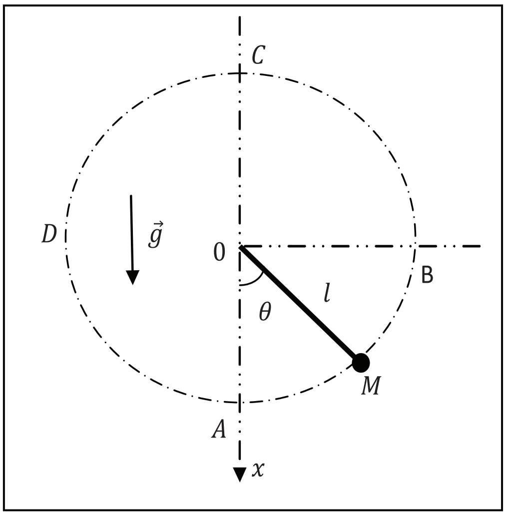
3-b) Si $V_M = 4$ m/s, en déduire alors l'angle θ_0 pour lequel le bloc quitte le rail.

On donne :

h = 5m, R = 2 m et $\theta = 60°$

Exercice IV.2:

On considère une masse m accrochée à une des extrémités M d'un fil de longueur l et de masse négligeable. L'autre extrémité O du fil est fixe dans le référentiel R terrestre considéré galiléen.



L'objectif de l'exercice est de calculer la valeur minimale de la vitesse V_A de la masse m au point A pour que celle-ci effectue un tour complet autour du point O, le fil restant constamment tendu.

On repère la masse M sur la boucle par l'angle θ que fait OM avec la verticale OA. On notera V_A et V_M la vitesse de M respectivement en A et en M.

I. Étude énergétique

1) En prenant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur au niveau du point A ($E_{PP}(A) = 0$), donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{PP}(M)$ en M.

2) En déduire l'expression de l'énergie mécanique totale $E_m(A)$ en A et $E_m(M)$ en M.

3) Le système est-il conservatif ? En déduire une relation entre $E_m(A)$ et $E_m(M)$.

4) En déduire l'expression de V_M^2en fonction de g, l, V_A et θ (relation n°1).

II. Etude Cinématique

L'étude du mouvement de M sur le cercle ($ABCD$) se fait naturellement en coordonnées polaires ($r = l, \theta$) et la base associée ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$)

1) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}_M$ en coordonnées polaires et en déduire la relation entre V_M, l et $\dot{\theta}$. Exprimer V_M^2en fonction de l et $\dot{\theta}$ (relation n°2).

2) Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}_M$ en coordonnées polaires. En déduire, en utilisant la relation n°2 précédente, l'expression de la composante radiale a_r (suivant $\vec{u}_r$) de l'accélération en fonction de V_M et l.

III. Etude Dynamique

1) Faire l'étude dynamique de M sur la partie circulaire ($ABCD$). On appellera $\vec{T}$ la tension du fil exercée sur la masse M.

2) En projetant le principe fondamental de la dynamique sur ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$), exprimer le rapport T/m de la réaction T sur la masse m (relation n° 3)

3) En utilisant les relations n° 1 et 3, exprimer la tension T du support en fonction de l, g, V_A et θ.

4) Dire que la masse fait un tour complet le fil restant tendu se traduit par : Pour toute valeur de l'angle θ, la tension T existe : $\forall\theta, T(\theta) \geq 0$

a) Pour quelle valeur évidente de θ la réaction T est-elle minimale ?

b) En déduire la valeur minimale que doit avoir la vitesse V_A de la masse m au point A pour que celle-ci effectue un tour complet le fil restant tendu

c) Quelle est alors la vitesse V_C de la masse au point C.

Exercice IV.3:

Un chariot de masse m = 1 kg assimilé à un point matériel M, est mobile sur une piste située dans le plan vertical. La piste est formée de plusieurs parties :

- AB : partie circulaire de centre O, de rayon R constant et d'angle θ =AOB.
- BC : partie rectiligne inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale et de longueur 2R.
- CD : partie rectiligne horizontale de longueur R.
- DE : partie circulaire de centre O_2, de rayon 2R constant et d'angle $\theta = DO_2E$, le rayon O_2D étant vertical.

Les parties circulaires sont lisses. Les frottements entre le sol et le chariot dans la partie BCD sont caractérisés par un coefficient de frottement dynamique μ_d. Le chariot est abandonné sans vitesse en A.

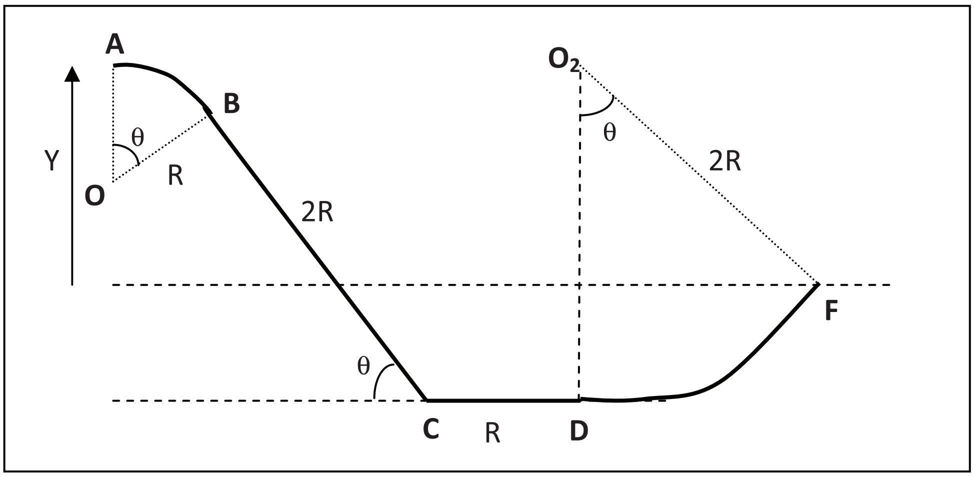
1- Déterminer l'expression de la vitesse du chariot au point B.

2- Quelle est la valeur de l'angle θ pour laquelle le chariot quitte la piste au point B

3- Calculer le coefficient de frottements dynamique μ_d dans la partie BD pour que le chariot s'arrête au point D.

4- Application numérique : Calculer V_B et μ_d si θ = 30°, g = 10 m/s^2 et R = 1 m,

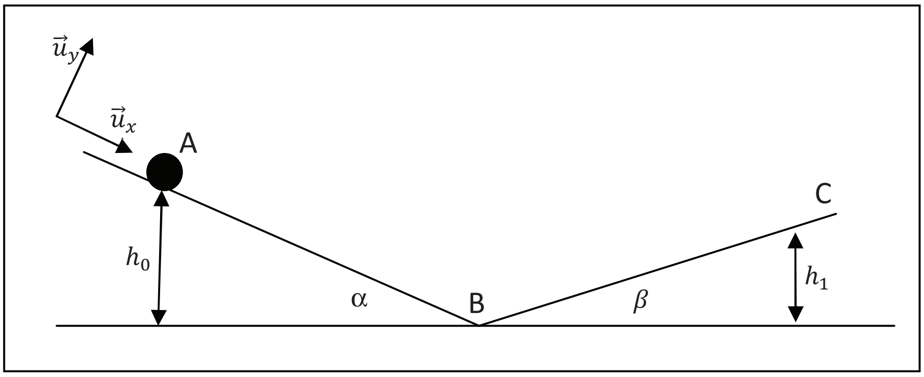
5- S'il arrive au point D avec une vitesse de 3 m/s, pour quel angle θ, il arrive au point E avec une vitesse nulle.



Exercice IV.4:

On considère un petit bloc assimilable à un point matériel de masse m abandonné sans vitesse initiale au point A d'un plan incliné comme l'indique la figure ci-après. Le point A est à l'altitude h_o. On suppose que le coefficient de frottement est le même sur les deux plans et vaut $\mu = \tan\varphi$ (φ est appelé angle de frottement).

L'étude suivante se fera dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.



1) Dans le cas où la masse m glisse, si f représente la résultante des forces de frottement et R_n la réaction normale au support, on a la relation $f = \mu\, R_n$.

- Quelle relation a-t-on entre f , R_n et μ lorsque les frottements sont suffisants pour maintenir la masse en équilibre ?

2) On se place dans le cas où la masse glisse. Faire le bilan des forces agissant sur la masse m entre A et B. L'origine du repère choisi est le point A et AB correspond à l'axe des abscisses (voir figure). Appliquer le principe fondamental de la dynamique et en déduire :

a) l'accélération suivant AB de la masse m. Donner son expression en fonction de g, α et φ.

b) En déduire l'expression de la vitesse VB de la masse m au point B en fonction de g, h_o, α et φ.

c) Y-a-t-il une condition portant sur l'angle de frottement φ et l'angle α du plan incliné pour que le mouvement puisse se produire ? Si oui, laquelle ?

d) Faire la même étude sur la partie BC et donner l'accélération de la masse sur BC.

Indiquer s'il existe une condition pour que le mouvement puisse se produire.

3) Que peut-on dire de l'énergie mécanique totale de la masse m?

a) Exprimer les énergies cinétique $E_C(A)$ et potentielle $E_P(A)$ de la masse au point de départ A. On choisira l'origine des énergies potentielles au point B. En déduire l'énergie mécanique $E(A)$.

b) Exprimer les énergies cinétique $E_C(B)$ et potentielle $E_P(B)$ de la masse au point d'arrivée B. En déduire l'énergie mécanique $E(B)$.

c) Exprimer le travail de la force de frottement f entre A et B. donner l'expression en fonction de m, g, h_o, α et φ.

d) Appliquer le théorème de l'énergie mécanique et en déduire l'expression de la vitesse V_B de la masse m au point B. Retrouver le résultat du 2) b).

4) Après le passage au point B à la vitesse V_B, la masse remonte le plan incliné BC (angle β avec l'horizontale). Le coefficient de frottement $\mu = \tan\varphi$ reste le même.

On supposera que l'angle fait entre les deux plans ne perturbe pas le mouvement. La masse s'arrête au point C.

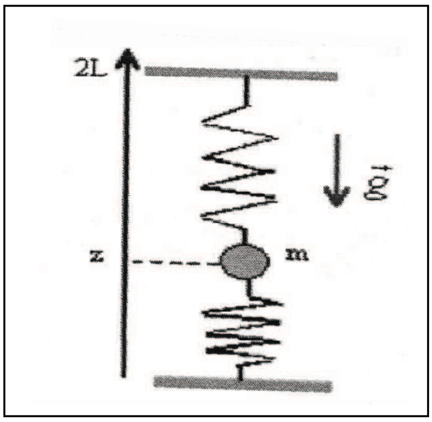
a) Appliquer le théorème de l'énergie mécanique entre B et C. Jusqu'à quelle hauteur $h1$ la masse m remontera-t-elle ?. Donner l'expression de h_1 en fonction de h_o, α, β et φ.

b) Application. Montrer que pour α = β on a : $h_1 = h_0 \frac{\tan\alpha - \tan\varphi}{\tan\alpha + \tan\varphi}$

c) La masse étant arrêtée au point ***C***, va-t-elle redescendre la pente BC

Exercice IV.5:

Un solide de masse m est fixée à 2 ressorts verticaux de raideur k et de l_o est astreint à des déplacements suivant la verticale. La position du centre de gravité du solide est repérée par la cote z. Dans un premier temps on néglige les frottements.



1) Exprimer les énergies potentielles en fonction de z. Préciser les origines choisies.

2) Etablir l'équation différentielle avec la variable z.

- A l'instant initial on lâche le mobile à partir de la position z = ½ l_o

- La période du mouvement est elle modifiée si on part de 0,25 l_0 ?

3) Exprimer les forces s'exerçant sur le mobile en fonction de z; retrouver la condition d'équilibre.

- Etablir l'équation différentielle vérifiée par z.

4) On tient compte des frottements en plaçant le dispositif dans un fluide visqueux de coefficient de viscosité η, qui exerce une force de freinage du type $F = -6\pi\eta r v$. Comment est modifiée l'équation différentielle ? La position d'équilibre est elle changée ?

Solution des exercices

Exercice IV.1:

1) Vitesse au point B :

Vitesse au point B : pas de frottements donc $E_{TA}=E_{TB}$.

$$mgh = \frac{1}{2}mV_B^2 \Rightarrow \boxed{V_B = \sqrt{2gh} \Rightarrow V_B = 10\ m/s}$$

2) Vitesse au point M :

$E_{TA} = E_{TM} \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mV_M^2 + mgh_M \quad avec:\ h_m=R(1+\cos\theta)$

$$\Rightarrow \boxed{V_M = \sqrt{2g\{h - R(1+\cos\theta\}} \Rightarrow V_M = 6.32\ m/s}$$

3) a- Force de contact :

$$\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} normale: C + P_n = ma_n = m\dfrac{V_M^2}{R} \Rightarrow C = m\left(\dfrac{V_M^2}{R} - g\cos\theta\right) \\ Tangentielle: \quad P_t = ma_t \end{cases}$$

b- le bloc quitte la piste si :g

$$\boxed{\vec{C} = \vec{0} \Rightarrow cos\theta = \frac{V_M^2}{Rg} \Rightarrow \theta + 36.87^\circ}$$

Exercice IV.2:

I. Etude énergétique :

1) L'énergie potentielle $Epp(M)$:

$$\boxed{Epp(M) = mgh = mgl(1 - cos\theta)}$$

2) L'énergie mécanique $E(A)$ et $E(M)$:

$$E(A) = Epp(A) + E_C(A) = \boxed{\frac{1}{2}mV_A^2}$$

$$\boxed{E(M) = Epp(M) + E_C(M)}$$

$$\Longrightarrow \quad E(M) = \frac{1}{2}mV_M^2 + mgl(1 - cos\theta)$$

3) La relation entre *E(A)* et *E(M)* :

Le système conservatif (pas de frottement) donc : $E_m(A) = E_m(MA)$.

4) L'expression de V_M^2 :

A partir de la relation du la question 1 et 2 on obtient :

$$\boxed{V_M^2 = V_A^2 - 2gl(1 - cos\theta)} \ldots\ldots\ldots(1)$$

II. Etude Cinématique :

1) Le vecteur vitesse $\vec{V}_M$ en coordonnées polaires :

En coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r \Longrightarrow \vec{V}_M = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{V}_M = \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow V_M = l\dot{\theta}}$$

Donc : $\boxed{V_M^2 = l^2\dot{\theta}^2}$ ....(2)

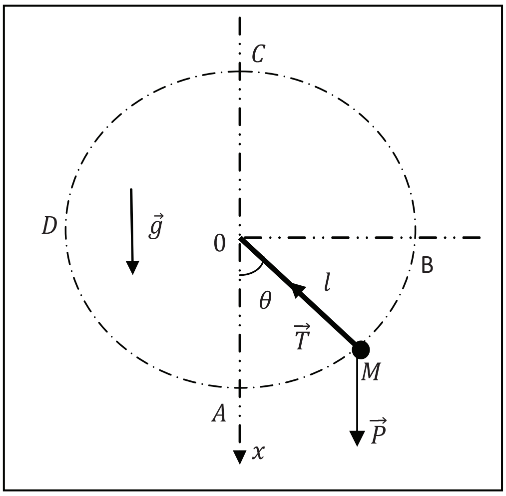
2) le vecteur accélération $\vec{a}_M$ en coordonnées polaires :

$$\vec{a}_M = \frac{d(\vec{V}_M)}{dt}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{a}_M = -l\dot{\theta}^2\vec{u}_r + l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow a_r = -l\dot{\theta}^2 = -\frac{V_M^2}{l}}$$

III. Etude Dynamique :

1) L'étude dynamique sur (ABCD) :



Système la masse m, référentiel terrestre galiléen,

Forces : Poids :$\vec{P} = mg = mg(cos\theta\vec{u}_r - sin\theta\vec{u}_\theta)$

Tension : $\vec{T} = T\vec{u}_r$.

Principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

2) Le rapport T/m :

Suivant $\vec{u}_r$: $mgcos\theta - T = -m\frac{V_M^2}{l}$

$et \quad -mg\,sin\theta = ml\ddot{\theta}$

Donc :

$$\boxed{\frac{T}{m} = \mathrm{g}\,cos\theta + \frac{V_M^2}{l}} \quad \dots \dots . .(3)$$

3) La tension T en fonction de $\boldsymbol{l}$, g , $\boldsymbol{V_A}$ et θ :

A partir des relations (1) et (3) :

$$\frac{T}{m} = \mathrm{g}\,cos\theta + \frac{V_M^2}{l} = \mathrm{g}\cos\theta + \frac{V_A^2}{l} - 2\mathrm{g}(1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{T}{m} = \frac{V_A^2}{l} - \mathrm{g}(2 - 3cos\theta)}$$

4) Pour toute valeur de l'angle θ, la tension T existe : $\forall\theta, T(\theta) \geq 0$

a) T minimale pour $cos\theta$ minimal c'est à dire $cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi$(réponse évidente)

b) $\forall\theta,\ T(\theta) \geq 0 \Rightarrow \forall\theta,\ \frac{V_A^2}{l} - \mathrm{g}(2 - 3cos\theta) \geq 0$

$$\Rightarrow \forall\theta \quad V_A^2 \geq gl(2-3cos\theta) \Rightarrow V_A^2 \geq 5gl$$

$$\boxed{V_A = \sqrt{5gl}}$$

c) $V_C^2 = V_A^2 - 2gl(1-cos\theta_C) = 5gl - 2gl(1-cos\,\pi) = gl \Rightarrow \boxed{V_C = \sqrt{gl}}$

Exercice IV.3:

1) **Vitesse au point B :**

$$\boxed{E_{TA} = E_{TB} \implies V_B = \sqrt{2gR(1-cos\theta)}}$$

2) **Angle $\boldsymbol{\theta}$:**

$$\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} T: \ P_T = ma_T \\ N: P_N - C = ma_N \end{cases}$$

Le chariot quitte la piste si C=0:

$$\Rightarrow \boxed{P_N = ma_N \Rightarrow cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = 48.18^\circ}$$

3) **Coefficient de frottement entre B et D :**

$$\Delta E_T = W_{\vec{C}_x} \Rightarrow E_{TD} - E_{TB} = W_{\vec{C}_x}\Big|_B^C + W_{\vec{C}_x}\Big|_C^D$$

$$E_{TB} = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \quad , \qquad E_{TD} = 0 \quad avec: h_B = 2Rsin\theta$$

$$W_{\vec{C}_x} = -C_{x1}BC - C_{x^2}CD = -u_d mgcos\theta BC - u_d mgCD \quad avec: BC = 2R\ et\ CD = R$$

Donc :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + 2mgRsin\theta = \mu_d mgcos\theta BC + \mu_d mgCD$$

Finalement

$$\boxed{\mu_d = \frac{v_B^2 + 4gRsin\theta}{2gR(2cos\theta + 1)}}$$

4) **A.N** : $\boxed{V_B = 3.16 \text{ m/s} \ \text{ et } \mu_d = 0.55}$

5) **L'angle θ :**

$$E_{TD} = \frac{1}{2}mv_D^2 \quad et \quad E_{TE} = \frac{1}{2}mv_E^2 + mgh_E \quad avec: h_g = 2R(1-cos\theta)$$

$$E_{TD} = E_{TE} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_D^2 = \frac{1}{2}mv_E^2 + 2mgR(1 - cos\theta)$$

Donc

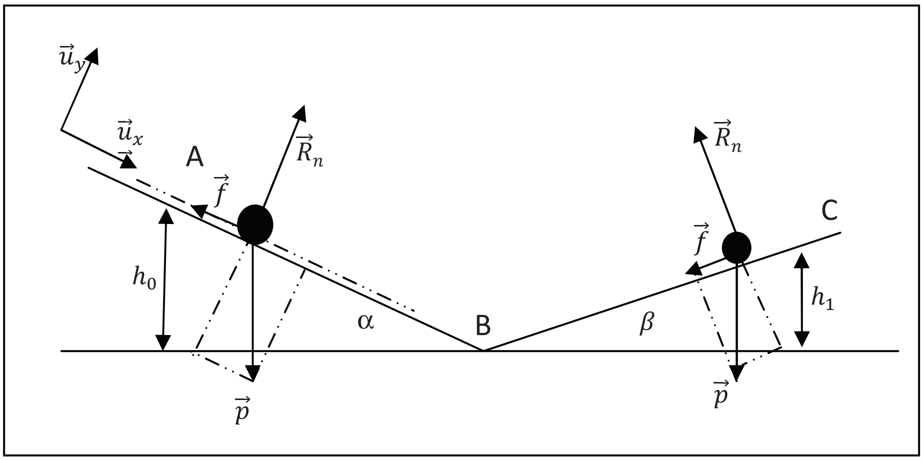
$$\boxed{cos\theta = 1 - \frac{v_D^2}{4gR} \Rightarrow \theta = 39.2^\circ}$$

Exercice IV.4:

1) Lorsque les frottements sont suffisants pour maintenir la masse en équilibre on a :

Solide en équilibre : $\frac{f}{R_n} < \mu;$

2) Bilan des forces agissant sur la masse m:



- Le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\sin\alpha\,\vec{u}_x + \cos\alpha\;\vec{u}_y)$
- La réaction normale $\vec{R}_n = R_n\vec{u}_y$
- Les frottements solide : $\vec{f} = -f\vec{u}_x$ et la masse glisse : alors $f = \mu R_n$

Principe fondamental de la dynamique : $\vec{P} + \vec{f} + \vec{R}_n = \vec{a}$

Et en projetant :

a) Sur $\vec{u}_y$: $R_n = mg\cos\alpha.$

Sur $\vec{u}_x$: $mg\sin\alpha - f = m\ddot{x}$ *et avec* $f = \mu R_n = \mu mg\cos\alpha$

On a : $m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha\left(1 - \frac{\mu}{\tan\alpha}\right)$

$$\boxed{\ddot{x} = g\sin\alpha\left(1 - \frac{tan\varphi}{\tan\alpha}\right) = g\sin\alpha - g\cos\alpha\tan\varphi}$$

b) On obtient : $\dot{x} = \ddot{x}t$ (à $t = 0$ $la\ vitesse\ est\ nulle$) et $x = \frac{1}{2}\ddot{x}t^2$(à $t = 0, x = 0$)

La masse est en B à l'instant t_B correspondant à $x_B = \frac{h_0}{\sin\alpha}$:

$$t_B = \sqrt{\frac{2X_b}{\ddot{x}}} = \sqrt{\frac{2h}{\ddot{x}\sin\alpha}}$$

On en déduit la vitesse en B :

$$\boxed{V_B = \ddot{x}t_B = \sqrt{\frac{2h_0\ddot{x}}{\sin\alpha}} = \sqrt{2h_0 g\left(1 - \frac{tan\varphi}{\tan\alpha}\right)}}$$

c) Il ya mouvement si l'accélération existe et est positive soit :

$$\ddot{x} \geq 0 \Rightarrow \tan\varphi \ \geq \tan\alpha$$

Il faut donc $\alpha \leq \varphi$

d) Sur BC : même force mais en orientant de B vers C le poids et les frottements ont même sens ; on a donc :

Le poids : $\vec{P} = m\vec{g} \ = mg(-sin\beta\vec{u}_x + \cos\beta\,\vec{u}_y)$

la réaction normale : $\vec{R}_n = R_n\vec{u}_y$

et les frottements solide : $\vec{f} = -f\vec{u}_x$

et la masse glisse : alors $f = \mu R_n$

Principe fondamental de la dynamique : $\vec{P} + \vec{f} + \vec{R}_n = \vec{a}$ et en projetant :

Sur $\vec{u}_y$: $R_n = mg\cos\beta$,

Sur $\vec{u}_x$: $-mg\sin\beta - f = m\ddot{x}$, avec $f = \mu R_n = \mu mg\cos\beta$,

On a :

$$m\ddot{x} = -mg\sin\beta - \mu mg\cos\beta = -mg\sin\beta\left(1 + \frac{\mu}{\tan\beta}\right)$$

$$\boxed{\ddot{x} = -g\sin\beta\left(1 + \frac{\tan\varphi}{\tan\beta}\right) = -g\sin\beta - g\cos\beta\tan\varphi}$$

Il n'ya pas de condition sur les angles puisque l'accélération est toujours négative (mouvement uniformément freiné)

3) L'énergie mécanique totale de la masse m ne se conserve pas car le système subit des frottements (système non conservatif)

a) Energie cinétique $E_C(A) = 0$ et énergie potentielle $E_p(A) = mg$

b) h_0 ; on en déduit : l'énergie mécanique : $\boxed{E(A) = E_C(A) + E_P(A) = mgh_0}$

c) Energie cinétique $E_C(B) = \frac{1}{2}mV_B^2$ et énergie potentielle $E_P(B) = 0$;on en déduit :l'énergie mécanique : $\boxed{E(B) = E_C(B) + E_P(B) = \frac{1}{2}mV_B^2}$

d) $W_{AB} = \vec{f}\,\overrightarrow{AB} = -fx_B = -\mu R_n \frac{h_0}{\sin\alpha} = -\mu mg\cos\alpha\frac{h_0}{sin\alpha} = \boxed{mgh_0\frac{\tan\varphi}{tan\alpha}}$

e) Théorème de l'énergie mécanique : $\Delta E = E(B) - E(A) = W_{AB}$

$$\frac{1}{2}mV_B^2 - mgh_0 = W_{AB} = -mgh_0\frac{\tan\varphi}{\tan\alpha} \Rightarrow \boxed{V_B^2 = 2gh_0\left(1 - \frac{\tan\varphi}{\tan\alpha}\right)}$$

On retrouve bien le résultat du 2)b).

4) a) le travail de la force de frottement entre B et C est :

$$W_{BC} = \vec{f}\,\overrightarrow{BC} = -\mu R_n\frac{h_1}{\sin\beta} = -\mu mg\cos\frac{h_1}{\sin\beta} = -mgh_1\frac{\tan\varphi}{\tan\beta}$$

Théorème de l'énergie mécanique entre B et C : $\Delta E = E(C) - E(B) = W_{BC}$

$$mgh_1 - \frac{1}{2}mV_B^2 = W_{BC} = -mgh_1\frac{\tan\varphi}{\tan\beta}$$

$$\Rightarrow V_B^2 = 2gh_1\left(1 + \frac{\tan\varphi}{\tan\beta}\right) \qquad et\ \ V_B^2 = 2gh_0\left(1 - \frac{\tan\varphi}{\tan\alpha}\right)$$

On a donc :

$$\boxed{\frac{h_1}{h_0} = \frac{1 - \dfrac{\tan\varphi}{\tan\alpha}}{1 + \dfrac{\tan\varphi}{\tan\beta}} = \frac{\tan\alpha - \tan\varphi}{\tan\beta - \tan\varphi}}$$

b) Application : pour $\alpha = \beta$ on a : $h_1 = h_0\frac{\tan\alpha - \tan\varphi}{\tan\alpha + \tan\varphi}$

c) La masse est arrêtée au point C. La condition pour redescendre est $\beta > \varphi$

Exercice IV.5 :

1) Les énergies potentielles en fonction de z :

$$\begin{cases} \text{Energie potentielle de pesanteur : (origine } z = 0) mgz \\ \text{Energie potentielle élastique, ressort ressort inférieur} : {}^1/_2\, k(z - l_0)^2 \\ \qquad \text{Ressort supérieur} : {}^1/_2\, k(2L - z - l_0)^2 \end{cases}$$

Donc l'énergie potentielle totale est donnée par :

$$\boxed{E_P = mgz + 1/2\, k(z - l_0)^2 + 1/2\, k(2L - z - l_0)^2}$$

2) L'équation différentielle est donnée par :

$$\ddot{z} + \frac{2k}{m} z = \frac{2kL}{m} - \mathrm{g}$$

La solution de cette équation est :

$$\boxed{z(t) = \left(-\frac{1}{2}L + \frac{mg}{2k}\right)\cos(\omega t) + L - \frac{mg}{2k}}$$

3) Inventaires des forces :

$$\begin{cases} \vec{T}_1 = -k(z - l_0)\vec{z} : \text{tension exercée par le ressort inférieur} \\ \vec{T}_2 = k(2L - z - l_0)\vec{z} : \text{tension exercée par le ressort du haut} \\ \vec{P} = -mg\vec{z} : \text{poids} \end{cases}$$

4) Les frottements fluides ne modifient pas la position d'équilibre, contrairement aux frottements solides :

5) La période devient :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

Références Bibliographiques

1. Mécanique générale –S.Pommier et Y.Berthaud- Dunod 2010.
2. Mécaniques des solides rigides - J.M.Berthelot- ISMANS, France 2012.
3. Travaux dirigés de physique - J.Fraget et J.Mzzaschi –Vuibert 1970.
4. Physique MPSI, PTSI- A.M. Clausset, F.Clausset- Dunod 2011.
5. Travaux dirigés de mécanique de point -A.Le Padellec et M. Mourgues- univ Toulouse 2011-2012.
6. Incertitude et analyse des erreurs dans les mesures physiques-J .Taylor-Dunod 2000.
7. Mécanique 1ere année MPSI, PCSI, PTSI -J.M. Brebec- HPrepa 2003.
8. Introduction à la mécanique du point- Travaux dirigés-Université de Cergy-Pontoise S1-MPI-2013
9. Mécanique Newtonienne du point .C.Grossetete et P.Olive- ellipse 1998.
10. Cours et exercices de mathématiques -M.Cuaz- 2009.