



Département de Génie Electrique

POLYCOPE

Cours UEF - ELTF124 intitulé

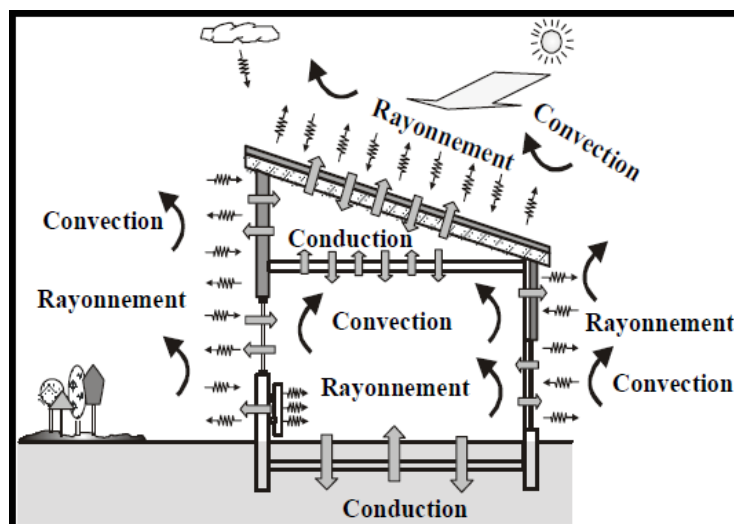
« *Transfert de Chaleur* »

Destiné aux étudiants

3^{èmes} Année Génie Electrique

Présenté par : Dr. Brahim MENACER

(Maître de Conférences classe B)



Année 2019/2020

Sommaire

AVANT-PROPOS	I
INFORMATION SUR LE COURS	II
PREREQUIS	II
OBJECTIFS.....	II
INTRODUCTION GENERALE.....	II

CHAPITRE I: TRANSFERT DE CHALEUR : GENERALITES

1.1. L'importance de l'étude de transfert de chaleur	4
1.2. Concepts fondamentaux	4
1.2.1. Notion de chaleur	4
1.2.2. Champs de température	5
1.2.3. Surface isotherme	6
1.2.4. Gradient de température	6
1.2.5. Flux et densité du flux de chaleur	6
1.3. Les différents modes de Transfert de chaleur	7
1.3.1. Transmission de la chaleur par conduction	7
1.3.2. Transmission de la chaleur par convection	8
1.3.3. Transmission de la chaleur par rayonnement	9
1.4. Formulation d'un problème de transfert de chaleur	10
1.4.1. Bilan d'énergie	10
Exercices corrigés	11

CHAPITRE II: TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION EN REGIME PERMANENT

2.1. Introduction à la conduction thermique	15
2.2. La Loi de Fourier.....	15
2.3. Conductivité thermique	16
2.4. Équation de la chaleur	17
2.4.1 En coordonnées cartésiennes	17
2.4.2 En coordonnées cartésiennes cylindriques.....	19
2.4.3 En coordonnées sphériques	19
2.5. Transfert conductif unidirectionnel	20
2.5.1. Cas d'un mur simple.....	20
2.5.2. Cas d'un mur multicouches	22
2.5.3. Cas d'un mur composite	23
2.5.4. Cas d'un Cylindre creux long (tube).....	26
2.5.5. Cas d'un Cylindre creux multicouches	27
2.5.6. Cas d'un dispositif à géométrie sphérique	31
2.5.7 Théorie des ailettes	33
2.5.7.1 Généralités.....	33
2.5.7.2 L'équation de la barre.....	35
2.5.7.3 Flux extrait par une ailette	36
2.5.7.4 Efficacité d'une ailette	37
2.6. Transfert de chaleur multidirectionnel.....	39
2.6.1. Méthode du coefficient de forme.....	39
2.6.2. Méthodes numériques (différences finies)	41
Exercices corrigés	42

*CHAPITRE III : TRANSFERT DE LA CHALEUR EN RÉGIME VARIABLE (OU TRANSITOIRE) ET SANS
CHANGEMENT D'ÉTAT*

3.1. Conduction unidirectionnelle en régime variable sans changement d'état.....	44
3.1.1 Milieu à température uniforme (méthode du gradient nul)	45
3.1.2. Milieu semi-infini : Température constante imposée en surface, Flux de chaleur imposée en surface	48
3.1.3. Milieu épais de dimensions finies (ou Milieu limité).....	50
3.2. Conduction multidirectionnelle en régime variable	51
Exercices corrigés	52

CHAPITRE IV : TRANSFERT DE LA CHALEUR PAR CONVECTION

4.1. Introduction	55
4.2 Modélisation du transfert de chaleur par convection	55
4.2.1. Ordre de grandeur du coefficient h pour différentes configurations	56
4.3. Couches limites en transfert par convection	57
4.3.1. Couche limite hydrodynamique.....	57
4.3.1. Couche limite thermique	57
4.4 Ecoulement laminaire et turbulent.....	58
4.5. Equation de conservation	59
4.5.1. Equation de conservation de la masse ou equation de continuité.....	59
4.5.2. Equations de conservation de la quantité de mouvement ou équations de Navier-Stokes.....	59
4.5.3. Equation de conservation de l'énergie.....	60
4.6. Equation de la couche limite	60
4.7. Nombres adimensionnels.....	64
4.7.1. Principe de la méthode	64
4.7.2. Nombres adimensionnels.....	65
a) Le nombre de Reynolds	65
b) Le nombre de Nusselt.....	65
c) Le nombre de Grashof	65
d) Le nombre de Prandtl	66
e) Le nombre de Rayleigh	66
4.8 Convection forcée	66
4.9 Convection naturelle.....	69
Exercices corrigés	70

CHAPITRE V: ECHANGEURS DE CHALEUR

5.1. Introduction(description, hypothèses et conventions)	74
5.2. Caractéristiques géométriques des échangeurs	74
5.2.1 Principaux types des échangeurs de chaleurs.....	74
5.3. Expression du flux échangé dans un échangeur tubulaire simple	75
5.3.1. Calcul de la puissance totale de l'échangeur.....	76
5.4. Efficacité d'un échangeur	79
5.5 Méthode du nombre d'unités de transfert (NUT)	80
5.6. Calcul d'un échangeur	81
Exercices corrigés	81

CHAPITRE VI: TRANSFERT DE CHALEUR PAR RAYONNEMENT

6.1. Introduction	85
6.2 Principe de transfert de chaleur par rayonnement	86

6.3 Définitions préliminaires	86
6.4 Processus de réception d'un rayonnement par un corps	88
6.5 Lois du rayonnement	89
6.5.1 Loi de Lambert	89
6.5.2 Loi Kirchoff.....	90
6.5.3 Loi de Planck.....	90
6.5.4 Lois de Wien	91
6.5.6 Loi de Stefan-Boltzmann.....	92
6.6 Rayonnement des corps réels	92
6.7 Rayonnement des corps gris	93
Exercices corrigés	93
Bibliographie.....	97

Introduction

L'énergie thermique est transmise des zones à haute température aux zones à basse température, dans un processus qui s'accompagne d'un changement d'entropie jusqu'à ce que l'état d'équilibre thermique caractérisé par une répartition uniforme de la température soit atteint, si possible. Nous appelons chaleur, le transfert d'énergie qui a lieu sans mouvement ordonné du système, par opposition au transfert d'énergie qui a lieu avec un mouvement ordonné pendant l'exécution d'un travail mécanique.

La thermodynamique des processus réversibles étudie le transfert d'énergie en eux, mais toujours d'une succession d'états d'équilibre. Cependant, dans un processus d'échange de chaleur entre des corps à différentes températures, tant qu'une différence de température finie entre-elles est maintenue, il y aura un écoulement irréversible de chaleur entre ces corps et nous n'aurons pas d'états d'équilibre. Cependant, nous pouvons avoir des états dans lesquels les variables macroscopiques du système ne changent pas avec le temps, mais elles ne correspondent pas à des états d'équilibre mais à des états stationnaires dans lesquels les températures des différents corps impliqués sont maintenues constantes et le flux de chaleur entre eux. On peut aussi avoir des situations où le système évolue avec le temps et nous n'avons même pas d'états stables.

La transmission de la chaleur s'effectue par trois mécanismes de base :

1) Conduction :

L'énergie thermique est transmise lors d'un contact direct entre des corps (ou des parties d'entre eux) à différentes températures et se produit par des collisions ou des couplages entre les molécules du système (certaines dans les zones plus chaudes, avec une énergie thermique plus élevée et d'autres dans des zones plus froides, avec une énergie thermique plus faible), même s'il n'y a pas de mouvement macroscopique des molécules, ou si le matériau est transparent au rayonnement. Ce processus est d'une grande importance dans les solides, mais de moindre importance dans les liquides et les gaz, où normalement il apparaît combiné à la convection et en est pratiquement masqué.

2) Convection :

L'énergie thermique est transmise par le mouvement physique des molécules «chaudes» dans les zones de température vers les zones à basse température et vice versa, en équilibrant les températures.

Ce processus est d'une grande importance dans les fluides et est également appelé conduction de surface, car l'écoulement de la chaleur entre la surface d'un matériau et un fluide est liée à la conduction à travers une fine couche de fluide qui se trouve à côté de la surface. De plus, c'est ce processus de conduction superficielle qui qui provoque, dans un fluide initialement au repos en contact avec une surface à différentes températures, une différence de température dans le fluide, origine des différences de densité dans le même qui produira temps un déplacement physique de matière à différentes températures d'une zone à une autre, avec convection (dans ce cas naturel).

Le transfert de chaleur par convection peut être forcé lorsqu'il est assisté par le mouvement du surfaces en contact avec le fluide ou libres (appelées aussi naturelles) lorsqu'il se produit uniquement en raison de d'une différence de densité causée par une différence de températures. Il peut également être accompagné changement de phase, comme lors de la condensation ou de l'ébullition, avec des échanges thermiques très importants intense.

3) Rayonnement :

L'énergie thermique est transmise sous forme d'énergie à partir d'un rayonnement électromagnétique, émis par tous corps par le fait d'être à une température T , et qu'elle se propage à la vitesse de la lumière (car est une lumière de différentes longueurs d'onde) et peut être absorbée par les corps, augmentant sa température. Le rayonnement est le seul moyen de transmission de la chaleur lorsqu'il a lieu à travers un vide, et peut être très important pour les températures élevées. Ces mécanismes de base agiront en combinaison, non seulement pour donner la température finale de la pièce que nous sommes étudiées, mais en combinaison avec d'autres éléments tels que l'humidité de l'air, pour donner le degré de confort ou confort de l'être humain dans l'espace considéré. Ainsi, des degrés d'humidité plus ou moins élevés donneront lieu à une sensation de confort plus ou moins grande pour la même température. L'action du vent et du rayonnement est également des éléments à considérer. D'une part, le vent favorise les processus de convection et d'évaporation. Pour autre en partie, pour la même température dans un endroit, le fait qu'il fasse beau peut rendre le séjour plus agréable dedans en hiver, non seulement à cause de la lumière mais aussi à cause du rayonnement thermique qui affecte la

personne. De la même Ainsi, pour une même température dans une pièce, la sensation thermique est plus faible si les murs et le sol sont encore froid que s'ils sont déjà chauds ou même plus chauds que l'air de la pièce.

Chapitre 01 :

Transfert de chaleur : Généralités

1.1 L'importance de l'étude de transfert de chaleur :

Le transfert de chaleur est l'énergie en transit en raison d'une différence de températures dans un corps ou entre différents corps. Chaque fois qu'il y a une différence de températures, l'énergie est transférée de la région de température la plus élevée à la température la plus basse. Selon les concepts de la thermodynamique, l'énergie qui transférait à la suite d'une différence de températures est la chaleur.

Les lois de la thermodynamique concernent le transfert d'énergie, mais ils ne s'appliquent qu'aux systèmes en équilibre (ils peuvent utiliser pour prédire la quantité d'énergie nécessaire pour modifier un système d'un état d'équilibre à un autre), mais ils ne sont pas utilisés pour prédire la rapidité (temps) avec laquelle ces changements peuvent avoir lieu.

Le transfert de chaleur complète les principes thermodynamiques, fournissant des méthodes d'analyse qui permettent de prédire ce taux de transfert de chaleur.

Exemple :

Le chauffage d'une barre d'acier immergée dans l'eau chaude : les principes thermodynamiques peuvent être utilisés pour prédire les températures finales une fois que les deux systèmes ont atteint l'équilibre et la quantité d'énergie transférée entre les États d'équilibre initiaux et finals, mais cela ne nous dit rien sur la vitesse du transfert thermique ou la température de la barre après un certain temps, ou le temps qu'il faut pour obtenir une certaine température à une certaine position de la barre.

Réaliser une analyse de transmission de chaleur permet de prévoir taux de transfert thermique de l'eau à la barre et de cette information que vous pouvez calculer la température de la barre ainsi que la température de l'eau en fonction du temps.

- ✓ Procéder à une analyse complète du transfert de la chaleur, il est nécessaire de considérer trois mécanismes différents : la conduction, la convection et le rayonnement.
- ✓ La conception de systèmes d'échange de chaleur et la conversion d'énergie nécessitent une certaine familiarité avec chacun de ces mécanismes, ainsi qu'avec leurs interactions.

1.2. Concepts fondamentaux :

1.2.1. Notion de chaleur :

La chaleur est considéré come une forme particulière de l'énergie. Selon le premier principe de la thermodynamique, la chaleur est équivalente à un travail, d'où ils ont une même unité : le Joule.

Elle se propage naturellement du milieu le plus chaud vers celui ayant la température la plus basse, tout en gardant le volume constant. Ceci constitue le second principe de la thermodynamique.

a) Chaleur sensible :

Lorsqu'un corps reçoit ou cède de la chaleur, s'échauffe ou se refroidit sans changer d'état, on parle alors de *chaleur sensible*. La quantité de chaleur reçue par un corps de masse m de capacité calorifique c_p lorsqu'il passe d'un état initial à la température T_1 à un état final à la température T_2 s'exprime par :

$$Q_{1 \rightarrow 2} = m.c_p.(T_2 - T_1) \quad (1.1)$$

b) Chaleur latente :

On parle de **chaleur latente** lorsque le corps qui reçoit ou cède de la chaleur l'utilise pour changer d'état, sans que sa température ne varie. La quantité de chaleur qu'il faut fournir à un matériau de masse m pour que, à température constante, celui-ci change d'état (solide \rightarrow liquide; liquide \rightarrow gaz) est donnée par :

$$Q = m.L \quad (1.2)$$

Où L est le coefficient de chaleur Latente.

On parle alors de "**transformation isotherme**" car la température du système reste constante pendant tout le processus d'échange de chaleur.

1.2.2. Champs de température :

On appelle température la grandeur physique qui mesure le degré de chaleur d'un milieu, à savoir :

- ✓ solides : c'est l'état de vibration des atomes à l'intérieur d'un réseau cristallin ou de mouvement d'électrons pour les matériaux qui ont la faculté d'échanger des électrons (les métaux par exemple) ;
- ✓ fluides : c'est l'état d'agitation des molécules. La température s'exprime en degrés Kelvin (K), degrés Celsius ($^{\circ}C$) ou degrés Rankine (R).

$$\begin{aligned} T(^{\circ}K) &= T(^{\circ}C) + 273.15 \\ T(^{\circ}F) &= 1.8 * T(^{\circ}C) + 32 \\ T(^{\circ}R) &= 1.8 * T(^{\circ}C) + 491.67 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Le régime est permanent ou stationnaire si le champ de température est indépendant du temps $T = f(x, y, z, t)$. Dans le cas contraire, il est dit variable ou transitoire.

1.2.3. Surface isotherme :

Le lieu des points ayant à chaque instant la même température est appelé surface isotherme. Deux surfaces isothermes ne peuvent se couper car on aurait alors deux températures différentes en un même point ce qui est physiquement impossible.

- ✓ En régime permanent : Les surfaces isothermes sont invariables.
- ✓ En régime variable : Elles sont mobiles et déformables.

1.2.4. Gradient de température :

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \vec{n} \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \quad (1.4)$$

\vec{n} : Vecteur unitaire de la normale. $\frac{\partial T}{\partial n}$: Dérivée de la température le long de la normale.

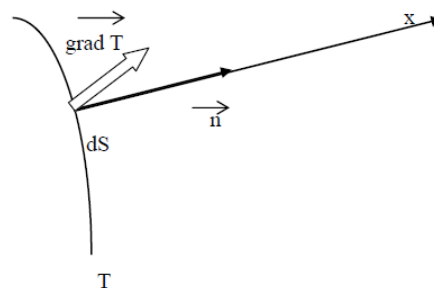


Figure 1.1 : Orthogonalité du gradient et de l'isotherme

1.2.5. Flux et densité du flux de chaleur :

- ✓ **Le flux chaleur** est la puissance échangée par unité de temps :

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \quad [W] \quad (1.5)$$

- ✓ **La densité du flux thermique** est la quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme :

$$\varphi = \frac{dQ}{S \cdot dt} = \frac{\Phi}{S} \quad [W/m^2] \quad (1.6)$$

- ✓ **La source de chaleur** est définie par la puissance thermique qu'elle produit. Dans le cas d'une réaction chimique, elle s'exprime :

$$\dot{Q} = A_0 e^{\alpha t} \quad (1.7)$$

Où A_0 et α se sont des constantes.

1.3. Les différents modes de Transfert de chaleur :

1.3.1. Transmission de la chaleur par conduction :

Ce transfert d'énergie thermique, qui ne nécessite pas de mouvement macroscopique de la matière, est créé par :

- ✓ l'agitation moléculaire (dans les gaz et les liquides)
- ✓ les vibrations des réseaux cristallins (dans les solides non-conducteurs)
- ✓ le déplacement d'électrons libres (dans les métaux conducteurs)

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) propose en 1822 la loi de la conduction connue maintenant sous le nom de loi de Fourier. Cette relation indique que le flux de chaleur est proportionnel au gradient de la température et se fait dans la direction des températures décroissantes.

Dans le cas de la conduction, le flux est calculé par:

$$\vec{\Phi}_s = -\lambda.S.\vec{\text{grad}}T \quad (1.8)$$

Pour une conduction unidirectionnelle :

$$\vec{\Phi}_s = -\lambda.S.\frac{dT}{dx} \quad (1.9)$$

Le signe (-) est une conséquence du second principe de la thermodynamique, selon lequel la chaleur doit circuler vers la zone de température la plus basse. Le gradient de température est négatif si la température diminue pour des valeurs croissantes de x , donc la chaleur transférée de la direction positive doit être d'une amplitude positive, par conséquent, un signe négatif doit être introduit dans le deuxième membre de l'équation précédente, cela peut être vu dans la figure 1.2

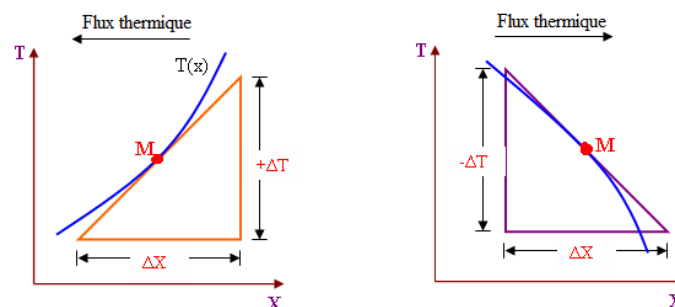


Figure 1.2 : Signes de transmission de chaleur par conduction

1.3.2. Transmission de la chaleur par convection :

Lorsqu'un fluide à T_f entre en contact avec un solide dont la surface de contact est à une température autre que T_s , le processus d'échange d'énergie thermique est appelé convection.

Il existe deux types de convection :

- a) **La convection libre ou naturelle** se produit lorsque la force motrice provient de la variation de densité dans le fluide à la suite d'un contact avec une surface à une température différente, ce qui donne lieu à des forces ascendantes, le fluide près de la surface acquiert une vitesse due seulement à cette différence de densité, sans aucune force motrice externe.
- b) **Convection forcée**, se produit lorsqu'une force motrice externe déplace un fluide avec une vitesse (v), sur une surface qui est trouvée à une température T_s supérieure ou inférieure à celle du fluide T_f , car la vitesse du fluide en convection forcée est plus élevée qu'en convection naturelle, donc, une plus grande quantité de chaleur est transférée pour une température donnée.

La **loi de Newton** est utilisé le calcul du transfert thermique par convection:

$$\Phi_s = h.S.(T_p - T_\infty) \quad (1.10)$$

L'équation précédente sert de définir le coefficient (h), sa valeur numérique doit être déterminée analytiquement ou expérimentalement. Dans la figure ci-jointe, vous pouvez voir le profil d'un fluide adjacent à une surface solide.

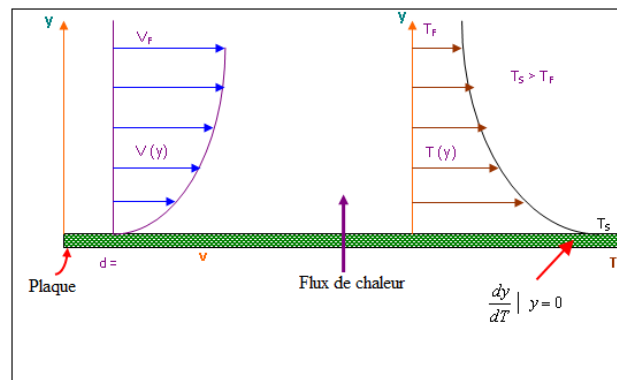


Figure 1.3 : Distribution de la température et de la vitesse d'un fluide sur une plaque plane en convection forcée.

1.3.3. Transmission de la chaleur par rayonnement :

La densité de flux maximale émise par une surface est donnée par la loi de Stephan-Boltzmann :

$$\Phi_{\max i} = \sigma.T_p^4 \quad (1.11)$$

σ : Constante de Stephan = $5,669.10^{-8}$ W/m².K⁴.

Le flux maximum est obtenu pour une surface idéale (corps noir). Cependant, les surfaces réelles (corps gris) ont une certaine émissivité (ϵ) qui vient réduire le flux émis par la surface :

$$\Phi_{réel} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T_p^4 \quad (1.12)$$

Dans le cas où cette surface est environnée d'une autre surface à une température T_∞ , l'échange net de chaleur est alors :

$$\Phi_{net} = \sigma \cdot \varepsilon_p \cdot S \cdot (T_p^4 - T_\infty^4) \quad (1.13)$$

Exemple : réchauffement d'un mur par le rayonnement solaire le jour, et chaleur émise par le mur la nuit.

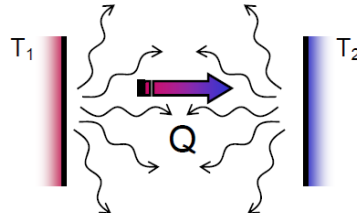


Figure 1.4 : transfert de chaleur par rayonnement.

Remarque :

- Dans de nombreux problèmes de transformation d'énergie thermique, les trois modes de transfert de la chaleur coexistent mais, généralement, au moins une des trois formes pourra être négligée, ce qui simplifiera le traitement mathématique du processus de transfert ;
- Dans la figure suivante, on peut visualiser les trois modes de transfert de chaleur en même temps.

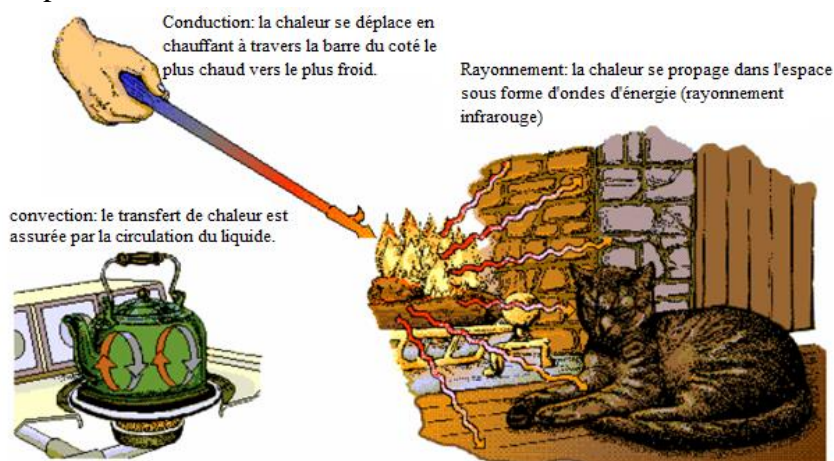


Figure 1.5 : illustration des trois modes du transfert de la chaleur.

1.4. Formulation d'un problème de transfert de chaleur :

1.4.1. Bilan d'énergie :

Soit un volume de contrôle donné, à chaque instant, le bilan de conservation d'énergie (énergie mécanique + énergie interne) sur ce volume s'écrit :

$$[\text{Ce qui entre}] - [\text{ce qui sorte}] + [\text{ce qui est généré}] = [\text{ce qui stocké}]$$

$$E_e - E_s + E_g = E_{st} \quad (1.14)$$

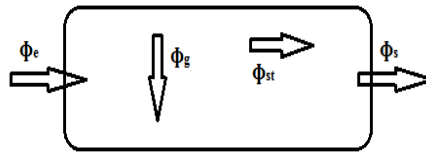


Figure 1.6 : Bilan énergétique

Le terme "énergie générée" est à considérer au sens large : énergie produite (en +) ou consommée (en -). Il en est de même pour le terme d'accumulation (variation dans le temps de l'énergie dans le volume de contrôle).

Dans le cadre du cours, le bilan d'énergie se limitera à un bilan d'énergie thermique. Le terme de génération, E_g , pourra apparaître dans les cas suivants :

- ✓ réactions chimiques exo ou endothermique,
- ✓ réactions nucléaires
- ✓ dissipation visqueuse
- ✓ effet Joule dans une résistance électrique

Au travers d'une surface, le bilan se réduit simplement à :

$$E_e - E_s = 0 \quad (1.15)$$

Exemple 01 :

Une face d'une plaque de cuivre de 3 cm d'épaisseur est maintenue à 400 °C et l'autre face à 100 °C.

1. Quelle quantité de chaleur est transférée par unité de surface à travers la plaque ?

Donnée : la conductivité thermique du cuivre est de 370 W/m²°C.

Solution :

A partir de la loi de Fourier ; la quantité de chaleur est transférée par unité de surface

$$\varphi = \frac{\Phi}{S} = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} \text{ et par intégration :}$$

$$\varphi = \frac{\Phi}{S} = -\lambda \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{-370 \times (100 - 400)}{3 \times 10^{-2}} = 3.7 \text{ MW/m}^2$$

Exemple 02 :

L'air à 20 ° C souffle sur une plaque chauffante de 50 sur 75 cm maintenue à 250 °C. Le coefficient de transfert de chaleur par convection est de 25 W/m²°C.

1. Calculez le transfert de chaleur transmis par convection.

Solution :

A partir de la loi de Newton :

$$\Phi = h.S.(T_p - T_\infty) = 25 \times 0.5 \times 0.75 \times (250 - 20) = 2.156 \text{ kW}$$

Exemple 03 :

Deux plaques noires infinies à 800 ° C et 300 ° C échangent de la chaleur par rayonnement.

1. Calculez le transfert de chaleur par unité de surface.

Solution :

A partir de l'équation de Stefan-Boltzmann :

$$\varphi = \frac{\Phi}{S} = \sigma(T_1^4 - T_2^4) = 5.669 \times 10^{-8} \times (1073^4 - 573^4) = 69.03 \text{ kW/m}^2$$

Exemple 04 :

Une résistance électrique est connectée à une batterie, comme indiqué sur le schéma. Après une brève fluctuation transitoire, la résistance prend une température d'équilibre presque uniforme 95 °C, tandis que la batterie et les câbles de connexion restent à une température ambiante de 25 °C. La résistance thermique et électrique des câbles de connexion est négligeable.

Si l'énergie électrique se dissipe uniformément dans la résistance de forme cylindrique de diamètre $D = 60 \text{ mm}$ et de longueur $L_r = 25 \text{ mm}$.

- 1) Quelle est le flux chaleur généré par unité de volume g_{vol} en W/m^3
- 2) Quel est le coefficient de convection qu'il devrait avoir pour évacuer toute la chaleur si on néglige le rayonnement de la résistance ?

Données : $V_1 = 24\text{V}$, $I_1 = 6\text{A}$, $L_r = 25\text{mm}$, $D_r = 60\text{mm}$, $T_w = 95 \text{ °C}$, $T_\infty = 25 \text{ °C}$

Solution :

- 1) Le flux chaleur généré par unité de volume g_{vol} :

La vitesse de transfert de chaleur :

$$\Phi_{tr} = V_1 \times I_1 = 144 \text{ W}$$

Le volume de la résistance cylindrique :

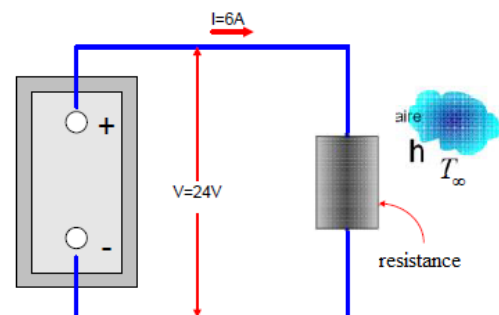
$$V_{cyl} = \frac{\pi}{4} \cdot D_r^2 \cdot L_r = 7.068 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

La surface de transfert de chaleur par convection :

$$S_{tr} = \pi \cdot D_r \cdot L_r + \frac{\pi}{2} \cdot D_r^2 = 0.0103 \text{ m}^2$$

$$g_{vol} = \frac{\Phi_{tr}}{V_{cyl}} = 2.037 \times 10^6 \text{ W/m}^3$$

- 2) le coefficient de convection :



$$h_r = \frac{\Phi_{tr}}{S_{tr} \cdot (T_w - T_\infty)} = 198.42 \frac{W}{m^2 C}$$

Exemple 05 :

Il est nécessaire de calculer de flux de chaleur perdu d'un homme dans un environnement où la température des murs est de $T_p = 27^\circ C$ et l'environnement est de $T_\infty = 20^\circ C$ si l'être humain a une température de surface de $T_h = 32^\circ C$ et un coefficient de transfert de chaleur par convection entre l'homme et l'environnement et l'émissivité de $h_h = 3W/m^2 \cdot ^\circ C$, $\varepsilon = 0,9$ respectivement, on sait qu'un être humain normal a une surface corporelle de $S_h = 1,5 m^2$, en négligeant la résistance thermique des vêtements. Calculez également l'énergie perdue en $t = 24$ heures.

Solution :

- 1) le flux chaleur perdu d'un homme dans un environnement :
- ❖ par convection :

$$\Phi_{h, cov} = S_h \cdot h_h (T_h - T_\infty) = 54W$$

- ❖ par rayonnement :

$$\Phi_{h, ray} = \varepsilon \cdot S_h \cdot \sigma (T_h^4 - T_\infty^4) = 42.37W$$

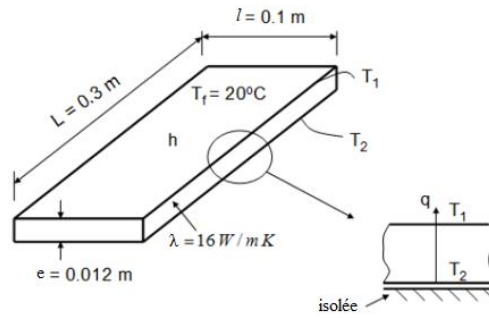
$$\Phi_{h, tot} = \Phi_{h, cov} + \Phi_{h, ray} = 96.37W$$

- 2) l'énergie perdue en $t = 24$ heures :

$$E = \Phi_{h, tot} \times t = 8.313 \times 10^6 J$$

Exemple 06 :

Une plaque de 0,3 m de longueur, 0,1 m de largeur et 12 mm d'épaisseur est réalisée en acier inoxydable ($\lambda = 16 W/m.K$), la surface supérieure est exposée à un courant d'air de température $20^\circ C$. Dans une expérience, la plaque est chauffée par un radiateur électrique (également 0,3 m par 0,1 m) positionné sur le dessous de la plaque et la température de la plaque adjacente au radiateur est maintenue à $100^\circ C$. Un voltmètre et un ampèremètre sont connectés au radiateur et ceux-ci affichent respectivement 200 V et 0,25 A. En supposant que la plaque est parfaitement isolée de tous les côtés à l'exception de la surface supérieure, quel est le coefficient de transfert de chaleur par convection ?

**Solution :**

le flux de chaleur est égal à la puissance fournie au radiateur électrique divisée par la surface exposée :

$$\Phi = \frac{V \times I}{S} = \frac{V \times I}{l \times L} = 1666.7 \text{ W/m}^2$$

Cette valeur est égale au transfert de chaleur par conduction à travers la plaque :

$$\Phi = \frac{\lambda}{e} \cdot (T_2 - T_1) \Rightarrow T_1 = T_2 - \frac{\Phi \cdot e}{\lambda} = 98.75^\circ\text{C}$$

Le transfert de chaleur par conduction sera transféré par convection et rayonnement à la surface de la plaque :

$$\Phi = h \cdot (T_1 - T_f) + \sigma \cdot (T_1^4 - T_f^4)$$

$$h = \frac{\Phi - \sigma \cdot (T_1^4 - T_f^4)}{T_1 - T_f} = 12.7 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Chapitre 02 :

Transfert de chaleur par conduction en régime permanent

2.1. Introduction à la conduction thermique :

L'énergie thermique est transmise lors d'un contact direct entre des corps (ou des parties d'entre eux) à différentes températures et se produit par des collisions ou des couplages entre les molécules du système (certaines dans les zones plus chaudes, avec une énergie thermique plus élevée et d'autres dans des zones plus froides, avec une énergie thermique plus faible), même s'il n'y a pas de mouvement macroscopique des molécules, ou si le matériau est transparent au rayonnement.

2.2. La Loi de Fourier :

Un milieu solide D et une surface élémentaire dS orientée par sa normale unitaire \vec{n} sont considérés dans ce cas.

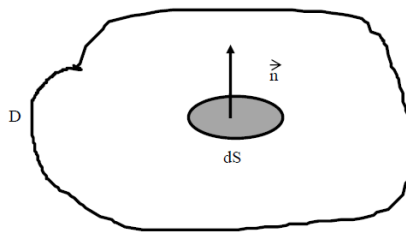


Figure 2.1 : milieu solide.

La loi de FOURIER détermine la quantité de chaleur d^2Q qui traverse une surface dS dans le sens de la normale \vec{n} et sur un intervalle de temps dt :

$$d^2Q = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T} \cdot dS \cdot \vec{n} \cdot dt \quad (2.1)$$

Avec ;

$\overrightarrow{\text{grad}T}$: Gradient de température calculé par :

$$\overrightarrow{\text{grad}T} = \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{cases} \quad (2.2)$$

λ : Conductivité thermique du milieu ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$)

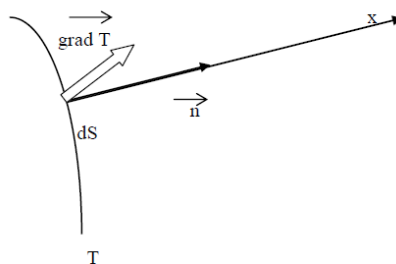
On a également :

Le flux de chaleur est :
$$d\Phi = \frac{d^2Q}{dt} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T} \cdot dS \cdot \vec{n} \quad (2.3)$$

La densité de flux de chaleur est :
$$d\varphi = \frac{d^2Q}{dt \cdot dS} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T} \cdot \vec{n} \quad (2.4)$$

Le signe (-) indique qu'en termes de flux thermique, le gradient qui va du plus grand au plus petit est négatif.

Si la surface dS est sur une surface isotherme, les vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}T}$ et \vec{n} sont colinéaires, comme suit:



$$d^2Q = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} \cdot dS \cdot dt \quad (2.5)$$

Ou $d\Phi = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} \cdot dS$ et $d\varphi = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx}$

2.3. Conductivité thermique : le tableau suivant représente les valeurs de la conductivité thermique usuels.

Substances	λ en $\text{W}/\text{m}^\circ\text{C}$
Gaz à la pression atmosphérique	0,006 - 0,15
Matériaux solides isolants (Laine de verre, polystyrène, liège, amiante...)	0,025 - 0,18
Liquides non métalliques	0,075 - 0,60
Matériaux non métalliques (brique, pierre à bâtir, bois, béton...)	0,10 - 2,2
Métaux liquides	7,5 - 67
Alliages métalliques	12 - 100
Métaux purs	45 - 365

Tableau 2.1 : la conductivité thermique.

2.4. Équation de la chaleur :

2.4.1 En coordonnées cartésiennes :

Dans le cas monodimensionnel, cette équation exprime le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan :

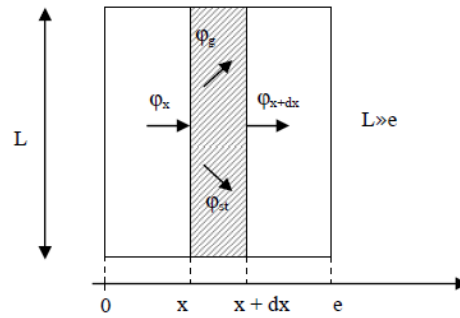


Figure 2.2 : Bilan énergétique pour un système élémentaire.

Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$\Phi_x + \Phi_g = \Phi_{x+dx} + \Phi_{st} \quad (2.6)$$

Avec :

$$\Phi_x = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x \quad \text{et} \quad \Phi_{x+dx} = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx}$$

$$\Phi_g = \dot{q} \cdot dV = \dot{q} \cdot S \cdot dx$$

$$\Phi_{st} = \frac{\partial Q}{\partial t} = m \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \rho \cdot V \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \rho \cdot c \cdot S \cdot dx \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par \$dx\$, nous obtenons :

$$\frac{\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x}{dx} + \dot{q} \cdot S = \rho \cdot c \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.7)$$

à partir du développement de Taylor :

$$\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} = \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx$$

Soit ;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{q} \cdot S = \rho \cdot c \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.8)$$

Dans le cas *tridimensionnel* (3D), on obtient l'équation thermique suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + q = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.9)$$

❖ Etude de cas particuliers :

a) Si le milieu est isotrope et homogène (La conductivité ne dépend que de la température du point considéré) :

L'équation de la chaleur (2.9) peut se mettre sous la forme :

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] + \dot{q} = \rho.c. \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.10)$$

b) Si λ ne dépend pas de la température ou présente une différence négligeable :

Ceci est particulièrement important dans le cas d'un matériau homogène et isotrope à coefficient λ constant. En conséquence, la phrase précédente devient :

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = \rho.c. \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.11)$$

c) λ ne dépend pas de la température et le dégagement de chaleur interne négligeable :

On a :

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \rho.c. \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.12)$$

Expression que l'on a l'habitude de mettre sous la forme (appelé équation de **Poisson**) :

$$a \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.13)$$

Le rapport $a = \lambda / \rho c$ est appelé la diffusivité thermique ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) qui caractérise la vitesse de propagation d'un flux de chaleur à travers un matériau.

d) La température constante (ne dépend pas du temps) :

C'est l'analyse d'un régime permanent avec ou sans dégagement de chaleur. Si nous supposons que la conductivité λ est une constante et ne dépend pas de la température, nous obtenons :

✓ si la source interne de la chaleur : $\dot{q} \neq 0$

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q} = 0 \quad (2.14)$$

✓ sans dégagement de chaleur interne : $\dot{q} = 0$, (nous obtenons l'équation de **Laplace**) :

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.15)$$

2.4.2 En coordonnées cartésiennes cylindriques :

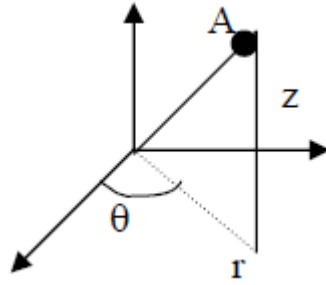


Figure 2.3 : Système de coordonnées cylindriques

Soient :

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \phi \\ y = r \cdot \sin \phi \\ z = z \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.16)$$

Si le cas d'un problème de *symétrie cylindrique* où la température est uniquement déterminée par r et t , l'équation (2.16) peut s'écrire comme le suivant :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.17)$$

2.4.3 En coordonnées sphériques :

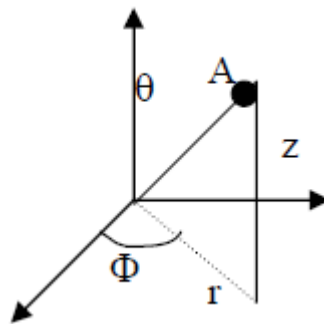


Figure 2.4 : Système de coordonnées sphériques.

Soient :

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \phi \cdot \sin \theta \\ y = r \cdot \sin \phi \cdot \sin \theta \\ z = r \cdot \cos \theta \end{cases}$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.18)$$

2.5. Transfert conductif unidirectionnel :

2.5.1. Cas d'un mur simple

On suppose que le transfert de chaleur est *unidirectionnel et on néglige la génération et le stockage d'énergie*.

En considérant un mur homogène d'épaisseur e , de section S , de conductivité thermique λ , dont les faces sont aux températures T_1 et T_2 , le flux thermique qui traverse ce mur est :

$$\Phi = -\lambda.S.\frac{dT}{dx} \quad (2.19)$$

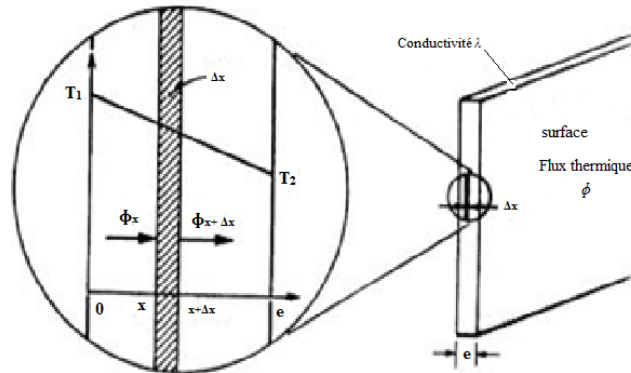


Figure 2.5 : Mur simple.

Si on effectue un bilan d'énergie sur le système (S) qui contient une tranche de mur comprise entre les abscisses x et $x + dx$, il vient :

$$\Phi_x = \Phi_{x+dx} \Rightarrow -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x = -\lambda S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx} \quad (2.20)$$

$$\text{D'où ; } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{dT}{dx} = A \quad \text{et} \quad T = A.x + B$$

Avec les conditions aux limites : $T(x=0) = T_1$ et $T(x=e) = T_2$

$$\text{D'où} \quad T = T_1 - \frac{x}{e}(T_1 - T_2) \quad (2.21)$$

On trouve un profil *linéaire* pour la température. Le flux de chaleur qui traverse le mur est

calculé par : $\Phi = -\lambda.S.\frac{dT}{dx}$, d'où :

$$\Phi = -\lambda.S.\frac{T_2 - T_1}{e} = \lambda.S.\frac{T_1 - T_2}{e} \quad (2.22)$$

❖ *Notion de résistance thermique (Analogie électrique) :*

Un fil électrique de longueur L , de section S et de conductivité thermique K_e soumis à une différence de potentiel ΔU , laisse passer un courant électrique tel que :

$$\Delta U = U_0 - U_1 = \frac{L}{K_e \cdot S} \cdot I \quad \text{ou encore ; } \Delta U = R_e \cdot I$$

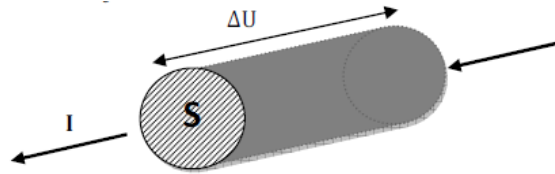


Figure 2.5 : fil électrique.

Cette équation est analogue à celle donnant le potentiel thermique :

$$\Delta T = T_1 - T_2 = (e/\lambda \cdot S) \cdot \Phi = R_{th} \cdot \Phi \tag{2.23}$$

On établit la correspondance suivante :

Thermique			électricité	
Loi de Fourier	$\Delta T = -(e/\lambda.S) \cdot \Phi$	\Leftrightarrow	$\Delta U = R.I$	Loi d'Ohm
Conductivité thermique	$\lambda(T)$	\Leftrightarrow	$\sigma(T)$	conductivité électrique
Température	T	\Leftrightarrow	V	potentiel électrique
Puissance thermique	Φ	\Leftrightarrow	I	intensité de courant
Résistance thermique	$R_{th} = e/\lambda.S$	\Leftrightarrow	R	Résistance électrique

Tableau 2.2 : Analogie électrique-thermique.

Pour le problème thermique, on établit son équivalent électrique :

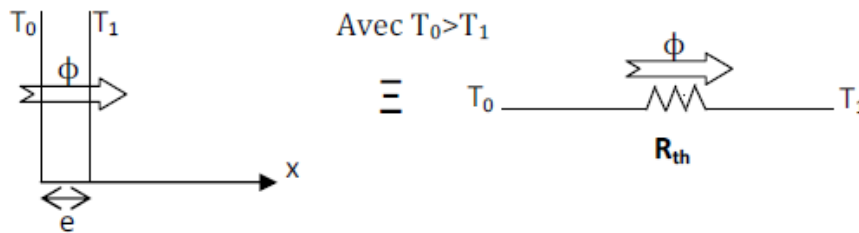


Figure 2.6 : Schéma électrique équivalent d'un mur simple.

Cas d'un mur plan d'épaisseur e , la résistance thermique est :

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda.S} \text{ en } ^\circ\text{C/W.} \tag{2.24}$$

La résistance thermique totale est déterminée comme en électricité, on sait que :

- 1) Deux résistances thermiques s'ajoutent dans le cas où ils sont en série :

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

- 2) L'inverse des résistances thermiques s'ajoutent dans le cas où ils sont en parallèle :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \rightarrow R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

2.5.2. Cas d'un mur multicouches :

En régime permanent, le flux de chaleur se conserve lors de la traversée du mur et s'écrit :

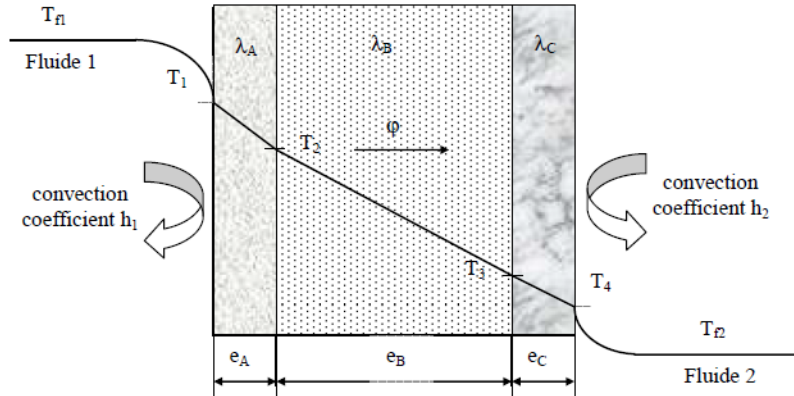


Figure 2.7 : paroi multicouches.

$$\Phi = h_1 S (T_{f1} - T_1) = \frac{\lambda_A S (T_1 - T_2)}{e_A} = \frac{\lambda_B S (T_2 - T_3)}{e_B} = \frac{\lambda_C S (T_3 - T_4)}{e_C} = h_2 S (T_4 - T_{f2})$$

$$\Phi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_A}{\lambda_A S} + \frac{e_B}{\lambda_B S} + \frac{e_C}{\lambda_C S} + \frac{1}{h_2 S}} \quad (2.25)$$

La résistance thermique d'un mur multicouche est :

$$R_{th} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\Phi} = \frac{1}{h_1 S} + \frac{e_A}{\lambda_A S} + \frac{e_B}{\lambda_B S} + \frac{e_C}{\lambda_C S} + \frac{1}{h_2 S} \quad (2.26)$$

Les interactions entre les différents types des couches étaient jugées parfaites et il n'y avait pas de discontinuité de température aux interfaces. En effet, du fait de la rugosité des surfaces, une microcouche d'air existe entre les creux des surfaces en vue, ce qui contribue à la formation d'une résistance thermique (l'air est un isolant) appelée résistance thermique de contact. L'équation précédente devient alors :

$$\Phi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_A}{h_A S} + R_{AB} + \frac{e_B}{h_B S} + R_{BC} + \frac{e_C}{h_C S} + \frac{1}{h_2 S}} \quad (2.27)$$

Le schéma électrique équivalent est représenté sur la figure 2.8.

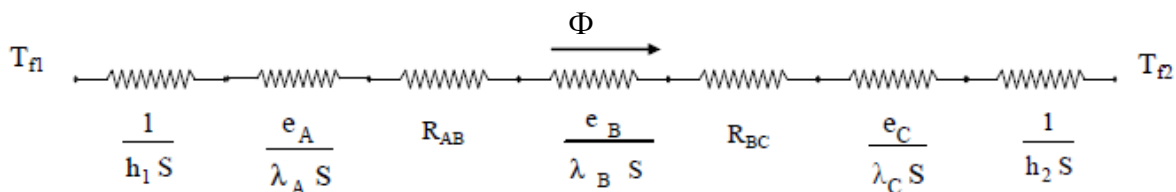


Figure 2.8 : Schéma électrique équivalent d'une paroi multi-couches.

2.5.3. Cas d'un mur composite :

La résistance thermique R équivalente d'une portion de mur de largeur L et de hauteur $l = l_1 + l_2 + l_3$ en utilisant les lois d'association des résistances en série et en parallèle par la relation (figure 2.9):

$$R_{th} = R_1 + R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} + R_6 + R_7 \quad (2.28)$$

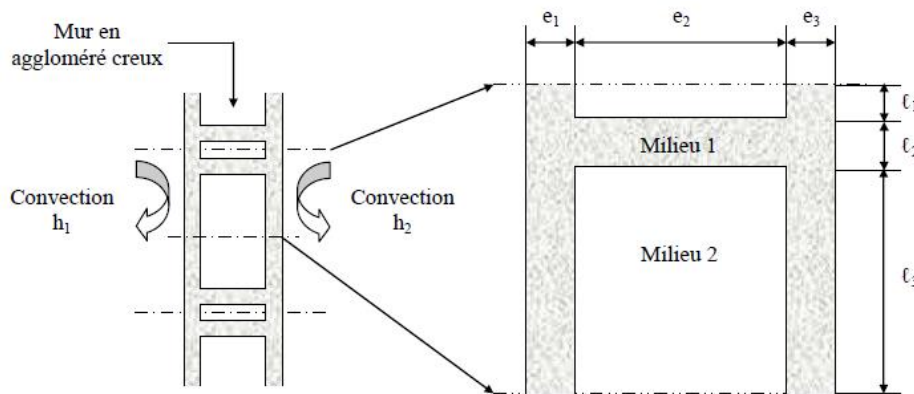


Figure 2.9 : paroi composite

Avec ;

$$R_1 = \frac{1}{h_1 l L} ; R_2 = \frac{e_1}{\lambda_1 l L} ; R_3 = \frac{e_2}{\lambda_2 l_1 L} ; R_4 = \frac{e_2}{\lambda_1 l_2 L} ; R_5 = \frac{e_2}{\lambda_2 l_3 L} ; R_6 = \frac{e_3}{\lambda_1 l L} ; R_7 = \frac{1}{h_2 l L}$$

Le schéma électrique équivalent est donné sur la figure 2.10.

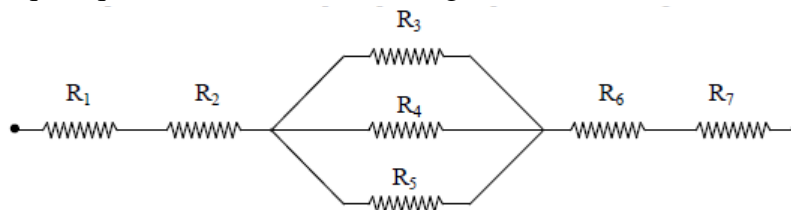
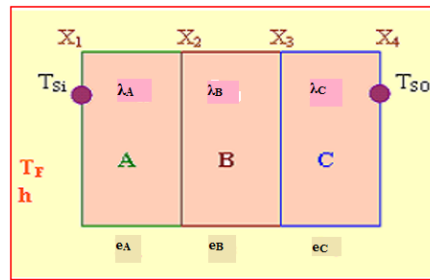


Figure 2.10 : Schéma électrique équivalent d'une paroi composite.

Exemple 01 :

Une paroi d'un four se compose de trois matériaux, dont deux sont de conductivité thermique connue, $\lambda_A = 20 \text{ W/mK}$ et $\lambda_C = 50 \text{ W/mK}$ et d'épaisseur connue $e_A = 0.3 \text{ m}$ et $e_C = 0.15 \text{ m}$. Le troisième matériau B d'épaisseur $e_B = 0.15 \text{ m}$ se trouve au milieu entre les matériaux A et C, mais avec conductivité thermique inconnue λ_B . Dans des conditions de fonctionnement en régime permanent, les mesures révèlent une température de surface externe $T_{S0} = 20 \text{ °C}$, une température de surface interne $T_{Si} = 600 \text{ °C}$ et un $T_\infty = 800 \text{ °C}$. Le coefficient de convection intérieure $h = 25 \text{ W/m}^2\text{.K}$.

Quelle est la valeur λ_B ?



Données :

$$\lambda_A = 20 \text{ W/mK} ; \lambda_C = 20 \text{ W/mK} ; \lambda_B = ? ; e_A = 0.3 \text{ m} ; e_B = 0.15 \text{ m} ; e_C = 0.15 \text{ m} ;$$

$$T_F = 800 \text{ °C} ; T_{Si} = 600 \text{ °C} ; T_{So} = 20 \text{ °C}$$

Solution :

Le transfert de chaleur à travers le système représenté sur la figure, dans des conditions stationnaires, unidirectionnel (direction x), sans génération de chaleur, doit:

$$\Phi_{conv} = \Phi_A = \Phi_B = \Phi_C = S \times \varphi$$

Il s'ensuit donc que le transfert de chaleur peut être déterminé par l'équation :

$$\varphi_x = \frac{T_F - T_{So}}{\frac{1}{h} + \frac{e_A}{\lambda_A} + \frac{e_B}{\lambda_B} + \frac{e_C}{\lambda_C}} = \frac{870}{0.058 + \frac{0.15}{\lambda_B}} \quad (a)$$

$$\text{Le transfert de chaleur par convection est : } \varphi_{conv} = 25 \cdot (800 - 600) = 5000 \text{ W} \quad (b)$$

A partir de (a) et (b) on a la conductivité thermique du matériau B est :

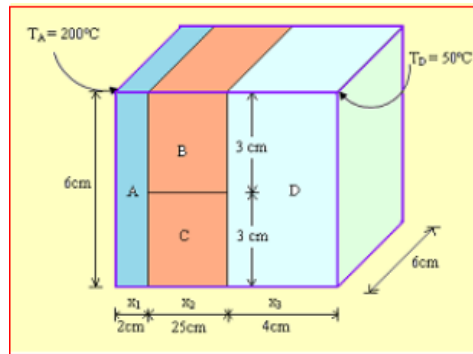
$$\lambda_B = 1.5303 \text{ W/mK}$$

Exemple 02 :

Une section de mur composite avec les dimensions indiquées sur la figure ci-dessous. Les températures uniformes de 200 °C et 50 °C dans les surfaces gauche et droite respectivement. Si les conductivités thermiques des matériaux des murs sont :

$$\lambda_A = 70 \text{ W/mK} ; \lambda_B = 60 \text{ W/mK} ; \lambda_C = 40 \text{ W/mK} ; \lambda_D = 20 \text{ W/mK}$$

- 1) Donner le schéma électrique équivalent et calculer la résistance thermique équivalente.
- 2) Déterminez le flux de transfert de chaleur à travers cette section du mur et les températures aux surfaces de contact.

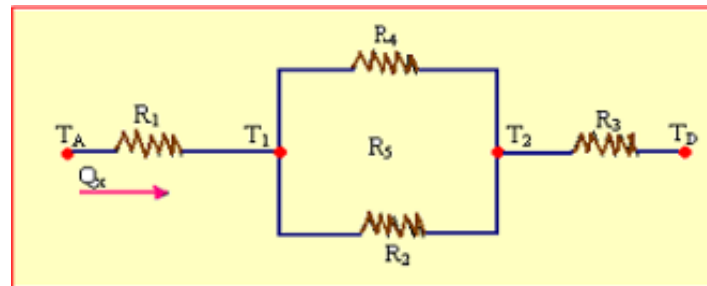


Données : $S_A = S_D = 36 \times 10^{-4} m^2$

$S_B = S_C = 18 \times 10^{-4} m^2$

Solution :

1) le schéma électrique équivalent :



La résistance thermique totale :

$$R_{th,tot} = R_1 + R_2 + R_3 \quad \text{avec ;} \quad R_2 = \frac{R_B \times R_C}{R_B + R_C}$$

$$R_1 = \frac{e_A}{\lambda_A \cdot S_A} = 0.0793 K / W$$

$$R_B = \frac{e_B}{\lambda_B \cdot S_B} = 0.231 K / W$$

$$R_C = \frac{e_C}{\lambda_C \cdot S_C} = 0.347 K / W$$

$$R_2 = \frac{0.231 \times 0.347}{0.231 + 0.347} = 0.138 K / W$$

$$R_3 = \frac{e_D}{\lambda_D \cdot S_D} = 0.555 K / W$$

$$R_{th,tot} = 0.079 + 0.138 + 0.555 = 0.773 K / W$$

2) le flux de transfert de chaleur :

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_{th,tot}} = \frac{T_A - T_D}{R_{th,tot}} = 193.84W$$

2.5.4. Cas d'un cylindre creux long (tube) :

On suppose un cylindre creux de conductivité thermique λ , r_2 et r_1 sont les rayons intérieur et extérieur du cylindre, T_1 et T_2 sont les températures des parois internes et externes (cf. figure 2.11). On considère que le gradient de température varie uniquement radialement.

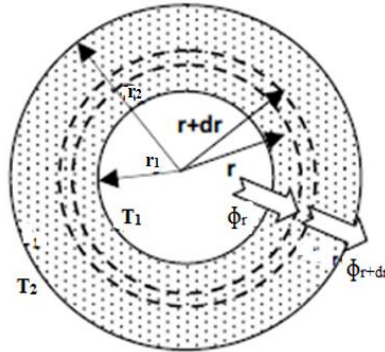


Figure 2.11 : Schéma des transferts dans un cylindre creux.

Effectuons le bilan thermique du système constitué par la partie de cylindre comprise entre les rayons r et $r+dr$:

$$\Phi_r = \Phi_{r+dr} \quad (2.29)$$

Avec : $\Phi_r = -\lambda 2\pi r L \left(\frac{dT}{dr} \right)_r$ et $\Phi_{r+dr} = -\lambda 2\pi (r+dr) L \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r+dr}$

Soit : $-\lambda 2\pi r L \left(\frac{dT}{dr} \right)_r = -\lambda 2\pi (r+dr) L \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r+dr}$ d'où $r \frac{dT}{dr} = C$

Avec les conditions aux limites : $T(r_1) = T_1$ et $T(r_2) = T_2$

D'où :
$$\frac{T(r) - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (2.30)$$

Et par application de la relation ; $\Phi = -\lambda 2\pi r L \left(\frac{dT}{dr} \right)_r$, on obtient :

$$\Phi = \frac{2\pi\lambda L(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (2.31)$$

Cette relation peut être aussi mise sous la forme : $\Phi = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{12}}$ avec $R_{12} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda L}$ et être représenté par le schéma électrique équivalent de la figure 2.12.

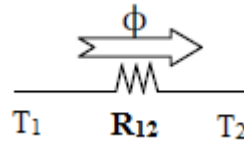


Figure 2.12 : Schéma électrique équivalent d'un cylindre creux

2.5.5. Cas d'un Cylindre creux multicouches :

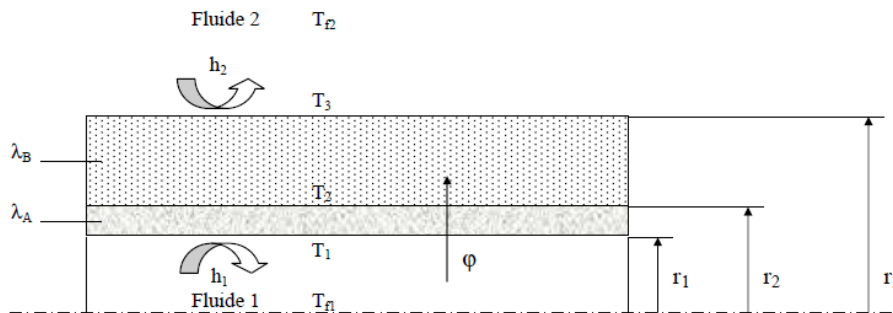


Figure 2.13 : Schéma des transferts dans un cylindre creux multicouches.

En régime permanent, le flux de chaleur ϕ se conserve lors de la traversée des différentes couches et s'écrit (cf. figure 2.14) :

$$\Phi = h_1 2\pi r_1 L (T_{f1} - T_1) = \frac{2\pi\lambda_A L (T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{2\pi\lambda_B L (T_2 - T_3)}{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)} = h_2 2\pi r_3 L (T_3 - T_{f2}) \quad (2.32)$$

D'où :

$$\Phi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 2\pi r_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda_A L} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi\lambda_B L} + \frac{1}{h_2 2\pi r_3 L}} \quad (2.33)$$

Ce qui peut être représenté par le schéma électrique équivalent de la figure 2.14.

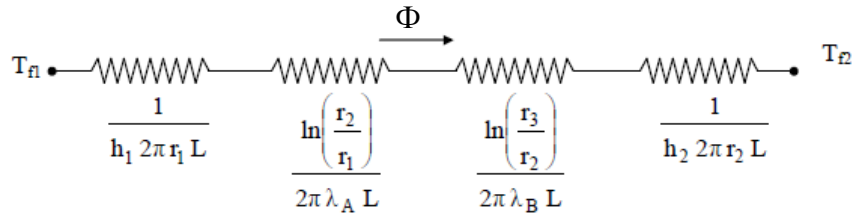


Figure 2.14 : Schéma électrique équivalent d'un cylindre creux multicouche.

La résistance thermique d'un cylindre creux multicouche est :

$$R_{th} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\Phi} = \frac{1}{h_1 2\pi r_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda_A L} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi\lambda_B L} + \frac{1}{h_2 2\pi r_2 L} \quad (2.34)$$

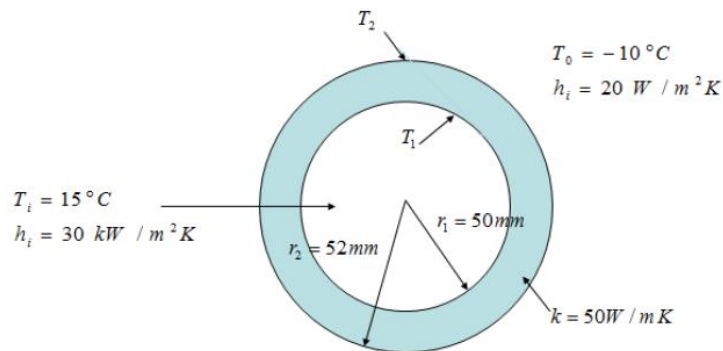
Exemple 3 :

L'eau s'écoule à travers un tuyau en acier moulé ($\lambda = 50 \text{ W/mK}$) avec un diamètre extérieur de 104 mm et une épaisseur de paroi de 2 mm.

- 1) Calculez le flux de chaleur perdu par unité de longueur, cas d'un tuyau non isolé lorsque la température de l'eau est de 15°C , la température de l'air extérieur est de -10°C , le coefficient de transfert de chaleur côté eau est de $30 \text{ kW/m}^2\text{K}$ et le coefficient de transfert de chaleur extérieur est $20 \text{ W/m}^2\text{K}$.
- 2) Calculez le flux de chaleur perdu lorsque le tuyau est recouvert avec une isolation ayant un diamètre extérieur de 300 mm et une conductivité thermique de $\lambda = 0,05 \text{ W/mK}$. conclure

Solution :

- 1) Calculez le flux de chaleur perdu par unité de longueur :



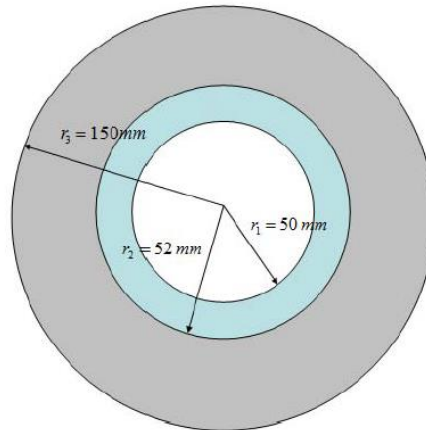
On a le flux de chaleur dans le cas stationnaire et monodimensionnel est :

$$\Phi = \Phi_{conv} = \Phi_{cond} = \frac{2\pi\lambda L(T_i - T_0)}{\frac{1}{h_i r_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{\lambda} + \frac{1}{h_0 r_2}}$$

Le flux de chaleur linéaire donc ;

$$\Phi/L = \frac{2\pi\lambda(T_i - T_0)}{\frac{1}{h_i r_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{\lambda} + \frac{1}{h_o r_2}} = 163.3 \text{ W/m}$$

2) Calculez le flux de chaleur perdu lorsque le tuyau est recouvert avec une isolation :



$$\Phi/L = \frac{2\pi\lambda(T_i - T_0)}{\frac{1}{h_i r_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{\lambda} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{\lambda_{isol}} + \frac{1}{h_o r_3}} = 7.3 \text{ W/m}$$

Pour le tuyau non isolé, la perte de chaleur est gouvernée par le coefficient de transfert de chaleur par convection à l'extérieur, qui fournit une résistance thermique la plus élevée. Pour le tuyau isolé, l'isolation fournit une résistance thermique plus élevée et cette couche gouverne la perte de chaleur globale.

Exemple 4 :

L'eau à 80 °C est pompée à travers 100 m de tuyaux en acier inoxydable, $\lambda = 16 \text{ W/m.K}$ de rayons intérieurs et extérieurs de 47 mm et 50 mm respectivement. Le coefficient de transfert de chaleur dû à l'eau est de 2000 $\text{W/m}^2.\text{K}$.

La surface du tuyau perd de la chaleur par convection dans l'air à 20 °C et le coefficient de transfert de chaleur est de 200 $\text{W/m}^2.\text{K}$.

- 1) Calculez le flux de chaleur à travers le tuyau.
- 2) Calculez également le flux de chaleur à travers le tuyau lorsqu'une couche d'isolation, $\lambda = 0,1 \text{ W/m.K}$ et une épaisseur radiale de 50 mm est enroulée autour du tuyau.

Solution :

- 1) Calcule du flux de chaleur à travers le tuyau :

L'équation du flux de chaleur à travers un tuyau par unité de longueur a été développée dans l'exemple précédent :

$$\Phi = \Phi_{conv} = \Phi_{cond} = \frac{2\pi\lambda L(T_i - T_0)}{\frac{1}{h_i r_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{\lambda} + \frac{1}{h_o r_2}} = 0.329 \times 10^6 W$$

2) Calcule du flux de chaleur à travers le tuyau lorsqu'une couche d'isolation :

$$\Phi = \frac{2\pi\lambda L(T_i - T_0)}{\frac{1}{h_i r_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{\lambda} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{\lambda_{isol}} + \frac{1}{h_o r_3}} = 5.39 \times 10^3 W$$

Notez qu'avec l'isolation, la résistance thermique de l'isolant domine le flux de chaleur, donc dans l'équation ci-dessus, si on conserve la résistance thermique de l'isolant et ignore tous les autres termes, on obtient :

$$\Phi = \frac{2\pi\lambda L(T_i - T_0)}{\frac{\ln(r_3/r_2)}{\lambda_{isol}}} = 5.44 \times 10^3 W$$

Et ça a une erreur inférieure à 1% en comparant avec la résistance thermique totale.

2.5.6. Cas d'un dispositif à géométrie sphérique :

Considérons une sphère creuse homogène de rayon interne R_1 et de rayon externe R_2 . Les surfaces interne et externe sont maintenues à la température T_1 et T_2 , respectivement. La température n'est fonction que du rayon « r ».

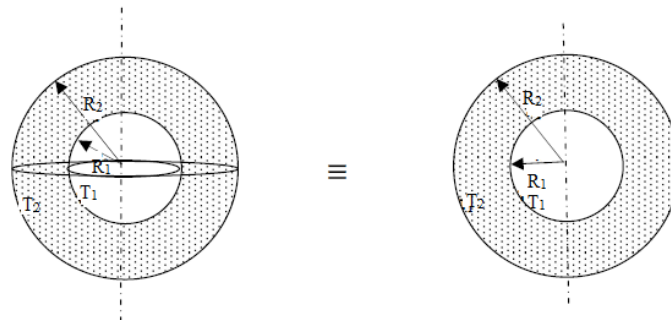


Figure 2.12 : Dispositif à géométrie sphérique.

Le système s'écrit donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ T(R_1) = T_1 \\ T(R_2) = T_2 \end{cases} \quad (2.35)$$

En posant $u = \frac{\partial T}{\partial r}$, on obtient l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$r \cdot \frac{du}{dr} + 2u = 0 \quad (2.36)$$

Dont la solution est $u = \frac{c}{r^2}$ fournit après intégration, l'expression de la distribution radiale des températures :

$$T(r) = A + \frac{B}{r} \quad (2.37)$$

Les constantes d'intégration A et B sont déterminées à partir des conditions aux limites sur R_1 et R_2 .

$$T_1 = A + \frac{B}{R_1} \quad \text{et} \quad T_2 = A + \frac{B}{R_2}$$

Soit finalement :

$$T(r) = T_1 + (T_1 - T_2) \frac{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} \quad (2.38)$$

On déduit de la loi de Fourier la densité de flux :

$$\varphi_r = -\lambda \frac{dT}{dr} = +\lambda \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} \frac{1}{r^2} \quad (2.39)$$

Puis le flux thermique Φ traversant chaque surface sphérique de rayon « r » :

$$\Phi = 4\pi r^2 \varphi_r = \frac{4\pi\lambda}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} \cdot (T_1 - T_2) \quad (2.40)$$

La résistance thermique totale dans ce cas est :

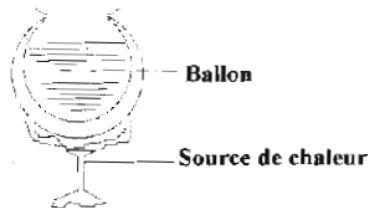
$$R_{th} = \frac{(T_1 - T_2)}{\Phi} = \frac{1}{4\pi \cdot \lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad (2.41)$$

Exemple 05 :

Un ballon en verre contenant de l'huile est exposé à une source de chaleur (voir figure ci-dessous) avec $\lambda = 0,80 \text{ W/m}^\circ\text{C}$. Ce ballon est similaire à une sphère avec des diamètres

intérieur et extérieur de 20 cm et 21 cm, respectivement. Les coefficients de convection de l'huile et de l'air ambiant sont respectivement égaux à 15 W/m°C et 10 W/m°C.

Calculer le flux thermique que doit fournir la source de chaleur afin de garder la température de l'huile constante à 80 °C. On prendra la température ambiante égale à 20 °C et on négligera les pertes par le haut du ballon.



Solution :

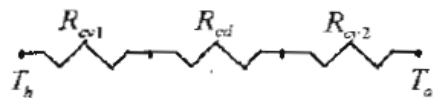
$$\Phi = \frac{T_h - T_a}{R_{conv1} + R_{cond} + R_{conv2}}$$

$$\text{Avec ; } R_{conv1} = \frac{1}{h_h \cdot 4 \cdot \pi \cdot r_1^2} = 0.53 K / W ,$$

$$R_{conv2} = \frac{1}{h_0 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r_2^2} = 0.722 K / W$$

$$R_{cond} = \frac{r_2^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}{\lambda \cdot 4 \cdot \pi \cdot r_1^2} = 0.052 K / W$$

$$\text{Finalement ; } \Phi = \frac{80 - 20}{0.53 + 0.052 + 0.722} = 46 W$$



2.5.7 Théorie des ailettes :

2.5.7.1 Généralités :

Les ailettes sont de bons conducteurs de chaleur avec une plus grande surface que le reste du corps. Ils sont utilisés pour améliorer l'évacuation de la chaleur d'un système de confinement à l'état solide avec des densités de flux élevées.



Tube à ailettes (radiateur).



Dissipateurs thermiques.



Moteur de moto.

Figure 2.13 : Exemples de systèmes à ailettes utilisés dans différents secteurs d'applications.

En considérant le mur plan de la figure 2.14 (a). La loi de Newton décrit le flux de chaleur évacué d'un mur par convection :

$$\Phi_{conv} = h \cdot S_{ech} \cdot (T_p - T_\infty) \quad (2.42)$$

Si la température de la paroi (T_p) est fixée, on peut citer deux méthodes pour améliorer le flux de chaleur évacué :

- ✓ La 1ere solution est d'élever le coefficient d'échange convectif, h , par l'augmentation de la vitesse de l'écoulement ou la diminution de la température du fluide T_∞ . Dans la grande majorité des cas, augmenter h au maximum ne suffit pas pour évacuer le flux de chaleur souhaité et bien souvent le coût est trop élevé (pompes ou ventilateurs). Réduire T_∞ est bien souvent infaisable dans l'installation.
- ✓ La 2xième solution, il s'agit d'**augmenter la surface d'échange**, S_{ech} , par l'utilisation des ailettes (voir Figure 2.14 (b)). Le matériau de l'ailette doit être très conducteur pour minimiser les gradients de température entre la base de l'ailette et son extrémité.

Si la température de l'ailette (T_p) est à uniforme, donc du flux de chaleur évacué sera maximal.

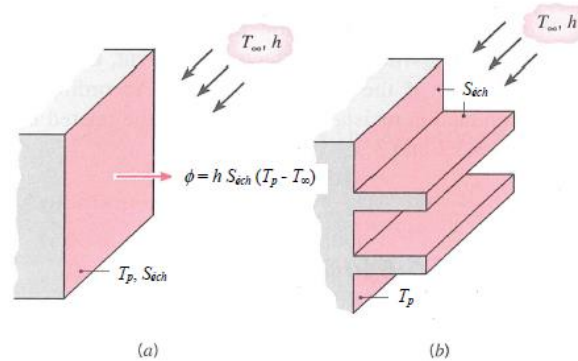


Figure 2.14 : (a) mur plan, (b) mur avec d'ailettes.

Il y a plusieurs types d'ailettes (voir figure ci-dessous), et le choix en pratique est influencé par une variété de facteurs tels que l'espace du système, le poids, la facilité de fabrication et le coût. Il faut également tenir compte de la perturbation du flux causée par la présence d'ailettes (pertes de charge).

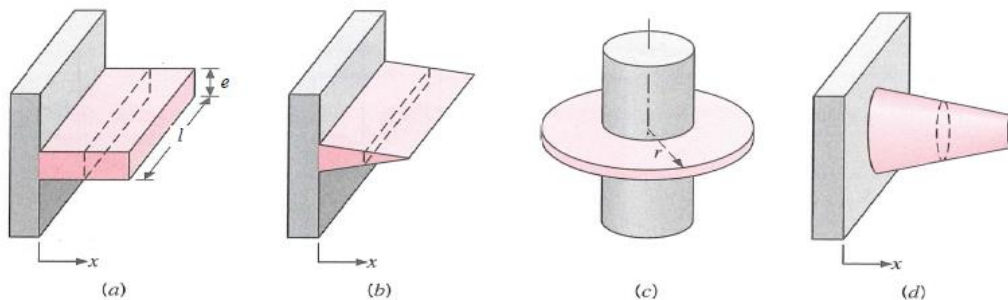


Figure 2.15 : ailette droite : à section constante (a), ailette droite à section variable (b), ailette annulaire (c), ailette en forme d'aiguille (d).

2.5.7.2 L'équation de la barre :

a) Ailettes de refroidissement à section droite uniforme :

Le but est de déterminer dans quelle mesure la présence d'ailettes peut améliorer le transfert de chaleur d'une surface solide vers le fluide environnant. On considère une ailette de section constante illustrée à la figure 2.15 tout en se baignant dans un fluide à température T_∞ . Pour calculer le transfert thermique associé à cette ailette, il faut d'abord voir la distribution de température le long de l'ailette à l'aide d'un bilan énergétique que nous établirons en posant les hypothèses suivantes :

- ✓ Le régime est stationnaire et il n'y a pas de dissipation interne de chaleur.
- ✓ On suppose que l'ailette possède une conductivité thermique de (λ) constante.
- ✓ la surface de l'ailette possède un coefficient d'échange convectif (h) qui est uniforme.
- ✓ le transfert de chaleur par rayonnement est négligé, et on prend que le cas monodimensionnel.

Soit une portion de barre comprise entre les abscisses x et $x + dx$. Le bilan d'énergie est:

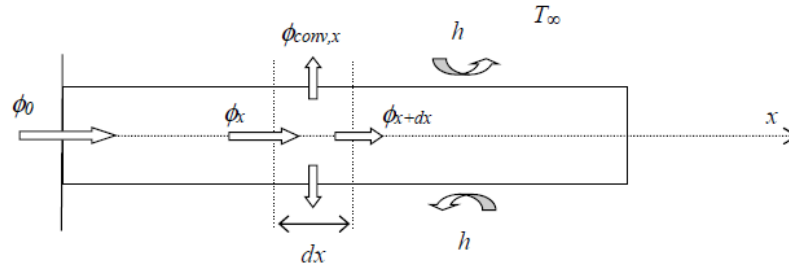


Figure 2.16 : Bilan d'énergie sur une tranche d'ailette d'épaisseur dx

Avec :

$$\Phi_x : \text{flux de chaleur transmis par conduction à l'abscisse } x ; \quad \Phi_x = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x$$

$$\Phi_{x+dx} : \text{flux de chaleur transmis par conduction à l'abscisse } x+dx ; \quad \Phi_{x+dx} = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx}$$

$$\Phi_{conv} : \text{flux de chaleur transmis par convection à la périphérie de la barre entre } x+dx ;$$

$$\Phi_{conv} = h.P_e.dx.[T(x) - T_\infty]$$

Le bilan d'énergie s'écrit :

$$\Phi_x = \Phi_{x+dx} + \Phi_{conv} \quad (2.43)$$

$$\text{Soit : } \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right)_x = h \cdot P_e \cdot dx \cdot [T(x) - T_\infty]$$

Si λ et S sont indépendants de l'abscisse x , nous obtenons :

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} - \left(\frac{dT}{dx} \right)_x}{dx} = h \cdot P_e \cdot [T(x) - T_\infty] \quad (2.44)$$

Avec ;

$$\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} = \left(\frac{dT}{dx} \right)_x + \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) dx$$

Donc $T(x)$ est solution de l'équation différentielle suivante appelée équation de la barre (appelée aussi l'équation de l'ailette en régime permanent) :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{h \cdot P_e}{\lambda \cdot S} \cdot (T - T_\infty) = 0 \quad (2.45)$$

P_e : périmètre de la section droite de l'ailette et S la surface de la section droite de l'ailette.

2.5.7.3 Flux extrait par une ailette :

Nous prenons l'exemple d'une barre d'épaisseur e et de longueur L , avec $e \ll L$. Nous avons établi l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ d'une ailette encastree dans un mur à la température T_0 et baignant dans un fluide à la température T_∞ :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{h \cdot P_e}{\lambda \cdot S} (T - T_\infty) = 0 \quad (2.46)$$

En posant : $\omega^2 = \frac{h \cdot P_e}{\lambda \cdot S}$ et $\theta = T - T_\infty$ elle peut encore s'écrire : $\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \omega^2 \theta = 0$

Si la section S est constante, c'est une équation différentielle du 2nd ordre à coefficients constants dont la solution générale est de la forme :

$$\theta = A \exp(\omega x) + B \exp(-\omega x) \quad \text{ou} \quad \theta = A_1 \cosh(\omega x) + B_2 \sinh(\omega x) \quad (2.47)$$

b) Ailette de longueur finie avec dissipation de chaleur à l'extrémité :

La solution générale obtenue est identique au cas (équations 2.47 et 2.48), ce sont les conditions aux limites qui diffèrent :

Prenant les déperditions thermique par **convection** à l'extrémité de la barre, la chaleur s'écoulant par **conduction** de la face : $x=L$, doit être égale à la chaleur transmise par **convection** de la section finale de la barre au fluide, ou :

$$\begin{cases} T(x=0) = T_0 \\ -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = h.S.[T(x=L) - T_\infty] \quad (\text{conservation du flux de chaleur}) \end{cases}$$

La solution s'écrit :

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh[\omega(L-x)] + \frac{h}{\omega\lambda} \sinh[\omega(L-x)]}{\cosh(\omega L) + \frac{h}{\omega\lambda} \sinh(\omega L)} \quad (2.48)$$

Et le flux total dissipé par l'ailette est :

$$\Phi_{ailette} = \omega.\lambda.S(T_0 - T_\infty) \left[\frac{\tanh(\omega L) + \frac{h}{\omega\lambda}}{1 + \frac{h}{\omega\lambda} \tanh(\omega L)} \right] \quad (2.49)$$

2.5.7.4 Efficacité d'une ailette :

L'efficacité de l'ailette est le flux de chaleur dissipé par l'ailette divisé par le flux de chaleur qui quitte la même surface en absence de l'ailette et si la température de base reste identique.

$$\varepsilon = \frac{\Phi_{\text{échangé}}}{\Phi_{\text{max}}} = \frac{\Phi_{ailette}}{h.S.(T_0 - T_\infty)} \quad (2.50)$$

Avec :

h	coefficient de transfert thermique par convection	W/m^2K
S	aire transversale de l'ailette (à la base)	m^2
T_0	température de surface	K
T_∞	température du fluide	K

Après certaines arrangements mathématiques de simplification, l'expression finale de l'efficacité est donnée par :

$$\varepsilon = \frac{\tanh(\omega L) + \frac{h}{\omega\lambda}}{\omega L + \frac{h.L}{\lambda} \tanh(\omega L)} \quad (2.51)$$

Exemple 06 :

Soit une ailette droite de section circulaire de diamètre 2 cm et de longueur 10 cm exposée à un écoulement convectif avec $h = 25 \text{ W/m}^2\text{K}$. Il est demandé de comparer la distribution de la température dans cette ailette, ainsi que l'écoulement de la chaleur et les efficacités pour trois

matériaux différents : (a) l'aluminium avec $\lambda_{al} = 200 \text{ W/m}^2\text{K}$, (b) l'acier inoxydable avec $\lambda_{ac} = 16 \text{ W/m}^2\text{K}$ et (c) le verre avec $\lambda_{ver} = 1,2 \text{ W/m}^2\text{K}$.

Solution

La distribution de la température est calculée par :

$$\frac{T(x) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{\cosh[\omega(L-x)] + \frac{h}{\omega\lambda} \sinh[\omega(L-x)]}{\cosh(\omega L) + \frac{h}{\omega\lambda} \sinh(\omega L)}$$

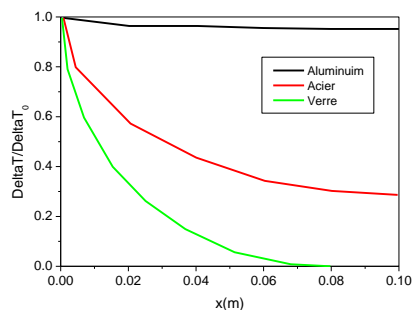
$$\text{Avec ; } \omega = \sqrt{\frac{h \cdot P_e}{\lambda \cdot S}} = \sqrt{\frac{5000}{\lambda}}$$

D'où :

	ω	ωL	$h/\omega\lambda$
Aluminium	5.0	0.50	0.025
Acier	17.68	1.768	0.088
Verre	64.55	6.455	0.323

Et la distribution de la température $\Delta T/\Delta T_0$ est calculée par :

$x(m)$	0.0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
Aluminium	1.0	0.957	0.924	0.899	0.88	0.877
Acier	1.0	0.719	0.530	0.407	0.33	0.306
Verre	1.0	0.275	0.076	0.021	0.00	0.002



Calcul du flux de chaleur dissipé par l'ailette (par souci de comparaison, on suppose que le flux de chaleur dissipé par l'ailette en Aluminium est égal à l'unité, 100%) :

$$\Phi_{\text{ailette}} = \omega \cdot \lambda \cdot S (T_0 - T_\infty) \left[\frac{\tanh(\omega L) + \frac{h}{\omega \lambda}}{1 + \frac{h}{\omega \lambda} \cdot \tanh(\omega L)} \right]$$

L'expression de l'efficacité :

$$\varepsilon = \frac{\tanh(\omega L) + \frac{h}{\omega \lambda}}{\omega L + \frac{h \cdot L}{\lambda} \cdot \tanh(\omega L)}$$

	Flux : Φ_{total} (%)	Efficacité : ε
Aluminium	100	0.96
Acier	55.9	0.54
Verre	16.1	0.15

On remarque que l'ailette en verre possède la variation la plus importante à la base ($0 \leq x \leq 0.06$) tandis que son flux est le moins important.

2.6. Transfert conductif multidirectionnel :

2.6.1. Méthode du coefficient de forme :

Pour les systèmes 2D ou 3D où n'interviennent que deux températures limites T_1 et T_2 , le flux de chaleur s'écrit :

$$\phi = \lambda F (T_1 - T_2) \quad (2.42)$$

Le coefficient de forme F dépend uniquement de la forme, des dimensions et de la position relative des deux surfaces S_1 et S_2 .

➤ Facteur de forme pour une paroi prismatique (Mur 3D) :

Pour un mur plan, le flux thermique (ϕ) est donné par :

$$\phi = \lambda \frac{S}{e} (T_1 - T_2) = \lambda F (T_1 - T_2) \quad (2.43)$$

Pour un mur tridimensionnel (Four par exemple), différents facteurs de forme sont utilisés pour calculer le flux thermique à travers les sections des coins et des bordures, dans le cas où toutes les dimensions intérieures sont supérieures à $(1/15)$ de l'épaisseur de mur.

$$F_p = \frac{S}{e} ; F_b = 0.54D_i ; F_c = 0.15e ; D_i : \text{longueur de bordure.}$$

Exemple 06 :

Un four de forme cubique, de dimensions intérieures (48×48×48) cm est construit de briques de conductivité thermique ($\lambda=1.04 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$), avec une épaisseur de 8cm. La température à l'intérieur du four est de 478 °C, à l'extérieur est de 42 °C. Calculer le flux thermique dissipé à travers les murs de four.

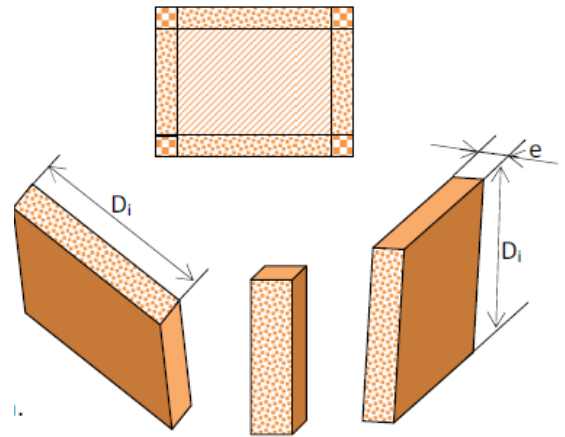


Figure 2.13: Représentation schématique pour le calcul des facteurs de formes 3D

Solution

On calcule le facteur de forme total par addition des facteurs de parois, de bordures et des coins.

$$F_p = \frac{s}{e} = \frac{0.48 \times 0.48}{0.08} = 2.88m$$

$$F_b = 0.54D = 0.54 \times 0.48 = 0.2592m$$

$$F_c = 0.15e = 0.15 \times 0.08 = 0.012m$$

Il y a : 6 sections de paroi, 12 bordures et 8 coins.

$$F_{tot} = 6 \times (2.88) + 12 \times (0.2592) + 8 \times (0.012) = 20.4864m$$

$$\phi = \lambda F_{tot} (T_1 - T_2) = 9.289kW$$

2.6.2 Méthodes numériques (différences finies) :

- ✓ Ils sont basées sur la méthode de différences finies (basé sur la subdivision du domaine étudié en une série d'éléments finis ou volume de control) ;
- ✓ Un système d'équations algébriques est utilisé pour approximer l'équation différentielle et les conditions aux limites ;
- ✓ Le plan (x, y) est découpé en un réseau de mailles, chaque élément de réseau est sous l'influence des éléments qui l'entourent ;
- ✓ Les points nodaux sont désignés par les indices (m : dans la direction x, n : dans la direction y).

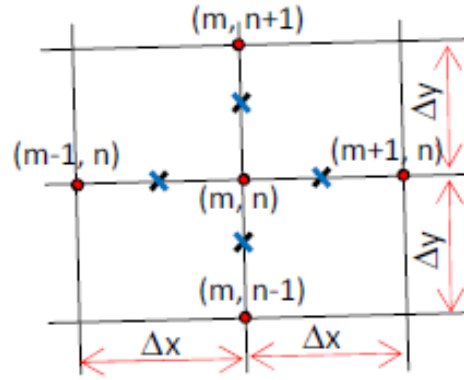


Figure 2.14 : Volume de contrôle typique du maillage.

Soit l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.44)$$

On utilise la technique (méthode) de différences finies pour approximer les gradients de température.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m+\frac{1}{2},n} \approx \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x},$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m-\frac{1}{2},n} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{m,n+\frac{1}{2}} \approx \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{m,n-\frac{1}{2}} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{m,n} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m,n} \approx \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m+\frac{1}{2},n} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m-\frac{1}{2},n}}{\Delta x} \approx \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{m,n} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{m,n} \approx \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{m,n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \approx \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2}$$

L'approximation par différences finies de l'équation différentielle devient :

$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2} = 0$$

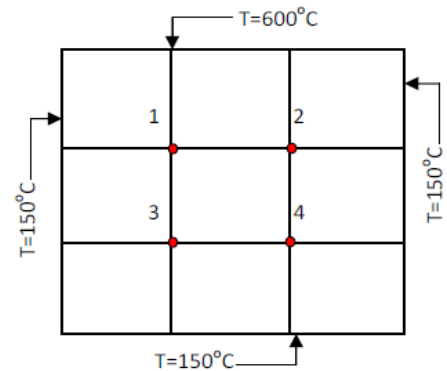
Si $\Delta x = \Delta y$, donc: $T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0$

Exemple 07 :

Soit l'exemple illustré sur la figure ci-contre.

Déterminer les températures des quatre nœuds (1, 2, 3 et 4)

En utilisant l'équation (3-5), nous aurons quatre équations pour chaque nœuds (1, 2, 3 et 4).



Solution

Le nœud (1) est influencé par quatre nœuds adjacents (2, 3, 150°C et 600°C).

$$T_{m+1,n}=T_2, T_{m-1,n}=150^{\circ}\text{C}, T_{m,n+1}=600^{\circ}\text{C}, T_{m,n-1}=T_3, T_{m,n}=T_1.$$

$$T_2+150+600+T_3-4T_1=0 \quad (1)$$

De la même manière pour le nœud (2):

$$T_1+T_4+150+600-4T_2=0 \quad (2)$$

De la même manière pour le nœud (3):

$$T_1+T_4+150+150-4T_3=0 \quad (3)$$

De la même manière pour le nœud (4):

$$T_3+T_2+150+150-4T_4=0 \quad (4)$$

$$(1)-(4) \Rightarrow T_1=112,5+T_4 \quad (5)$$

$$(2)-(3) \Rightarrow T_2=112,5+T_3 \quad (6)$$

$$(5) \rightarrow (2) \Rightarrow T_4=2T_2-431,25 \quad (7)$$

$$(6) \rightarrow (4) \Rightarrow T_3=2T_4-206,25 \quad (8)$$

$$(8) \rightarrow (6) \Rightarrow T_2=2T_4-93,75 \quad (9)$$

$$(9) \rightarrow (7) \Rightarrow T_4=206,25^{\circ}\text{C}, T_2=318,75^{\circ}\text{C}, T_1=318,75^{\circ}\text{C}, T_3=206,25^{\circ}\text{C}.$$

Chapitre 03 :

Transfert de chaleur par conduction en régime variable (ou transitoire) et sans changement d'état.

3.1 Conduction unidirectionnelle en régime variable sans changement d'état :

➤ Problème principal

L'équation générale de la chaleur est donnée par :

$$\operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}T}) + P = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.1)$$

Elle nécessite une condition initiale en tout point $T(t=0)$, et deux conditions aux limites.

Dans le cas où la conductivité thermique λ , ne dépend pas de la température, on obtient l'équation de Fourier :

$$\Delta T + \frac{P}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.2)$$

➤ Nombres sans dimension :

Le problème de la conduction thermique (cas unidirectionnel) est représenté par le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{P}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} & \text{pour } 0 < x < l; \quad t > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 & \text{pour } x = 0; \quad t > 0 \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -h(T - T_\infty) & \text{pour } x = l; \quad t > 0 \\ T = T_0 & \text{pour } 0 < x < l; \quad t = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Le nombre de variables dans un problème de transfert thermique peut être réduit par l'introduction de nombres sans dimensions :

$$x^* = \frac{x}{l}; \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}; \quad G = \frac{Pl^2}{\lambda T_0 - T_\infty}$$

Le système (3.3) devient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} + G = \frac{\partial \theta}{\partial F_0} & \text{pour } 0 < x^* < l; \quad F_0 > 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial x^*} = 0 & \text{pour } x^* = 0; \quad F_0 > 0 \\ \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x^*} = -B_i \theta & \text{pour } x^* = l; \quad F_0 > 0 \\ \theta = 1 & \text{pour } 0 < x^* < l; \quad F_0 = 0 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

En régime variable, il existe deux nombres sans dimension qui sont importants :

- ✓ **Le nombre de Biot** : est rapport entre la résistance thermique interne et la résistance thermique externe, l est la longueur caractéristique du milieu ($l = r$ pour une sphère).

$$B_i = \frac{hl}{\lambda} \quad (3.5)$$

Il calcule l'épaisseur thermique du domaine : un milieu est thermiquement mince si le **nombre de Biot est inférieur à 1** (C'est-à-dire que la résistance externe bloque le flux de chaleur). On peut aussi considérer que la température est uniforme en fonction de la dimension de l .

- ✓ **Le nombre de Fourier** : est le rapport du flux à travers l^2 au taux de stockage en l^3 , ou le rapport de la chaleur traversant à la chaleur accumulée. Le nombre de Fourier décrit la pénétration de la chaleur dans des conditions variables.

$$F_0 = \frac{\lambda \frac{\Delta T}{l} l^2}{\rho C l^3 \frac{\Delta T}{l}} = \frac{\alpha t}{l^2} \quad (3.6)$$

3.1.1 Milieu à température uniforme (méthode du gradient nul) :

Le transfert de chaleur vers un milieu uniformément chauffé sera étudié dans ce cours, ce qui est initialement contre-intuitif car un gradient thermique est nécessaire pour qu'un transfert de chaleur se produise. Cette proximité de milieu à une température constante peut cependant se justifier dans certains cas que l'on va préciser.

Par exemple, considérons la trempe d'une bille métallique, qui consiste à immerger une bille initialement à température T_i dans un bain à température constante T_0 . Si l'on suppose que la température à l'intérieur de la bille est constante, ce qui est plus probable compte tenu de sa petite taille et sa conductivité thermique élevée, on peut écrire le bilan thermique de la bille entre deux instants t et $t + dt$:

$$-h \cdot S \cdot (T - T_0) = \rho \cdot V \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{soit ;} \quad \frac{dT}{T - T_0} = -\frac{h \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c} dt$$

D'où :

$$\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp\left(-\frac{h \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c} t\right) \quad (3.7)$$

On remarque que le groupement $\frac{h \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c}$ est homogène à un temps, on l'appellera τ la

constante de temps du système :

$$\tau = \frac{\rho \cdot V \cdot c}{h \cdot S}$$

Cette grandeur est fondamentale dans la mesure où elle donne l'ordre de grandeur de temps du phénomène physique, on a en effet :

$$\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (3.8)$$

La définition de ces deux nombres (nombre de Biot et nombre de Fourier) permet d'écrire l'expression de la température de la bille sous la forme :

$$\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp(-B_i \times F_o) \quad (3.9)$$

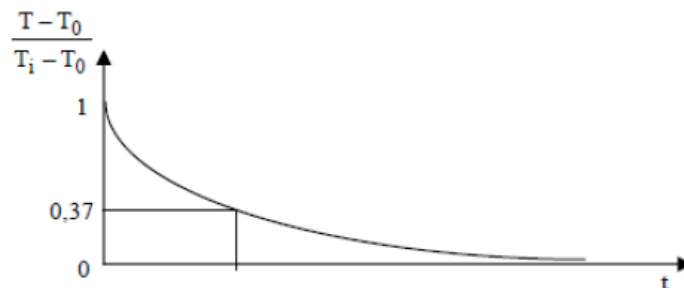


Figure 3.1 : Evolution de la température d'un milieu à température uniforme.

Le produit des nombres de Biot et de Fourier peut être utilisé pour calculer l'évolution de la température de la sphère. Le critère $Bi < 0,1$ est généralement appelé critère de «accommodation thermique» car un dispositif avec $Bi < 0,1$ peut être considéré comme étant à température uniforme.

Exemple 01 :

Calculez le temps requis pour qu'une petite plaque d'aluminium moulée à 16°C soit chauffée à 510°C en utilisant les gaz d'un haut fourneau à 1204°C . On donne :

$l_c = V/S = 15 \text{ cm}$, $h = 85 \text{ W/m}^2\text{K}$, $\lambda = 210 \text{ W/m.K}$, $\rho_{\text{al}} = 2700 \text{ Kg/m}^3$ et $c_{\text{al}} = 940 \text{ J/Kg.K}$.

Solution :

Calcule du nombre de Biot :

$$Bi = \frac{hl_c}{\lambda} = \frac{h \left(\frac{V}{S} \right)}{\lambda} = 0.0607 < 0.1$$

La résistance interne est négligeable.

Prenons la formule du solide soumis à une réponse indicelle (méthode du gradient nul)

$$\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \Rightarrow t = -\tau \cdot \ln\left(\frac{T(t) - T_0}{T_i - T_0}\right)$$

Calcule de τ :

$$\tau = \frac{\rho \cdot V \cdot c}{h \cdot S} = \frac{\rho \cdot c \cdot l_c}{h} = 4479s$$

Et le temps t est :

$$t = 2408s = 0.668h$$

Le temps nécessaire pour chauffer brusquement la pièce moulée de $16 \text{ }^\circ\text{C}$ à $510 \text{ }^\circ\text{C}$ est 2408 s .

Exemple 02 :

Pour réchauffer le lait du bébé, la mère le verse dans une petite paroi en verre d'un diamètre de 6 cm . La hauteur du lait dans le verre est de 7 cm . Elle place ensuite le verre dans une grande cocotte remplie d'eau chaude ($60 \text{ }^\circ\text{C}$). Le lait est constamment agité, garantissant que sa température reste constante à tout moment. Déterminez le temps qu'il faudrait au lait pour se réchauffer de $3 \text{ }^\circ\text{C}$ à $38 \text{ }^\circ\text{C}$ si le coefficient de transfert de chaleur entre l'eau et le verre est de $120 \text{ W/m}^2\text{.}^\circ\text{C}$. Suppose que les propriétés du lait sont les mêmes que celles de l'eau.

- Pourquoi le lait peut-il être traité comme un petit environnement thermique dans ces conditions ?

Donnés : La conductivité thermique, densité et la chaleur spécifique de l'eau à 20°C sont $\lambda = 0.607 \text{ W/m.}^\circ\text{C}$, $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$ et $C_p = 4.182 \text{ kJ/kg.}^\circ\text{C}$.

Solution :

La longueur caractéristique et le nombre de Biot du verre de lait sont :

$$L_c = \frac{V}{S} = \frac{\pi r_0^2 L}{2\pi r_0 L + 2\pi r_0^2} = 0.0105m$$

$$Bi = \frac{hL_c}{\lambda} = 2.076 > 0.1$$

Pour les raisons citées ci-dessus, nous pouvons utiliser le système global d'analyse afin de déterminer le temps nécessaire pour que le lait se réchauffe de 3°C à 38°C.

$$b = \frac{hS}{\rho C_p V} = \frac{h}{\rho C_p L_c} = 0.002738s^{-1}$$

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt} \rightarrow t = 348s \rightarrow t = 5.8 \text{ min}$$

Par conséquent, il faudra environ 6 minutes pour réchauffer le lait de 3°C à 38°C.

3.1.2. Milieu semi-infini : Température constante imposée en surface, Flux de chaleur imposée en surface :

❖ Pour une plaque infinie :

Etudier la possibilité d'une plaque épaisse de $2L$ avec des dimensions latérales suffisantes pour considérer le transfert de chaleur comme unidirectionnel.

➤ Cas 01: Plaque avec température constante imposée en surface :

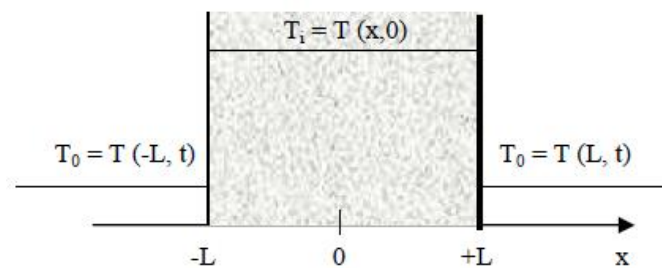


Figure 3.2 : Plaque avec température imposée en surface.

L'équation de la chaleur s'écrit dans ce cas : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$ avec les conditions aux limites et

$$\text{initiales suivantes : } \begin{cases} T(x, 0) = T_i \\ T(L, t) = T_0 \\ \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0 \end{cases}$$

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour la résolution du problème (méthode de la transformée de Laplace, Décomposition de la solution sous forme de produit de fonctions et superposition des solutions, transformation intégrale et méthodes numériques).

➤ Cas 02 : Plaque avec flux imposé :

L'équation de la chaleur reste la même, ce qui change sont les conditions aux limites.

Le système à résoudre est donc : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$ avec ;

$$\begin{cases} T(x,0) = T_i \\ \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \\ \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L} = \phi_0 \end{cases} \quad (3.10)$$

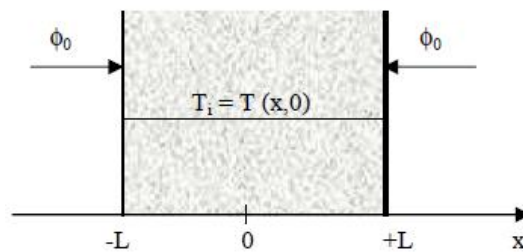


Figure 3.3 : Plaque avec flux de chaleur imposé en surface.

❖ Pour un cylindre infini :

Nous allons commencer par un cylindre de grand diamètre R et d'une température T_i , sur lequel nous imposerons brutalement une température de surface T_0 . Dans le cas où le transfert de chaleur est uniquement radial, on peut faire l'hypothèse.

➤ Cas 01 : Cylindre infini avec température de surface imposée :

L'équation de chaleur monodimensionnelle, en coordonnées cylindriques est donnée par :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.11)$$

Avec les conditions aux limites et initiales suivantes :

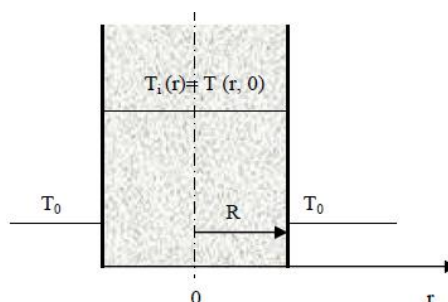
$$\begin{cases} T(r,0) = T_i \\ T(R,t) = T_0 \end{cases}$$


Figure 3.4 : Cylindre infini avec température de surface imposée.

➤ Cas 02 : Cylindre avec flux imposé :

Le système régissant le problème dans ce cas est : $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$, avec ;

$$\begin{cases} T(r, 0) = T_i \\ \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{(R,t)} = \phi_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

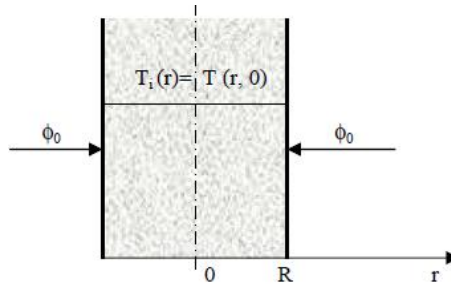


Figure 3.6 : Cylindre infini avec flux de chaleur imposé.

3.1.3. Milieu épais de dimensions finies (ou Milieu limité) :

❖ Pour une Sphère :

➤ Cas 01 : Température de surface imposée :

On suppose une sphère de rayon R avec une température initiale uniforme T_i sur laquelle une température de surface T_0 est placée brutalement.

Ce problème est régi par le système suivant : $\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\bar{T})}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}$ avec ; $\bar{T} = T - T_0$

$$\begin{cases} \bar{T}(r, 0) = T_i - T_0 \\ \bar{T}(R, t) = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

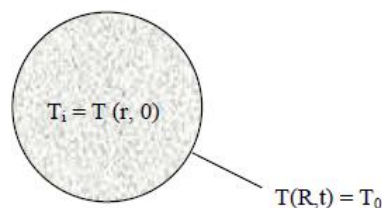


Figure 3.8 : Sphère avec température de surface imposée

➤ Cas 02: Flux imposé à la surface :

Si un flux est imposé à la surface de la sphère, le système régissant ce problème :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\bar{T})}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \quad \text{avec ; } \bar{T} = T - T_0$$

$$\begin{cases} \bar{T}(r, 0) = T_i - T_0 \\ \lambda \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right)_{(R,t)} = \phi_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

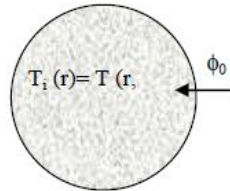


Figure 3.9 : Sphère avec flux surfacique imposé

3.2. Conduction multidirectionnelle en régime variable :

3.2.1. Théorème de Von Neumann :

Il y a des problèmes en 2D ou 3D qui peuvent être résolus en combinant 2 ou 3 solutions unidimensionnelles. Prenons par exemple le cas d'une barre rectangulaire infinie (très grande longueur devant les côtés $2L_1$ et $2L_2$), elle peut être considérée comme l'intersection de deux plaques infinies d'épaisseurs respectives $2L_1$ et $2L_2$.

Le théorème de Von Neumann nous permet d'affirmer que la température sans dimension de cette barre est exprimée comme le produit des températures sans dimension des deux plaques infinies dont elle peut être considérée comme l'intersection :

$$\left[\frac{T(x, y, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right]_{\text{barre } 2L_1 \times 2L_2} = \left[\frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right]_{\text{plaque } 2L_1} \times \left[\frac{T(y, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right]_{\text{plaque } 2L_2} \quad (3.15)$$

Dans le cas général, les méthodes numériques sont les plus utilisées et permettent de trouver la solution plus rapidement, même pour des géométries complexes.

Exemple 03 :

Un gros bloc d'acier ($\lambda = 45 \text{ W/m} \cdot \text{°C}$, $\alpha = 1,4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$) est initialement à une température uniforme de 35°C . La surface est exposée à un flux de chaleur (a) en élevant brusquement la température de surface à 250°C et (b) grâce à un flux de chaleur de surface constant de $3,2 \times 10^5 \text{ W/m}^2$.

- Calculez la température à une profondeur de 2,5 cm après un temps de 0,5 min pour ces deux cas.

Solution:

Pour le cas (a) : $\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = 0.61$

La fonction d'erreur est déterminée à partir comme : $\text{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = \text{erf} 0.61 = 0.61164$

Nous avons $T_i = 35^\circ\text{C}$ et $T_0 = 250^\circ\text{C}$, donc la température à $x = 2,5$ cm est déterminée à partir de l'équation :

$$T(x, \tau) = T_0 + (T_i - T_0) \text{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = 118.5^\circ\text{C}$$

Pour le cas b à flux thermique constant :

$$T(x, \tau) = 79.3 \quad x = 2.5\text{cm}, \quad \tau = 30\text{s}$$

Pour le cas à flux thermique constant, la température de surface après 30 s serait évaluée avec $x = 0$. Donc :

$$T(x=0) = 199.4^\circ\text{C}$$

Exemple 04 :

Une impulsion laser instantanée de 10 MJ/m^2 est imposée sur une semelle d'acier inoxydable ayant des propriétés de $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $c = 460 \text{ J/kg}\cdot^\circ\text{C}$, et $\alpha = 0,44 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. La semelle est initialement à une température uniforme de 40°C .

- Estimez la température en surface et à une profondeur de 2,0 mm après un temps de 2 s.

Solution :

Nous avons; $\frac{Q_0}{A} = 107 \text{ J/m}^2$ et à $x=0$:

$$T_0 - T_i = \frac{Q_0}{A\rho c (\pi\alpha\tau)^{0.5}} = 530^\circ\text{C}$$

Et $T_0 = 40 + 530 = 570^\circ\text{C}$

$$T - T_i = 530 \exp\left[-(0.002)^2 / (4)(0.44 \times 10^{-5})(2)\right] = 473^\circ\text{C}$$

$$T = 40 + 473 = 513^\circ\text{C}$$

Exemple 05 :

Une grande plaque d'aluminium à une température uniforme de 200°C voit sa température de surface abaissée à 70°C .

- Quelle est la chaleur totale retirée de la dalle par unité de surface lorsque la température à une profondeur de 4,0 cm est descendue à 120 °C ?

Solution:

Nous trouvons d'abord le temps nécessaire pour atteindre la température de 120 °C, puis intégrons l'équation pour trouver la chaleur totale évacuée pendant cet intervalle de temps.

Pour l'aluminium, ($\lambda = 215 \text{ W/m}\cdot\text{°C}$, $\alpha = 8,4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$)

On a aussi : $T_i = 200 \text{ °C}$, $T_0 = 70 \text{ °C}$, $T(x, \tau) = 120 \text{ °C}$

$$\frac{120 - 70}{200 - 70} = \text{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = 0.3847$$

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = 0.3553 \quad \text{et} \quad \tau = 3772 \text{ s}$$

La chaleur totale par unité de surface est :

$$Q_0/A = \int_0^{\tau} \frac{q}{A} d\tau = 2\lambda(T_0 - T) \sqrt{\frac{\tau}{\pi\alpha}} = -21.13 \times 10^6 \text{ J/m}^2$$

Exemple 06:

Un petit cylindre en aluminium de 5,0 cm de diamètre et 10,0 cm de long est initialement à une température uniforme de 200 °C. Il est soudainement soumis à un environnement de convection à 70 °C, et $h = 525 \text{ W/m}^2\cdot\text{°C}$.

- Calculez la température à une position radiale de 1,25 cm et à une distance de 0,625 cm d'une extrémité du cylindre 1 min après l'exposition à l'environnement.

Solution:

Pour résoudre ce problème, nous combinons les solutions des diagrammes de *Heisler* pour un cylindre infini et une plaque infinie. Pour le problème de la plaque infinie, on a $L = 5 \text{ cm}$.

La position x est déterminée à partir du centre :

$$x = 5 - 0.265 = 4.735 \text{ m} \rightarrow \frac{x}{L} = 0.947$$

Pour l'aluminium ; ($\lambda = 215 \text{ W/m}\cdot\text{°C}$, $\alpha = 8,4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$)

$$\frac{\lambda}{hL} = 8.19 \quad \frac{\alpha\tau}{L^2} = 2.016$$

$$\text{On a aussi ; } \frac{\theta_0}{\theta_i} = 0.75 \quad \frac{\theta}{\theta_0} = 0.95$$

$$\text{Alors ; } \left(\frac{\theta}{\theta_i} \right)_{\text{plat}} = 0.7125$$

Pour le cylindre $r_0 = 2.5$ cm

$$\frac{r}{r_0} = 0.5$$

$$\frac{\lambda}{hr_0} = 16.38$$

$$\frac{\alpha\tau}{r_0^2} = 8.064$$

On a aussi ; $\theta_0/\theta_i = 0.38$ $\theta/\theta_0 = 0.98$

Alors ; $\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{cyl} = 0.3724$

Combinaison des results pour le plat et le cylindre ça donne :

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{petit-cyl} = 0.265$$

$$T = T_\infty + 0.265(T_i - T_\infty) = 104.5^\circ C$$

Chapitre 04 :

Transfert de chaleur par convection

4.1. Introduction :

La convection est le mécanisme par lequel la chaleur est transférée entre une surface solide et un fluide en mouvement qui lui est adjacent. Le transfert d'énergie par convection à partir d'une surface solide dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure, s'effectue en plusieurs étapes :

- 1) La chaleur circule par convection de la surface solide vers les particules adjacentes du fluide. L'énergie ainsi transférée servira à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules de fluide.
 - 2) Les particules se déplaceront vers une région de fluide à température plus basse, où lorsqu'elles se mélangent, elles transfèrent une partie de leur énergie à d'autres particules du fluide.
 - 3) L'énergie sera stockée dans les particules du fluide et transportée sous l'effet du mouvement des masses. Il existe deux types de processus convectifs : ***convection forcée*** et ***convection naturelle***.
- **Convection forcée** : Si le mouvement du fluide est produit par l'action d'un agent externe, comme une pompe hydraulique, un agitateur ou un ventilateur. Des situations peuvent se produire où les deux formes de convection agissent simultanément, étant une convection forcée d'un plus grand intérêt pratique que la convection naturelle, en raison d'applications industrielles.
 - **Convection naturelle** : elle se produit lorsque le mouvement du fluide est provoqué par des moyens naturels, tels que l'effet flottant, qui se manifeste par la montée du fluide chaud et la chute du fluide froid (différence de densité qui se produit dans le fluide), comme un résultat d'une différence de température.

La convection est également classée comme externe et interne, selon que le fluide est forcé de s'écouler sur une surface ou dans un écoulement.

4.2 Modélisation du transfert de chaleur par convection :

Newton (1701), définit : la chaleur transférée (δQ) à partir de la surface (dS) d'un solide ou d'un fluide en mouvement est proportionnelle à la différence de température entre un solide à la température T_p et un fluide de transfert à la température T_∞ et s'exprime :

$$\delta Q = h \cdot (T_p - T_\infty) \cdot dS \cdot dt \quad (4.1)$$

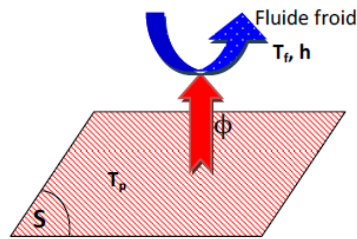


Figure 4.1 : Application de la loi de Newton en convection

Où h est le coefficient d'échange par convection, il s'exprime en $W/(m^2.K)$; δQ s'exprime en Joules et $\delta Q/dt$ en Watts ;

Donc le flux de chaleur transmis par convection est donné en utilisant l'équation 4.1 :

$$\Phi = \frac{\delta Q}{dt} = h \cdot (T_p - T_\infty) \cdot dS \quad (4.2)$$

Le coefficient de transfert de chaleur par convection h n'est pas une propriété, car il dépend de divers facteurs, vitesse, densité, viscosité, conductivité thermique, chaleur spécifique du fluide, la géométrie de la surface, la présence de forces de flottabilité, ce qui rend il est difficile d'arriver à une expression analytique du coefficient de transfert de chaleur. Généralement, la détermination expérimentale est utilisée, en utilisant certaines techniques, telles que :

1. Analyse dimensionnelle combinée à des expériences ;
2. Solutions mathématiques exactes des équations de la couche limite ;
3. Analyse approximative des équations de la couche limite ;
4. L'analogie entre le transfert de chaleur et le transfert de quantité de mouvement ;
5. Analyse numérique.

4.2.1. Ordre de grandeur du coefficient h pour différentes configurations :

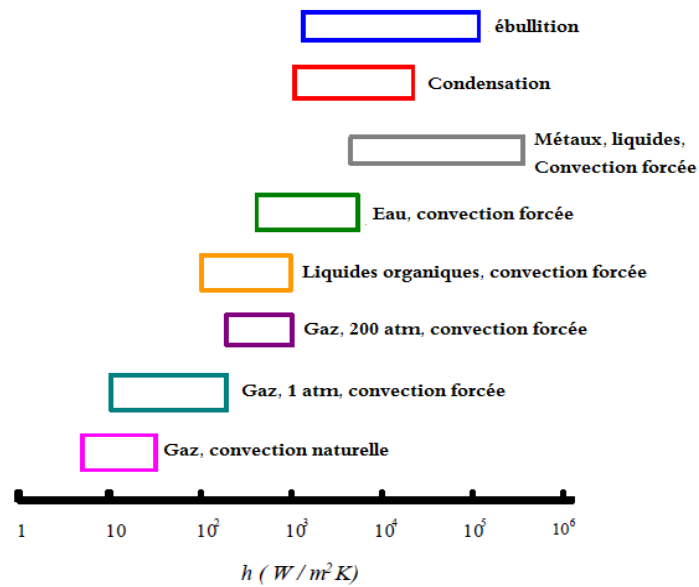


Figure 4.2 : Valeurs caractéristiques du coefficient de convection pour différents fluides et type de processus.

4.3 Couches limites en transfert par convection :

4.3.1 Couche limite hydrodynamique :

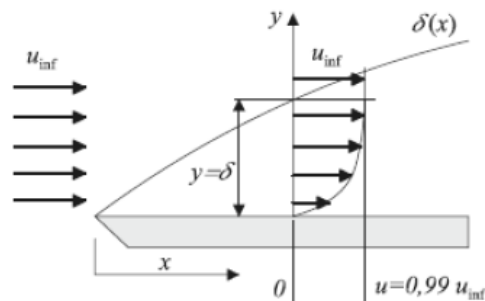


Figure 4.3 : développement de la Couche limite hydrodynamique sur une plaque.

Soit une plaque placée dans un écoulement parallèle tel que la vitesse au bord d'attaque est uniforme et égale $U_{inf\ ini e}$.

Les particules de fluide en contact avec la surface n'ont pas de vitesse (ou vitesse nulle). Ces particules obstruent le passage des particules voisines sur une épaisseur δ jusqu'à ce que l'effet de freinage devienne imperceptible. La vitesse a tendance à augmenter vers $U_{inf\ ini e}$ à mesure que la distance à la surface plane augmente.

δ : Épaisseur de la couche limite hydrodynamique

4.3.2 Couche limite thermique :

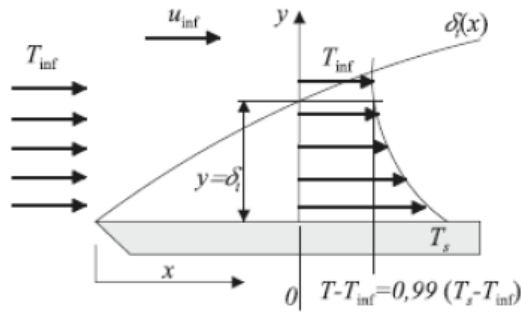


Figure 4.4 : développement de la Couche limite thermique sur une plaque.

La température des particules de fluide en contact avec la surface est la même que la température de la surface. Ces particules échangent de l'énergie avec leur voisines (gradient de température). Le domaine où se développe ce gradient est connue sous le nom de couche thermique.

L'épaisseur $\delta(x)$ de la couche limite est la distance correspond à $\frac{T - T_{\text{inf}}}{T_s - T_{\text{inf}}} = 0.99$.

La densité de flux dans le fluide à la surface ($y = 0$) est donnée par la loi de Fourier :

$$\varphi = -\lambda \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0}$$

Cette chaleur est transportée par convection dans le fluide. La densité de flux est donnée par la loi de Newton :

$$\varphi = h(T_s - T_{\text{inf}}) \Rightarrow h = \frac{-\lambda \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0}}{(T_s - T_{\text{inf}})} \quad (4.3)$$

4.4 Ecoulement laminaire et turbulent :

Osborne Reynolds a mené une série d'expériences traditionnelles impliquant des écoulements à l'intérieur de conduits en 1883. Ces expériences montrent qu'il existe deux types de régimes différents : l'un *laminaire* et l'autre *turbulent*. Reynolds a réussi à déterminer le critère d'instabilité qui régit la transition entre ces deux régimes.

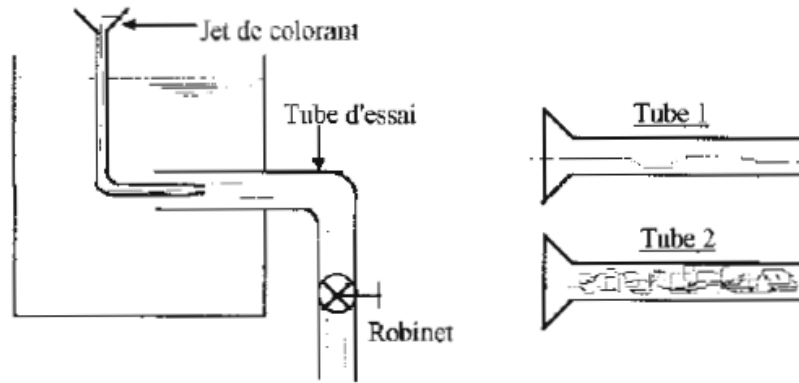


Figure 4.5 : Représentation de l'expérience de Reynolds.

Ceci a été accompli en injectant une petite quantité de colorant à l'intérieur d'un tube expérimental, qui a ensuite été placé dans un réservoir rempli d'un liquide qui avait le même masse volumique que le colorant (cf. figure 4.5). Lorsque le débit est faible, le filet de couleur reste étroit et parallèle aux lignes de courant dans le tube : c'est le régime laminaire (cf. Tube 1 de la figure 4.5). Lorsque le débit dépasse un seuil critique, le filet coloré commence à onduler, puis explose, occupant tout le tube : c'est l'état turbulent (cf. Tube 2 de la figure 4.5).

Reynolds a effectué une analyse dimensionnelle aux écoulements en conduite et a découvert que la transition se produit pour une valeur fixe d'un paramètre qui peut être interprété comme le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité. Ce paramètre est maintenant connu sous le nom de nombre de Reynolds en son honneur. La signification physique de ceci sera démontrée plus tard.

Généralement, la valeur transitoire de Reynolds définissant le passage de la nature laminaire à turbulente de l'écoulement est égale à : $Re_c = 2300$ pour les écoulements en conduite et $Re_c = 500000$ pour les écoulements sur plaques planes.

4.5 Equation de conservation :

4.5.1 Equation de conservation de la masse ou equation de continuité :

Le principe de conservation de la masse dans un volume V stipule que la variation de masse dans le volume et le flux de masse sur sa surface sont égaux :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \iint_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dS = - \iiint_V \text{div}(\rho \cdot \vec{V})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (4.4)$$

Pour un écoulement stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) et incompressible ($\rho = \text{Cte}$), l'équation de continuité se réduit à :

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{V} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.5.2 Equations de conservation de la quantité de mouvement ou équations de Navier-Stokes :

Lorsque le principe de conservation des moments est appliqué, il correspond à un repère cartésien. Les équations de Navier-Stokes sont les suivantes :

$$\begin{cases} \rho \cdot \frac{Du}{Dt} = F_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \rho \cdot \frac{Dv}{Dt} = F_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \rho \cdot \frac{Dw}{Dt} = F_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{cases} \quad (4.6)$$

Avec ;

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{Dérivé particulaire.}$$

ρ La densité

F_x, F_y, F_z Forces extérieures.

P ; Pression

μ ; viscosité dynamique.

u, v, w ; Composantes du vecteur vitesse.

4.5.3 Equation de conservation de l'énergie :

L'équation de conservation de l'énergie exprimée par rapport à un système de coordonnées cartésiennes est :

$$\rho \cdot C_p \frac{DT}{Dt} = \lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (4.7)$$

En termes de la fonction enthalpie, elle s'exprime :

$$H_1 + \frac{V_1^2}{2} + Q = H_2 + \frac{V_2^2}{2} + W$$

Où :

H : Enthalpie,

Q : Chaleur reçue ;

W : Travail net produit.

4.6 Equation de la couche limite :

Une solution complète des équations de Navier-Stokes montrant un écoulement visqueux, présente des défis mathématiques importants. En conséquence, une généralisation de ces équations est nécessaire. Ludwig Prandtl notait en 1905 que l'effet de la viscosité sur la plupart des écoulements n'était significatif que dans une région très mince près de la paroi solide. Le reste du fluide peut être considéré comme non visqueux et optimal. On appelle cette région par la couche limite.

On considère un fluide qui s'écoule auprès d'une paroi solide (voir figure 4.4). Si le fluide est newtonien, la contrainte tangentielle sera exprimée par la loi de Newton, qui peut s'écrire comme suit :

$$\tau = \mu \frac{U_\infty}{\delta} \quad (4.8)$$

Où U_∞ représente la vitesse à la frontière de la couche limite.

À l'intérieur de la couche limite, U_∞ , est liée à la vitesse u par la relation: $\frac{du}{dy} = \frac{U_\infty}{\delta}$

La contrainte tangentielle aura donc pour expression :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (4.9)$$

On définit aussi la viscosité cinématique comme : $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

Exemple 01 :

On considère deux plaques horizontales, l'une sur l'autre, sont placées à une distance de 1,25 cm. L'espace entre eux est rempli d'une huile à viscosité dynamique d'une viscosité de $\mu = 1,4 \text{ N.s/m}^2$. La deuxième tâche consiste à calculer la force tangentielle exercée par l'huile si la plaque supérieure se déplace à une vitesse de 2,5 m/s.

Solution :

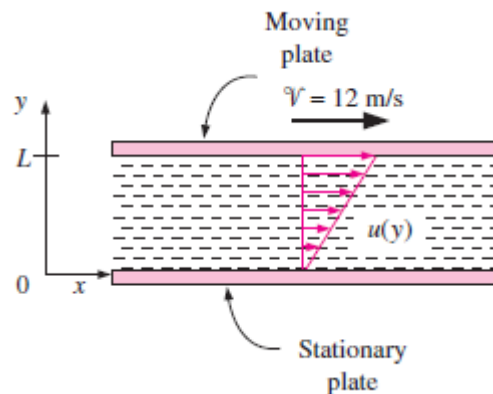
L'application de l'équation (4.9) aboutit à :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = 1.4 \times \frac{2.5}{0.0125} = 280 \text{ N/m}^2$$

Exemple 02 :

Considérons deux grandes plaques isothermes séparées par un film d'huile de 2 mm d'épaisseur. Les plaques supérieures se déplacent à une vitesse constante de 12 m/s, tandis que la plaque inférieure est stationnaire. Les deux plaques sont maintenues à 20 °C.

- 1) Obtenir des relations pour les distributions de vitesse et de température dans l'huile.
- 2) Déterminez la température maximale de l'huile et le flux de chaleur de l'huile vers chaque plaque (voir la figure).

**Solution :**

- 1) Les plaques sont supposées grandes de sorte qu'il n'y a pas de variation dans la direction z.

Propriétés Les propriétés de l'huile à 20 °C sont: $\lambda = 0.145 \text{ W/m.K}$ $\mu = 0.8 \text{ kg/m.s}$

Nous prenons l'axe des x pour être la direction d'écoulement, et l'axe des y pour la direction normale. C'est un flux parallèle entre deux plaques, et donc $v = 0$. Alors l'équation de continuité se réduit à :

$$\text{Equation de continuité : } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u = u(y)$$

Par conséquent, la composante x de la vitesse ne change pas dans la direction d'écoulement (c'est-à-dire que le profil de vitesse reste inchangé). Notant que $u = u(y)$, $v = 0$ et $\partial p / \partial x = 0$ (l'écoulement est maintenu par le mouvement de la plaque supérieure plutôt que par le gradient de pression), l'équation de la quantité de mouvement selon x réduit à :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial P}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire du second ordre, et son intégration deux fois donne :

$$u(y) = C_1 y + C_2$$

Les vitesses du fluide aux surfaces des plaques doivent être égales aux vitesses des plaques en raison de la condition antidérapante. Par conséquent, les conditions aux limites sont $u(0) = 0$ et $u(L) = V$, et leur application donne la distribution de vitesse :

$$u(y) = \frac{y}{L} {}^0V$$

L'échauffement par friction dû à la dissipation visqueuse dans ce cas est important en raison de la viscosité élevée de l'huile et de la grande vitesse de la plaque. Les plaques sont isothermes et il n'y a pas de changement dans la direction d'écoulement, et donc la température ne dépend que de y , $T = T(y)$. De plus, $u = u(y)$ et $v = 0$. Alors l'équation d'énergie avec dissipation se réduit à :

$$\text{Equation de l'énergie : } 0 = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = - \left(\frac{{}^0V}{L} \right)^2$$

Donc $\partial u / \partial y = {}^0V / L$, diviser les deux côtés par λ et intégrer deux fois ça donne :

$$T(y) = - \frac{\mu}{2\lambda} \left(\frac{y {}^0V}{L} \right)^2 + C_3 y + C_4$$

En appliquant les conditions aux limites $T(0) = T_0$ et $T(L) = T_0$, la distribution de température est :

$$T(y) = T_0 + \frac{\mu {}^0V^2}{2\lambda} \left(\frac{y}{L} - \frac{y^2}{L^2} \right)$$

2) Le gradient de température est déterminé en différenciant $T(y)$ par rapport à y :

$$\frac{dT}{dy} = \frac{\mu {}^0V^2}{2\lambda L} \left(1 - 2 \frac{y}{L} \right)$$

L'emplacement de la température maximale est déterminé en réglant $dT/dy = 0$ et en résolvant y :

$$\frac{dT}{dy} = \frac{\mu {}^0V^2}{2\lambda L} \left(1 - 2 \frac{y}{L} \right) = 0 \rightarrow y = L/2$$

Par conséquent, la température maximale se produira au plan médian, ce qui n'est pas surprenant puisque les deux plaques sont maintenues à la même température. La température maximale est la valeur de la température à $y = L/2$:

$$T_{\max} = T\left(\frac{L}{2}\right) = T_0 + \frac{\mu^0 V^2}{2\lambda} \left(\frac{L}{L} - \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{L^2} \right) = T_0 + \frac{\mu^0 V^2}{8\lambda}$$

$$T_{\max} = 119^\circ\text{C}$$

Le flux thermique au niveau des plaques est déterminé à partir de :

$$\phi_0 = -\lambda \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = -\frac{\mu^0 V^2}{2L} = -28,800\text{W} / \text{m}^2$$

$$\phi_L = -\lambda \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=L} = \frac{\mu^0 V^2}{2L} = -\phi_0 = +28,800\text{W} / \text{m}^2$$

Par conséquent, les flux de chaleur au niveau des deux plaques sont de grandeur égale mais de signe opposé.

Discussion : Une élévation de température de 99°C confirme notre soupçon que la dissipation visqueuse est très importante. De plus, le flux thermique est équivalent au taux de dissipation d'énergie mécanique. Par conséquent, l'énergie mécanique est convertie en énergie thermique à un taux de $57,2\text{ kW/m}^2$ de surface de plaque pour surmonter le frottement dans l'huile. Enfin, les calculs sont effectués en utilisant les propriétés de l'huile à 20°C , mais la température de l'huile s'est avérée beaucoup plus élevée. Par conséquent, connaissant la forte dépendance de la viscosité à la température, les calculs doivent être répétés en utilisant les propriétés à la température moyenne de 70°C pour améliorer la précision.

4.7. Analyse dimensionnelle :

4.7.1. Principe de la méthode :

On est amenées pour des raisons de commodités à choisir arbitrairement un certain nombre de grandeurs indépendantes comme grandeurs fondamentales, toutes les autres grandeurs seront exprimées en fonction de celles-ci et appelées grandeurs dérivées.

Les grandeurs fondamentales du système international sont : la masse M , la longueur L , le Temps T et la température θ .

Pour les problèmes de transfert thermique, on ajoute la quantité de chaleur Q qui s'écrit en fonction des dimensions suivant : M , L et T par : $Q = M \cdot L \cdot T^{-2}$

La méthode d'analyse dimensionnelle est basée sur le principe de l'homogénéité dimensionnelle des termes d'une équation. Dans un problème de convection thermique les grandeurs physiques mises en jeu, dans un problème de convection thermique sont regroupées dans le tableau 4.1.

Grandeur	Symbole	Unité S.I	Equation aux dimensions
Ecart de température	ΔT	K	θ
Dimension caractéristique	D	m	L
Vitesse du fluide	U	m/s	$L \cdot T^{-1}$
Masse volumique du fluide	ρ	kg/m^3	$M \cdot L^{-3}$
Conductivité thermique	λ	$W/m \cdot K$	$M \cdot L \cdot T^{-3} \cdot \theta^{-1}$ ou $Q \cdot T^{-1} \cdot L^{-1} \cdot \theta^{-1}$
Capacité thermique massique	C	$J/kg \cdot K$	$L^2 \cdot T^{-2} \cdot \theta^{-1}$ ou $Q \cdot M^{-1} \cdot \theta^{-1}$
Coefficient de <u>transfert thermique convectif</u>	h	$W/m^2 \cdot K$	$M \cdot T^{-3} \cdot \theta^{-1}$ ou $Q \cdot T^{-1} \cdot L^{-2} \cdot \theta^{-1}$
Viscosité dynamique du fluide	μ	$kg/m \cdot s$	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$

Tableau 4.1 : Equations aux dimensions des grandeurs utilisées dans la convection.

4.7.2. Nombres adimensionnels :

a) Le nombre de Reynolds :

Le régime d'écoulement d'un fluide peut être soit laminaire, soit turbulent. **Le nombre de Reynolds** caractérise le passage d'un régime à un autre :

$$R_e = \frac{\text{Forces } d'inertie}{\text{Forces viscosité}} = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu} \quad (4.10)$$

Avec ;

D : dimension caractéristique [m]

v : vitesse caractéristique [ms^{-1}]

ν : viscosité cinématique [$m^2 \cdot s^{-1}$]

ρ : masse volumique du fluide [$kg \cdot m^{-3}$]

μ : viscosité dynamique du fluide [$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$]

Remarque :

S'il s'agit d'un conduit circulaire, D est le diamètre ; dans tous les autres cas, D est le diamètre hydraulique : $D_h = \frac{4 \cdot S}{P}$ avec S la surface et P le périmètre.

L'expérience montre que lorsqu'une valeur de Re est inférieure à une valeur critique Re_c , l'écoulement dans une conduite est toujours laminaire. En cas d'écoulement interne, la valeur 2300 pour Re_c peut être utilisée.

b) Le nombre de Nusselt :

Le rapport $(h \cdot L / \lambda)$, quantité sur dimension, est appelé nombre de Nusselt, c'est le gradient de température sans dimension pour le fluide, évalué à l'interface paroi-fluide.

La relation du nombre de Nusselt est similaire à celle du nombre de Biot, ils diffèrent par la conductivité thermique, (λ) , car le nombre de Nusselt est du fluide, au lieu du nombre de Biot, la conductivité thermique est du solide.

$$Nu = \frac{h \cdot S \cdot \Delta T}{\lambda \cdot S \cdot \frac{\Delta T}{L}} = \frac{h \cdot L}{\lambda} \quad (4.11)$$

c) Le nombre de Grashof :

La force de viscosité du fluide est caractérisée par le nombre de Grashof :

$$Gr = \frac{g \cdot d^3 \cdot \beta_p \cdot \Delta T}{\nu^2} \quad (4.12)$$

Où :

d: dimension caractéristique de la paroi [m].

g : accélération de la pesanteur [$m \cdot s^{-2}$].

$\Delta T = T_p - T_f$: différence de température caractéristique [$^{\circ}C$].

β_p : facteur de dilatation volumique du fluide [$^{\circ}C^{-1}$].

$$\beta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad \text{pour un gaz parfait : } \beta = \frac{1}{T}$$

d) Le nombre de Prandtl :

C'est le rapport entre la distribution des vitesses et la distribution de la température.

$$Pr = \frac{\mu \cdot C_p}{\lambda} \quad (4.13)$$

C_p : chaleur spécifique du fluide.

e) Le nombre de Rayleigh :

Il est identique au nombre de Reynolds en convection naturelle.

$$Ra = Pr \cdot Gr \quad (4.14)$$

4.8 Convection forcée :

Dans cette section du chapitre, nous verrons comment transférer la chaleur par convection sans changement de phase. Les corrélations expérimentales les plus courantes en convection forcée sont du type suivant: $Nu = f(\text{Re}, \text{Pr})$.

Pour une température de fluide donnée, le nombre de Prandtl, qui apparaît dans l'expression du nombre de Nusselt et caractérise le fluide en écoulement, doit être déterminé. Alternativement, s'il y a échange de chaleur, la température à la surface et la température du fluide seraient différentes ; les propriétés du fluide seraient simplement prises pour la température moyenne T_m .

$$T_m = \frac{T_p + T_f}{2} \quad (4.15)$$

1. Echange de chaleur le long d'une plaque plane (Convection forcée externe $Re_c = 5 \cdot 10^5$) :

Régime laminaire : $Re \leq 5 \cdot 10^5$

$$Nu_L = 0.66(Re_L)^{1/2} (\text{Pr})^{1/3} \quad (4.16)$$

Régime turbulent : $Re > 5 \cdot 10^5$

$$Nu_L = 0.036(Re_L)^{4/5} (\text{Pr})^{1/3} \quad (4.17)$$

2. Écoulement à l'intérieur de tubes cylindriques lisses (Convection forcée interne $Re_c = 2300$):

➤ Régime laminaire : $Re \leq 2300$

D : Diamètre intérieur du tube,

μ_m, μ_p : Viscosités dynamiques définies à T_m et T_p .

$$\text{❖ Haussen : } Nu_L = 3.66 + \frac{0.0668 \cdot \text{Re} \cdot \text{Pr} \cdot (D/L)}{1 + 0.04 [\text{Re} \cdot \text{Pr} \cdot (D/L)]^{2/3}} \cdot \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0.14} \quad (4.18)$$

$$\text{❖ Sieder et Tate : } Nu_L = 1.86 \times (\text{Re} \cdot \text{Pr})^{1/3} \times \left(\frac{D}{L} \right)^{1/3} \times \left(\frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0.14} \quad (4.19)$$

Valable pour : $Nu_L = \text{Re} \cdot \text{Pr} \times \frac{D}{L} \geq 10$, toutes les propriétés sont définies à T_m sauf μ_p à T_p

$$\text{❖ Kays : } Nu_L = 3.66 + \frac{0.104 \times \text{Re} \times \text{Pr} \times (D/L)}{1 + 0.016 [\text{Re} \cdot \text{Pr} \cdot (D/L)]^{0.8}} \quad (4.20)$$

Valable pour : $Nu_L = Re.Pr \times \frac{D}{L} < 100$

➤ Régime turbulent : $Re > 2300$

❖ Colburn :

$$Nu_L = 0.023(Re)^{0.8} (Pr)^n \quad (4.21)$$

Valable pour :

$$n = 0.3 \quad \text{si} \quad T_f > T_p$$

$$n = 0.4 \quad \text{si} \quad T_f < T_p$$

$$0.6 \leq Pr \leq 100$$

$$Re_L > 5000$$

$$\text{Avec ; } Re_{Dh} = \frac{U_m \cdot D_h}{\nu} \quad \text{et} \quad Nu_{Lh} = \frac{h \cdot D_h}{\lambda}$$

D_h : Diamètre hydraulique. $D_h = 4 \times S / p$ Avec ; **S** est la section de passage du fluide et **p** est le périmètre du contact fluide/paroi.

3. Écoulement dans les espaces annulaires (Convection forcée interne) :

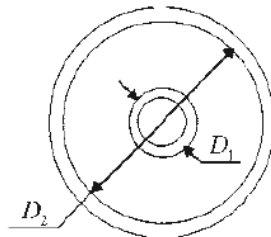


Figure 4.6 : Écoulement dans l'espace annulaire formé par les deux conduites

$$Nu_{Dh} = 0.023(Re_{Dh})^{0.8} (Pr)^n \quad (4.22)$$

$$\text{Avec ; } Re_{Dh} = \frac{U_m \cdot D_h}{\nu} \quad \text{et} \quad Nu_{Lh} = \frac{h \cdot D_h}{\lambda}$$

D_h : Diamètre hydraulique. Dans ce cas: $D_h = D_1 - D_2$

$n = 0,4$ pour chauffage

$n = 0,3$ pour refroidissement

4. Écoulement perpendiculaire à un tube :

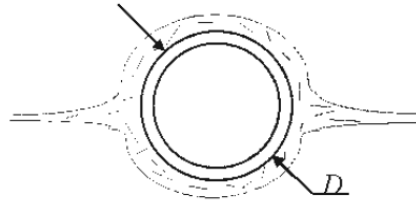


Figure 4.7 : Ecoulement perpendiculaire à une conduite.

❖ Hilpert :

$$Nu_D = C.(Re_D)^m \quad (4.23)$$

Re_D	C	m
1-4	0.891	0.330
4-40	0.821	0.385
40-4000	0.615	0.466
4000-40000	0.174	0.618
40000-250000	0.0239	0.805

5. Ecoulement perpendiculaire à une rangée de tubes :

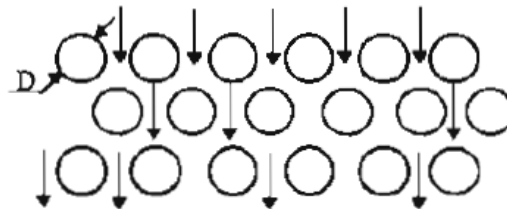


Figure 4.8 : Ecoulement perpendiculaire à une rangée de conduites

❖ Colburn :

$$Nu_D = 0.33(Re_D)^{0.6} (Pr)^{1/3} \quad (4.24)$$

4.9 Convection naturelle :

a) Méthode pratique de calcul du flux de chaleur en convection naturelle :

L'utilisation de l'analyse dimensionnelle révèle que la relation entre le flux de chaleur transporté par convection et les facteurs dont elle dépend se retrouve sous la forme d'une relation entre trois nombres adimensionnels : $Nu = f(Gr, Pr)$.

Les étapes suivantes sont utilisées pour calculer un flux de chaleur transmis par convection naturelle :

- ✓ La détermination des nombres adimensionnels suivants : Gr et Pr .

- ✓ Selon le résultat de Gr , on choisit une corrélation expérimentale correspondante à la configuration étudiée.
- ✓ En appliquant cette corrélation pour le calcul du nombre Nu .
- ✓ Calcul de $h = \frac{\lambda \cdot Nu}{L}$
- ✓ Utilisation de la loi de Newton afin de calculer le flux chaleur échangé :

$$\Phi = h \cdot S (T_p - T_\infty)$$

Remarque :

il faut prendre en considération ce qui suit lors du calcul de h :

- ✓ La nature du fluide (liquide ou gaz).
- ✓ La température du fluide.
- ✓ Savoir le type de convection (naturelle ou forcée).
- ✓ Savoir le type de régime d'écoulement (laminaire ou turbulent).
- ✓ Savoir le type de contact entre le fluide et surface (surface plane, ou circule entre deux surfaces planes, ou circule dans un tube, ...).

b) Différentes corrélations pour le calcul de h :

Nous avons remarqué que les relations décrivant un problème de convection naturelle peuvent prendre la forme suivante: $Nu = f(Gr, Pr)$. La relation entre ces trois nombres adimensionnels ne peut pas être établie théoriquement, mais doit être déterminée expérimentalement. De nombreuses découvertes scientifiques ont été compilées dans la littérature.

Ils sont connus sous le nom de «corrélations expérimentales». Dans cette section, nous allons passer en revue les corrélations expérimentales les plus courantes en convection naturelle.

Les corrélations expérimentales les plus courantes en convection naturelle sont du type suivant :

$$Nu = C \cdot Ra^n \quad \text{avec ; } Ra = Pr \cdot Gr \quad (4.25)$$

La valeur du coefficient C dépend de la nature du régime et des fluides. Elle se détermine en calculant Ra , selon la valeur trouvée on choisit les valeurs de c et de n convenables qui sont données dans le tableau suivant :

Géométrie et orientation	Dimension caractéristique	C en convection laminaire $n = 1/4$	C en convection turbulente $n = 1/3$
Plaque verticale	Hauteur	0.59 $Ra \leq 10^9$	0.10 $Ra > 10^9$
Plaque horizontale chauffante vers le haut	Largeur	0.54 $10^4 \leq Ra \leq 10^7$	0.15 $10^7 < Ra \leq 10^{11}$
Plaque horizontale chauffante vers le bas	Largeur	0.27 $10^5 \leq Ra \leq 10^{10}$	0.54 $10^{10} < Ra \leq 10^{13}$
Cylindre horizontal	Diamètre extérieure	$C = 1.02$ et $n = 0.148$ $10^{-2} \leq Ra \leq 10^2$	0.135 $2 \times 10^7 < Ra \leq 10^{13}$
		0.54 $5 \times 10^2 \leq Ra \leq 2 \times 10^7$	

Tableau 4.2 : valeurs de c et de n pour différentes cas de figures.

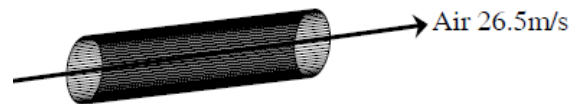
Exemple 03 :

Dans un cylindre de 4 cm de diamètre circule de l'air à la vitesse moyenne de 26,5 m/s. Calculer le coefficient de transfert de chaleur h sachant que :

$$\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3, C_p = 0,24 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C}, \eta = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \lambda = 6,2 \cdot 10^{-6} \text{ kcal/m} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{C}$$

$$Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,4}$$

Solution :



$$Pr = \frac{\mu \cdot C_p}{\lambda} = 0.735$$

$$Re = \frac{u_m \cdot d \cdot \rho}{\mu} = 66947 > Re_c \quad Re_c = 2300, \text{ donc le régime est turbulent.}$$

$$Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,4} = 147.5$$

$$Nu = \frac{h \cdot d}{\lambda} \Rightarrow h = \frac{Nu \cdot \lambda}{d} = 95.68 \text{ W/m}^2\text{C}$$

Exemple 04 :

Calculez les nombres de Grashof appropriés et indiquez si le flux est laminaire ou turbulent pour les cas suivants :

- 1) Un radiateur de chauffage central de 0,6 m de haut avec une température de surface de 75°C dans une pièce à 18°C ($\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$, $Pr = 0.72$ et $\mu = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$)
- 2) Un carter d'huile horizontal, avec une température de surface de 40°C , 0,4 m de longueur et 0,2 m de largeur contenant de l'huile à 75°C ($\rho = 854 \text{ kg/m}^3$, $Pr = 546$, $\beta = 0.7 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ et $\mu = 3.56 \times 10^{-2} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$)

- 3) La surface externe d'un serpentin chauffant, de 30 mm de diamètre, ayant une température de surface de 80°C dans l'eau à 20°C ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\text{Pr} = 6.95$, $\beta = 0.227 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ et $\mu = 1.0 \times 10^{-3} \text{ kg/m.s}$)
- 4) Air à 20°C ($\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$, $\text{Pr} = 0.72$ et $\mu = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kg/m.s}$) adjacent à une ampoule verticale de 60 mm de diamètre avec une température de surface de 90°C

Solution :

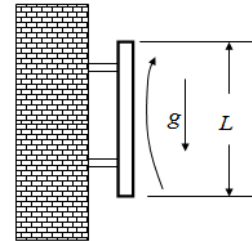
1) Un radiateur de chauffage central :

On a ;
$$Gr = \frac{\rho^2 \cdot g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L^3}{\mu^2}$$

$$\Delta T = 75 - 18 = 57K, \beta = \frac{1}{T} = \frac{1}{20 + 273} = 3.41 \times 10^{-3}$$

$$Gr = \frac{\rho^2 \cdot g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L^3}{\mu^2} = 1.84 \times 10^9$$

$$Ra = Gr \times Pr = 1.84 \times 10^9 \times 0.72 = 1.3 \times 10^9$$



Régime laminaire

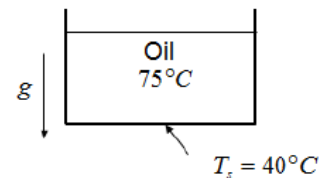
2) Un carter d'huile horizontal :

$$L = \frac{\text{surface}}{\text{périmètre}} = 0.0667m, \Delta T = 75 - 40 = 35K$$

$$Gr = \frac{\rho^2 \cdot g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L^3}{\mu^2} = 4.1 \times 10^4$$

$$Ra = Gr \times Pr = 4.1 \times 10^4 \times 546 = 2.24 \times 10^7$$

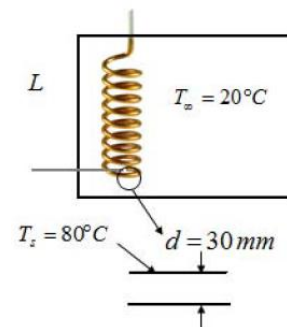
La surface chauffée orientée vers le bas se traduit par un flux laminaire stable pour tous les $Gr \times Pr$.



3) La surface externe d'un serpentin chauffant :

$$\Delta T = 80 - 20 = 60K ; Gr = \frac{\rho^2 \cdot g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L^3}{\mu^2} = 3.6 \times 10^6$$

$$Ra = Gr \times Pr = 3.6 \times 10^6 \times 6.25 = 25 \times 10^6 \quad \text{laminaire}$$



4) une ampoule verticale :

$$L = \frac{\text{surface}}{\text{périmètre}} = \frac{\pi \cdot D^2}{4 \cdot \pi \cdot D} = \frac{D}{4}, \Delta T = 90 - 20 = 70K$$

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{1}{20 + 273} = 3.41 \times 10^{-3}$$



$$Gr = \frac{\rho^2 \cdot g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L^3}{\mu^2} = 3.5 \times 10^4$$

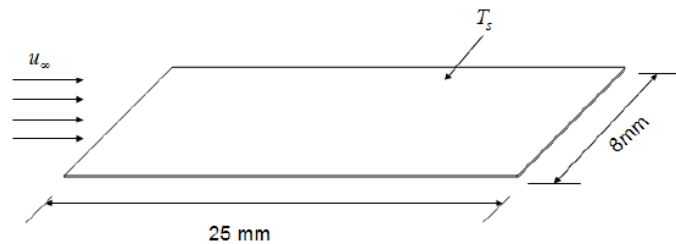
$$Ra = Gr \times Pr = 3.5 \times 10^4 \times 0.72 = 2.5 \times 10^4 \quad \text{laminare}$$

Exemple 05 :

Une plaque mince chauffée électriquement de longueur $L = 25 \text{ mm}$ et de largeur $W = 8 \text{ mm}$ doit être utilisée comme compteur de vitesse du vent. Le vent avec une température T_∞ et une vitesse U_∞ souffle parallèlement au côté le plus long. La plaque est chauffée à l'intérieur par un radiateur électrique dissipant Φ (Watt) des deux côtés et doit être utilisée de l'air avec ; $T_\infty = 20^\circ\text{C}$; $C_p = 1.005 \text{ kJ/kg.K}$, $\nu = 1.522 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $Pr = 6.95$, et $\rho = 1.19 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$.

- 1) Calculer la vitesse du vent lorsque $T_\infty = 32^\circ\text{C}$ et $\Phi = 0,5\text{W}$.

Solution :



Premièrement, on doit estimer si le flux est laminaire ou turbulent :

Supposant un nombre de Reynolds critique (transition) de $Re = 3 \cdot 10^5$, la vitesse requise serait:

$$u_{urb} = \frac{3 \times 10^5}{\rho L} \mu = \frac{3 \times 10^5}{L} \nu = 304 \text{ m/s}$$

Il est très peu probable que la vitesse du vent atteigne cette vitesse critique, on peut donc supposer que le flux est laminaire.

$$Nu_x = 0.331 \times Re_x^{1/2} \times Pr^{1/3}$$

$$Nu_L = 0.662 \times Re_L^{1/2} \times Pr^{1/3} = \frac{q_{av} L}{\lambda (T_s - T_\infty)}$$

$$q_{av} = \frac{0.5 / 2}{0.025 \times 0.008} = 1250 \text{ W/m}^2$$

$$Re_L^{1/2} = \frac{q_{av} L}{\lambda \times (T_s - T_\infty) \times 0.662 \times Pr^{1/3}} = 173.5 \quad \text{donc} \quad Re_L = 3 \times 10^4$$

$$u_\infty = \frac{Re_L \cdot \nu}{L} = 18.3 \text{ m/s}$$

Chapitre 05 :

Echangeurs de chaleur

5.1. Introduction (description, hypothèses et conventions) :

Un échangeur de chaleur est un système qui permet un flux de chaleur d'un fluide chaud vers un fluide froid à travers une barrière (une paroi) sans contact direct entre les deux fluides. Le mécanisme de transmission thermique à l'intérieur de la paroi séparatrice est la conduction, et les phénomènes de convection prédominent sur chacune des deux surfaces de contact avec les fluides. Les exemples incluent un radiateur automobile, un évaporateur de climatisation, etc.

5.2. Caractéristiques géométriques des échangeurs :

Il existe plusieurs types d'échangeurs de chaleur selon le procédé de transfert thermique, l'écoulement des fluides et surtout la conception technologique. Les quatre principales catégories utilisées dans les systèmes énergétiques sont les échangeurs tubulaires, à tube et calandre, à ailettes et les échangeurs à plaques.

La catégorie la plus importante, en raison de ses nombreuses applications industrielles est celle des échangeurs continus où les deux fluides circulent de manière continue de part et d'autre de la surface d'échange. Selon la géométrie de cette surface d'échange, on distingue les **échangeurs tubulaires** et les **échangeurs à plaques**.

5.2.1 Principaux types des échangeurs de chaleurs :

✓ Echangeurs tubulaires :

Les deux fluides circulent dans le même sens ou dans des sens opposés de part et d'autre de la paroi. La mise en œuvre technologique peut prendre la forme de dispositifs tubulaires dits à double-tube (Fig.4.1) : constitués de deux tubes alignés concentriquement avec un fluide circulant dans le tube intérieur et l'autre dans la section annulaire.

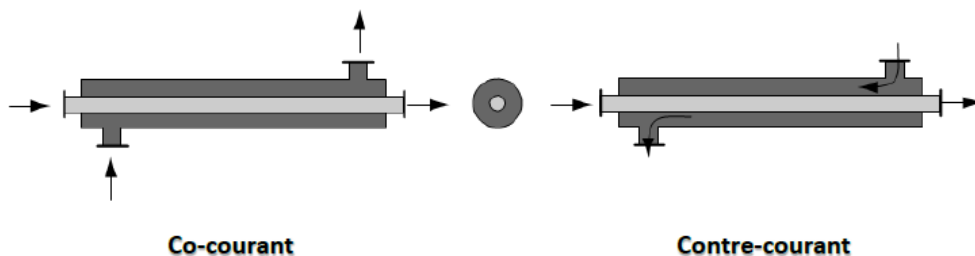


Figure 5.1 : Echangeur Bitube.

- des appareils à *calandre et faisceau* : un fluide passe à travers des tubes parallèles pour former un faisceau dans une calandre cylindrique, tandis que l'autre passe à l'extérieur des tubes, comme le montre la figure 5.2 :

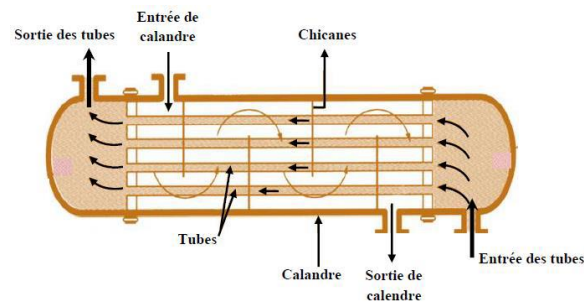


Figure 5.2 : Echangeur de chaleur tubulaire

✓ Echangeurs à plaques

En raison de leur développement favorisé par leurs performances thermiques appréciables, on les trouve aujourd'hui dans divers secteurs de l'industrie. Selon la conception de la surface des plaques on distingue les échangeurs à surface primaire (les plus communs) et les échangeurs à surface secondaire (on ajoute des ailettes plissées ou ondulées entre les plaques). Dans d'autres configurations, les plaques peuvent aussi être brasées ou soudées entre elles. (Fig. 4.3).

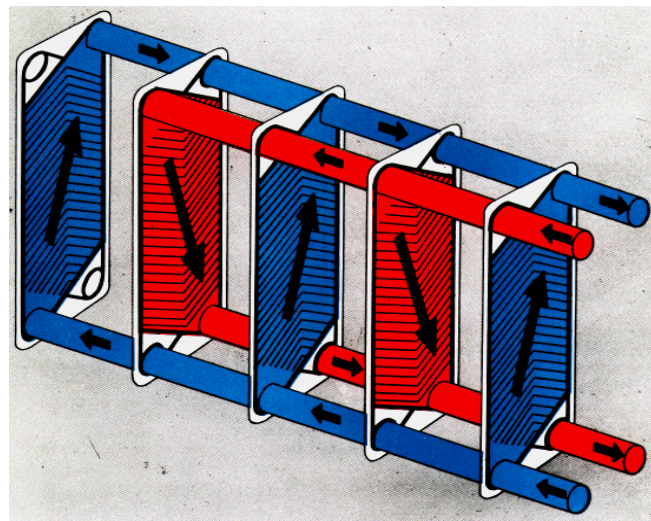


Figure 5.3 : Echangeur de chaleur à plaques.

5.3. Expression du flux échangé dans un échangeur tubulaire simple :

Un simple échangeur tubulaire est composé de deux tubes cylindriques coaxiaux. Un fluide (généralement chaud) circule à l'intérieur du tube, tandis que l'autre circule entre les deux tubes (espace annulaire). Le transfert de chaleur d'un fluide chaud vers un fluide froid s'effectue à travers la paroi qui constitue le tube intérieur :

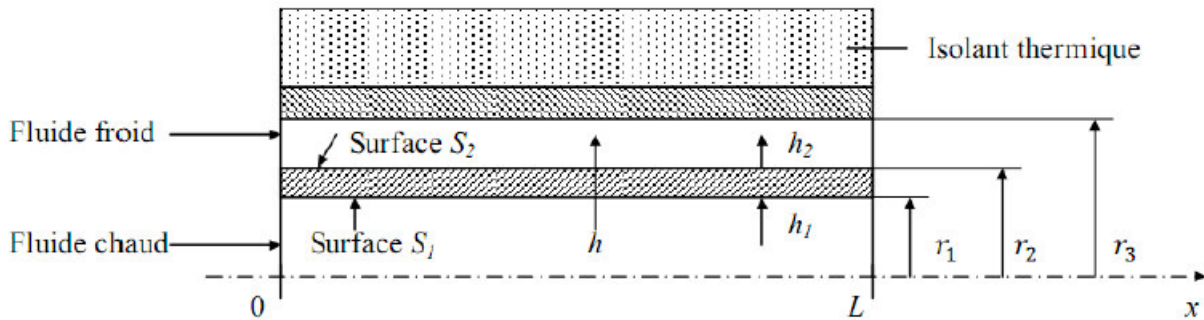


Figure 5.4 : Schéma d'un échangeur tubulaire simple

a) **Hypothèses** :

Dans le calcul simple des échangeurs de chaleur, les plus importantes hypothèses retenues sont :

- Pas de changement de phase au cours du transfert thermique.
- Pas de pertes thermiques : la surface de séparation est la seule surface d'échange.

b) **Conventions** :

Les températures d'entrée et de sortie des deux fluides chaud et froid sont définies conventionnellement comme suit :

- Fluide chaud : T_{ce} : Température d'entrée, T_{cs} : Température de sortie.
- Fluide froid : T_{fe} : Température d'entrée, T_{fs} : Température de sortie.

Deux modes de fonctionnement sont réalisables :

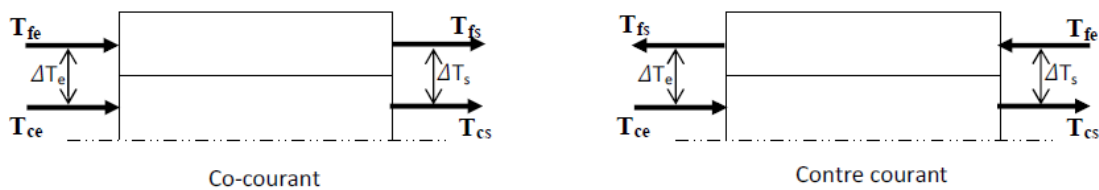


Figure 5.5 : Schématisation des fonctionnements à co-courant et à contre-courant.

5.3.1. Calcul de la puissance totale de l'échangeur :

Le flux de chaleur qui traverse un échangeur peut être calculé en écrivant qu'il est égal au flux de chaleur perdu par le fluide chaud et au flux de chaleur gagné par le fluide froid lors de son passage dans l'échangeur.

$$\Phi = \dot{m}_c \cdot c_{p_c} \cdot (T_{ce} - T_{cs}) = \dot{m}_f \cdot c_{p_f} \cdot (T_{fs} - T_{fe}) \quad (5.1)$$

Avec : $q_{cc} = \dot{m}_c \cdot c_{p_c}$ et $q_{cf} = \dot{m}_f \cdot c_{p_f}$

q_{cc} et q_{cf} représentent les débits calorifiques des deux fluides.

Le flux de chaleur peut donc finalement s'écrire :

$$\Phi = q_{cc} \cdot (T_{ce} - T_{cs}) = q_{cf} \cdot (T_{fs} - T_{fe}) \quad (5.2)$$

L'expression précédente peut alors se mettre sous la forme :

$$\Phi = U \cdot S_e \cdot \frac{\Delta T_s - \Delta T_e}{\ln\left(\frac{\Delta T_s}{\Delta T_e}\right)} \quad (5.3)$$

Avec ;

$$\begin{cases} \Delta T_s = T_{cs} - T_{fs} \\ \Delta T_e = T_{ce} - T_{fe} \end{cases} \text{ pour un fonctionnement co-courant}$$

$$\begin{cases} \Delta T_s = T_{ce} - T_{fs} \\ \Delta T_e = T_{cs} - T_{fe} \end{cases} \text{ pour un fonctionnement contre-courant}$$

S_e : surface d'échange (m^2)

Le coefficient global de transfert U d'un échangeur de chaleur s'écrit donc :

$$U = \left(\frac{r_2}{h_1 r_1} + \frac{r_2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\lambda} + \frac{1}{h_2} + R_{en} \right)^{-1} \quad (5.4)$$

Avec ;

R_{en} : Résistance thermique d'encrassement (due à entartrage, dépôts, corrosion...).

Les valeurs du coefficient global de transfert U de divers types d'échangeurs sont représentés dans le tableau suivant :

Nature des fluides	Coefficient global de transfert U ($Wm^{-2}C^{-1}$)
Liquide-liquide	100-2000
Liquide-gas	30-300
Condenseur	500-5000

Tableau 5.1 : valeurs du coefficient global de transfert U.

On pose :

$$DTLM = \frac{\Delta T_s - \Delta T_e}{\ln\left(\frac{\Delta T_s}{\Delta T_e}\right)} \quad (5.5)$$

$DTLM$: La *Différence de Température Moyenne Logarithmique* représentant la moyenne logarithmique (ΔT) entre l'entrée et la sortie de l'échangeur ($^{\circ}C$).

Remarque :

- La figure ci-dessus montre la variation des températures des fluides le long de l'échangeur :

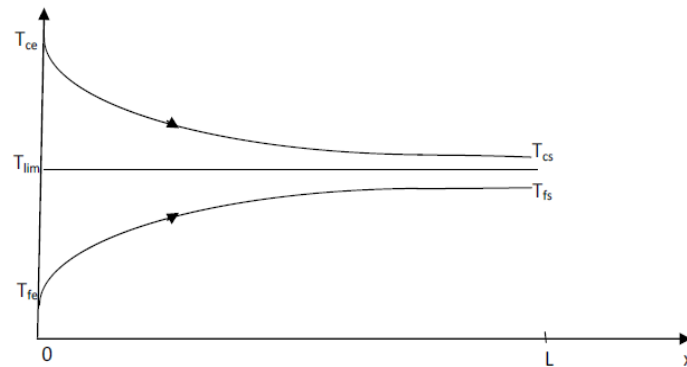


Figure 5.6 : Evolution des températures dans un échangeur tubulaire fonctionnement co-courant.

$$T_{\text{lim}} = \frac{q_{cc} \cdot T_{ce} + q_{cf} \cdot T_{fe}}{q_{cc} + q_{cf}} \quad (5.6)$$

- La distribution des températures dans un échangeur à contre-courant présente l'une des allures suivantes :

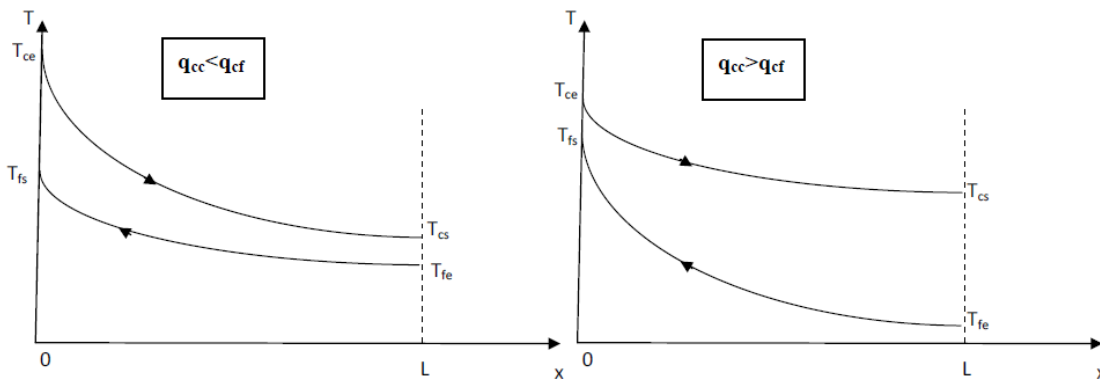


Figure 5.7 : Evolution des températures dans un échangeur tubulaire fonctionnant à contre-courant.

La distribution des températures dans un échangeur à contre-courant présente l'une des allures suivantes :

$q_{cc} < q_{cf}$: Le fluide chaud commande le transfert.

$q_{cc} > q_{cf}$: Le fluide froid commande le transfert.

Remarque :

- ✓ On peut obtenir $T_{fs} > T_{cs}$ dans un échangeur de chaleur fonctionnant à contre-courant.

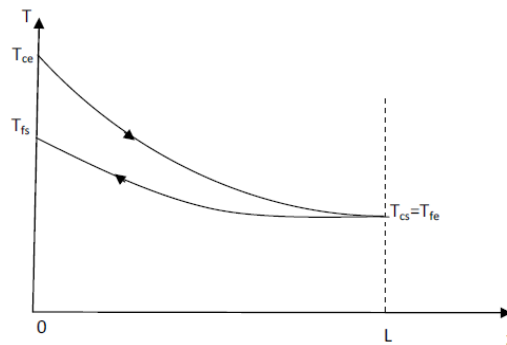
- ✓ Il est par contre impossible d'obtenir $T_{fs} > T_{ce}$ ou $T_{ce} > T_{fs}$.

5.4. Efficacité d'un échangeur :

L'efficacité thermique d'un échangeur, également appelé rendement thermique, est le rapport du flux de chaleur émise à le flux de chaleur maximale émise.

$$\eta = \frac{\Phi}{\Phi_{\max}} \quad (5.7)$$

- ❖ Cas où $q_{cc} < q_{cf}$, le fluide chaud commande le transfert : Si $T_{cs} = T_{fe}$, Ce cas correspond à un échangeur refroidissant parfaitement le fluide chaud.

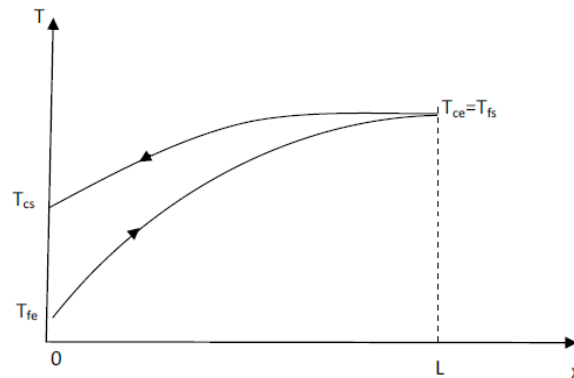


D'où : $\Phi_{\max} = q_{cc} (T_{ce} - T_{fe})$ et $\Phi = q_{cc} (T_{ce} - T_{cs})$

On définit alors une efficacité de refroidissement :

$$\eta_r = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{T_{ce} - T_{fe}} \quad (5.8)$$

- ❖ Cas où $q_{cc} > q_{cf}$, le fluide chaud commande le transfert : Si $T_{ce} = T_{fs}$, Ce cas correspond à un échangeur refroidissant parfaitement le fluide froid.



Le débit de chaleur échangé est:

$$\Phi = q_{cf} (T_{fs} - T_{fe}) \quad (5.9)$$

Le débit maximal de chaleur échangeable est dans ce cas : $\Phi_{\max} = q_{cf} (T_{ce} - T_{fe})$ puisque $T_{ce} = T_{fs}$

$$\eta = \frac{q_{cf} (T_{fs} - T_{fe})}{q_{cf} (T_{ce} - T_{fe})} = \frac{T_{fs} - T_{fe}}{T_{ce} - T_{fe}} = \eta_c \quad (5.10)$$

η_c : efficacité de chauffage

5.5 Méthode du nombre d'unités de transfert (NUT) :

On appelle nombre d'unité de transfert noté NUT le rapport adimensionnel $U \cdot S / q_c$ qui est aussi

égal à $\frac{T_{ce} - T_{fe}}{DTLM}$

Pour le fluide chaud dans le cas d'un échangeur tubulaire simple :

$$NUT_c = \frac{US}{q_{cc}} = \frac{T_{ce} - T_{cs}}{DTLM} \quad (5.11)$$

NUT_c : nombre d'unité de transfert coté chaud.

De même :

$$NUT_f = \frac{US}{q_{cf}} = \frac{T_{fs} - T_{fe}}{DTLM} \quad (5.12)$$

NUT_f : nombre d'unité de transfert coté froid.

Remarque : NUT représente le pouvoir d'échange de l'échangeur.

$$NUT = \frac{US}{(q_c)_{\min}} = \frac{US}{(\dot{m} \cdot cp)_{\min}} \quad (5.13)$$

Si $\dot{m}_c \cdot cp_c \succ \dot{m}_f \cdot cp_f$ alors $(\dot{m} \cdot cp)_{\min} = \dot{m}_f \cdot cp_f$

Si $\dot{m}_c \cdot cp_c \prec \dot{m}_f \cdot cp_f$ alors $(\dot{m} \cdot cp)_{\min} = \dot{m}_c \cdot cp_c$

5.6 Calcule d'un échangeur :

✚ Echangeur à faisceaux complexes :

a. Echangeur 1-2 :

Il s'agit de l'échangeur à faisceau le plus simple : le fluide dans l'enveloppe circule en un seul passage, tandis que le fluide dans le tube circule en deux (ou 2H) passages.

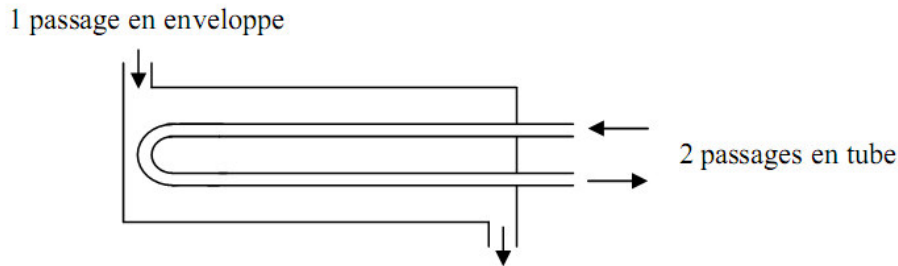


Figure 5.8 : Echangeur à faisceau de type 1-2

Comme pour l'échangeur tubulaire simple, il existe une relation reliant le nombre d'unités de transfert maximal NUT_{\max} et l'efficacité η de l'échangeur :

$$NUT_{\max} = -(1+z^2)^{-1/2} \ln \left[\frac{\frac{2}{\eta} - 1 - z - (1+z^2)^{1/2}}{\frac{2}{\eta} - 1 - z + (1+z^2)^{1/2}} \right] \quad (5.15)$$

$$\eta_{1-2} = 2 \left\{ 1 + z + (1+z^2)^{1/2} \frac{1 + \exp \left[-NUT_{\max} (1+z^2)^{1/2} \right]}{1 - \exp \left[-NUT_{\max} (1+z^2)^{1/2} \right]} \right\} \quad (5.16)$$

b. Echangeur à courants croisés :

Les deux fluides s'écoulent perpendiculairement l'un à l'autre. Si un fluide s'écoule dans une veine divisée en plusieurs canaux parallèles de faible section, il est dit non brassé ; s'il s'écoule dans une veine divisée en plusieurs canaux parallèles de section élevée, il est dit brassé. Le brassage a pour effet d'homogénéiser les températures dans la section droite de la veine.

L'application la plus courante des échangeurs à courant croisé est l'échange d'un gaz dans la calandre avec un liquide dans les tubes.

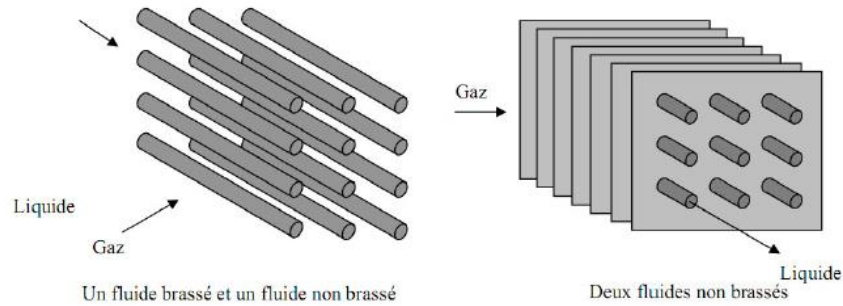


Figure 5.9 : Echangeur à courants croisés.

Deux fluides non brassés :

$$\eta = 1 - \exp \left[\frac{\exp(-z \cdot NUT_{\max}^{0.78}) - 1}{z \cdot NUT_{\max}^{-0.22}} \right] \quad (5.17)$$

Deux fluides brassés :

$$\eta = \left[\frac{1}{1 - \exp(-NUT_{\max})} + \frac{z}{1 - \exp(-NUT_{\max})} - \frac{1}{NUT_{\max}} \right]^{-1} \quad (5.18)$$

Un fluide non brassé :

Fluide commandant le transfert ($q_{c\min}$) non brassé :

$$NUT_{\max} = -\ln \left[1 + \frac{1}{z} \ln(1 - z\eta) \right] \quad (5.19)$$

$$\eta = \frac{1}{z} \left\{ 1 - \exp \left[-z \left(1 - \exp(-NUT_{\max}) \right) \right] \right\} \quad (5.20)$$

Fluide commandant le transfert ($q_{c\min}$) brassé :

$$NUT_{\max} = -\frac{1}{z} \ln \left[1 + z \ln(1 - z\eta) \right] \quad (5.21)$$

$$\eta = 1 - \exp \left[-\frac{1}{z} \left(1 - \exp(-z \cdot NUT_{\max}) \right) \right] \quad (5.22)$$

Exemple 01:

Des échangeurs de chaleur à contres courants et à courants parallèles soumis aux conditions suivantes :

Cas 01 :

$$T_{c,e} = 100^\circ C, \quad T_{c,s} = 45^\circ C \\ T_{f,e} = 15^\circ C, \quad T_{f,s} = 30^\circ C$$

Cas 02 :

$$T_{c,e} = 90^\circ C, \quad T_{c,s} = 35^\circ C \\ T_{f,e} = 20^\circ C, \quad T_{f,s} = 30^\circ C$$

1. Calculez leurs ΔTLM pour chaque cas.
2. Quelle est votre remarque.

Solution :Cas 01 :

- Contre-courant :

$$\Delta TLM = \frac{(T_{c,e} - T_{f,s}) - (T_{c,s} - T_{f,e})}{\ln\left(\frac{T_{c,e} - T_{f,s}}{T_{c,s} - T_{f,e}}\right)} = \frac{(100 - 30) - (45 - 15)}{\ln\left(\frac{100 - 30}{45 - 15}\right)} = 47.20^\circ C$$

Co-courant :

$$\Delta TLM = \frac{(T_{c,s} - T_{f,s}) - (T_{c,e} - T_{f,e})}{\ln\left(\frac{T_{c,s} - T_{f,s}}{T_{c,e} - T_{f,e}}\right)} = \frac{(45 - 30) - (100 - 15)}{\ln\left(\frac{45 - 30}{100 - 15}\right)} = 40.35^\circ C$$

Cas 02 :

- Contre-courant :

$$\Delta TLM = \frac{(T_{c,e} - T_{f,s}) - (T_{c,s} - T_{f,e})}{\ln\left(\frac{T_{c,e} - T_{f,s}}{T_{c,s} - T_{f,e}}\right)} = \frac{(90 - 30) - (35 - 20)}{\ln\left(\frac{90 - 30}{35 - 20}\right)} = 32.46^\circ C$$

- Co-courant :

$$\Delta TLM = \frac{(T_{c,s} - T_{f,s}) - (T_{c,e} - T_{f,e})}{\ln\left(\frac{T_{c,s} - T_{f,s}}{T_{c,e} - T_{f,e}}\right)} = \frac{(35 - 30) - (90 - 20)}{\ln\left(\frac{35 - 30}{90 - 20}\right)} = 24.63^\circ C$$

Remarque :

En conséquence, il est préférable de sélectionner un fonctionnement à contre-courant. En général, un échangeur de chaleur de configuration quelconque aurait des performances supérieures à celle d'un simple échangeur tubulaire à co-courant et inférieures à celles d'un simple échangeur tubulaire à contre-courant.

Exemple 02 :

On suppose un échangeur à tubes concentriques de type contre-courant est utilisé pour surmonter la température d'un débit d'eau à 1.2 kg/s de 20 °C à 80 °C. Cette eau provenant d'une source géothermale à 160 °C à un débit massique de 2 kg/s. Le tube intérieur constitue d'une paroi très mince de diamètre de 1.5 cm.

Calculer la longueur de l'échangeur de chaleur, si le coefficient U est de 640 W/m²°C.

Les chaleurs spécifique de l'eau et de la source géothermale sont respectivement C_{pe}=4.18 KJ/Kg°C et C_{pg}= 4.31 KJ/Kg °C

Solution

La puissance thermique est défini par :

$$\Phi = \left[\dot{m} c_p (T_s - T_e) \right]_{eau} = 12 \times 4.18 \times (80 - 20) = 301 \text{ kW}$$

$$\Phi = \left[\dot{m} c_p (T_e - T_s) \right]_{géothermique} \longrightarrow T_s = T_e - \frac{\Phi}{\dot{m} c_p} = 125^\circ \text{C}$$

$$\Delta T_1 = T_{c,e} - T_{f,s} = 160 - 80 = 80^\circ \text{C}$$

$$\Delta T_2 = T_{c,s} - T_{f,e} = 125 - 20 = 105^\circ \text{C}$$

Et

$$\Delta TLM = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln(\Delta T_1 / \Delta T_2)} = 92^\circ \text{C}$$

Ainsi que la même puissance thermique est calculée par :

$$\Phi = U \times S_e \times \Delta TLM \longrightarrow S_e = \frac{\Phi}{U \times \Delta TLM} = 5.11 \text{ m}^2$$

$$\text{La surface d'échange soit : } S_e = \pi D L \longrightarrow L = \frac{S_e}{\pi D} = 108 \text{ m}$$

Chapitre 06 :

Transfert de chaleur par rayonnement

6.1. Introduction

Le rayonnement thermique est l'énergie émise par la matière qui est à une température finie. Il présente une différence fondamentale en ce qui concerne la conduction et la convection : les substances qui échangent de la chaleur n'ont pas besoin d'être en contact, mais peuvent être séparées par un vide. Le rayonnement est un terme appliqué de manière générique à toutes sortes de phénomènes liés aux ondes électromagnétiques.

Nous concentrerons notre attention sur le rayonnement des surfaces solides, bien que ce rayonnement puisse également provenir de liquides ou de gaz. Dans le rayonnement thermique, la chaleur est transmise par des ondes électromagnétiques, comme la lumière, mais de longueurs d'onde différentes. L'énergie radiante dépend des caractéristiques de la surface et de la température du corps émetteur. En influençant un récepteur, une partie de l'énergie passe à cet autre corps, en fonction de ses caractéristiques et de son pouvoir d'absorption. Cette énergie se traduit par une augmentation de la température du deuxième corps. Le transfert de chaleur par rayonnement implique seulement le transport d'énergie, il n'a pas besoin d'un support matériel, se déroulant même dans le vide.

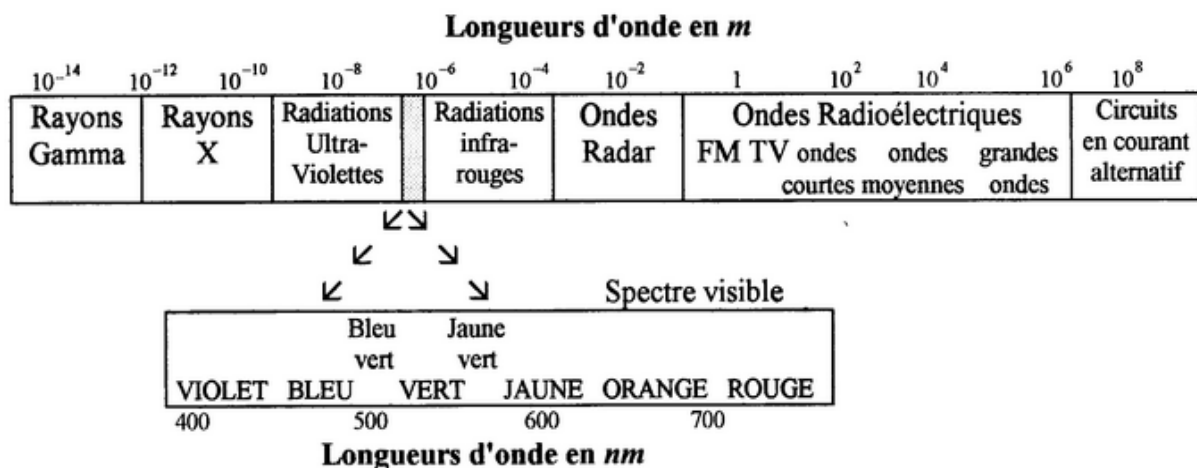


Figure 6.1 : Le spectre électromagnétique

6.2 Principe de transfert de chaleur par rayonnement :

C'est un mode d'échange de chaleur (d'énergie) sous forme d'ondes électromagnétiques selon la loi de Planck ($E = h\nu$, tels que : ν est la fréquence d'onde associée et $h = 6,62.10^{-34}$ J.s est la constante de Planck). Donc, il ne nécessite aucun support matériel, il est analogue à la propagation de la lumière.

Il se propage de manière rectiligne à la vitesse de la lumière ($c = 3 \times 10^8$ m/s). Le rayonnement thermique émis par les corps, se situe entre des longueurs d'ondes de 0,1 μm à 100 μm . Pratiquement, les trois modes de transfert de chaleur coexisteront. Mais, ce mode de transfert devient prépondérant à des températures supérieures aux températures ordinaires.

Généralement, tous les corps (solides, liquides et gazeux) émettent un rayonnement de nature électromagnétique. On peut citer que, le vide et les gaz simples comme (O_2 , H_2 et N_2) représentent des milieux parfaitement transparents mais, les gaz composés comme (CO_2 , H_2O , CO et CH_4) et certaines liquides et solides comme (les verres et les polymères) sont partiellement transparents. La majorité des solides et des liquides sont des corps opaques puisque ils stoppent la propagation du rayonnement juste au niveau de leurs surfaces.

6.3 Définitions préliminaires :

Les grandeurs physiques seront désignées selon la composition spectrale ou la distribution spatiale du rayonnement :

- ✓ **Grandeur totale** : elle est relative à l'ensemble du spectre;
- ✓ **Grandeur monochromatique** : elle concerne seulement un intervalle spectral étroit ($d\lambda$), autour d'une longueur d'onde (λ);
- ✓ **Grandeur hémisphérique** : elle est relative à l'ensemble des directions de l'espace;
- ✓ **Grandeur directionnelle** : elle caractérise une direction donnée de la propagation.

Pendant l'étude de l'équilibre thermique d'un système, tout corps doit être considéré comme :

- ✓ **Emetteur** : s'il envoie un rayonnement lié à sa température (sauf s'il est parfaitement transparent) ;
- ✓ **Récepteur** : s'il reçoit des rayonnements émis ou réfléchis et diffusés par les corps qui l'entourent.
- ✓ **Corps opaque** : c'est un corps qui ne transmet aucun rayonnement à travers lui-même, il stoppe la propagation de tout rayonnement dès sa surface, il se réchauffe par l'absorption du rayonnement;
- ✓ **Corps transparent**: c'est un corps qui transmet tout le rayonnement incident;

- ✓ **Corps noir**: est celui qui absorbe toutes les radiations qu'il reçoit , il est caractérisé par un pouvoir absorbant ($\alpha_{\lambda T} = 1$). Tous les corps noirs rayonnent de la même manière à la même température, le corps noir rayonne plus qu'un corps non noir.
- ✓ **Corps gris**: est celui dont le pouvoir absorbant ($\alpha_{\lambda T}$) est indépendant de la longueur d'onde (λ), il est caractérisé par ($\alpha_{\lambda T} = \alpha_T$). Un corps gris à haute température pour ($\lambda < 3\mu\text{m}$, soleil), un corps gris à basse température pour ($\lambda > 3\mu\text{m}$, atmosphère).
- ✓ **Angle solide**: l'angle solide élémentaire ($d\Omega$) sous lequel est vu, d'un point (O), le contour d'une petite surface (ds) est donné par:

$$d\Omega = \frac{dS \cos \alpha}{r^2} \quad [\text{sterad}]$$

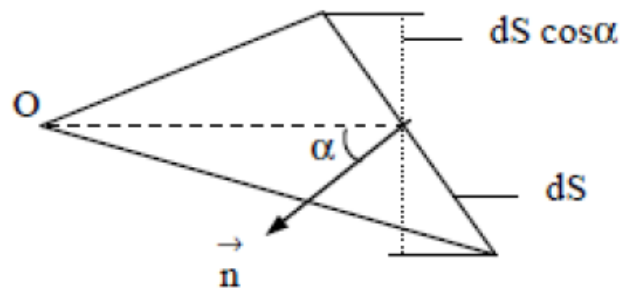


Figure 6.2 : Angle solide

- ✓ **Emittance énergétique monochromatique** : l'émittance monochromatique d'une source à la température (T) est donnée par :

$$M_{\lambda T} = d\varphi_{\lambda}^{\lambda+d\lambda} / dS.d\lambda \quad [W / m^2] \quad (6.1)$$

Tels que; φ : est le flux d'énergie émis entre les deux longueurs d'ondes (λ) et ($\lambda+d\lambda$).

- ✓ **Emittance énergétique totale** : définit comme la densité de flux émise par la surface élémentaire (dS) sur tout le spectre des longueurs d'ondes :

$$M_T = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_{\lambda T} d\lambda = d\varphi / dS \quad [W / m^2] \quad (6.2)$$

- ✓ **Intensité énergétique dans une direction** : le flux par unité d'angle solide émis par une surface (ds) sous un angle solide ($d\Omega$) entourant la direction (Ox) :

$$I_x = d^2\varphi_x / d\Omega \quad (6.3)$$

- ✓ **Luminance énergétique dans une direction** : l'intensité énergétique dans la direction (Ox) par unité de surface émettrice apparente (la projection de la surface (S) sur le plan perpendiculaire à Ox) :

$$L_x = I_x / dS_x = I_x / dS \cos \alpha = d^2 \varphi_x / d\Omega dS \cos \alpha \quad (6.4)$$

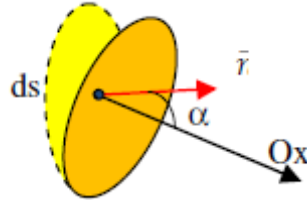


Figure 6.3: Schéma montrant la luminance d'un élément de surface ds.

- ✓ **Eclairement** (relatif à un récepteur) :

C'est le flux reçu par unité de surface réceptrice, en provenance de l'ensemble des directions (Emittance).

6.4 Processus de réception d'un rayonnement par un corps :

Un point d'équipement chauffé émet un rayonnement électromagnétique dans toutes les directions qui sont du même côté du plan que le point d'équipement. Lorsque ce rayonnement frappe un corps, une partie de l'énergie est réfléchiée, une autre est transmise à travers le corps et le reste est absorbé quantitativement sous forme de chaleur.

Lorsque un rayonnement incident d'énergie (φ_λ) frappe un corps (C) à la température (T) (voir figure ci-contre), on remarque que:

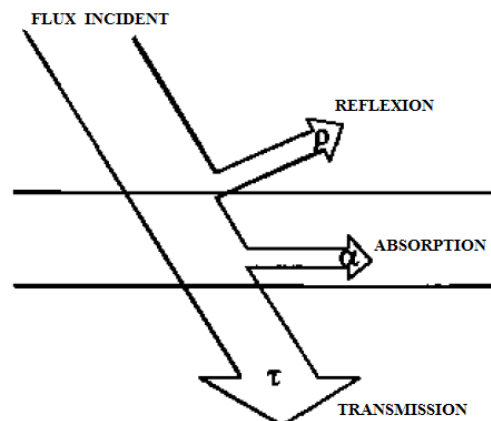


Figure 6.4: Processus de réception d'un rayonnement par un corps.

- Une partie de l'énergie ($\varphi_\lambda \cdot \rho_{\lambda T}$) est réfléchiée par la surface (S) du corps;

- Une partie de l'énergie ($\varphi_\lambda \cdot \alpha_{\lambda T}$) est absorbée par le corps en lui échauffant;
- Le reste de l'énergie ($\varphi_\lambda \cdot \tau_{\lambda T}$) est transmise en continuant le chemin.

Tel que;

$$\varphi_\lambda = \varphi_\lambda \cdot \rho_{\lambda T} + \varphi_\lambda \cdot \alpha_{\lambda T} + \varphi_\lambda \cdot \tau_{\lambda T} \quad (6.5)$$

D'où

$$\rho_{\lambda T} + \alpha_{\lambda T} + \tau_{\lambda T} = 1 \quad (6.6)$$

qui représentent respectivement ; le pouvoir monochromatique réfléchissant ($\rho_{\lambda T}$), le pouvoir monochromatique absorbant ($\alpha_{\lambda T}$) et le pouvoir monochromatique de transmittance ($\tau_{\lambda T}$). Ces pouvoirs sont fonctions de la nature du corps, son épaisseur, sa température (T), de la longueur d'onde (λ), du rayonnement incident et de l'angle d'incidence.

6.5 Lois du rayonnement :

6.5.1 Loi de Lambert :

L'intensité énergétique dans une direction (δ), est donnée par :

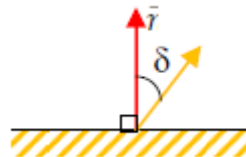


Figure 6.5 : Schéma montrant l'intensité énergétique dans une direction donnée

Lorsqu'un corps suit la loi de Lambert, l'émission est proportionnelle à la luminance :

$$M = \pi \cdot L \quad ; \quad [W / m^2] \quad (6.7)$$

6.5.2 Loi Kirchoff

- ✓ Chaque corps a une émittance monochromatique qui est égale au produit de sa capacité d'absorption monochromatique ($\alpha_{\lambda T}$) divisé par l'émission monochromatique d'un corps noir à la même température :

$$M_{\lambda T} = \alpha_{\lambda T} \cdot M_{O\lambda T} \quad ; \quad [W / m^3] \quad (6.8)$$

Tel que; $M_{O\lambda T}$: est l'Emittance monochromatique du corps noir.

- ✓ Pour un corps gris à la température (T), son émittance totale (M_T) est le produit de son pouvoir absorbant (α_T) et l'Emittance totale (M_{OT}) du corps noir à la même température.

6.5.3 Loi de Planck

Pour un corps noir, l'Emittance monochromatique ne dépend que de la longueur d'onde (λ) et de la température (T) :

$$E_\lambda = \frac{d\varphi_\lambda}{dS} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad ; \quad [W / m^2 \cdot \mu m^{-1}] \quad (6.9)$$

Tels que ;

T : la température en °K

λ : la longueur d'onde en μm

$C_1 = 2\pi hc^2 = 3,74 \times 10^8 W \cdot \mu^4 \cdot m^{-2}$: constante de Planck

$C_2 = hc/k = 14400 \mu K$; k : constante de Stefan-Boltzmann et c la vitesse de la lumière ($c = 3 \times 10^8 m/s$).

Remarques

1. Dans le domaine visible (petites longueurs d'ondes)

$$e^{\frac{C_2}{\lambda T}} \gg 1 \quad ; \quad \text{d'où } E_\lambda = M_{\lambda,T}^0 = C_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{C_2}{\lambda T}}$$

2. Dans le lointain domaine infrarouge (grandes longueurs d'ondes), le développement de

$(e^{\frac{C_2}{\lambda T}})$, permet d'exprimer ($M_{\lambda,T}^0$) par :

$$E_\lambda = M_{\lambda,T}^0 = C_1 T / C_2 \lambda^4$$

La loi de Planck permet de tracer les courbes isothermes représentant les variations de E_λ en fonction de la longueur d'onde pour diverses températures :

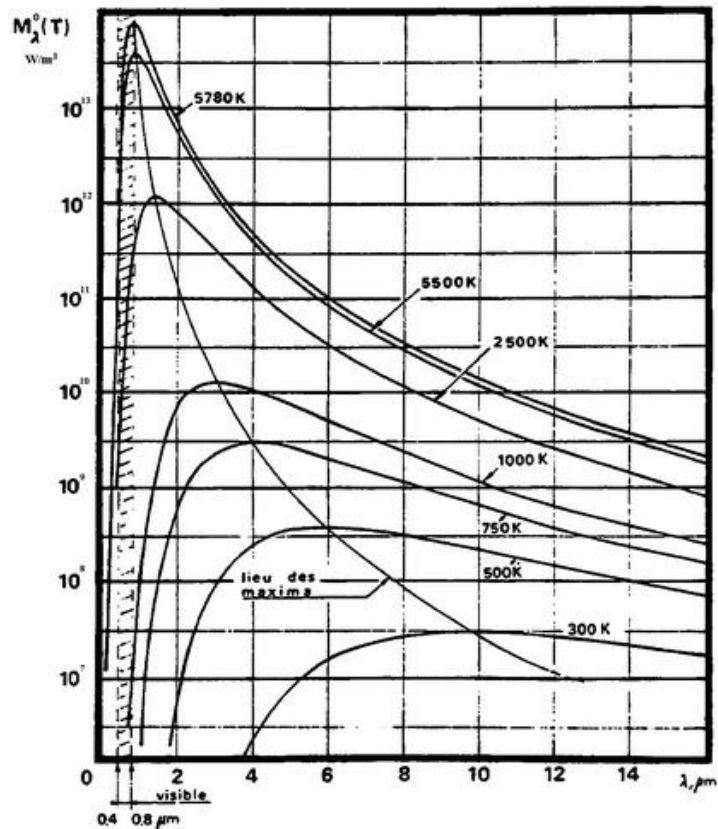


Figure 6.6 : Emission monochromatique du corps noir

6.5.4 Lois de Wien

1. Première loi de Wien :

La première loi de Wien permet d'exprimer ou d'évaluer les longueurs d'ondes correspondantes à l'émission monochromatique maximale (pour laquelle le rayonnement est maximal) en fonction de la température. Pour sa dérivation, il suffit d'annuler la dérivée de l'émission :

$$\frac{dM_{\lambda,T}^0}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \lambda_m = \frac{2898}{T}; \quad [\mu\text{m}] \quad (6.10)$$

Remarque

- ✓ A la température ambiante ($T = 300 \text{ K}$, $\lambda_m = 9,6 \mu\text{m}$), un corps émet le rayonnement infrarouge de grandes longueurs d'ondes qui nous entoure mais non visible à notre œil $[(0,36 \div 0,75) \mu\text{m}]$;
- ✓ A la température du soleil ($T = 5790 \text{ K}$, $\lambda_m = 0,5 \mu\text{m}$, rayonnement maximal), c'est le jaune visible pour laquelle notre œil a une efficacité lumineuse maximale

2. Deuxième loi de Wien :

Cette loi exprime la valeur de l'émittance monochromatique maximale, il suffit qu'on remplace

(λ_m) par sa valeur dans la loi de Planck pour obtenir :

$$M_{\lambda_m, T}^0 = B.T^5 \quad (6.11)$$

Avec ;

$$B_1 = 1.287 \times 10^{-5} W \cdot m^{-3} \cdot K^{-5} \text{ et } T \text{ en } ^\circ K$$

6.5.6 Loi de Stefan-Boltzmann

Elle donne l'Emittance totale du corps noir, avec la sommation de toutes les émittances monochromatiques pour toutes les longueurs d'ondes ou l'intégration de :

$$E = \frac{d\varphi}{dS} = \int_0^{\infty} E_{\lambda} d\lambda = M^0 = \int_0^{\infty} M_{\lambda, T}^0 d\lambda = \sigma.T^4 \quad ; \quad [W / m^2] \quad (6.12)$$

Tel que ;

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} W / m^2 \cdot K^4 \quad : \text{ constante de Stefan-Boltzmann}$$

6.6 Rayonnement des corps réels

Les propriétés émissives des corps réels sont définies par rapport aux propriétés émissives des corps noirs dans la même plage de températures et de longueurs d'onde, et elles sont distinguées à l'aide de coefficients appelés facteurs d'émissivité. Ces coefficients monochromatiques ou totaux sont définis comme suit :

$$\varepsilon_{\lambda T} = \frac{M_{\lambda T}}{M_{0\lambda T}} \text{ et } \varepsilon_T = \frac{M_T}{M_{0T}}$$

D'après la loi de Kirchhoff, on montre que :

$$\alpha_{\lambda T} = \varepsilon_{\lambda T} \quad (6.13)$$

6.7 Rayonnement des corps gris

Les corps gris sont caractérisés par $\alpha_{\lambda T} = \alpha_T$ donc $\varepsilon_{\lambda T} = \varepsilon_T$ or $M_T = \varepsilon_T \times M_{0T}$, nous en déduisons l'émittance du corps gris à la température T :

$$M_T = \varepsilon_T \times \sigma \times T^4 \quad (6.14)$$

Exemple 01:

Dans un tube cylindrique en cuivre de 75 cm de longueur, de 1,5 cm de diamètre et de (1/8) mm d'épaisseur ($R_e - R_i = e$; $R_e + R_i \approx D$) circule un courant électrique de 140 A. La résistivité du cuivre ($\rho = 1,7 \mu\Omega\text{cm}$).

1. Quelle est la puissance dissipée par effet Joule?.
2. Cette énergie est rayonnée par la surface extérieure du tube à la température de 683 °K.

Calculer le facteur d'émission total hémisphérique du cuivre.

(La constante de **Stefan-Boltzmann**: $\sigma = 5,67.10^{-8} \text{ W/m}^2.\text{K}^4$)

Solution

1. La puissance dissipée par effet Joule:

$$P = R.I^2 ;$$

$$R = \rho \cdot \frac{L}{s} ;$$

$$s = \pi.R_e^2 - \pi.R_i^2 = \pi(R_e - R_i)(R_e + R_i) ;$$

$$R_e - R_i = e ; R_e + R_i \approx D$$

$$\Rightarrow s = \pi.D.e$$

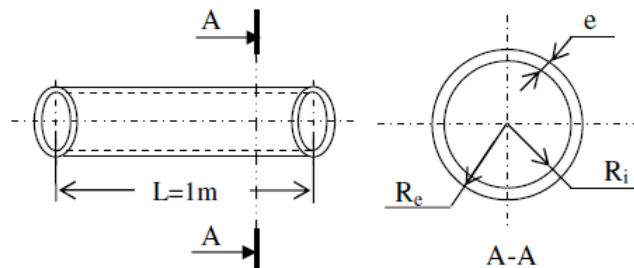
$$R = \rho \frac{L}{\pi.D.e} = 1,7.10^{-8} \Omega\text{m} \frac{0,75\text{m}}{\pi.1,5.10^{-2}.1,25.10^{-4}\text{m}^2} = 2,16.10^{-3} \Omega$$

$$P = 2,16.10^{-3} . (140)^2 = 42,336\text{W}$$

2. Le facteur d'émission total hémisphérique du cuivre:

$$P = \Phi = \varepsilon.\sigma.S.T^4 \Rightarrow \varepsilon = \frac{P}{\sigma.S.T^4} ; S = \pi.D.L$$

$$\varepsilon = \frac{P}{\sigma.\pi.D.L.T^4} = \frac{42,336}{5,67.10^{-8}.\pi.1,5.10^{-2}.0,75.683^4} \approx 0,1$$



Exemple 02 :

Pour chauffer une pièce, on utilise un radiateur cylindrique de diamètre $D=2\text{cm}$ et de longueur $L= 0,5\text{cm}$. Ce radiateur rayonne comme un corps noir et émet une puissance de 1kw. On néglige les échanges par convection et conduction.

- 1- Calculer la température du radiateur.
- 2- Déterminer la longueur d'onde par laquelle la densité spectrale d'énergie émise par le radiateur est maximale.
- 3- Quelle devrait être la température du radiateur pour que cette longueur d'onde soit de $2\mu\text{m}$? Quelle serait alors la puissance dégagée? On donne la constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma = 5,67.10^{-8} \text{ W.m}^{-2} . \text{K}^{-4}$

Solution :

1. La température du radiateur : D'après la loi de Stefan-Boltzmann :

$$M_{0T} = \sigma \cdot T^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{M_{0T}}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{\phi}{S\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{\phi}{\pi \cdot D \cdot (L + \frac{D}{2}) \sigma}} \quad T = 861.32K = 588.17 \text{ } ^\circ\text{C}$$

2. D'après la loi de Wien : $\lambda_M = \frac{2898.10^{-6}}{T} = 3.36 \mu\text{m}$

3. $\lambda_{M'} = \frac{2898.10^{-6}}{T'} = 2 \mu\text{m} \Rightarrow T' = \frac{2898.10^{-6}}{\lambda_{M'}} = 1449 \text{ K}$

4. La puissance dégagée dans ce cas : $\phi = M_{0T} \cdot S = \sigma \cdot S \cdot T^4 = 8 \text{ KW}$

Exemple 03 :

La terre est éclairée par le soleil. Elle reçoit ainsi un flux d'énergie thermique localisée principalement dans le spectre visible, et qui varie en chaque point de la terre et de l'heure solaire considérée.

On conviendra de prendre en compte ces variations spatiales et temporelles en admettant qu'en moyenne, la terre reçoit du soleil un flux surfacique constant et égal à $\phi_0 = 310 \text{ W/m}^2$.

1- Dans un premier temps, on commence par négliger complètement l'existence d'une atmosphère autour de la terre:

➤ Calculer la température moyenne T_t de la surface terrestre. On admettra que la terre suit exactement la loi du corps noir.

2- On prend maintenant en compte l'existence d'une atmosphère gazeuse entourant la terre. On admet que cette atmosphère présente en moyenne pour le rayonnement solaire qu'elle reçoit, un coefficient d'absorption $a=0,19$ et un coefficient de transmission $t=0,51$. En admettant encore que les deux systèmes suivent la loi du corps noir:

➤ Calculer la température moyenne d'équilibre T_a de l'atmosphère terrestre et T_t de la surface terrestre. La constante de Stefan-Boltzmann: $\sigma=5,67.10^{-8} \text{ W. m}^{-2}. \text{ K}^{-4}$

Solution :

$$M_{0T} = \sigma \cdot T^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{M_{0T}}{\sigma}} = 271.92K$$

A l'équilibre :

$$\text{Au niveau de la terre : } t \cdot \phi_0 + \sigma \cdot T_a^4 = \sigma \cdot T_t^4$$

$$\text{Au niveau de l'atmosphère : } a \cdot \phi_0 + \sigma \cdot T_t^4 = 2 \cdot \sigma \cdot T_a^4$$

A partir de ce système d'équations :

$$T_a = \left(\sqrt[4]{\frac{(\alpha + \tau)\phi_0}{\sigma}} \right) = 248.7K$$

$$T_t = \left(\sqrt[4]{\frac{\tau\phi_0 + \sigma T_a^4}{\sigma}} \right) = 285.17K$$

Exemple 04 :

Après le coucher de soleil, l'énergie rayonnée peut être ressentie par une personne qui se tient à proximité d'un mur de briques. Un tel mur peut fréquemment avoir une température de 45°C, et son pouvoir d'émission est de l'ordre de 0,9.

1. Quel est le flux thermique rayonné par unité de surface par un tel mur ?
2. Quelle est la longueur d'onde correspondant au maximum d'énergie rayonnée ?
3. De quel type de rayonnement s'agit-il ?

Solution :

Après le coucher de soleil, l'énergie rayonnée peut être ressentie par une personne qui se tient à proximité d'un mur de briques. Un tel mur peut fréquemment avoir une température de 45°C, et son pouvoir d'émission est de l'ordre de 0,9.

1. Calcul du flux thermique rayonné par unité de surface :

La loi de Stefan-Boltzmann : $M_T = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4$

$$M_T = \frac{\varphi}{S} = 0,9 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (273,15 + 45)^4 = 522,8 \text{ W/m}^2$$

2. La longueur d'onde correspondant au maximum d'énergie rayonnée :

$$\text{Loi de Wien : } \lambda_M = \frac{2898 \cdot 10^{-6}}{T} = \frac{2898 \cdot 10^{-6}}{318,15} = 9,12 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 9,12 \text{ } \mu\text{m}$$

3. Rayonnement Infrarouge.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Giovannini et B. Bédât :

Transfert de chaleur, Cépaduès, 2012.

2. A.M. Bianchi, Y. Fautrelle, J. Etay :

Transferts thermiques, PPUR presses polytechniques, 2004.

3. F.P. INCROPERA et D.P. DEWITT :

Fundamentals of Heat and Mass Transfer Ed. John Wiley and Sons 4ème Edition

4. T.H. KUEHN, J.W. RAMSEY et J.L. THRELKELD :

Thermal Environmental Engineering Ed. Prentice Hall 3ème Edition

5. B. CHERON :

Transferts thermiques. Résumé de cours . Problèmes corrigés. Editions Ellipses

6. H. CORTES et J. BLOT :

Transferts thermiques. Application à l'habitat. Editions Ellipses

7. F. KREITH :

Transmission de la chaleur et thermodynamique Masson et Cie Editeurs 1967

8. B. EYGLUNENT :

Manuel de thermique. Théorie et pratique. HERMES 2ème Edition

9. J. TAINE et J.P. PETIT :

Transferts thermiques DUNOD 2ème Edition

10. J.F. SACADURA :

Initiation aux transferts thermiques Technique et documentation 1978

11. J. CRABOL :

Transferts de Chaleur Tome 1, 2 et 3 Collection Technologies MASSON

12. D. PITTS et S. LEIGHTON:

Heat transfer, Schaum's outline series, Second edition, McGraw-Hill, 1998