

**Ecole Supérieure en Génie Électrique et Énergétique  
d'Oran**

**Département des Classes Préparatoires**

**Mécanique Rationnelle : Cours et Applications**

**Par :**

**SENOUCI. Mohammed**

**NOURINE. Leïla**

**KHORSI. Azzeddine**

**Année 2019-2020**

## Table des matières

<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre I : Éléments de calcul vectoriel</b> .....	2
I.1. Vecteurs.....	2
I.1.1. Classification des vecteurs.....	2
I.1.2. Composantes d'un vecteur.....	2
I.2. Opérations sur les vecteurs libres.....	3
I.2.1. Addition des vecteurs.....	3
I.2.2. Soustraction de deux vecteurs.....	5
I.2.3. Décomposition d'un vecteur.....	5
I.3. Champ équiprojectif de vecteurs.....	5
I.4. Produit scalaire de deux vecteurs.....	5
I.5. Produit vectoriel de deux vecteurs.....	6
I.6. Produit mixte.....	6
I.7. Double produit vectoriel.....	7
I.8. Torseur.....	7
I.8.1. Propriétés des torseurs.....	9
I.8.2. Espace vectoriel des torseurs.....	10
I.8.3. Torseurs particuliers.....	10
<b>Chapitre II : Statique des solides</b> .....	12
II.1. Notions de forces.....	12
II.1.1. Définition.....	12
II.1.2. Classifications des forces.....	12
II.1.3. Composantes d'une force.....	12
II.1.4. Cosinus directeurs.....	13
II.1.5. Force définie par son module et deux points sur sa ligne d'action.....	14
II.1.6. Composition de deux forces (Théorème des sinus).....	14
II.2. Equilibre du solide.....	15
II.3. Liaisons et leurs réactions.....	16
II.3.1. Articulation d'un corps solide.....	17
II.3.2. Liaisons et appuis plans usuels.....	18
II.3.3. Glissière (sans frottement).....	19
II.3.4. Encastrement plan.....	20
<b>Chapitre III : Cinématique des solides indéformables</b> .....	23
III.1. Mouvement d'un repère $R_k$ par rapport à un repère $R_i$ fixe.....	23
III.2. Repérage du centre $O_k$ du repère $R_k$ .....	23
III.3. Repérage de l'orientation des axes du repère $R_k$ .....	23
III.4. Angles d'Euler.....	24
III.4.1. Formules d'Euler.....	27
III.5. Dérivation d'un vecteur dans un repère mobile.....	27
III.6. Champ des vitesses d'un solide.....	28
III.7. Champ des accélérations d'un solide.....	28
III.8. Torseur cinématique.....	29
III.9. Mouvements particuliers fondamentaux.....	30
III.9.1. Mouvement de translation.....	30
III.9.2. Mouvement de rotation.....	31
III.9.3. Mouvement hélicoïdal.....	32
III.10. Mouvement composé du point matériel.....	33
III.10.1. Composition des vitesses.....	33
III.10.2. Composition des accélérations.....	34
<b>Chapitre IV : Géométrie des masses</b> .....	36
IV.1. Masse d'un système matériel.....	36

IV.1.1. Systèmes discrets.....	36
IV.1.2. Systèmes continus.....	36
IV.2. Centre d'inertie d'un solide.....	37
IV.2.1. Définition.....	37
IV.2.2. Centre d'inertie d'un système composé.....	37
IV.3. Moment et produit d'inertie d'un solide.....	38
IV.3.1. Moment d'inertie de (S) par rapport à un point.....	38
IV.3.2. Moment d'inertie de (S) par rapport à un axe ( $\Delta$ ).....	38
IV.3.3. Produits d'inertie d'un solide.....	39
IV.4. Matrice (ou tenseur) d'inertie d'un solide (S) en un point $O$ .....	40
IV.4.1. Propriétés de la matrice d'inertie.....	40
IV.5. Cas d'un solide complexe composé de solides élémentaires.....	42
IV.6. Théorème des axes parallèles (ou Théorème de Huygens).....	42
IV.7. Transposition des propriétés d'inertie à d'autres directions – Variance tensorielle.....	44
<b>Chapitre V : Cinétique du Solide.....</b>	<b>46</b>
V.1. Définitions des grandeurs cinétiques.....	46
V.1.1. Point matériel.....	46
V.1.2. Système matériel continu.....	46
V.2. Torseur cinétique.....	46
V.3. Calcul de la résultante cinétique.....	47
V.4. Théorème de Koëinig.....	47
V.5. Moment cinétique d'un solide indéformable par rapport à son centre d'inertie.....	47
V.6. Moment cinétique d'un solide indéformable (S) en un point du solide par rapport au repère fixe $R_0$ .....	48
V.7. Energie cinétique.....	48
V.7.1. Théorème de Koëinig relatif à l'énergie cinétique.....	48
V.7.2. L'énergie cinétique d'un solide indéformable en mouvement quelconque.....	49
<b>Chapitre VI : Principe fondamentale de la dynamique des systèmes matériels.....</b>	<b>51</b>
VI.1. Torseur des forces extérieures.....	51
VI.2. Rappel de la dynamique des particules.....	51
VI.2.1. Principe d'inertie (Première loi de Newton).....	51
VI.2.2. Principe fondamental de la dynamique (Deuxième loi de Newton).....	51
VI.2.3. Principe d'action réaction (Troisième loi de Newton).....	51
VI.3. Définition des grandeurs dynamique.....	52
VI.3.1. Point matériel.....	52
VI.3.2. Système matériel continu.....	52
VI.3.3. Torseur dynamique.....	52
VI.4. Théorème de Koëinig relatif au moment dynamique.....	52
VI.5. Calcul du moment dynamique.....	53
VI.6. Principe (ou Loi) fondamental de la dynamique pour un système matériel (S).....	53
VI.7. Théorème de la résultante dynamique.....	54
VI.8. Théorème du moment dynamique.....	55
VI.9. Travail et puissance d'une force.....	55
VI.10. Théorème de l'énergie cinétique.....	56
VI.11. Conservation de l'énergie totale.....	56
<b>Chapitre VII : Principe des travaux virtuels et équations de Lagrange.....</b>	<b>60</b>
VII.1. Liaisons (ou contraintes) et degrés de liberté.....	60
VII.2. Classification des liaisons.....	60
VII.2.1. Liaisons holonomes (ou géométriques).....	60
VII.2.1. Liaisons non holonomes (ou cinématiques).....	61
VII.3. Principe des Travaux Virtuels-Principe d'Alembert.....	61
VII.4. Coordonnées généralisées et Forces généralisés.....	62
VII.5. Equations de Lagrange.....	6

# Introduction générale

## Introduction générale

La mécanique rationnelle, branche de la physique et qui fait partie des sciences naturelles, est précisément la science des lois générales du mouvement, de l'équilibre et les interactions entre les corps matériels (Par-exemple : mouvement de la terre autour du soleil, mouvement d'une fusée ou obus etc..).

On divise habituellement l'étude de la mécanique en trois parties suivant le caractère des problèmes considérés : la *Statique* étudie les lois de compositions des forces et les conditions d'équilibre des corps matériels soumis à leurs l'action. La *Cinématique* étudie le mouvement des solides sans prendre en considération les causes ou les actions qui le génèrent ou le provoque. La *Dynamique* traite les lois du mouvement des corps matériels sous l'action des forces extérieures (étude du mouvement en prenant compte des causes ou les actions qui le génèrent ou le provoque).

Suivant la nature de l'objet étudié on divise la mécanique rationnelle en :

1. Mécanique du point matériel, *c-à-d* un corps dont on peut négliger les dimensions lorsqu'on étudie son mouvement (ou son équilibre) et des systèmes de points matériels).
2. Mécanique des solides (ou corps rigides), *c-à-d.* un corps dont on peut négliger les déformations durant l'étude de son mouvement (ou son équilibre).
3. Mécanique des corps à masse variable (corps dont la masse varie avec le temps (fusée)).
4. Mécanique des corps déformables (théorie de l'élasticité de plasticité(*RDM*)).
5. Mécanique des fluides (liquides hydrodynamique) est des gaz (aérodynamique ou dynamique des gaz)

La mécanique peut être défini comme la science qui décrit et prédit les conditions de repos ou de mouvement des corps soumis à l'action d'un ensemble de forces. Elle se divise en 03 grandes parties mécanique des corps rigides, mécanique des corps déformables et mécanique des fluides.

Ce polycopié est un cours de base de la mécanique des solides indéformables. Il a pour objectif d'apporter une contribution à l'acquisition des connaissances scientifiques de base permettant une meilleure compréhension des lois du mouvement.

Le contenu de ce polycopie est en adéquation avec le programme adopté pour les classes préparatoires des écoles d'ingénieurs et celui adopté pour les étudiants du troisième semestre sciences et technique du système LMD. Il va de soit qu'il peut servir avantageusement aux autres catégories d'étudiants au curriculum desquels figure un programme de mécanique important. Il contient des cours détaillés, avec des applications résolus. Il est rédigé avec un style très simple, qui permet aux étudiants du premier cycle universitaire une compréhension rapide.

Ce polycopié est structuré en sept chapitres. Après un rappel mathématique sur les vecteurs, le chapitre traite les outils mathématiques notamment les torseurs utilisés pour simplifier l'écriture des équations de la mécanique. Le chapitre deux décrit l'équilibre statique des solides et les différentes liaisons entre les solides et les équations qui les régissent. Le chapitre trois aborde la cinématique des solides qui traite le mouvement mécanique uniquement du point de vue géométrique, sans tenir compte des causes qui ont provoqué le mouvement. Le chapitre quatre évoque les notions sur la masse, le centre de masse, le moment d'inertie et le produit d'inertie; leurs intérêts mécaniques apparaîtront dans l'étude de la cinétique et de la dynamique. Les chapitres cinq et six décrivent la cinétique et les théorèmes fondamentaux de la dynamique. Enfin le dernier chapitre traite le principe des travaux virtuels et les équations de Lagrange.

# Chapitre I : Éléments de calcul vectoriel

## Chapitre I : Éléments de calcul vectoriel

### I.1. Vecteurs

Un vecteur (vitesse, accélération, quantité de mouvement, etc...) est un segment de droite  $OA$  sur lequel on a choisi une origine  $O$  et une extrémité  $A$  (Fig. I.1). Il est défini par :

- Son origine  $O$  (ou point d'application  $O$ );
- Sa *direction*, elle est caractérisée par l'angle  $\alpha$  qu'elle forme avec un axe de référence. La droite ( $\Delta$ ) non orientée est appelée *support* ou *ligne d'action*;
- Son *sens*, deux vecteurs de même module et direction mais de sens contraire (Fig. I.1);
- Son *module* (sa *grandeur*, sa *norme* ou son *intensité*).

Parfois, la direction d'un vecteur est définie par sa ligne d'action et son sens.

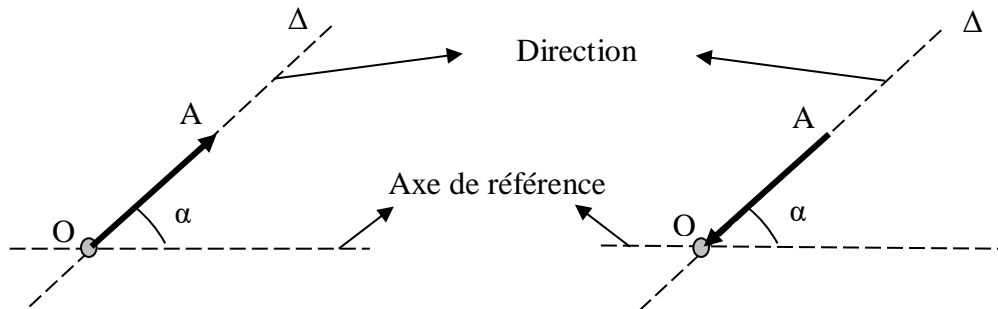


Fig. I.1 : définition d'un vecteur

#### I.1.1. Classification des vecteurs

Il existe plusieurs types de vecteurs :

- *Vecteur libre* : qui peut se déplacer librement dans l'espace (comme les couples). Sa direction, son sens et son module sont donnés mais la droite support et son point d'application (origine du vecteur) ne sont pas connus. On dira qu'un vecteur est libre lorsqu'on peut le remplacer par n'importe quel autre vecteur qui lui est équipollent et de même sens (Fig. I.2a);
- *Vecteur glissant* : qui peut glisser le long de sa ligne d'action (la droite  $\Delta$ ) sans pour autant changer son effet. Son point d'application n'est pas fixé (Fig. I.2b). On le note  $(\Delta, \overline{OA})$ ;
- *Vecteur lié (pointeur)*: tous les éléments du vecteur sont déterminés, son point d'application est fixé, vecteur  $\overline{OA}$  de la Fig. I.2a. On le note  $(O, \overline{OA})$  ;
- *Vecteur unitaire* : c'est un vecteur dont le module est égal à 1 ;
- *Vecteurs colinéaires* : s'ils possèdent le même support ;
- *Vecteurs parallèles* : si leurs supports sont parallèles;
- *Vecteurs coplanaires* : si leurs supports se trouvent dans un même plan,
- *Vecteurs équipollents (équivalents)* : on dit que deux vecteurs sont équipollents s'ils ont les mêmes grandeurs et orientation, même s'ils n'ont pas le même point d'application.
  1. S'ils ont même sens, on dit qu'ils sont égaux. Si en plus, ont même origine, ils sont identiques.
  2. S'ils ont des sens contraires, on dit qu'ils sont opposés.

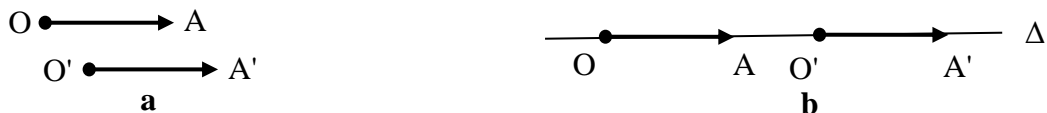


Fig. I.2 : Classification des vecteurs

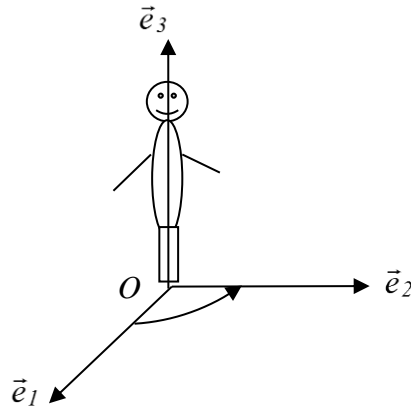
#### I.1.2. Composantes d'un vecteur

Considérons une base de l'espace  $R^3$  notée :  $b_O (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Cette base est orthonormée si :

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

## Chapitre I : Éléments de calcul vectoriel

Le repère  $R_O(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est dit *directe* si un observateur disposé suivant le vecteur  $\vec{e}_3$  verra le vecteur  $\vec{e}_1$  tourner vers le vecteur  $\vec{e}_2$  dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (Fig. I.3).



**Fig. I.3 : Définition d'une base directe (Règle d'observateur)**

Dans cette base un vecteur  $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$  de composantes  $(V_1, V_2, V_3)$  s'écrirait :

$$\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + V_3 \vec{e}_3 = (x_B - x_A) \vec{e}_1 + (y_B - y_A) \vec{e}_2 + (z_B - z_A) \vec{e}_3 \quad (\text{I.2})$$

où  $x_A, y_A, z_A$  (resp.  $x_B, y_B, z_B$ ) sont les coordonnées du point A (resp. du point B) dans  $R_O$

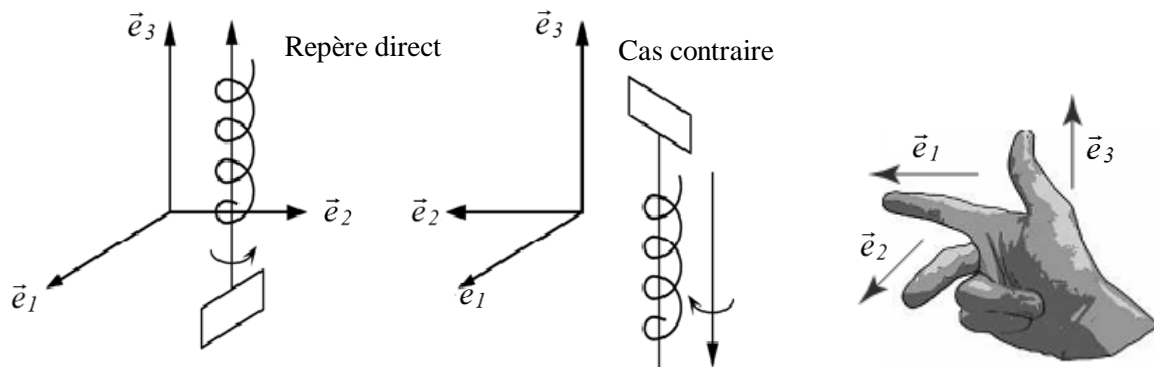
Les cosinus directeurs s'obtiennent :

$$\cos(\theta_x) = \frac{V_1}{|\vec{V}|}, \cos(\theta_y) = \frac{V_2}{|\vec{V}|} \text{ et } \cos(\theta_z) = \frac{V_3}{|\vec{V}|} \quad (\text{I.3})$$

$\theta_x, \theta_y$  et  $\theta_z$  sont les angles que forme le vecteur  $\vec{V}$  avec respectivement  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$ .

### Remarque

*Direct* veut dire aussi que les vecteurs unités  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  obéissent à la règle du tire-bouchon ou de la main droite (Fig. I.4).



**Fig. I.4 : définition d'une base directe (règle du tire-bouchon et de la main droite)**

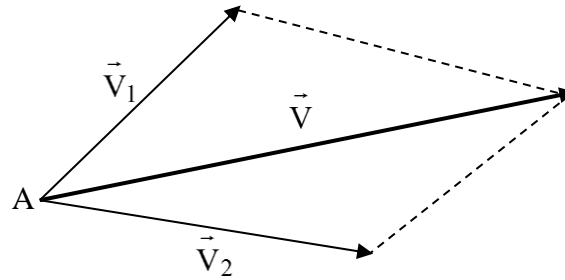
Le tire-bouchon tourne comme  $\vec{e}_1$  tourne sous l'action de  $\vec{e}_2$  si  $\vec{e}_2$  représentait une force attachée à l'extrémité de  $\vec{e}_1$ . Il tourne en avançant dans le sens de  $\vec{e}_3$ . On peut aussi imaginer que ce même mouvement hypothétique de  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  est suivi par les doigts de la main droite. Le pouce de la main droite est alors dans la direction de  $\vec{e}_3$ .

## I.2. Opérations sur les vecteurs libres

### I.2.1. Addition des vecteurs

La somme de deux vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  se fait en transportant les origines des deux vecteurs sur un seul point A et en construisant le parallélogramme qui a  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  comme cotés (Fig. I.5).

## Chapitre I : Éléments de calcul vectoriel



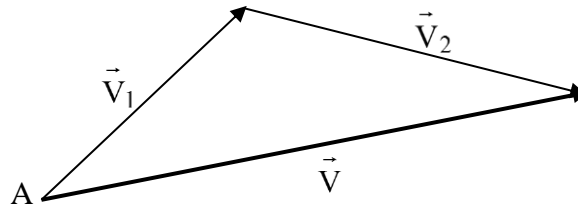
**Fig. I.5 : Addition de deux vecteurs (Règle du parallélogramme)**

Le vecteur résultant  $\vec{V}$  est défini par :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (V_{1x} + V_{2x})\vec{e}_1 + (V_{1y} + V_{2y})\vec{e}_2 + (V_{1z} + V_{2z})\vec{e}_3 \quad (\text{I.4})$$

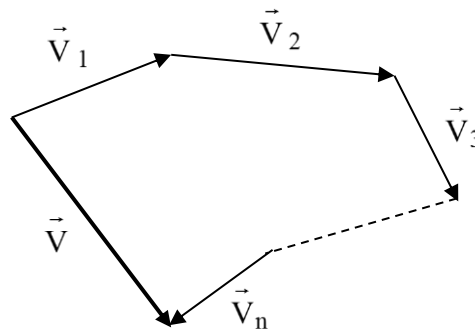
Cette définition constitue la *règle d'addition du parallélogramme*.

À partir de la construction du parallélogramme, nous pouvons déduire une autre méthode graphique pour additionner deux vecteurs. Cette méthode est connue sous le nom de la *règle du triangle*. Nous pourrions dessiner seulement la moitié du parallélogramme. Le vecteur résultant de l'addition de deux vecteurs peut être trouvé en disposant  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  bout à bout et en joignant ensuite l'origine de  $\vec{V}_1$  à l'extrémité de  $\vec{V}_2$  (Fig. I.6).



**Fig. I.6 : Addition de deux vecteurs (Règle du triangle)**

L'addition de plusieurs vecteurs se fait en disposant tous les vecteurs bout à bout et en traçant le vecteur qui a comme origine, l'origine du premier vecteur, et comme extrémité, l'extrémité du dernier. Cette façon de procéder traduit graphiquement la *règle du polygone* (Fig. I.7).



**Fig. I.7 : Addition de plusieurs vecteurs (Règle du polygone)**

### I.2.1.1. Propriétés de la somme vectorielle

- L'addition vectorielle est commutative

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$$

- L'addition vectorielle est associative

$$(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$$

- L'addition vectorielle est distributive par rapport à la somme vectorielle

$$\lambda(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \lambda\vec{V}_1 + \lambda\vec{V}_2$$

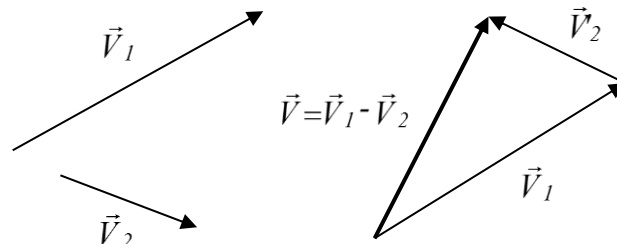
- L'addition vectorielle est distributive par rapport à l'addition des scalaires

$$\vec{V}(\lambda_1 + \lambda_2) = \lambda_1\vec{V} + \lambda_2\vec{V}$$

## Chapitre I : Éléments de calcul vectoriel

### I.2.2. Soustraction de deux vecteurs

La soustraction de deux vecteurs  $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$  est le vecteur  $\vec{v}$  défini comme l'addition du vecteur  $\vec{v}_1$  à un vecteur  $\vec{v}'_2$  égal et opposé à  $\vec{v}_2$  (Fig. I.8).



**Fig. I.8 : Soustraction de deux vecteurs**

### I.2.3. Décomposition d'un vecteur

Nous avons montrés jusqu'à maintenant qu'il est toujours possible de remplacer deux ou plusieurs vecteurs par un vecteur unique. Réciproquement, il est toujours possible de remplacer un vecteur unique  $\vec{v}$  par deux ou plusieurs vecteurs. Ces vecteurs sont appelés les *composantes* du vecteur original  $\vec{v}$ . Nous devons considérer deux cas d'intérêt particulier :

1. Une des composantes  $\vec{v}_1$  est fixée. On calcule la deuxième composante en utilisant la règle du triangle.
2. Les deux directions de décomposition sont données. La grandeur et l'orientation des composantes sont obtenues en appliquant le principe du parallélogramme.

### I.3. Champ équiprojectif de vecteurs

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine. Un champ de vecteurs  $\vec{v}$  est dit équiprojectif si :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2 : \vec{v}(A). \overrightarrow{AB} = \vec{v}(B). \overrightarrow{AB} \quad (\text{I.5})$$

### I.4. Produit scalaire de deux vecteurs

On appelle *produit scalaire* de deux vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  qui font entre eux un angle  $\theta$  une loi de composition externe qui associe aux deux vecteurs, un scalaire (nombre réel) noté :  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$  tel que :

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cos \theta = V_1 \cdot V_2 \cos(\theta) \quad (\text{I.6})$$

#### I.4.1. Propriétés du produit scalaire

- Le produit scalaire de deux vecteurs est commutatif  
 $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$
- Le produit scalaire est associatif par rapport à la multiplication par un scalaire  
 $\lambda (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = (\lambda \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \cdot (\lambda \vec{v}_2)$
- Le produit scalaire est distributif par rapport à la somme vectorielle  
 $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3$
- Deux vecteurs sont dits orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul:  
 $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

#### I.4.2. Expression analytique du produit scalaire

Soient deux vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ . Leurs expressions dans une base  $b(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , de l'espace  $R^3$ , sont :

$$\vec{v}_1 = V_{1x} \vec{e}_1 + V_{1y} \vec{e}_2 + V_{1z} \vec{e}_3 \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = V_{2x} \vec{e}_1 + V_{2y} \vec{e}_2 + V_{2z} \vec{e}_3$$

Le produit scalaire des deux vecteurs est donné par :

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (V_{1x} \vec{e}_1 + V_{1y} \vec{e}_2 + V_{1z} \vec{e}_3) \cdot (V_{2x} \vec{e}_1 + V_{2y} \vec{e}_2 + V_{2z} \vec{e}_3) = V_{1x} V_{2x} + V_{1y} V_{2y} + V_{1z} V_{2z} \quad (\text{I.7})$$

**Remarque :**  $\cos(\theta) = \left( \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{V_1 \cdot V_2} \right)$  et  $\theta = \arccos \left( \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{V_1 \cdot V_2} \right)$



## Chapitre I : Éléments de calcul vectoriel

### I.5. Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel de deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  de l'espace  $R^3$  est un vecteur  $\vec{W}$  perpendiculaire au plan contenant  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  (Fig. I.9), défini par :

$$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \sin \theta \vec{n} \quad (\text{I.8})$$

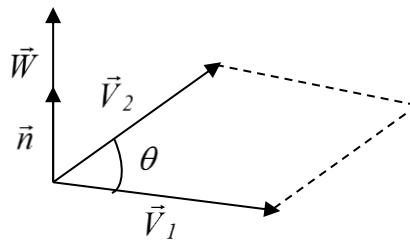
où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire perpendiculaire à  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  et  $\theta$  l'angle entre les deux vecteurs.

Le résultat obtenu peut s'écrire aussi sous la forme condensée de déterminant :

$$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \\ V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \end{vmatrix} \quad (\text{I.9})$$

$$= (V_{1x}V_{2z} - V_{1z}V_{2y})\vec{e}_1 - (V_{1y}V_{2z} - V_{1z}V_{2x})\vec{e}_2 + (V_{1x}V_{2y} - V_{1y}V_{2x})\vec{e}_3$$

Le sens du vecteur  $\vec{W}$  est déduit de la règle du tire-bouchon lorsqu'il tourne de  $\vec{V}_1$  vers  $\vec{V}_2$  ou de la règle de la main droite. Son module vaut :  $|\vec{W}| = |\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2| = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \sin(\theta)$



**Fig. I.9 : Produit vectoriel de deux vecteurs**

#### I.5.1. Propriétés du produit vectoriel

- Le produit vectoriel est distributif à gauche et à droite pour la somme vectorielle :

$$(\vec{V}_2 + \vec{V}_3) \wedge \vec{V}_1 = \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1 + \vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1$$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$$

- Le produit vectoriel est associatif par rapport à la multiplication par un scalaire

$$\lambda (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = (\lambda \vec{V}_1) \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \wedge (\lambda \vec{V}_2)$$

- Le produit vectoriel est antisymétrique (anticommutatif)

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = -(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1)$$

- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires (ou parallèles) si et seulement si leur produit vectoriel est nul :

$$\vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2 \Leftrightarrow \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}$$

#### I.5.2. Expression analytique du produit vectoriel dans une base orthonormé direct

A partir des projections des deux vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  sur les axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ , on exprime :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (V_{1x}\vec{e}_1 + V_{1y}\vec{e}_2 + V_{1z}\vec{e}_3) \wedge (V_{2x}\vec{e}_1 + V_{2y}\vec{e}_2 + V_{2z}\vec{e}_3)$$

En tenant compte des produits vectoriels des vecteurs unitaires  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  :

$$(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1) = 0 \quad ; \quad (\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2) = 0 \quad ; \quad (\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3) = 0$$

$$\text{et } (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) = -(\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1) = \vec{e}_3 \quad ; \quad (\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3) = -(\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2) = \vec{e}_1 \quad ; \quad (\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1) = -(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3) = \vec{e}_2$$

L'expression du produit vectoriel devient :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (V_{1y}V_{2z} - V_{1z}V_{2y})\vec{e}_1 + (V_{1z}V_{2x} - V_{1x}V_{2z})\vec{e}_2 + (V_{1x}V_{2y} - V_{1y}V_{2x})\vec{e}_3 \quad (\text{I.10})$$

### I.6. Produit mixte

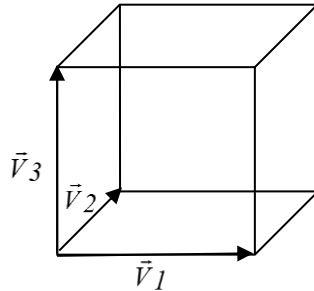
On appelle produit mixte de trois vecteurs  $\vec{V}_1$ ,  $\vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$  pris dans cet ordre, le nombre réel défini par :  $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$  ou parfois  $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$ .

Le produit mixte est donc un scalaire égal au volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs  $\vec{V}_1$ ,  $\vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$  (Fig. I.10).

On exprime aussi le produit mixte sous la forme d'un déterminant :

## Chapitre I : Éléments de calcul vectoriel

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) &= \begin{vmatrix} V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \\ V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \\ V_{3x} & V_{3y} & V_{3z} \end{vmatrix} \\ &= V_{1x}(V_{2y}V_{3z} - V_{2z}V_{3y}) + V_{1y}(V_{2z}V_{3x} - V_{2x}V_{3z}) + V_{1z}(V_{2x}V_{3y} - V_{2y}V_{3x}) \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$



**Fig. I.10 : produit mixte**

Le produit mixte est nul, si :

- les trois vecteurs sont dans le même plan ;
- deux des vecteurs sont colinéaires ;
- l'un des vecteurs est nul.

On montre facilement que, dans une base orthonormée directe, le produit mixte est un variant scalaire par permutation circulaire direct des trois vecteurs car le produit scalaire est commutatif:

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{V}_2 \cdot (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) = \vec{V}_3 \cdot (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \quad (\text{I.12})$$

### I.7. Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel de trois vecteurs respectifs  $\vec{V}_1$ ,  $\vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$  est un vecteur  $\vec{W}$  exprimé par la relation

$$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 \quad (\text{I.13})$$

Le vecteur  $\vec{W}$  est perpendiculaire au vecteur  $\vec{V}_1$  et au vecteur formé par le produit  $(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ , il est donc dans le plan formé par les vecteurs  $\vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$ .

### I.8. Torseur

Le torseur est outils mathématique privilégié de la mécanique du solide. Il lui permet une représentation condensée et simplifiée des actions mécaniques, des vitesses et diverses autres grandeurs.

Soit un ensemble fini de vecteurs glissants  $(A_i, \vec{V}_i)$  (Fig. I.11). Cet ensemble de vecteur constitue un torseur noté  $T$  défini par ses deux éléments dits *éléments de réduction* :

- Un vecteur noté  $\vec{R}$  (ne dépendant pas du point choisi) appelé la résultante du torseur :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i \quad (\text{I.14})$$

- Un champ de vecteur  $\vec{M}$  (dépendant du point choisi) vérifiant la relation:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{V}_i \quad (\text{I.15})$$

Le torseur  $T$  au point de réduction  $O$  et dans la base  $b(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  se note de la façon suivante :

$$\{T\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_O \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} R_x \vec{e}_1 + R_y \vec{e}_2 + R_z \vec{e}_3 \\ \underbrace{M_x \vec{e}_1 + M_y \vec{e}_2 + M_z \vec{e}_3}_O \end{array} \right\}^b \quad \text{ou} \quad \{T\}_O = \left\{ \vec{R}, \vec{M}_O \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{array} \right\}_O \quad (\text{I.16})$$

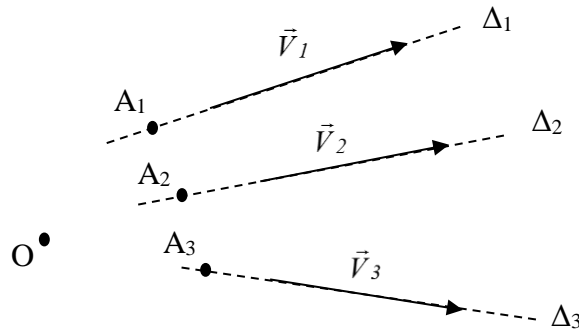
*Ecriture en ligne* *Ecriture en colonne*

$R_x, R_y$  et  $R_z$  (resp  $M_x, M_y$  et  $M_z$ ) sont les coordonnées de  $\vec{R}$  (resp de  $\vec{M}_O$ ) dans la base  $b(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

## Chapitre I : Éléments de calcul vectoriel

On rappelle la relation fondamentale et très importante en mécanique dite *formule de transport des moments* entre deux points du champ de moment :

$$\forall O, \forall P : \vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{R} \wedge \vec{OP} \quad (\text{I.17})$$



**Fig. I.11 : Ensemble fini de vecteurs glissants**

En générale la connaissance de  $\vec{R}$  et  $\vec{M}_O$  en un point particulier de réduction  $O$  détermine complètement le torseur en tout autre point  $P$  (relation (I.16)).

### Remarque

*Ne jamais omettre* le point choisi de réduction du torseur.

**Exemple 1** : Les torseurs de la mécanique des corps rigides :

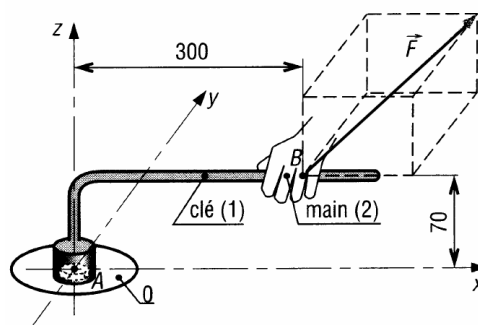
2. Champ de forces : torseur des forces extérieures  $\{T\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A$ ,  $\vec{M}_A$  est le moment de la force  $\vec{F}$ .

3. Champ des vitesses : torseur cinématique  $\{T\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_A \end{Bmatrix}_A$ ,  $\vec{\Omega}$  est le vecteur vitesse rotation.

4. Champ de quantités d'accélération : torseur dynamique  $\{T\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\gamma} \\ \vec{\delta}_A \end{Bmatrix}_A$ ,  $\vec{\delta}_A$  est le moment dynamique.

### Application 1

Une clé est utilisée pour desserrer une vis bloquée sur un bâti (Fig. I.12). L'effort  $\vec{F}$  exercé par la main de l'opérateur a pour coordonnées :  $F_x = 60 \text{ N}$ ,  $F_y = 200 \text{ N}$  et  $F_z = 40 \text{ N}$ .



**Fig. I.12 : Application 1**

1. Définir le torseur appliqué en  $B$  de l'effort exercé par la main.
2. Transporter ce torseur au point  $A$ .

### Solution 1

1. Le torseur est défini par ses deux éléments, la résultante  $\vec{R}$  des forces appliquées sur la clé et son moment par rapport au point  $B$ . Il n'y a qu'une seule force  $\vec{F}$  qui agit sur la clé, on a donc :

$$\vec{R} = \vec{F} = F_x \vec{e}_1 + F_y \vec{e}_2 + F_z \vec{e}_3 = 60 \vec{e}_1 + 200 \vec{e}_2 + 40 \vec{e}_3 \quad \text{et} \quad \vec{M}_B = \vec{BB} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

## Chapitre I : Éléments de calcul vectoriel

$$\{T\}_B = \left\{ \vec{F}, \vec{M}_B \right\} = \begin{Bmatrix} 60 & 0 \\ 200 & 0 \\ 40 & 0 \end{Bmatrix}_B$$

Le moment est nul, le torseur est alors un glisseur

2. la résultante  $\vec{R}$  est un invariant vectoriel et le moment  $\vec{M}_A$  est obtenu par la relation (I.17) :

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{F} \wedge \vec{AB} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 60 \\ 200 \\ 40 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0.07 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14 \\ 7,8 \\ -60 \end{Bmatrix}_A$$

$$\{T\}_A = \left\{ \vec{F}, \vec{M}_A \right\} = \begin{Bmatrix} 60 & 14 \\ 200 & 7,8 \\ 40 & -60 \end{Bmatrix}_A$$

### I.8.1. Propriétés des torseurs

#### I.8.1.1. Invariants d'un torseur

On appelle invariants d'un torseur, les quantités qui restent constantes quel que soit le point où on réduit le torseur.

- La résultante  $\vec{R}$  d'un torseur est un invariant vectoriel;
- La quantité définie par la relation suivante est un invariant vectoriel d'un torseur :

$$\vec{I} = I \frac{\vec{R}}{R^2} \quad (\text{I.18})$$

- L'*automoment* d'un torseur défini par la relation suivante est un *invariant scalaire* :

$$I = \vec{R} \cdot \vec{M}_O = \vec{R} \cdot \vec{M}_P \quad (\text{I.19})$$

- Le pas  $\lambda$  d'un torseur est aussi un invariant scalaire d'un torseur :

$$\lambda = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R^2} \quad (\text{I.20})$$

#### I.8.1.2. Axe central d'un torseur

On appelle axe central d'un torseur, l'ensemble des points  $P$  pour lequel la résultante et le moment en  $P$  (point central du torseur) *sont colinéaires* (Fig. I.12). Le coefficient de linéarité s'appelle le *pas du torseur*.

$$\vec{M}_P = \lambda \vec{R} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow P \in \Delta \quad (\text{I.21})$$

Soit le  $\{T\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A$  avec  $\vec{R} \neq 0$

Si  $P$  est un point de l'axe central on a :

$$\vec{M}_P = \lambda \vec{R} \quad \text{et} \quad \vec{M}_P = \vec{M}_A + \vec{PA} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{R} // \vec{M}_P \Leftrightarrow \vec{R} \wedge \vec{M}_P = \vec{0} = \vec{R} \wedge (\vec{M}_A + \vec{PA} \wedge \vec{R}) = \vec{R} \wedge \vec{M}_A + \vec{R} \wedge (\vec{PA} \wedge \vec{R})$$

En utilisant la relation (I.12) du double produit vectoriel, on obtient :

$$\vec{R} \wedge \vec{M}_A + R^2 \cdot \vec{PA} - (\vec{R} \cdot \vec{PA}) \cdot \vec{R} = \vec{0} \Leftrightarrow R^2 \cdot \vec{AP} = \vec{R} \wedge \vec{M}_A + (\vec{R} \cdot \vec{AP}) \cdot \vec{R}$$

$$\vec{AP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_A}{R^2} + \frac{\vec{R} \cdot \vec{AP}}{R^2} \cdot \vec{R} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_A}{R^2} + \mu \vec{R} \quad (\text{I.22})$$

C'est l'équation vectorielle de l'axe central.

Le pas  $\lambda$  du torseur est donné par :

$$\vec{M}_P = \lambda \vec{R} \Leftrightarrow \vec{M}_P \cdot \vec{R} = \lambda \vec{R} \cdot \vec{R} \Rightarrow \lambda = \frac{\vec{M}_P \cdot \vec{R}}{R^2} \quad (\text{I.23})$$

On peut noter les propriétés suivantes de l'axe central d'un torseur :

## Chapitre I : Éléments de calcul vectoriel

- le moment en tout point de l'axe central est invariant. On l'appelle moment central du torseur;
- la norme du moment central est minimale.
- l'axe central du torseur est une droite dont le vecteur directeur est la résultante du torseur.

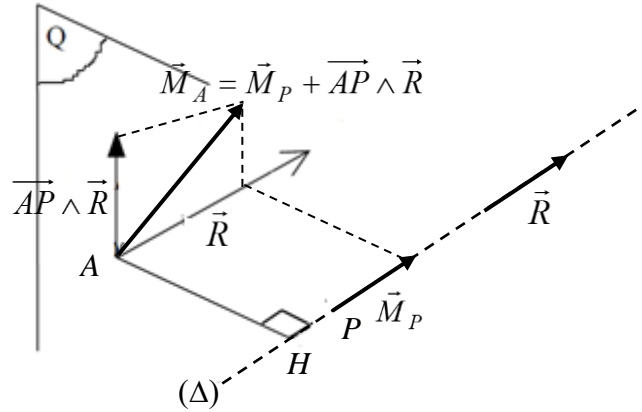


Fig. I.13 : Axe central

### I.8.2. Espace vectoriel des torseurs

#### I.8.2.1. Addition de torseurs

La somme de deux torseurs  $\{T\}_I = \begin{Bmatrix} \vec{R}_I \\ \vec{M}_{IA} \end{Bmatrix}$  et  $\{T\}_2 = \begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{2A} \end{Bmatrix}$  est un torseur  $\{T\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}$  dont les éléments de réduction sont respectivement la somme des éléments de réduction des deux torseurs  $\{T\}_I$  et  $\{T\}_2$  :

$$\{T\}_A = \{T\}_I + \{T\}_2 = \begin{Bmatrix} \vec{R}_I + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{IA} + \vec{M}_{2A} \end{Bmatrix}_A \quad (\text{I.24})$$

#### I.8.2.2. Produit par un scalaire

On définit le produit par un scalaire du torseur  $\{T\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A$  par :

$$\{T\}' = \lambda \{T\} = \begin{Bmatrix} \lambda \vec{R} \\ \lambda \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A \quad (\text{I.25})$$

#### I.8.2.3. Comoment ou produit de deux torseurs

Soit deux Torseurs  $\{T\}_I = \begin{Bmatrix} \vec{R}_I \\ \vec{M}_{IA} \end{Bmatrix}_A$  et  $\{T\}_2 = \begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{2A} \end{Bmatrix}_A$

On appelle comoment des deux torseurs  $\{T\}_I$  et  $\{T\}_2$ , le réel défini par :

$$\Phi(A) = \{T\}_I \otimes \{T\}_2 = \vec{R}_I \cdot \vec{M}_{2A} + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_{IA} \quad (\text{I.26})$$

Ce calcul est indépendant du point A

En effet, soient A et B deux point de l'espace affine  $\varepsilon$ . On a :

$$\begin{aligned} \Phi_A &= \vec{R}_I \cdot \vec{M}_{2A} + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_{IA} = \vec{R}_I \cdot (\vec{M}_{2B} + \vec{AB} \wedge \vec{R}_2) + \vec{R}_2 \cdot (\vec{M}_{IB} + \vec{AB} \wedge \vec{R}_I) \\ &= \Phi_B + \vec{R}_I \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{R}_2) + \vec{R}_2 \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{R}_I) = \Phi_B \quad \text{car} \quad \vec{R}_I \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{R}_2) = -\vec{R}_2 \cdot (\vec{BA} \wedge \vec{R}_I) \end{aligned}$$

### I.8.3. Torseurs particuliers

#### I.8.3.1. Couple

On appelle couple un torseur dont la résultante est nulle. Le moment d'un couple est un invariant du couple. Les invariants scalaire et vectoriel sont nuls. On peut ne pas préciser le point de la réduction du torseur.

## Chapitre I : Éléments de calcul vectoriel

$$\{C\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A \quad (I.27)$$

### I.8.3.2. Glisseur

On appelle glisseur tout torseur de résultante non nulle qui admet un point  $P$  pour lequel son moment est nul.

$$\{G\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (I.28)$$

Un glisseur admet alors une droite de points en lesquels le moment est nul.

### I.8.3.3. Torseur nul

Un torseur est dit nul s'il existe un point où ses éléments de réduction sont nuls. Ils le sont alors en tout point.

$$\{0\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad (I.29)$$

### I.8.3.4. Torseur quelconque

Un torseur est quelconque, si et seulement si, son invariant scalaire n'est pas nul.

$$\{T\} \text{ est un torseur quelconque } \Leftrightarrow \vec{R} \cdot \vec{M}_A \neq 0 \quad (I.30)$$

**Tableau I.1 : Tableau récapitulatif sur les torseurs**

Éléments de réduction au point $A$	Construction minimum	Type de torseur
$\vec{R} \neq \vec{0}$ $\vec{R} \cdot \vec{M}_A = 0$	Un vecteur lié unique	Torseur glisseur
$\vec{R} = \vec{0}$ $\vec{M}_A \neq \vec{0}$	Deux vecteurs liés formant un couple	Torseur couple
$\vec{R} \cdot \vec{M}_A \neq 0$	Un vecteur lié + 2 vecteurs liés formant un couple	Torseur quelconque
$\vec{R} = \vec{0}$ $\vec{M}_A = \vec{0}$	Vecteurs nuls	Torseur nul

### Application 2

Soit le torseur  $\{T\}_O$  défini au point  $O$ , origine d'un repère orthonormé direct, par :

$$\{T\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \\ \vec{M}_O = -3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3 \end{array} \right\}_O$$

1. Déterminer le pas et l'axe central du torseur  $\{T\}$ .

### Solution 2

$$\lambda = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{R^2} = \frac{-6 + 2 - 21}{4 + 1 + 9} = \frac{-25}{14}$$

Soit  $P(x, y, z)$  un point de l'axe central, on a :

$$\vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{R^2} + \mu \vec{R} = \frac{1}{14}(-14\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3) + \mu(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3)$$

$$\vec{OP} = \left(2\mu - \frac{13}{14}\right)\vec{e}_1 + \left(\mu + \frac{5}{14}\right)\vec{e}_2 + \left(3\mu + \frac{1}{2}\right)\vec{e}_3$$

## Chapitre II : Statique des solides

## Chapitre II : Statique des solides

La statique, ou mécanique statique, est la branche de la physique qui étudie l'équilibre des systèmes matériels soumis à un ensemble de forces par rapport à un système de référence supposé fixe. Ces systèmes peuvent se réduire à un point matériel, un ensemble de points matériels, un solide ou à un ensemble de solides.

Le principe fondamental de la statique (PFS) exprime les *conditions d'équilibre* d'un solide indéformable dans un référentiel donné.

Un objet est à l'équilibre lorsqu'il a un mouvement rectiligne uniforme (son moment dynamique est nul en tous points, ce qui implique que son accélération linéaire et son accélération angulaire soient nulles). *Souvent, on considère le cas d'un objet immobile.*

Tous les solides étudiés dans ce chapitre sont des *solides indéformables (solides parfaits)*. Un solide indéformable ( $S_k$ ), *pour lequel on peut négliger toute déformation*, est par définition composé d'une multitude de particules, ou points matériels, dont les distances mutuelles sont constantes dans le temps.

### II.1. Notions de forces

#### II.1.1. Définition

On appelle force toute cause capable de *modifier* l'état de repos ou de mouvement d'un corps ou d'un point matériel. L'état de repos ou de mouvement dépend des liaisons mécaniques de ce corps avec d'autres corps.

*La force est une grandeur vectorielle car elle possède toutes les caractéristiques d'un vecteur (voir chapitre I).*

Les systèmes de forces peuvent être : parallèles ou concourants.

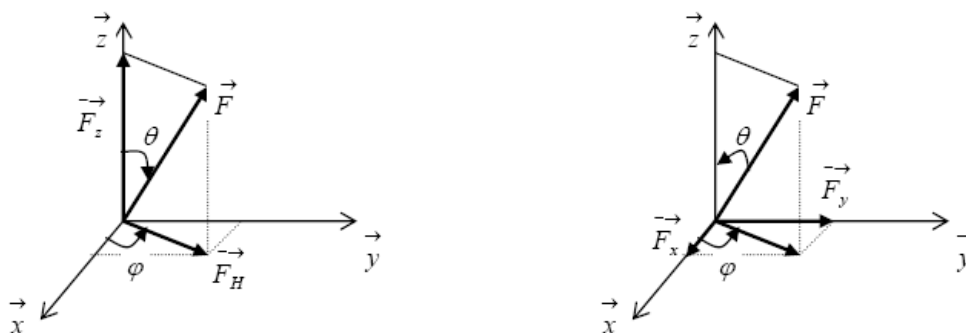
#### II.1.2. Classifications des forces

Pour faire le bilan des forces exercées sur un solide ( $S$ ), on utilisera les classifications suivantes :

1. Forces intérieures et forces extérieures : Les forces intérieures à ( $S$ ) sont les forces d'interaction, qui se développent entre les points matériels du solide donné et dont leur résultante est nulle. Les forces extérieures à ( $S$ ) sont exercées par un milieu extérieur (tous les autres corps qui sont en contact avec ( $S$ ) sur une partie de ( $S$ )).
2. Forces à distance et forces de contact : Les forces à distance seront les forces de gravitation et les forces électromagnétiques. Les forces de contact seront réparties sur les frontières où le système ( $S$ ) a des particules en contact avec des particules de l'entourage (milieu extérieur), ces frontières pouvant être des points, des courbes ou des surfaces (force de frottement fluide force de réaction d'un support, frottement de glissement).

#### II.1.3. Composante d'une force

Soit une force  $\vec{F}$  appliquée à l'origine d'un repère orthonormé  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  où  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  sont les vectrices unités (Fig. II.1).



**Fig. II.1 : Composantes d'une force**

Les composantes de cette force sont définies par :

$$\vec{F} = \vec{F}_H + \vec{F}_z = (\vec{F}_{Hx} + \vec{F}_{Hy}) + \vec{F}_z = F_H \cos(\varphi)\vec{x} + F_H \sin(\varphi)\vec{y} + F \cos(\theta)\vec{z} \quad (\text{II.1})$$

## Chapitre II : Statique des solides

mais :  $F_H = F \sin(\theta)$

On aura donc :

$$\vec{F} = F \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{x} + F \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{y} + F \cos(\theta) \vec{z} = F_x \vec{x} + F_y \vec{y} + F_z \vec{z} \quad (\text{II.2})$$

et son module :

$$\overline{F} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (\text{II.3})$$

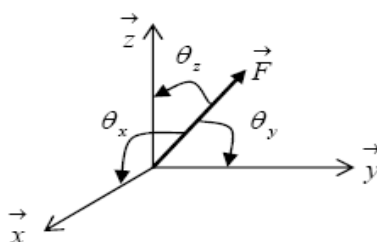
### II.1.4. Cosinus directeurs

Les projections de la force  $\vec{F}$  sur les trois axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  (Fig. II.2) donnent respectivement les angles :  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  et  $\theta_z$  appelées cosinus directeurs définies par :

$$\vec{F} = F_x \vec{x} + F_y \vec{y} + F_z \vec{z} = F \cos(\theta_x) \vec{x} + F \cos(\theta_y) \vec{y} + F \cos(\theta_z) \vec{z} = F \vec{\lambda} \quad (\text{II.4})$$

avec :

$$\vec{\lambda} = \cos(\theta_x) \vec{x} + \cos(\theta_y) \vec{y} + \cos(\theta_z) \vec{z} \quad (\text{II.5})$$



**Fig. II.2 : Cosinus directeurs**

### Remarque

Le vecteur  $\vec{\lambda}$  a la même direction que la force  $\vec{F}$  et il a pour module 1.

$$\vec{\lambda} = \cos^2(\theta_x) + \cos^2(\theta_y) + \cos^2(\theta_z) = 1 \quad (\text{II.6})$$

### II.1.5. Force définie par son module et deux points sur sa ligne d'action

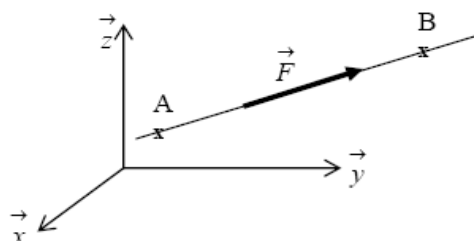
Soient deux points  $A(x_A, y_A, z_A)$  et  $B(x_B, y_B, z_B)$  appartenant à la droite  $(\Delta)$  support de la force  $\vec{F}$  (Fig. II.3).

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  s'écrira :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A) \vec{x} + (y_B - y_A) \vec{y} + (z_B - z_A) \vec{z} = d_x \vec{x} + d_y \vec{y} + d_z \vec{z} \quad (\text{II.7})$$

et son module :

$$\overline{AB} = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} \quad (\text{II.8})$$



**Fig. II.3 : Force définie par son module et deux points sur sa ligne d'action**

Soit  $\vec{u}$  le vecteur unitaire le long de la ligne d'action de la force. Il est donné par :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{d} (d_x \vec{x} + d_y \vec{y} + d_z \vec{z}) \quad (\text{II.9})$$

et comme la force est donnée par :

$$\vec{F} = F \vec{u} = \frac{F}{d} (d_x \vec{x} + d_y \vec{y} + d_z \vec{z}) \quad (\text{II.10})$$



## Chapitre II : Statique des solides

alors les composantes de  $\vec{F}$  suivant les trois axes du repère seront :

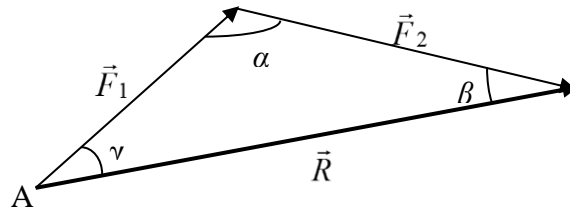
$$F_x = \frac{d_x}{d} F, F_y = \frac{d_y}{d} F \text{ et } F_z = \frac{d_z}{d} F \quad (\text{II.11})$$

### II.1.6. Composition de deux forces (Théorème des sinus)

La résultante  $\vec{R}$  de deux forces concourantes  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  se détermine par la règle du triangle (voir chapitre I).

Les angles  $\gamma$  et  $\theta$  que la résultante forme avec les vecteurs composants (Fig. II.4), se déterminent d'après le théorème des sinus. Constatant que  $\sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)$  nous obtenons :

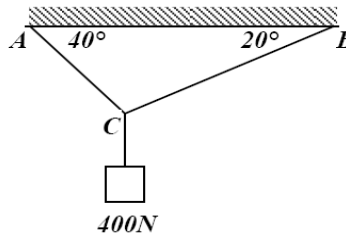
$$\frac{\vec{F}_1}{\sin(\beta)} = \frac{\vec{F}_2}{\sin(\gamma)} = \frac{\vec{R}}{\sin(\alpha)} \quad (\text{II.12})$$



**Fig. II.4 : Composition de deux forces (Règle du triangle)**

### Application 1

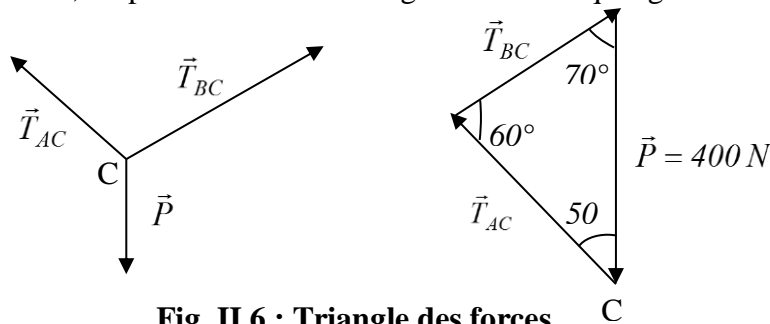
Déterminer les tensions des câbles dans la figure suivante :



**Fig. II.5 : Câbles sous tensions**

### Solution 1

A partir de la figure ci-dessus, on peut construire le triangle des forces qui agissent sur le point C :



**Fig. II.6 : Triangle des forces**

et on aura :

$$\frac{\vec{T}_{AC}}{\sin(70)} = \frac{\vec{T}_{BC}}{\sin(50)} = \frac{\vec{P}}{\sin(60)} = \frac{400}{0.87} = 459,77 \text{ et } \vec{T}_{AC} = 432 \text{ N} , \vec{T}_{BC} = 352,2 \text{ N}$$

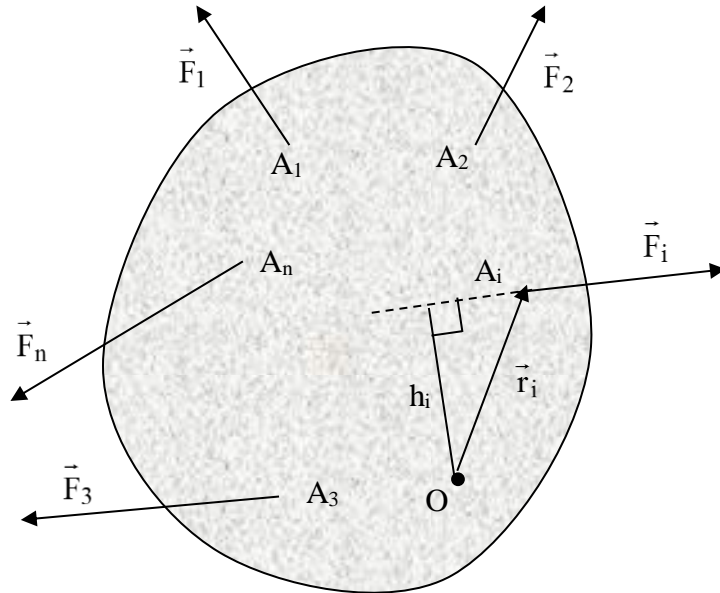
## II.2. Equilibre du solide

Prenant un solide ( $S$ ) soumis à des forces ( $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ ) appliquées aux points ( $A_1, A_2, \dots, A_N$ ) respectivement (Fig. II.7). Le solide ( $S$ ) est en équilibre lorsque les forces externes qui agissent sur lui forment un système de forces équivalent à zéro, c'est-à-dire un système où la résultante et le moment résultant de toutes les forces par rapport à un point quelconque,  $O$ , du plan d'action des forces soient égales à zéro. Cette condition nécessaire et suffisante d'équilibre d'un corps rigide se traduit analytiquement par les équations suivant :

## Chapitre II : Statique des solides

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i = \vec{0} \quad (\text{II.13})$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0} \quad (\text{II.14})$$



**Fig. II.7 : Corps rigide sous l'action de plusieurs forces**

Ou encore après projection des forces sur chacun des trois axes de coordonnées  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ , les deux dernières équations vectorielles se traduisent par les six équations scalaires suivantes :

$$R_x = \sum_{i=1}^{i=n} F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^{i=n} F_{iy} = 0, \quad R_z = \sum_{i=1}^{i=n} F_{iz} = 0 \quad (\text{II.15})$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{M}_O(\vec{F}_{ix}) = 0, \quad M_y = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{M}_O(\vec{F}_{iy}) = 0, \quad M_z = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{M}_O(\vec{F}_{iz}) = 0 \quad (\text{II.16})$$

C'est-à-dire, le solide (S) est en équilibre statique si seulement si le torseur représentant l'ensemble de ces actions est un torseur nul.

$$\{T\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_O(\vec{R}) \end{array} \right\}_O = 0 \quad (\text{II.17})$$

### Remarque

Le moment de la force  $\vec{F}_i$  par rapport au point  $O$ , (Fig. II.7), est défini par :

$$M_O(\vec{F}_i) = \pm r_i \wedge \vec{F}_i = \pm \vec{F}_i h_i \quad (\text{II.18})$$

### **II.3. Liaisons et leurs réactions**

Par définition, un corps libre est un corps qui peut effectuer des déplacements quelconques dans l'espace. Un corps, dont les déplacements dans l'espace sont limités par d'autres corps liés à lui ou se trouvant en contact avec lui, s'appelle un corps non libre. *Nous appellerons liaison tout ce qui limite les déplacements d'un corps donné dans l'espace et diminue ainsi ses degrés de liberté.* Un solide libre possède six degrés de liberté dans l'espace et trois dans un plan.

Le degré de liberté (*ddl*) d'une liaison est le *nombre de déplacements élémentaires indépendants autorisés par cette liaison.*

#### **II.3.1. Articulation d'un corps solide**

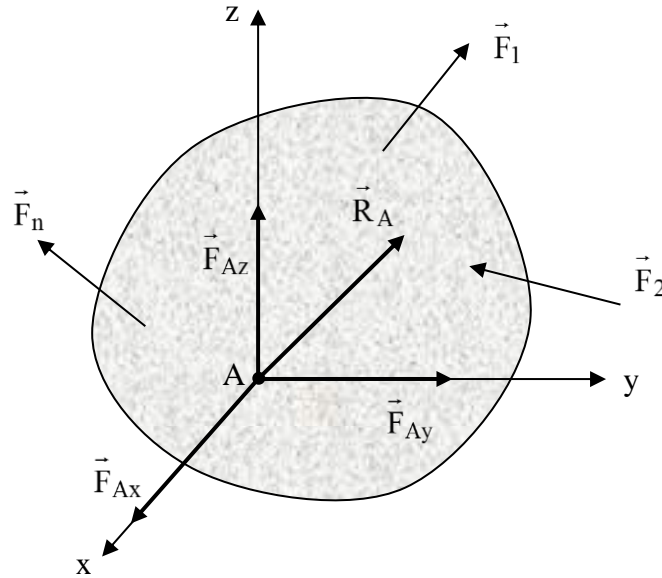
On dit qu'un point  $A$  d'un solide est une articulation lorsqu'il reste en permanence en un point fixe de l'espace (Fig. II.8).

## Chapitre II : Statique des solides

La force  $\vec{R}_A$  est la réaction d'articulation de module :

$$|\vec{R}_A| = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} \quad (\text{II.19})$$

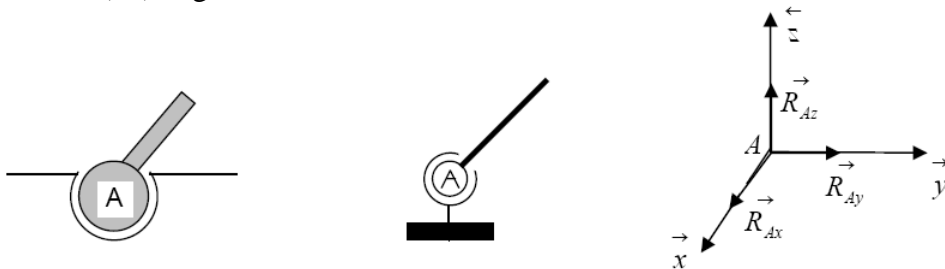
Dans le cas particulier de forces coplanaires la réaction d'articulation est:  $|\vec{R}_A| = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}$



**Fig. II.8 : Articulation d'un corps solide**

### II.3.1.1. Articulation sphérique (Liaison rotule)

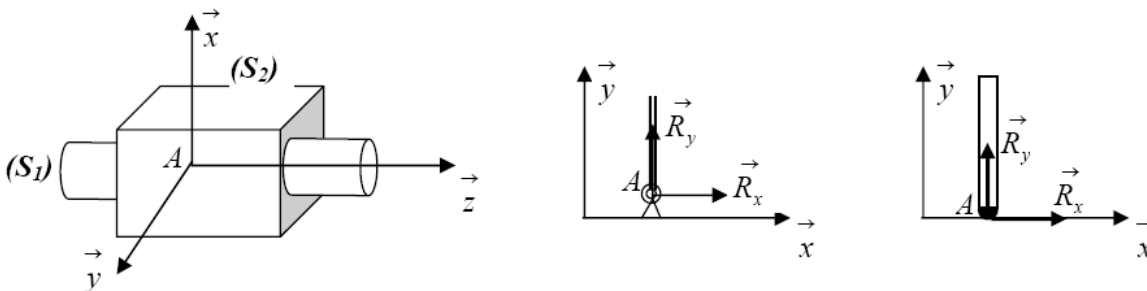
La réaction au point A de l'articulation sphérique (Fig. 9) à trois composantes :  $\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay} + \vec{R}_{Az}$  La liaison sphérique a trois (03) degrés de liberté.



**Fig. II.9 : Liaison sphérique**

### II.3.1.2. Articulation cylindrique

La surface de contact entre les solides est une surface cylindrique (Fig. II.10). Le solide ( $S_1$ ) à deux degrés de liberté par rapport au solide ( $S_2$ ): une translation suivant l'axe  $Az$  et une rotation autour du même axe. La réaction au point a deux composantes :  $\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay}$  et  $\vec{R}_{Az} = 0$



**Fig. II.10 : Articulation cylindrique**

### II.3.1.3. Articulation rotoïde (ou charnière) et appui fixe

Quoique de réalisations techniques différentes, (Fig. II.11a), ces deux fixations sont équivalentes au point de vue de leur fonction (si ce n'est la possibilité théorique de déplacement vertical laissée par l'appui

## Chapitre II : Statique des solides

fixe). L'articulation rotoïde est aussi appelée charnière et elles permettent uniquement une rotation relative. Ce sont donc des liaisons à 1 degré de liberté. La figure.11b est une représentation schématique.

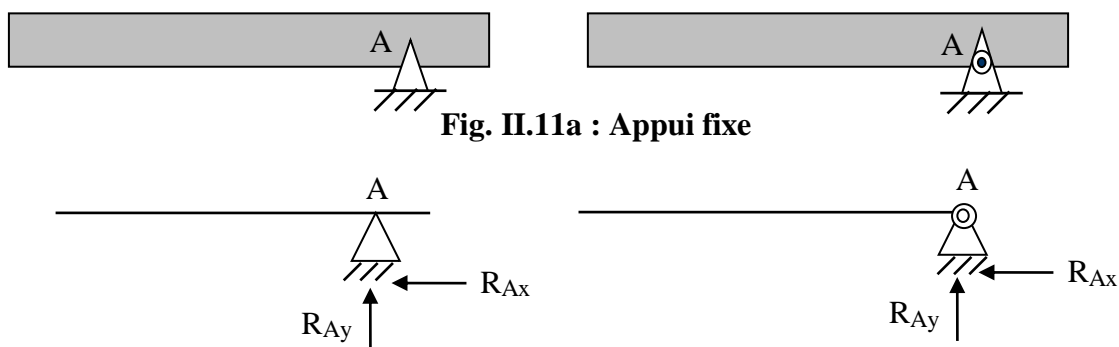


Fig. II.11b : Représentation schématique d'un appui fixe

### II.3.2. Appuis plans usuels

On pourrait imaginer des fixations de types très variés, mais en pratique celles que l'on rencontre dans les réalisations techniques peuvent être ramenées à quelques types fondamentaux, éventuellement combinés de diverses manières. Nous nous intéresserons ici aux principales liaisons planes.

#### II.3.2.1. Appui simple d'un solide sur une surface parfaitement lisse (liaison sans frottement)

Dans le cas d'une liaison parfaitement lisse (sans frottement ou idéale) entre un solide et un plan (surface) (Fig. II.12a), la réaction (la force de liaison) est toujours *normale au plan au point de contact* quel que soit le nombre de forces extérieures appliquées au solide. Lorsque l'une des surfaces en contact est un point (Fig. II.12b), la réaction est dirigée *le long de la normale à l'autre surface*.

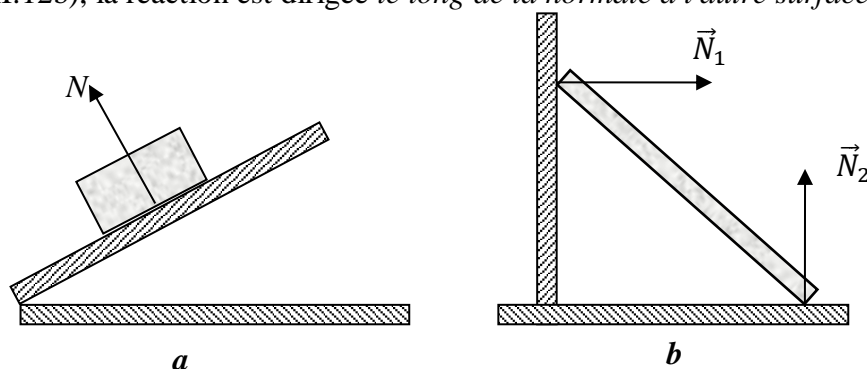


Fig. II.12 : Appui simple d'un solide sur une surface parfaitement lisse.

Dans le cas d'un contact ponctuel sans frottement, la condition d'équilibre est réalisée, si la somme de toutes les forces extérieures appliquées en ce point est égale à la réaction normale en ce point :

$$\vec{N} + \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad (\text{II.20})$$

#### II.3.2.2. Appui simple d'un solide sur une surface rugueuse (liaison avec frottement)

Dans le cas d'une surface avec frottement (Fig. II.13), la réaction  $\vec{R}$  est dirigée dans le sens contraire du mouvement et peut prendre une direction quelconque dans le plan formé par la force de frottement  $\vec{T}$  statique (dirigée dans le sens contraire du mouvement) et la force normale  $\vec{N}$  (perpendiculaire au plan incliné).

Dans le cas d'une surface avec frottements, la condition d'équilibre est :

$$\vec{N} + \vec{T} + \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad (\text{II.21})$$

C'est-à-dire; la somme des actions et des réactions est nulle.

Si  $\mu$  est le coefficient de frottement statique, qui dépend de la nature des surfaces de contact :

- Pour que l'équilibre statique soit réalisable il faut que :  $|\vec{T}| \leq \mu |\vec{N}|$
- A l'équilibre limite on aura :  $|\vec{T}| = \mu |\vec{N}| = tg\varphi |\vec{N}|$ .  $\varphi$  : angle de frottement statique.

## Chapitre II : Statique des solides

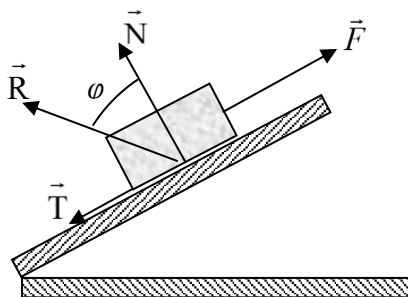


Fig. II.13 : Appui simple d'un solide sur une surface rugueuse.

### II.3.2.3. Appui simple (appui à roulement ou à dilatation)

Il permet une translation dans une direction précise (donnée par la direction du chemin de roulement des rouleaux, et horizontale dans le cas de la figure), et la rotation autour du point d'appui (c-à-d. le point situé à la verticale des rouleaux dans le cas illustré sur la figure II.14a). La raison d'être de ce type de fixation est de permettre une libre dilatation des ouvrages. Cette fixation permet deux (02) degrés de liberté. La figure.14b est une représentation schématique.

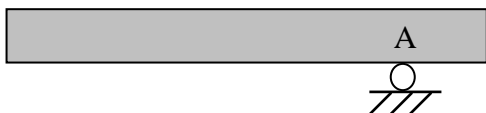


Fig. II.14a : Appui rouleur

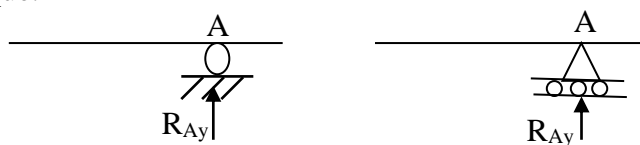


Fig. II.14b : Représentation schématique

### II.3.3. Glissière (sans frottement)

Cette fixation permet uniquement une translation relative (Fig. II.15a). C'est donc aussi une liaison à un (1) degré de liberté introduisant deux (2) contraintes et deux (2) inconnues : qui sont la composante de force perpendiculaire à la direction du mouvement de translation et un couple s'opposant à la rotation relative. La figure.15b est représentation schématique.

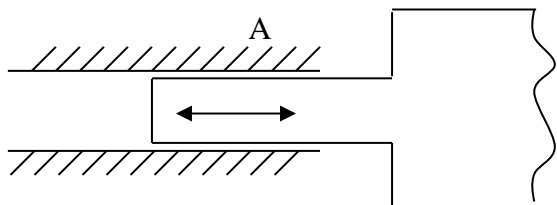


Fig. II.15a : Appui glissière

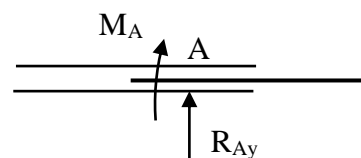


Fig. II.15b : Représentation schématique

### II.3.4. Encastrement plan

Cet appui fixe la position d'un point du solide et empêche également toute rotation autour de ce point (Fig. II.16a). C'est donc une fixation à zéro (0) degrés de liberté, qui introduit 3 contraintes et 3 inconnues (il y en aurait 6 pour un encastrement *spatial*) :

- Deux composantes (dans le plan) de la force de réaction appliquée au point d'encastrement A et qui empêchent les déplacements horizontaux et verticaux (Fig. 16b).
- Une composante (perpendiculaire au plan) de couple de réaction à l'encastrement et qui empêche la rotation du solide (Fig. 17b).

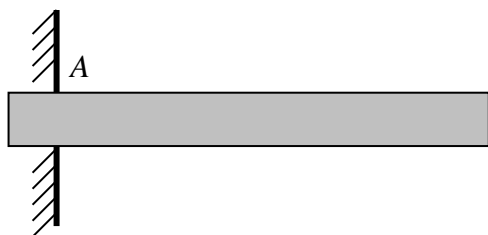


Fig. II.16a : Encastrement

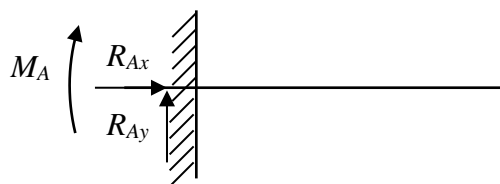


Fig. II.16b : Représentation schématique

## Chapitre II : Statique des solides

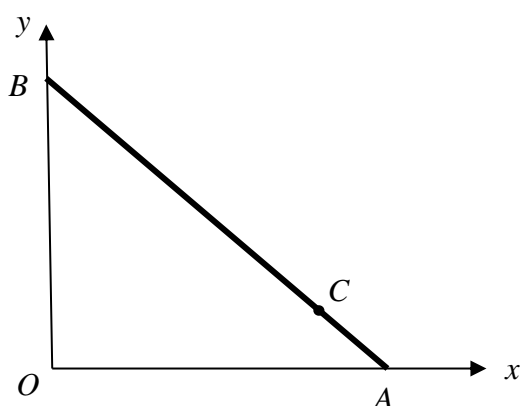
Le tableau II.1 suivant résume les différents types d'appuis et de liaisons et définit les composantes des réactions associées à celles-ci.

Tableau II.1	
Type de liaison	Composantes de la réaction
Appui simple à rouleau ou surface lisse sans frottement	$\vec{R}$ : la réaction normale au point d'appui
Appui simple avec frottement	$\vec{R}_x, \vec{R}_y$ : deux composantes dans le plan de contact
Articulation cylindrique de l'axe $Oz$	$\vec{R}_x, \vec{R}_y$ avec $\vec{R}_z = \vec{0}$ : la composante suivant l'axe de l'articulation est nulle
Articulation sphérique	$\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$ : trois composantes
Encastrement	$\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$ et $\vec{M}/A$ : trois composantes en plus du moment au point de l'encastrement

### Application 2

Une échelle de longueur  $20\text{ m}$  pesant  $400\text{ N}$  est appuyée contre un mur parfaitement lisse en un point situé à  $16\text{ m}$  du sol (Fig. 17a). Son centre de gravité  $C$  est situé à  $1/3$  de sa longueur à partir du bas. Un homme pesant  $700\text{ N}$  grimpe jusqu'au milieu de l'échelle et s'arrête. On suppose que le sol est rugueux et que le système reste en équilibre statique.

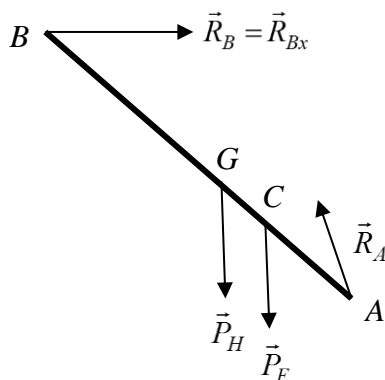
Déterminer les réactions aux points de contact de l'échelle avec le mur et le sol.



**Fig. 17a : Echelle sous l'action de plusieurs forces**

### Solution 2

On supprime les liaisons dans la figure 17b et on les remplace par les réactions correspondantes :



**Fig. 17b : Représentation des forces agissant sur l'échelle isolée**

## Chapitre II : Statique des solides

Condition d'équilibre de l'échelle isolée :

$$\text{Équilibre de translation : } \sum_i \vec{F}_i = \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{P}_H + \vec{P}_E = \vec{0} \quad (1)$$

$$\text{Équilibre de rotation : } \sum_i \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{AB} \wedge \vec{R}_B + \vec{AG} \wedge \vec{P}_H + \vec{AC} \wedge \vec{P}_E = \vec{0} \quad (2)$$

Nous avons aussi les relations suivantes :

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{12}{20} = 0,8 \Rightarrow \alpha = 53,13; \vec{AB} = \begin{pmatrix} -20 \cos(53.13) \\ 20 \sin(53.13) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \end{pmatrix};$$

$$\vec{AG} = \begin{pmatrix} -10 \cos(53.13) \\ 10 \sin(53.13) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}; \vec{AC} = \begin{pmatrix} -6,67 \cos(53.13) \\ 6,67 \sin(53.13) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5,33 \end{pmatrix}; \vec{P}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 700 \end{pmatrix}; \vec{P}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 400 \end{pmatrix};$$

La projection de l'équation (1) sur les deux axes donne les équations scalaires suivantes :

$$R_B - R_{Ax} = 0 \quad (3)$$

$$R_{Ay} - 700 - 400 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 1100 \text{ N} \quad (4)$$

En développant l'équation (2), on aboutit à :

$$\begin{pmatrix} -12 \\ 16 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_B \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -700 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5,33 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$16R_B + 4200 + 1600 = 0 \Rightarrow R_B = 362,5 \text{ N}$$

En remplace dans (3), on obtient :  $R_{Ax} = 362,5 \text{ N}$  et on déduit :  $R_A = 1158,34 \text{ N}$

## Chapitre III : Cinématique des solides indéformables

## Chapitre III : Cinématique des solides indéformables

Un solide indéformable ( $S_k$ ), pour lequel on peut négliger toute déformation, est par définition composé d'une multitude de particules, ou points matériels, dont les distances mutuelles sont constantes dans le temps. On peut privilégier un point  $O_k$  et définir une base orthonormée  $b_k(\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$  liée au solide ( $S_k$ ). On fabrique ainsi un repère  $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$  lié au solide ( $S_k$ ). La position de ce repère par rapport à un autre repère  $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  est définie par 6 paramètres ou degrés de liberté (*ddl*) :

- Trois (3) translations pour la position du point  $O_k$  ;
- Trois (3) rotations pour l'orientation de la base  $b_k$  du repère  $R_k$

Si ce solide est en liaison avec le repère  $R_i$  le nombre de *ddl* est inférieur à six (6).

### III.1. Mouvement d'un repère $R_k$ par rapport à un repère $R_i$ fixe

Soit un repère  $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  pris comme référence, repère dit *fixe* (appelé parfois *repère d'étude*) et  $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$  un repère dit *mobile* (par rapport à  $R_i$  et appelé parfois *repère de projection*). Les deux repères sont *orthonormés directs*.

Tout point de l'espace peut être totalement repéré dans  $R_k$  et déduire ses composantes dans  $R_i$  où inversement en connaissant le mouvement de  $R_k$  par rapport à  $R_i$ .

Le mouvement du repère  $R_k$  est complètement déterminée si :

- La position de son centre (ou origine)  $O_k$  est totalement connu dans  $R_i$  ;
- L'orientation des axes de  $R_k$  est connu par rapport à ceux de  $R_i$ .

### III.2. Repérage du centre $O_k$ du repère $R_k$

Le repérage du point  $O_k$  centre du repère  $R_k$  est déterminé par les composantes du vecteur  $\overrightarrow{O_i O_k}$  liant les deux centres des repères dans  $R_i$  ou  $R_k$ , ceci se traduit par les relations suivantes :

$$\text{dans } R_i : \left\{ \begin{array}{l} x_i = \overrightarrow{O_i O_k} \cdot \vec{x}_i \\ y_i = \overrightarrow{O_i O_k} \cdot \vec{y}_i \\ z_i = \overrightarrow{O_i O_k} \cdot \vec{z}_i \end{array} \right\}_{R_i} ; \quad \text{dans } R_k : \left\{ \begin{array}{l} x_k = \overrightarrow{O_i O_k} \cdot \vec{x}_k \\ y_k = \overrightarrow{O_i O_k} \cdot \vec{y}_k \\ z_k = \overrightarrow{O_i O_k} \cdot \vec{z}_k \end{array} \right\}_{R_k} \quad (\text{III.1})$$

### III.3. Repérage de l'orientation des axes du repère $R_k$

Pour repérer l'orientation des axes du repère  $R_k$  on ramène ce repère en  $O_i$  de telle sorte que les centres  $O_i$  et  $O_k$  soient confondues ( $O_i \equiv O_k$ ), (Fig. III.1). Le repère  $R_k$  est en rotation quelconque par rapport au repère  $R_i$ , dans ce cas chacun des vecteurs unitaires ( $\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k$ ) aura des composantes dans le repère  $R_i$ , nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \vec{x}_k &= \alpha_{11} \vec{x}_i + \alpha_{12} \vec{y}_i + \alpha_{13} \vec{z}_i \\ \vec{y}_k &= \alpha_{21} \vec{x}_i + \alpha_{22} \vec{y}_i + \alpha_{23} \vec{z}_i \\ \vec{z}_k &= \alpha_{31} \vec{x}_i + \alpha_{32} \vec{y}_i + \alpha_{33} \vec{z}_i \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_k \\ \vec{y}_k \\ \vec{z}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{x}_i \\ \vec{y}_i \\ \vec{z}_i \end{pmatrix} \quad (\text{III.3})$$

La matrice  $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$  est appelée *matrice de passage* de la base  $b_k$  ou *matrice de rotation*.

C'est plus précisément, la matrice qui permet de faire coïncider les systèmes  $R_i$  et  $R_k$ .

Les éléments  $\alpha_{ki}$  de la matrice  $A$  sont déterminés par :



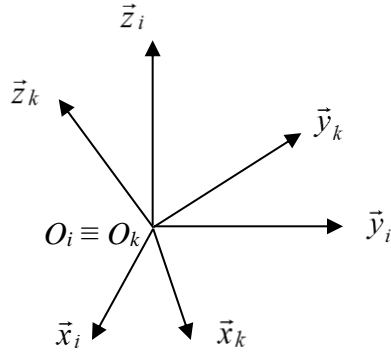
## Chapitre III : Cinématique des solides indéformables

$$\alpha_{ik} = \vec{x}_i \cdot \vec{x}_k \tag{III.4}$$

$\alpha_{ik}$  est la projection de la base  $b_k$  sur la base  $b_i$ .

On passe de la base  $b_i$  vers la base  $b_k$  par la matrice transposée  $A^t$  de  $A$  :

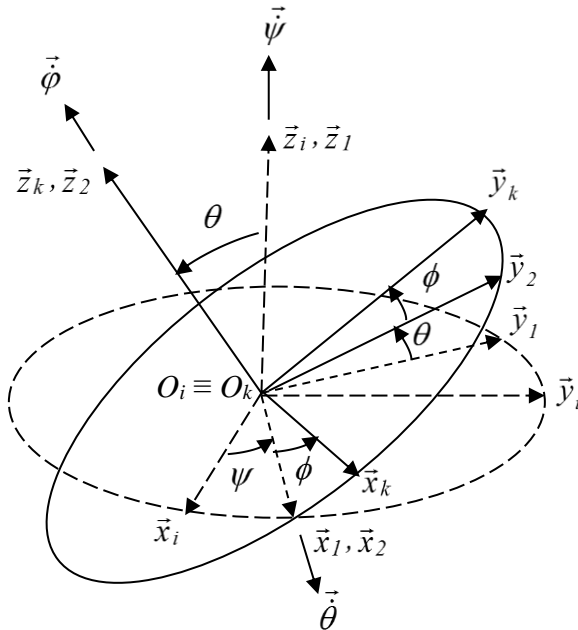
$$A^t = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \tag{III.5}$$



**Fig. III.1 : Repérage de l'orientation des axes d'un repère**

### III.4. Angles d'Euler

Toute rotation peut être considérée comme la suite de trois rotations élémentaires, autour de trois axes particuliers, et d'amplitudes égales aux *angles d'Euler* (Fig. III.2). Les *angles d'Euler* (qui sont en nombre de trois :  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$ ) constituent un paramétrage de la rotation du repère mobile  $R_k$  autour d'un point  $O$ .

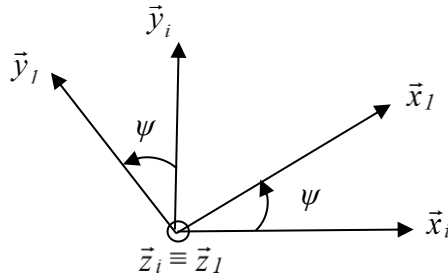


**Fig. III.2 : Définition des angles d'Euler**

Nous allons passer du repère fixe  $R_i$  au repère mobile  $R_k$  à l'aide de deux repères intermédiaires  $R_1$  et  $R_2$  qui jouent un rôle pratique important et qui définissent les angles d'Euler. Dans le cas des angles d'Euler, on considère que les centres  $O_i$  et  $O_k$  des deux repères sont confondus : ( $O_i \equiv O_k$ ), ce qui signifie que le repère  $R_k$  ne fait que des rotations par rapport au repère  $R_i$  (Fig. III.1).

Le repère  $R_1$  est défini par  $\vec{x}_1 \in (O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i)$  : l'intersection des plans  $(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i)$  et  $(O_i, \vec{x}_k, \vec{y}_k)$  est appelée *ligne des nœuds* (Fig. III.2). On passe de  $R_i$  à  $R_1$  par une rotation d'angle  $\psi$  autour  $\vec{z}_i = \vec{z}_1 = \vec{x}_1 \wedge \vec{y}_1$  dite *précession* (Fig. III.3).

## Chapitre III : Cinématique des solides indéformables



**Fig. III.3 : passage du repère  $R_i$  vers  $R_I$**

Par inspection de la figure III.3, on obtient :

$$\vec{x}_i = (\vec{x}_i \cdot \vec{x}_I) \vec{x}_I + (\vec{x}_i \cdot \vec{y}_I) \vec{y}_I + (\vec{x}_i \cdot \vec{z}_I) \vec{z}_I$$

$$\vec{x}_i = \cos \psi \vec{x}_I + \cos(\psi + \frac{\pi}{2}) \vec{y}_I + \cos(\frac{\pi}{2}) \vec{z}_I \Rightarrow \vec{x}_i = \cos \psi \vec{x}_I - \sin \psi \vec{y}_I + 0 \vec{z}_I ;$$

$$\vec{y}_i = \cos(\frac{\pi}{2} - \psi) \vec{x}_I + \cos \psi \vec{y}_I + \cos(\frac{\pi}{2}) \vec{z}_I \Rightarrow \vec{y}_i = \sin \psi \vec{x}_I + \cos \psi \vec{y}_I + 0 \vec{z}_I ;$$

$$\vec{z}_i = \vec{z}_I$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_i \\ \vec{y}_i \\ \vec{z}_i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_\psi} \cdot \begin{pmatrix} \vec{x}_I \\ \vec{y}_I \\ \vec{z}_I \end{pmatrix} \quad \text{(III.6)}$$

On peut aussi dresser le tableau suivant qui nous permet de passer d'une base à une autre:

$\vec{x}_I$	$\vec{y}_I$	$\vec{z}_I$
$\vec{x}_i$	$\alpha_{12}$	$\alpha_{13}$
$\vec{y}_i$	$\alpha_{22}$	$\alpha_{23}$
$\vec{z}_i$	$\alpha_{32}$	$\alpha_{33}$

Les éléments  $\alpha_{ik}$  du tableau sont déterminés, en utilisant la relation (III.4), comme suit :

$\alpha_{11} = \vec{x}_I \cdot \vec{x}_i$  : l'intersection de la première ligne de  $\vec{x}_I$  avec la première colonne de  $\vec{x}_i$  ;

$\alpha_{12} = \vec{x}_I \cdot \vec{y}_i$  : l'intersection de la première ligne de  $\vec{x}_I$  avec la deuxième colonne de  $\vec{y}_i$  ;

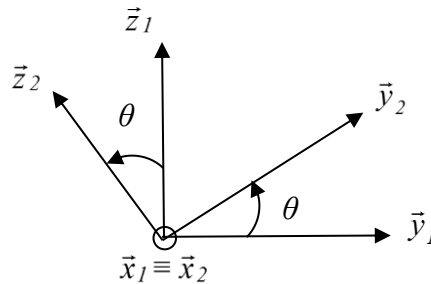
$\alpha_{13} = \vec{x}_I \cdot \vec{z}_i$  : l'intersection de la première ligne de  $\vec{x}_I$  avec la troisième colonne de  $\vec{z}_i$  et ainsi de suite.

Remarquons que la rotation instantanée du repère  $R_I$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_i$  est :

$$\vec{\Omega}(R_I / R_i) = \vec{\Omega}_I^i = \vec{\psi} = \dot{\psi} \vec{z}_i \quad \text{(III.7)}$$

Les repères utilisés sont direct et le sens du vecteur rotation instantané  $\vec{\psi}$  est celui de l'axe  $\vec{Oz}_i$ , dans le sens positif (voir Fig. III.2).

Le repère  $R_2$  est défini par  $\vec{x}_2 = \vec{x}_I$ ,  $\vec{z}_2 = \vec{z}_k$ ,  $\vec{x}_2 = \vec{y}_2 \wedge \vec{z}_2$ . On passe de  $R_I$  à  $R_2$  par une rotation d'angle  $\theta$  autour de  $\vec{x}_I = \vec{x}_2$  dite *nutaton* (Fig. III.4).



**Fig. III.4 : passage du repère  $R_I$  vers  $R_2$**

## Chapitre III : Cinématique des solides indéformables

De la même manière précédente on trouve :

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_2$$

$$\vec{y}_1 = 0\vec{x}_2 + \cos\theta \vec{y}_2 - \sin\theta \vec{z}_2$$

$$\vec{z}_1 = 0\vec{x}_2 + \sin\theta \vec{y}_2 + \cos\theta \vec{z}_2$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{A_\theta} \cdot \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.8})$$

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_i \\ \vec{y}_i \\ \vec{z}_i \end{pmatrix} = A_\psi \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = A_\psi \cdot A_\theta \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.9})$$

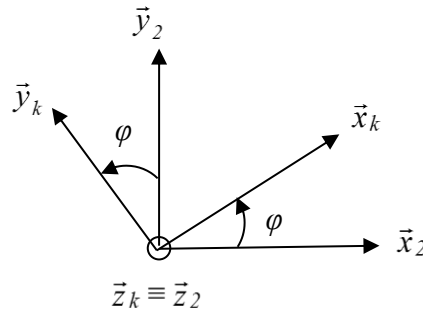
Remarquons que la rotation instantanée du repère  $R_2$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_1$  est :

$$\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \vec{\Omega}_2^1 = \vec{\theta} = \dot{\theta} \vec{x}_1 \quad (\text{III.10})$$

et  $R_2$  par rapport à  $R_i$  est :

$$\vec{\Omega}_2^i(R_2/R_i) = \vec{\Omega}_2^i = \vec{\psi} + \vec{\theta} = \dot{\psi} \vec{z}_i + \dot{\theta} \vec{x}_1 \quad (\text{III.11})$$

Le passage de  $R_2$  à  $R_k$  est repéré par une rotation d'angle  $\varphi$  autour de  $\vec{z}_2 = \vec{z}_k$  dite rotation propre et  $\vec{z}_k = \vec{x}_k \wedge \vec{y}_k$  (Fig. III.5).



**Fig. III.5 : passage du repère  $R_2$  vers  $R_k$**

On trouve la matrice de passage suivante :

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{A_\varphi} \cdot \begin{pmatrix} \vec{x}_k \\ \vec{y}_k \\ \vec{z}_k \end{pmatrix} \quad (\text{III.12})$$

Remarquons que la rotation instantanée du repère  $R_k$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_i$  est :

$$\vec{\Omega}_k^i = \vec{\psi} + \vec{\theta} + \vec{\phi} = \dot{\psi} \vec{z}_i + \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\phi} \vec{z}_k \quad (\text{III.13})$$

L'exposant point (.) représente la dérivée par rapport au temps de la grandeur considérée.

Enfin et sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_i \\ \vec{y}_i \\ \vec{z}_i \end{pmatrix} = A_\psi \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = A_\psi \cdot A_\theta \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} = A_\psi \cdot A_\theta \cdot A_\varphi \begin{pmatrix} \vec{x}_k \\ \vec{y}_k \\ \vec{z}_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{x}_k \\ \vec{y}_k \\ \vec{z}_k \end{pmatrix} \quad (\text{III.14})$$

On passe donc de  $R_i$  vers  $R_k$  par la matrice  $A = A_\psi \cdot A_\theta \cdot A_\varphi$  :

## Chapitre III : Cinématique des solides indéformables

$$A = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{III.15})$$

### III.4.1. Formules d'Euler

Les composantes du vecteur rotation instantané  $\vec{\Omega}_k^i$  dans les repères  $R_i$  et  $R_k$  sont données par les formules d'Euler :

$$\vec{\Omega} / R_i : \begin{cases} p_i = \dot{\varphi} \sin(\theta) \sin(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi) \\ q_i = -\dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\psi) + \dot{\theta} \sin(\psi) \\ r_i = \dot{\varphi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

$$\vec{\Omega} / R_k : \begin{cases} p_k = \dot{\psi} \sin(\theta) \sin(\varphi) + \dot{\theta} \cos(\varphi) \\ q_k = \dot{\psi} \sin(\theta) \cos(\varphi) - \dot{\theta} \sin(\varphi) \\ r_k = \dot{\psi} \cos(\theta) + \dot{\varphi} \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

Pour trouver les composantes du vecteur  $\vec{\Omega}$  dans le repère  $R_k$  à partir de celles de  $R_i$ , il suffit de *changer* les rôles et de remarquer que l'on passe de  $R_k$  à  $R_i$  par une précession  $(-\varphi)$ , une nutation  $(-\theta)$  et une rotation propre  $(-\psi)$ . La vitesse de rotation de  $R_k$  relativement à  $R_i$  étant  $(-\vec{\Omega})$ . En changeant donc :  $\psi$  en  $-\varphi$ ,  $\theta$  en  $-\theta$ ,  $\varphi$  en  $-\psi$  et  $\dot{\psi}$  en  $-\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\theta}$  en  $-\dot{\theta}$ ,  $\dot{\varphi}$  en  $-\dot{\psi}$ .

### III.5. Dérivation d'un vecteur dans un repère mobile

Considérons un repère fixe  $R_i$  et un repère  $R_k$  en mouvement par rapport à  $R_i$ . Si un vecteur  $\vec{A}$  a des composantes  $A_x, A_y$ , et  $A_z$  et si on désigne par  $(\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$  les vecteurs de base  $b_k$  du repère mobile, on aura dans le repère mobile :

$$\vec{A} = A_x \vec{x}_k + A_y \vec{y}_k + A_z \vec{z}_k \quad (\text{III.18})$$

Si nous dérivons ceci en considérons le mouvement des vecteurs  $\vec{x}_k, \vec{y}_k$  et  $\vec{z}_k$  nous obtiendrons la dérivée de  $\vec{A}$  dans le repère  $R_i$ , on écrira donc :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \vec{x}_k + \frac{dA_y}{dt} \vec{y}_k + \frac{dA_z}{dt} \vec{z}_k + A_x \frac{d\vec{x}_k}{dt} + A_y \frac{d\vec{y}_k}{dt} + A_z \frac{d\vec{z}_k}{dt} \quad (\text{III.19})$$

Les trois premiers termes existeraient seuls si l'on avait considéré les vecteurs de base comme fixes, ils représentent donc la dérivée du vecteur  $\vec{A}$  dans le repère mobile :  $\left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{R_k}$ . On transformera les trois

derniers en utilisant la *formule de la base mobile* :

$$\frac{d\vec{x}_k}{dt} = (\vec{\Omega}_k)_{R_i} \wedge \vec{x}_k = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{x}_k \quad (\text{III.20})$$

Finalement :

$$\left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{R_i} = \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{R_k} + (\vec{\Omega}_k)_{R_i} \wedge \vec{A} \quad \text{ou encore} \quad \frac{d^i \vec{A}}{dt} = \frac{d^k \vec{A}}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{A} \quad (\text{III.21})$$

$\frac{d^i \vec{A}}{dt}$  représente la dérivée du vecteur  $\vec{A}$  par rapport au repère fixe  $R_i$ .

$\frac{d^k \vec{A}}{dt}$  représente la dérivée du vecteur  $\vec{A}$  par rapport au repère mobile  $R_k$ .

## Chapitre III : Cinématique des solides indéformables

$\vec{\Omega}_k^i$  désigne la vitesse instantanée de rotation (vecteur rotation instantané) du repère mobile  $R_k$  par rapport au repère fixe  $R_i$ .

### III.6. Champ des vitesses d'un solide

A chaque point d'un solide ( $S_k$ ) (Fig. III.6), on peut associer son vecteur vitesse défini par :

$$\vec{V}^i(A_k) = \frac{d^i \overrightarrow{O_i A_k}}{dt} \quad (\text{III.22})$$

L'indice  $i$  est lié au repère fixe. Les deux points  $A_k$  et  $B_k$  appartiennent au solide ( $S_k$ ).

( $S_k$ ) solide rigide  $\Rightarrow \overrightarrow{A_k B_k} = Cte$  au cours du temps. Cherchons la relation entre  $\vec{V}^i(A_k)$  et  $\vec{V}^i(B_k)$ .

D'après la dérivation d'un vecteur :

$$\vec{V}^i(A_k) = \frac{d^i}{dt}(\overrightarrow{O_i A_k}) = \frac{d^k}{dt}(\overrightarrow{O_i A_k}) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_i A_k} \quad (\text{III.23})$$

$$\vec{V}^i(B_k) = \frac{d^i}{dt}(\overrightarrow{O_i B_k}) = \frac{d^k}{dt}(\overrightarrow{O_i B_k}) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_i B_k} \quad (\text{III.24})$$

$$\vec{V}^i(B_k) - \vec{V}^i(A_k) = \frac{d^k}{dt}(\overrightarrow{O_i B_k} - \overrightarrow{O_i A_k}) + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\overrightarrow{O_i B_k} - \overrightarrow{O_i A_k}) \quad (\text{III.25})$$

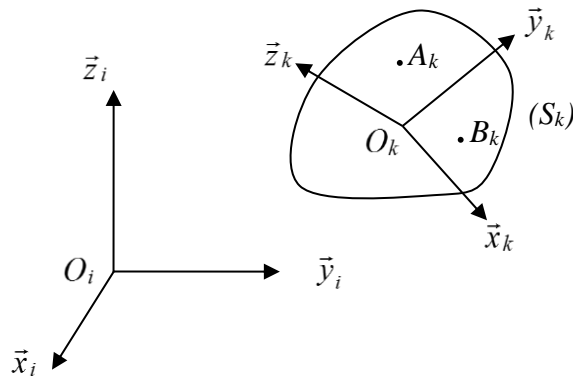
$$\vec{V}^i(B_k) - \vec{V}^i(A_k) = \frac{d^k}{dt}(\overrightarrow{A_k B_k}) + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\overrightarrow{A_k B_k}) \quad (\text{III.26})$$

or :

$$\overrightarrow{A_k B_k} = Cte \text{ dans } (\vec{R}_k) \Rightarrow \frac{d^k}{dt}(\overrightarrow{A_k B_k}) = 0 \quad (\text{III.27})$$

d'où :

$$\vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\overrightarrow{A_k B_k}) \quad (\text{III.28})$$



**Fig. III.6 : Solide ( $S_k$ ) en mouvement : relation entre les vitesses des points du solide**

La relation (III.28) est une relation *très importante* dans la cinématique, elle permet à partir de la vitesse d'un point du solide de déduire la vitesse de tous les autres point du solide en connaissant la vitesse de rotation du repère lié a celui-ci.

### III.7. Champ des accélérations d'un solide

A chaque point d'un solide ( $S_k$ ), on peut associer son vecteur accélération défini par :

$$\vec{\gamma}^i(A_k) = \frac{d^i}{dt}(\vec{V}^i(A_k)) \quad (\text{III.29})$$

Relation entre  $\vec{\gamma}^i(A_k)$  et  $\vec{\gamma}^i(B_k)$  :

On sait que :  $\vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\overrightarrow{A_k B_k})$ , donc :

$$\vec{\gamma}^i(B_k) = \frac{d^i}{dt}(\vec{V}^i(A_k)) + \frac{d^i}{dt}(\vec{\Omega}_k^i \wedge (\overrightarrow{A_k B_k})) \quad (\text{III.30})$$

## Chapitre III : Cinématique des solides indéformables

$$\vec{\gamma}^i(B_k) = \frac{d^i}{dt}(\vec{V}^i(A_k)) + \frac{d^i}{dt}(\vec{\Omega}_k^i) \wedge \overrightarrow{A_k B_k} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \frac{d^i}{dt}(\overrightarrow{A_k B_k}) \quad (\text{III.31})$$

or :

$$\frac{d^i}{dt}(\overrightarrow{A_k B_k}) = \underbrace{\frac{d^k}{dt}(\overrightarrow{A_k B_k})}_0 + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k} \quad (\text{III.32})$$

d'où :

$$\vec{\gamma}^i(B_k) = \vec{\gamma}^i(A_k) + \frac{d^i}{dt}(\vec{\Omega}_k^i) \wedge \overrightarrow{A_k B_k} + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k}) \quad (\text{III.33})$$

### III.8. Torseur cinématique

Le torseur cinématique a pour rôle de caractériser complètement le mouvement d'un solide par rapport au repère  $R_i$  en ce qui concerne les vitesses. Il permet de représenter de façon pratique le champ des vitesses d'un solide indéformable et donc décrire les comportements de translation et de rotation d'un tel solide, en général dans un repère orthonormé direct.

Soit  $\{T\}_{B_k}$  : le torseur cinématique au point  $B_k$ , il est défini comme suite :

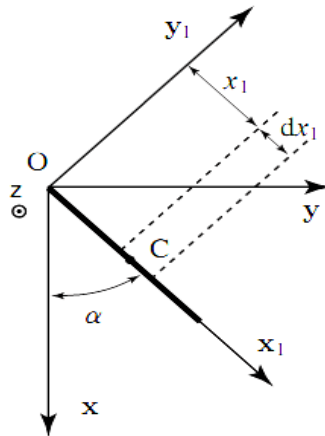
$$\{T\}_{B_k} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_k^i \\ \vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k} \end{array} \right\}_{B_k} \quad (\text{III.34})$$

#### Application 1

Considérons une barre homogène d'épaisseur négligeable, de longueur  $L$  et de masse  $m$  en rotation autour de l'axe  $Oz$  avec vitesse de rotation,  $\omega$ , constante (Fig. III.7).

On prendra le repère mobile  $R_I(O, x_I, y_I, z_I)$  comme repère de projection.

1. Déterminer la matrice de passage de  $R_I$  vers  $R$ .
2. Déterminer, par rapport à  $R(O, x, y, z)$ , les vecteurs vitesse et accélération du centre de masse  $C$ .



**Fig. III.7 : Barre en rotation autour d'un axe fixe  $Oz$ .**

#### Solution 1

1. On détermine la matrice de  $R_I$  passage de vers  $R$  en exprimant les vecteurs unitaires de  $R_I$  en fonction de ceux de  $R$ . La projection de la base  $b_I(\vec{x}_I, \vec{y}_I, \vec{z}_I)$  sur la base  $b(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , donne :

$$\vec{x}_I = \cos(\alpha)\vec{x} + \sin(\alpha)\vec{y} + 0\vec{z}$$

$$\vec{y}_I = \cos(\alpha)\vec{y} - \sin(\alpha)\vec{x} + 0\vec{z}$$

$$\vec{z}_I = \vec{z}$$

On peut donc écrire :

## Chapitre III : Cinématique des solides indéformables

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_I \\ \bar{y}_I \\ \bar{z}_I \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{R_I \rightarrow R}} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

2. Le vecteur vitesse rotation de la barre est donné par :  $\vec{\Omega}_I^0 = \dot{\alpha} \bar{z} = \dot{\alpha} \bar{z}_I$  ( $\dot{\alpha}_z = \alpha$  et  $\dot{\alpha}_x = \dot{\alpha}_y = 0$ ) et le vecteur position du centre de masse  $C$  :  $\overrightarrow{OC} = \frac{L}{2} \bar{x}_I$ .

La vitesse du point  $C$  par rapport à  $R$  exprimée dans  $R_I$  est :

$$\vec{V}(C)_{/R} = \left( \frac{d(\overrightarrow{OC})}{dt} \right)_R = \left( \frac{d(\overrightarrow{OC})}{dt} \right)_{R_I} + \vec{\Omega}_{R_I}^R \wedge \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{L}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{L}{2} \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}(C)_{/R} = \frac{L}{2} \dot{\alpha} \bar{y}_I$$

L'accélération du point  $C$  par rapport à  $R$  exprimée dans  $R_I$  est :

$$\vec{\gamma}(C)_{/R} = \left( \frac{d(\vec{V}(C))}{dt} \right)_R = \left( \frac{d(\vec{V}(C))}{dt} \right)_{R_I} + \vec{\Omega}_{R_I}^R \wedge \vec{V}(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{L}{2} \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{L}{2} \dot{\alpha}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}(C)_{/R} = -\frac{L}{2} \dot{\alpha}^2 \bar{x}_I$$

### III.9. Mouvements particuliers fondamentaux

#### III.9.1. Mouvement de translation

Un solide ( $S_k$ ) lié à un repère  $R_k$  est dit en translation par rapport à un repère  $R_i$  si les axes de  $R_k$  garde une direction fixe par rapport à  $R_i$  au cours du temps (Fig. III.8).

Puisque le vecteur  $\overrightarrow{O_k A_k} = Cte$  On obtient alors :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_k^i &= \vec{0} \\ \vec{V}_k^i(A_k) &= \vec{V}_k^i(O_k) \end{aligned} \tag{III.35}$$

$\vec{V}_k^i(A_k)$  : vitesse du point  $A_k$  appartenant à ( $S_k$ ) par rapport à  $R_i$ .

Dans un mouvement de translation, tous les points du solide ( $S_k$ ) décrivent les même trajectoires à chaque instant ils possèdent des vitesses et des accélérations égales en module et en direction, le vecteur rotation est nul.

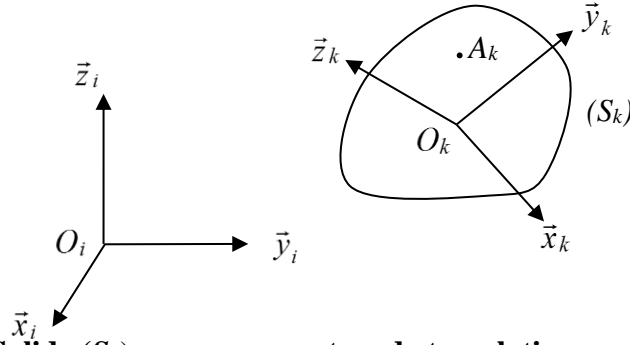
Le torseur cinématique (torseur des vitesses ou distributeur de vitesses de  $S_k$ ) est un *couple* :

$$T_{V_{k/i}} = \begin{cases} \vec{\Omega}_k^i = \vec{0} \\ \vec{V}_k^i(O_k) \end{cases} \tag{III.36}$$

*Remarquons* que les notions de vitesse et d'accélération du solide n'ont de sens que pour le mouvement de translation seulement.

Dans tout les autres cas, comme on le verra, les points du solide se déplacent avec des vitesses et des accélérations *différentes* et pour ces mouvements les expressions vitesse du solide ou accélération du solide *n'ont pas de sens*.

## Chapitre III : Cinématique des solides indéformables



**Fig. III.8 : Solide  $(S_k)$  en mouvement en de translation par rapport à  $R_i$**

### III.9.2. Mouvement de rotation

Un solide  $(S_k)$  lié à un repère  $R_k$  est dit en rotation par rapport à un repère  $R_i$  si un axe de  $R_k$  reste fixe à tout instant dans  $R_i$  (Fig. III.9).

$I \in \vec{z}_i$  ou  $\vec{z}_k$  et  $\vec{\Omega}_k^i = \dot{\psi} \vec{z}_i = \dot{\psi} \vec{z}_k$ .

$$\vec{V}_k^i(I) = \underbrace{\vec{V}^k(O_k)}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k I}}_{=\vec{0} \text{ (} \vec{\Omega}_k^i // O_k I \text{)}} = \vec{0} \quad (\text{III.37})$$

$$\vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{IA_k} \quad (\text{III.38})$$

Dans un mouvement de rotation le torseur cinématique est équivalent à un *glisseur* :

$$T_{V_k/i} = \begin{cases} \vec{\Omega}_k^i \\ \vec{V}_k^i(I) = \vec{0}, \quad I \in \vec{z}_i \equiv \vec{z}_k \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

L'axe central  $\Delta(R_k/R_i)$  du glisseur est appelé *axe instantané de rotation* de  $R_k$  par rapport à  $R_i$ .

Calculons l'accélération du point  $A_k$  :

$$\vec{\gamma}^i(A_k) = \frac{d^i}{dt}(\vec{V}^i(A_k)) = + \frac{d^i}{dt}(\vec{\Omega}_k^i) \wedge \overrightarrow{IA_k} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \frac{d^i}{dt}(\overrightarrow{IA_k}) \quad (\text{III.40})$$

or :

$$\frac{d^i}{dt}(\overrightarrow{IA_k}) = \frac{d^k}{dt}(\overrightarrow{IA_k}) + (\vec{\Omega}_k^i) \wedge \overrightarrow{IA_k} \quad \text{avec} \quad \frac{d^k}{dt}(\overrightarrow{IA_k}) = 0 \quad (\text{III.41})$$

donc :

$$\vec{\gamma}^i(A_k) = + \frac{d^i}{dt}(\vec{\Omega}_k^i) \wedge \overrightarrow{IA_k} + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{IA_k}) \quad (\text{III.42})$$

mais :

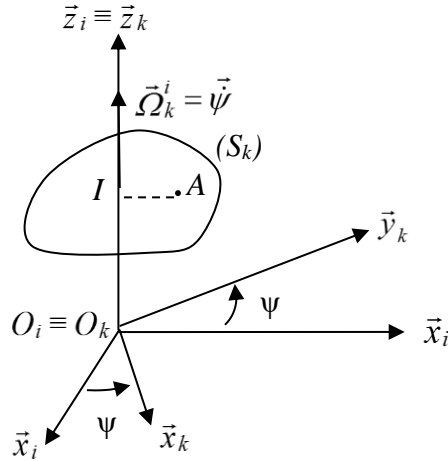
$$\vec{\Omega}_k^i \wedge (\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{IA_k}) = \underbrace{\vec{\Omega}_k^i \cdot (\vec{\Omega}_k^i \cdot \overrightarrow{IA_k})}_{=0 \text{ (} \vec{\Omega}_k^i \perp \overrightarrow{IA_k} \text{)}} - \overrightarrow{IA_k} \cdot (\vec{\Omega}_k^i \cdot \vec{\Omega}_k^i) = -\overrightarrow{IA_k} \cdot (\vec{\Omega}_k^i \cdot \vec{\Omega}_k^i) \quad (\text{III.43})$$

d'où :

$$\vec{\gamma}^i(A_k) = \overrightarrow{IA_k} \cdot (\vec{\Omega}_k^i)^2 + \frac{d}{dt}(\vec{\Omega}_k^i) \wedge \overrightarrow{IA_k} = \underbrace{\vec{\gamma}_n^i(A_k)}_{\text{Normale}} + \underbrace{\vec{\gamma}_t^i(A_k)}_{\text{Tangentielle}} \quad (\text{III.44})$$



## Chapitre III : Cinématique des solides indéformables



**Fig. III.9 : Solide  $(S_k)$  lié à  $R_k$  en mouvement en de rotation par rapport à  $R_i$**

### III.9.3. Mouvement hélicoïdal

Un solide  $(S_k)$  lié à un repère  $R_k$  est animé d'un mouvement hélicoïdal par rapport à un  $R_i$  (Fig. III.10), si :

- Un axe de  $R_k$  reste en coïncidence avec un axe de  $R_i$ .
- L'angle  $\psi$  qui repère la rotation autour de l'axe commun de  $R_k$  par rapport à  $R_i$ , est proportionnel à la cote  $z$  qui repère le déplacement du point  $O_k$  par rapport au point  $O_i$  :
- Un point  $A_k$ , de  $(S_k)$ , en mouvement sur une trajectoire hélicoïdale dans  $R_i$ , décrit une hélice droite, dessinée sur un cylindre de rayon  $\left| \overrightarrow{O_k A_k} \right| = a$ .

Les coordonnées cartésiennes du point  $A_k$  dans  $R_i$  sont données par les équations paramétriques en fonction du temps sous la forme suivante :

$$x = a \cos(\psi); \quad y = a \sin(\psi); \quad z = b\psi \tag{III.45}$$

avec :  $a$  et  $b$  sont respectivement le rayon et le pas réduit de l'hélice ( $b = h/2\pi$ ,  $h$  est le pas de l'hélice).

Si on suppose que :  $\overrightarrow{O_i O_k} = z \vec{z}_i = z \vec{z}_k$ , le vecteur position du point  $A_k$  est alors donné dans  $R_k$  par :

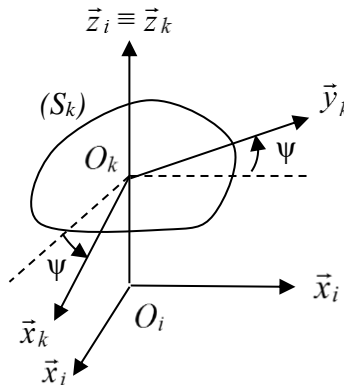
$$\overrightarrow{O_i A_k} = a \vec{x}_k + z \vec{z}_k = a \vec{x}_k + b\psi \vec{z}_k \tag{III.46}$$

le vecteur vitesse par :

$$\vec{V}(A_k) = a(\dot{\psi} \wedge \vec{x}_k) + b\dot{\psi} \vec{z}_k = a\dot{\psi} \vec{y}_k + b\dot{\psi} \vec{z}_k \tag{III.47}$$

et le vecteur accélération par :

$$\vec{\gamma}(A_k) = -a\dot{\psi}^2 \vec{x}_k + a\ddot{\psi} \vec{y}_k + b\ddot{\psi} \vec{z}_k \tag{III.48}$$



**Fig. III.10 : mouvement hélicoïdal de  $R_k$  par rapport à  $R_i$**

## Chapitre III : Cinématique des solides indéformables

### III.10. Mouvement composé du point matériel

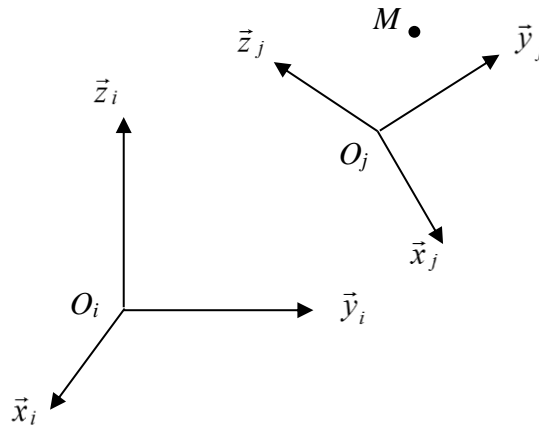
Examinons le mouvement composé du point  $M$ , se déplaçant par rapport au système de référence mobile  $R_j(O_j, \vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_j)$ , qui se meut à son tour d'une manière arbitraire par rapport au système de référence  $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  considéré comme fixe (Fig. III.11).  $(\vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_j)$  sont les vecteurs unitaires du système mobile et  $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  ceux du système fixe.

On qualifiera d'*absolu* tout ce qui est relatif à  $R_i$  (*repère absolu*) : mouvement, trajectoire ( $\Gamma$ ), vitesse du point  $\vec{V}_a(M) = \vec{V}(M/R_i) = \vec{V}^i(M)$ , accélération  $\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}^i(M)$ ; et on qualifiera de relatif ce qui est relatif à  $R_j$  : mouvement, trajectoire ( $\Gamma$ ), vitesse  $\vec{V}_r(M) = \vec{V}(M/R_j) = \vec{V}^j(M)$  accélération  $\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}^j(M)$ .

Pour déterminer les relations de composition de mouvement, il suffit d'exprimer le vecteur position sous la forme :

$$\overrightarrow{O_i M} = \overrightarrow{O_i O_j} + \overrightarrow{O_j M} \quad (\text{III.49})$$

Il faut ensuite dériver par rapport au repère  $R_i$ . On utilise la relation (III.21).



**Fig. III.11 : Composition du mouvement**

#### III.10.1. Composition des vitesses

La vitesse du point  $M$  par rapport à  $R_i$  est par définition :

$$\vec{V}(M/R_i) = \vec{V}^i(M) = \frac{d^i(\overrightarrow{O_i M})}{dt} = \frac{d^i(\overrightarrow{O_i O_j})}{dt} + \frac{d^i(\overrightarrow{O_j M})}{dt} \quad (\text{III.50})$$

$$\vec{V}^i(M) = \vec{V}^i(O_j) + \frac{d^j(\overrightarrow{O_j M})}{dt} + \Omega_j^i \wedge \overrightarrow{O_j M} \quad (\text{III.51})$$

$$\vec{V}^i(M) = \vec{V}^i(O_j) + \vec{V}^j(M) + \Omega_j^i \wedge \overrightarrow{O_j M} \quad (\text{III.52})$$

Finalement :

$$\vec{V}^i(M) = \vec{V}^j(M) + \vec{V}_e^i(M) \quad (\text{III.53})$$

ou encore :

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M) \quad (\text{III.54})$$

$\vec{V}^i(M) = \vec{V}_a(M)$  : *vitesse absolue* : c'est la vitesse du point  $M$  pour un observateur lié à  $R_i$  ;

$\vec{V}^j(M) = \vec{V}_r(M)$  : *vitesse relative* : c'est la vitesse du point  $M$  pour à un observateur lié à  $R_j$  ;

$\vec{V}_e^i(M) = \vec{V}^i(O_j) + \Omega_j^i \wedge \overrightarrow{O_j M} = \vec{V}_e(M)$  : *vitesse d'entraînement* : c'est la vitesse à l'instant  $t$  par rapport à  $R_i$  du point lié à  $R_j$  coïncidant avec  $M$  à l'instant  $t$ .

$\vec{\Omega}_j^i$  : vecteur rotation instantané du repère  $R_j$  par rapport  $R_i$

## Chapitre III : Cinématique des solides indéformables

Propriétés du vecteur  $\vec{V}_j^i(M) = \vec{V}_e(M)$

$\vec{V}_j^i(M) = -\vec{V}_i^j(M)$  antisymétrique par rapport aux indices.

$\vec{V}_j^i(M) = \vec{V}_i^k(M) + \vec{V}_k^i(M)$

### III.10.2. Composition des accélérations

Pour calculer l'accélération  $\vec{\gamma}^i(M)$ , nous dérivons chaque terme par rapport au temps de l'équation (III.51) :

$$\vec{\gamma}^i(M) = \frac{d^i(\vec{V}^i(M))}{dt} = \frac{d^i(\vec{V}^i(O_j))}{dt} + \frac{d^i(\vec{V}^j(M))}{dt} + \frac{d^i(\vec{\Omega}_j^i \wedge \overrightarrow{O_j M})}{dt} \quad (\text{III.55})$$

or :

$$\frac{d^i(\vec{V}^j(M))}{dt} = \frac{d^j(\vec{V}^j(M))}{dt} + (\vec{\Omega}_j^i \wedge \vec{V}^j(M)) = \vec{\gamma}^j(M) + (\vec{\Omega}_j^i \wedge \vec{V}^j(M)) \quad (\text{III.56})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^i(\vec{\Omega}_j^i \wedge \overrightarrow{O_j M})}{dt} &= \frac{d^i(\vec{\Omega}_j^i)}{dt} \wedge \overrightarrow{O_j M} + (\vec{\Omega}_j^i) \wedge \frac{d^i(\overrightarrow{O_j M})}{dt} \\ &= \frac{d^i(\vec{\Omega}_j^i)}{dt} \wedge \overrightarrow{O_j M} + (\vec{\Omega}_j^i) \wedge \left( \frac{d^j(\overrightarrow{O_j M})}{dt} + (\vec{\Omega}_j^i \wedge \overrightarrow{O_j M}) \right) \\ &= \frac{d^i(\vec{\Omega}_j^i)}{dt} \wedge \overrightarrow{O_j M} + (\vec{\Omega}_j^i) \wedge (\vec{V}^j(M)) + (\vec{\Omega}_j^i \wedge \overrightarrow{O_j M}) \end{aligned} \quad (\text{III.57})$$

$$\frac{d^i(\vec{V}^i(O_j))}{dt} = \vec{\gamma}^i(O_j) \quad (\text{III.58})$$

En remplaçant dans l'équation (III.54) on obtient après un simple calcul :

$$\vec{\gamma}^i(M) = \vec{\gamma}^j(M) + \vec{\gamma}^i(O_j) + \underbrace{\frac{d^i(\vec{\Omega}_j^i)}{dt} \wedge \overrightarrow{O_j M} + (\vec{\Omega}_j^i) \wedge (\vec{\Omega}_j^i \wedge \overrightarrow{O_j M}) + 2\vec{\Omega}_j^i \wedge \vec{V}^j(M)}_{\vec{\gamma}_{j(M)}^i} \quad (\text{III.59})$$

$\vec{\gamma}^i(M) = \vec{\gamma}_a(M)$  : accélération absolue ;

$\vec{\gamma}^j(M) = \vec{\gamma}_r(M)$  : accélération relative ;

$\vec{\gamma}_{j(M)}^i = \vec{\gamma}_e(M)$  : accélération d'entraînement ;

$2\vec{\Omega}_j^i \wedge \vec{V}^j(M)$  : accélération complémentaire ou de Coriolis.

#### Application 2

Un point matériel est en mouvement, avec une vitesse  $u$ , le long de la droite  $OA = L$ , qui tourne dans le plan  $Oxy$  autour du point  $O$  avec une vitesse angulaire de rotation,  $\omega = \theta t$ , constante (Fig. 2). Le vecteur vitesse  $\vec{u}$  est porté par l'axe  $Ox_1$  du repère mobile  $R_1(O, x_1y_1z_1)$  lié à la droite  $OA$ . On prendra le repère relatif  $R_1$  comme repère de projection.

1. Faire une figure à l'instant  $t$  (Indiquer les différentes vitesses du point  $M$  et les axes du repère  $R_1$ ).
2. Déterminer, par composition de mouvement, la vitesse et l'accélération absolue du point  $M$ .

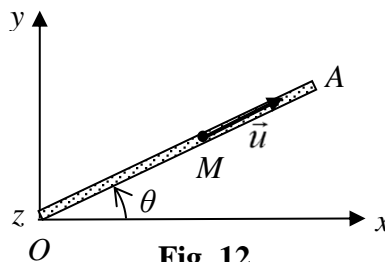
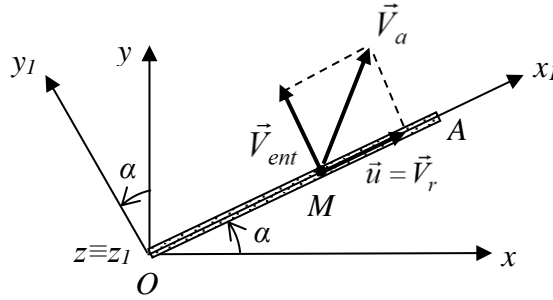


Fig. 12

## Chapitre III : Cinématique des solides indéformables

### Solution 2

1.



**Fig. 13**

2. La vitesse du point  $M$  par rapport au repère fixe  $R$  exprimée dans le repère  $R_1$  est égale :

$$\vec{V}(M)_{/R} = \vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_{ent}(M)$$

La vitesse relative (Fig. 13) est donnée par :

$$\vec{V}_r(M) = \frac{d^1(\overrightarrow{OM})}{dt} = \frac{d^1 x_1 \vec{x}_1}{dt} = u \vec{x}_1$$

ou tout simplement, d'après les données de l'exemple :

$$\vec{V}_r(M) = u \vec{x}_1$$

La vitesse d'entraînement est donnée par :

$$\vec{V}_{ent}(M) = \underbrace{\vec{V}(O)}_0 + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\alpha} x_1 \vec{y}_1$$

Donc :

$$\vec{V}_a(M) = u \vec{x}_1 + \dot{\alpha} x_1 \vec{y}_1 \text{ et } |V_a| = \sqrt{u^2 + (\dot{\alpha} x_1)^2}$$

D'après la relation (III.59), l'accélération du point  $M$  par rapport au repère fixe  $R$  exprimée dans le repère  $R_1$  est égale :

$$\vec{\gamma}^i(M) = \vec{\gamma}^j(M) + \underbrace{\vec{\gamma}^i(O_j) + \frac{d^i(\vec{\Omega}_j^i)}{dt} \wedge (\overrightarrow{O_j M}) + (\vec{\Omega}_j^i) \wedge (\vec{\Omega}_j^i \wedge \overrightarrow{O_j M}) + 2\vec{\Omega}_j^i \wedge \vec{V}^j(M)}_{\vec{\gamma}_j^i(M)}$$

$$\vec{\gamma}^i(M) = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}^i(M) = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}^2 x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\dot{\alpha} u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u} - \dot{\alpha}^2 x_1 \\ 2\dot{\alpha} u \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou encore, on prend la dérivée par rapport au temps de la vitesse absolue :  $\vec{V}_a(M) = u \vec{x}_1 + \dot{\alpha} x_1 \vec{y}_1$ , ce qui donne :

$$\frac{d^R}{dt}(\vec{V}_a(M)) = \left[ \dot{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} u \right] + \dot{\alpha} \left[ u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ u \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}^2 x_1 \\ u \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u} - \dot{\alpha}^2 x_1 \\ 2u \dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Chapitre IV : Géométrie des masses

### Chapitre IV : Géométrie des masses

Dans tout mouvement du corps solide, il est essentiel de connaître le mouvement d'un point remarquable du corps solide, appelé centre d'inertie (ou centre des masses).

Nous avons besoin de formuler le concept de masse, qui associé ultérieurement à une géométrie et une cinématique données, permet de mettre en place les concepts cinétiques qui apparaissent dans les lois de la dynamique.

L'intérêt de cette partie est de nous permettre de connaître un certain nombre de données sur la répartition des masses des systèmes. Nous, nous intéresserons à la détermination :

- des centres de masse du solide
- des moments d'inertie, des produits d'inertie par rapport à des axes et aux tenseurs d'inertie des solides quelconques dans différents repères.

L'opérateur d'inertie sert à caractériser la répartition des masses d'un solide, afin d'étudier par la suite, un mouvement quelconque de celui-ci.

#### IV.1. Masse d'un système matériel

Soit un système  $(S)$  et un point courant  $P \in (S)$ . La masse de système  $(S)$  est une quantité scalaire positive invariable en mécanique classique. Elle fait référence à la quantité de matière contenue dans le volume de ce solide.

##### IV.1.1. Systèmes discrets

La masse d'un système discret est la somme de  $n$  points matériels discrets de masse  $m_i$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \quad (\text{IV.1})$$

##### IV.1.2. Systèmes continus

Si le système est continu, la masse du système s'écrirait sous la forme d'une intégrale continue :

$$m = \int_{(S)} dm(P) \quad (\text{IV.2})$$

L'élément  $dm(P)$  est la mesure de la masse au voisinage du point  $(P)$

Si le système  $(S)$  est :

- Volume :

$$m = \int_V \rho(P) dv \quad (\text{IV.3})$$

$\rho(P)$  est la masse volumique au point  $(P)$  et  $dv$  un élément de volume du solide  $(S)$

- Surface : (une surface est négligée par rapport aux autres dimensions)

$$m = \int_S \sigma(P) ds \quad (\text{IV.4})$$

$\sigma(P)$  est la densité surfacique au point  $(P)$  et  $ds$  un élément de surface du solide  $(S)$ .

- Linéaire : (deux dimensions sont négligeables devant la longueur)

$$m = \int_L \lambda(P) dl \quad (\text{IV.5})$$

$\lambda(P)$  est la masse volumique au point  $(P)$  et  $dl$  un élément de longueur du solide  $(S)$ .

#### IV.2. Centre d'inertie d'un solide

##### IV.2.1. Définition

On appelle centre d'inertie d'un système  $(S)$  le point  $G$  défini par la relation :

$$\int_{P \in (S)} \overrightarrow{GP} dm = \vec{0} \quad (\text{IV.6})$$

où  $P \in (S)$  définit par :  $\overrightarrow{OP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$  et  $\overrightarrow{OG} = x_G\vec{x} + y_G\vec{y} + z_G\vec{z}$

Soit  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère orthonormé ou on peut écrire :  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}$

$$\int_{P \in (S)} \overrightarrow{OP} dm = \int_{P \in (S)} \overrightarrow{OG} dm + \underbrace{\int_{P \in (S)} \overrightarrow{GP} dm}_{=0} \quad (\text{IV.7})$$

Alors, nous aurons :

## Chapitre IV : Géométrie des masses

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\int_{P \in (S)} dm} \int_{P \in (S)} \overrightarrow{OP} dm \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{P \in (S)} \overrightarrow{OP} dm \quad (\text{IV.8})$$

où l'opérateur  $\int$  représente  $\iiint_V$ ,  $\iint_S$  ou  $\int_L$  ou  $\Sigma$  selon le cas.

Les coordonnées du centre d'inertie G dans le repère orthonormé  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  sont :

$$x_G = \frac{\int_{P \in (S)} x dm}{\int_{P \in (S)} dm} = \frac{1}{m} \int_{P \in (S)} x dm \quad (\text{IV.9})$$

$$y_G = \frac{\int_{P \in (S)} y dm}{\int_{P \in (S)} dm} = \frac{1}{m} \int_{P \in (S)} y dm \quad (\text{IV.10})$$

$$z_G = \frac{\int_{P \in (S)} z dm}{\int_{P \in (S)} dm} = \frac{1}{m} \int_{P \in (S)} z dm \quad (\text{IV.11})$$

### Remarques

Si (S) un solide homogène présente :

- Un plan de symétrie matériel (ou un axe de symétrie matériel), alors son centre d'inertie est situé sur ces éléments de symétrie.
- Un centre de symétrie, alors le centre d'inertie est ce point.

### IV.2.2. Centre d'inertie d'un système composé

Si nous notre système est un système composé, on détermine le centre d'inertie de chaque élément du système puis on détermine le centre d'inertie G du système.

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (\text{IV.12})$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (\text{IV.13})$$

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (\text{VI.14})$$

où  $x_i, y_i, z_i$  sont les coordonnées des points  $G_i$ .

### Résumé

Le solide	La masse spécifique	La masse	Le centre d'inertie
Ligne L Élément $dl$	Masse linéique $dm = \lambda \cdot dl$	$m = \lambda \cdot \int_L dl$	$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{L} \cdot \int_L \overrightarrow{OP} \cdot dl$
Surface S Élément $ds$	Masse surfacique $dm = \sigma \cdot ds$	$m = \sigma \cdot \iint_S ds$	$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{S} \cdot \iint_S \overrightarrow{OP} \cdot ds$
Volume V Élément $dv$	Masse volumique $dm = \rho \cdot dv$	$m = \rho \cdot \iiint_V dv$	$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{V} \iiint_V \overrightarrow{OP} \cdot dv$

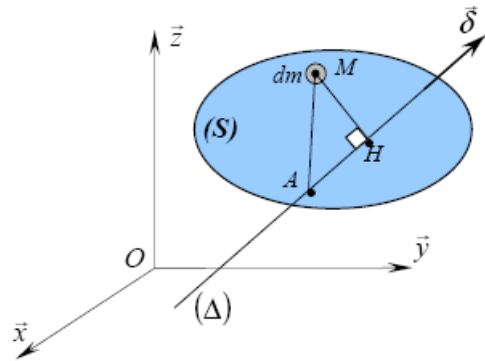
### IV.3. Moment et produit d'inertie d'un solide

#### IV.3.1. Moment d'inertie de (S) par rapport un point

Le moment d'inertie d'un solide (S) de masse  $m$  par rapport a un point A (Fig. IV.1), s'écrit :

$$I_A(S) = \int_{Solide} (\overrightarrow{AM})^2 dm \quad (\text{IV.15})$$

## Chapitre IV : Géométrie des masses



**Fig. IV.1 : Moment d'inertie de (S) par rapport un point et par rapport à un axe**

### IV.3.2. Moment d'inertie de (S) par rapport un axe (Δ)

On appelle moment d'inertie du solide (S) par rapport à un axe (Δ) de vecteur unitaire  $\vec{u}_\Delta$  (Fig. IV.1), la quantité positive :

$$I_\Delta(S) = \int_{\text{Solide}} (\overline{HM})^2 dm = \int_{\text{Solide}} (r)^2 dm \quad (\text{IV.16})$$

$r$  étant la distance entre l'élément de masse  $dm$  et l'axe (Δ).

#### IV.3.2.1. Expression analytique des moments d'inertie

De façon générale, un moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un élément géométrique (point, droite ou plan) s'exprime par l'intégrale sur (S) d'une distance au carré affectée de la masse  $dm$ . La distance étant celle entre l'élément géométrique et le point courant  $M$  parcourant le solide (S) (Fig. IV.2).

Ainsi, si  $M(x, y, z) \in (S)$  est un point courant du repère orthonormé  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , alors :

- On appelle moment d'inertie par rapport à un point  $O$  :

$$I_{(S/O)} = \int_S x^2 + y^2 + z^2 dm \quad (\text{IV.17})$$

- On appelle moment d'inertie par rapport aux axes :

$$\text{Axe } Ox : A = I_{Ox} = \int_S (y^2 + z^2) dm \quad (\text{IV.18})$$

$$\text{Axe } Oy : B = I_{Oy} = \int_S (x^2 + z^2) dm \quad (\text{IV.19})$$

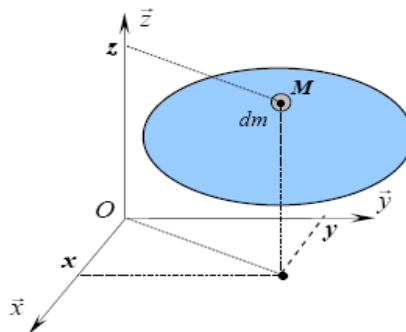
$$\text{Axe } Oz : C = I_{Oz} = \int_S (x^2 + y^2) dm \quad (\text{IV.20})$$

- On appelle moment d'inertie par rapport aux plans :

$$\text{Plan } (yOz) : A' = I_{yOz} = \int_S x^2 dm \quad (\text{IV.21})$$

$$\text{Plan } (xOz) : B' = I_{xOz} = \int_S y^2 dm \quad (\text{IV.22})$$

$$\text{Plan } (xOy) : C' = I_{xOy} = \int_S z^2 dm \quad (\text{IV.23})$$



**Fig. IV.2 : Moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un élément géométrique**

#### Remarques

- $I_O = A' + B' + C' =$  Somme des moments d'inertie par rapport aux plans.

## Chapitre IV : Géométrie des masses

- $I_O = \frac{1}{2}(A + B + C) = 1/2$  Somme des moments d'inertie par rapport aux axes.
- Tous les moments d'inertie sont des quantités positives exprimées en  $[kg \cdot m^2]$  (ils sont tous calculés en fonction de la masse du solide et d'une distance au carré :  $m \cdot d^2$ ).

### IV.3.3. Produit d'inertie d'un solide

On appelle produit d'inertie d'un solide par rapport aux plans de coordonnées associés deux à deux, les quantités algébriques suivantes :

- Par rapport aux axes  $Oy$  et  $Oz$  :

$$D = I_{yz} = \int_S yz \, dm \quad (IV.24)$$

- Par rapport aux axes  $Ox$  et  $Oz$  :

$$E = I_{xz} = \int_S xz \, dm \quad (IV.25)$$

- Par rapport aux axes  $Ox$  et  $Oy$  :

$$F = I_{xy} = \int_S xy \, dm \quad (IV.26)$$

#### Remarque

Les produits d'inertie sont des quantités de signe quelconque exprimés en  $[Kg \cdot m^2]$  (ils sont tous calculés en fonction de la masse du solide et d'un produit de deux distances).

### IV.4. Matrice (ou tenseur) d'inertie d'un solide ( $S$ ) en un point $O$

La matrice (ou tenseur) d'inertie s'écrit sous la forme suivante :

$$[I_{(S)}]_{R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \quad (IV.27)$$

Avec :  $A$ ,  $B$  et  $C$  : Moments d'inertie par rapport aux axes  $(O, \vec{x})$  ;  $(O, \vec{y})$  et  $(O, \vec{z})$  respectivement et  $D$ ,  $E$  et  $F$  : Produits d'inertie.

L'autre notation de la matrice d'inertie :

$$[I_{(S)}]_{R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{bmatrix} I_{ox} & -I_{xoy} & -I_{xoz} \\ -I_{xoy} & I_{oy} & -I_{yoz} \\ -I_{xoz} & -I_{yoz} & I_{oz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2) \cdot dm & -\int_S xy \cdot dm & -\int_S xz \cdot dm \\ -\int_S xy \cdot dm & \int_S (x^2 + z^2) \cdot dm & -\int_S yz \cdot dm \\ -\int_S xz \cdot dm & -\int_S yz \cdot dm & \int_S (x^2 + y^2) \cdot dm \end{bmatrix} \quad (IV.28)$$

#### IV.4.1. Propriétés de la matrice d'inertie

##### IV.4.1.1. Solides présentant des plans de symétrie

Certains solides présentent des formes particulières admettant des plans de symétrie par rapport aux axes du repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  choisi. Pour chaque plan de symétrie, les produits d'inertie sur les deux autres plans sont nuls :

$(xOy)$  plan de symétrie matériel (le point  $P (+z)$  est symétrique du  $P (-z)$ )  $\implies I_{xz} = I_{yz} = 0$

$(yOz)$  plan de symétrie matériel (le point  $P (+x)$  est symétrique du  $P (-x)$ )  $\implies I_{xz} = I_{xy} = 0$

$(xOz)$  plan de symétrie matériel (le point  $P (+y)$  est symétrique du  $P (-y)$ )  $\implies I_{yz} = I_{xy} = 0$

##### IV.4.1.2. Solides présentant un axe de symétrie

Soit  $O\vec{x}$  un axe de symétrie matérielle d'un solide ( $S$ ). Pour chaque élément de masse  $dm$  du solide ayant une coordonnée  $(+x)$  nous pouvons lui associer un élément  $dm$  symétrique par rapport à l'axe  $O\vec{x}$  et de coordonnée  $(-x)$  de telle sorte que:  $I_{xz} = I_{xy} = 0$ .

On remarque de la même manière que précédemment, l'axe  $O\vec{x}$  est un axe principal d'inertie.

Tout axe de symétrie matériel est un axe principal d'inertie sur tous les points de l'axe.



## Chapitre IV : Géométrie des masses

### IV.4.1.3. Solides à symétrie de révolution autour de l'axe Oz :

Dans le cas des solides ayant un axe de révolution tel que (cylindre, disque, cône, etc...), la masse est répartie de façon symétrique autour de cet axe. Soit un cylindre d'axe de révolution  $O\vec{z}$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . Tout plan passant par l'axe  $O\vec{z}$  est un plan de symétrie ; en particulier les plans  $(xOz)$  et  $(yOz)$ , donc :  $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

#### Remarques

1. Tout repère orthogonal direct, dont deux de ses plans sont des plans de symétrie matérielle du solide, est un repère principal d'inertie du solide.
2. Tout repère orthogonal direct, dont deux de ses axes sont des axes de symétrie matérielle du solide, est un repère principal d'inertie du solide.

Si le solide admet des plans de symétrie :

- Si  $(O, x, y)$  est un plan de symétrie matériel alors tout axe perpendiculaire à ce plan est un axe principal d'inertie particulièrement l'axe  $Oz$  :

$$E = I_{xz} = \int_S xz \cdot dm = 0 \text{ et } D = I_{yz} = \int_S yz \cdot dm = 0 \quad (\text{IV.29})$$

- Si  $(O, y, z)$  est un plan de symétrie matériel alors on aura de même :

$$E = \int_S xz \cdot dm = 0 \text{ et } F = I_{xy} = \int_S xy \cdot dm = 0 \quad (\text{IV.30})$$

- Si  $(O, x, z)$  plan de symétrie alors :

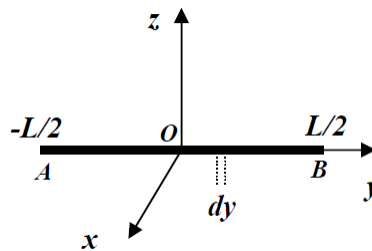
$$F = \int_S xy \cdot dm = 0 \text{ et } D = \int_S yz \cdot dm = 0 \quad (\text{IV.31})$$

Si deux plans parmi les trois  $(O, x, y)$ ,  $(O, z, y)$  et  $(O, x, z)$  sont des plans de symétrie alors les trois produits d'inertie  $D$ ,  $E$  et  $F$  sont nuls.

Si  $Oz$  est un axe de révolution pour le solide  $(S)$  alors les moments d'inertie  $A$  et  $B$  par rapport aux axes  $(O, x)$  et  $(O, y)$  sont égaux et les trois produits d'inertie sont nuls.

#### Application 1

Déterminer le centre d'inertie et le tenseur d'inertie en  $O$  relativement au repère orthonormé  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  d'une barre rectiligne de masse  $m$  et de longueur  $L$  et de densité linéaire  $\lambda$  (Fig. IV.3).



**Fig. IV.3 : Barre rectiligne**

#### Solution 1

1. Nous avons un système linéaire ( $x = z = 0$ ). On remarque aussi, d'après la figure IV.3 que le point  $O$ , origine du repère, est un centre de symétrie de la barre et c'est donc son centre de masse.

$$G = (0, 0, 0)$$

On peut aussi utiliser la définition des coordonnées de centre de masse (éq. IV.10). On remarque que l'axe  $Oy$  est un axe de symétrie matériel (on peut imaginer une épaisseur faible de la barre devant sa longueur  $L$ ), le centre de masse se situe donc sur cet axe et on obtient :

$$y_G = \frac{1}{m} \int_{P \in (S)} y \, dm = \frac{1}{\lambda L} \int_{-L/2}^{L/2} y \, dm = \frac{1}{\lambda L} \int_{-L/2}^{L/2} y \, \lambda dy = \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_{-L/2}^{L/2} = 0$$

2. Le système est linéaire ( $x = z = 0$ )  $\implies I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = I_{yy} = 0$ . Aussi, les deux axes  $Ox$  et  $Oz$  jouent le même rôle vis à vis du solide, alors  $I_{xx} = I_{zz}$ . On obtient :

## Chapitre IV : Géométrie des masses

$$I_{xx} = I_{zz} = \int_{P \in (S)} y^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} y^2 \lambda dy = \lambda \left[ \frac{1}{3} y^3 \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{\lambda L^3}{12} = \frac{mL^2}{12}$$

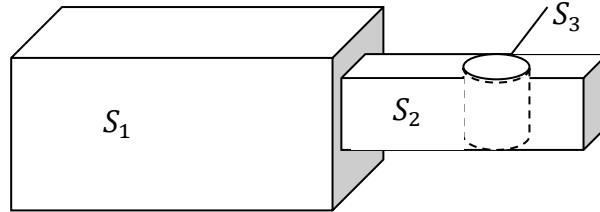
La matrice d'inertie au point  $O$  est donc définie par :

$$I_O = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix}$$

### IV.5. Cas d'un solide complexe composé de solides élémentaires

Dans certain cas, il peut être intéressant de faire une partition d'un solide en solides élémentaires dont les matrices d'inerties sont simples à calculer ou connues (Fig. IV.4).

$$[I_O(\Sigma)]_R = [I_{O(S_1)}]_R + [I_{O(S_2)}]_R - [I_{O(S_3)}]_R \quad (IV.32)$$

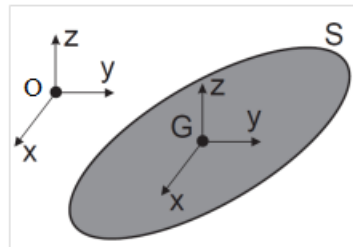


**Fig. IV.4 : Solide complexe composé de solides élémentaires**

### IV.6. Transposition des propriétés d'inertie en un autre pôle : Théorème des axes parallèles (ou Théorème de Huygens)

On connaît la matrice d'inertie de  $(S)$  dans le repère  $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .  $G$  est le centre d'inertie de  $(S)$  (Fig. IV.5).

$$[I_{(S)}]_G = \begin{bmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{bmatrix}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



**Fig. IV.5 : Théorème des axes parallèles**

On veut calculer la matrice d'inertie de  $(S)$   $[I_{(S)}]_O$  dans le repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  en fonction de  $[I_{(S)}]_G$ . On donne :

$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{GM} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM} = \begin{pmatrix} x_G + x_1 \\ y_G + y_1 \\ z_G + z_1 \end{pmatrix}$$

- Le moment d'inertie par rapport à  $(G, \vec{x})$  :  $A_G = \int_S (y_1^2 + z_1^2) \cdot dm$
- Le moment d'inertie par rapport à  $(O, \vec{x})$  :  $A = \int_S (y^2 + z^2) \cdot dm$  (par définition).

## Chapitre IV : Géométrie des masses

$$\begin{aligned}
 A &= \int_S (y^2 + z^2) \cdot dm = \int_S [(y_1 + y_G)^2 + (z_1 + z_G)^2] \cdot dm \\
 &= \int_S (y_1^2 + z_1^2) \cdot dm + \int_S (y_G^2 + z_G^2) \cdot dm + 2 \cdot y_G \int_S y_1 \cdot dm + 2 \cdot z_G \int_S z_1 \cdot dm
 \end{aligned}$$

Le point  $G$  étant le centre d'inertie du solide  $(S)$ , il est défini par la relation

$$\int_S \overrightarrow{GM} = \vec{0} \rightarrow \int_S x_1 \cdot dm = \int_S y_1 \cdot dm = \int_S z_1 \cdot dm = 0$$

On aura donc :

$$A = \int_S (y_1^2 + z_1^2) \cdot dm + \int_S (y_G^2 + z_G^2) \cdot dm \rightarrow A = A_G + m(y_G^2 + z_G^2)$$

De même :  $B = B_G + m(x_G^2 + z_G^2)$  et  $C = C_G + m(x_G^2 + y_G^2)$

$$D = D_G + m \cdot y_G \cdot z_G, \quad E = E_G + m \cdot x_G \cdot z_G \quad \text{et} \quad F = F_G + m \cdot x_G \cdot y_G$$

On a donc :

- Pour les moments d'inerties :

$$A = A_G + m(y_G^2 + z_G^2), \quad B = B_G + m(x_G^2 + z_G^2) \quad \text{et} \quad C = C_G + m(x_G^2 + y_G^2) \quad (\text{IV.33})$$

- Pour les produits d'inerties :

$$D = D_G + m \cdot y_G \cdot z_G, \quad E = E_G + m \cdot x_G \cdot z_G \quad \text{et} \quad F = F_G + m \cdot x_G \cdot y_G \quad (\text{IV.34})$$

Le théorème de Huygens est très pratique car il permet de déterminer le moment d'inertie d'un solide dans n'importe quel point  $O$  de l'espace centre de repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , en connaissant le moment d'inertie au centre d'inertie  $G$  de coordonnées  $(x_G, y_G, z_G)$  par rapport au même repère.

### Application 2

Connaissant la matrice d'inertie de la barre de l'exemple 1 au point  $O$  et par rapport au repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  dont l'origine passe par le centre d'inertie, trouver la matrice d'inertie de la barre au point  $A$  origine du repère  $R_A(A, \vec{x}_A, \vec{y}_A, \vec{z}_A)$ .

### Solution 2

Les axes des deux repères sont parallèles (Théorème de Huygens) et l'axe  $Ay_A \equiv Oy$ . On obtient :

Moments d'inertie :

$$I_{x_A x_A} = I_{xx} + m(y_G^2 + z_G^2) = \frac{mL^2}{12} + m \frac{L^2}{4} = \frac{mL^2}{3} = I_{z_A z_A}$$

$$I_{y_A y_A} = I_{yy} + m(x_G^2 + z_G^2) = 0 + 0 = 0$$

Produits d'inertie :

$$I_{x_A y_A} = I_{xy} + m(x_G y_G) = 0$$

$$I_{x_A z_A} = I_{xz} + m(x_G z_G) = 0$$

$$I_{z_A y_A} = I_{zy} + m(z_G y_G) = 0$$

La matrice d'inertie au point  $A$  est donc définie par :

$$I_A = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}$$

### **IV.7. Transposition des propriétés d'inertie à d'autres directions – Variance tensorielle**

Lorsque la matrice du tenseur d'inertie d'un solide est connue dans un repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et qu'on désire l'obtenir dans un repère orienté différemment  $R(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  (Fig. IV.6), tout en restant au même pôle  $O$ , on applique les propriétés de variance tensorielle du tenseur d'inertie.

En effet, Si le tenseur d'inertie  $I_O(S/R)$  est connu dans le repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , le tenseur d'inertie  $I_O(S/R_1)$  peut s'exprimer par :

$$I_O(S/R_1) = P_{R \rightarrow R_1}^T I_O(S/R) P_{R \rightarrow R_1} \quad (\text{IV.35})$$

Avec :  $P$  est la matrice de passage de  $R$  à  $R_1$  et  $P^T$  sa transposée.

Inversement, peut écrire :

$$I_O(S/R) = P_{R_1 \rightarrow R}^T I_O(S/R_1) P_{R_1 \rightarrow R} \quad (\text{IV.36})$$

## Chapitre IV : Géométrie des masses

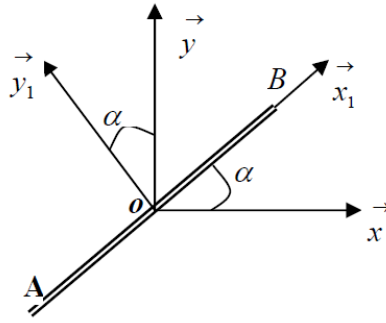


Fig. IV.6 : Transposition des propriétés d'inertie à d'autres directions.

### Application 3

Considérant la barre de la figure IV.6, en rotation autour de l'axe  $Oz \equiv Oz_1$ .

Déterminer la matrice d'inertie par rapport au repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

On donne la matrice d'inertie au point O par rapport au repère  $R(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  lié à la barre :

$$I_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}$$

### Solution 3

La matrice de passage du repère  $R_1$  au repère R est :

$$P_{R_1 \rightarrow R} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice d'inertie au point O par rapport au repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est donnée donc par :

$$I_O(S/R) = P_{R_1 \rightarrow R}^T I_O(S/R_1) P_{R_1 \rightarrow R}$$

$$I_O\left(\frac{S}{R}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_O(S/R) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{mL^2}{3} \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_O(S/R) = \begin{bmatrix} -\frac{mL^2}{3} \sin^2(\alpha) & -\frac{mL^2}{3} \sin(\alpha) \cos(\alpha) & 0 \\ -\frac{mL^2}{3} \sin(\alpha) \cos(\alpha) & \frac{mL^2}{3} \cos^2(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}$$

## Chapitre V : Cinétique du Solide

### Chapitre V : Cinétique du Solide

La Dynamique utilise des grandeurs physiques particulières, appelées grandeurs cinétiques, qui sont des *combinaisons* de grandeurs cinématiques (déplacements, vitesses, accélérations) et de grandeurs liées aux masses d'un système et à leur répartition dans l'espace (centre de masse, tenseur d'inertie). "*La cinétique est le trait d'union entre la cinématique et la géométrie des masses*".

#### V.1. Définitions des grandeurs cinétiques

Dans la suite de ce paragraphe on va définir la quantité de mouvement et le moment cinétique d'un Point matériel, et d'un système matériel continu ou discrets.

##### V.1.1. Point matériel

###### V.1.1.1. Quantité de mouvement

Soit  $\vec{V}^0(M)$  le vecteur vitesse d'un point  $M$  ayant une masse  $m$  en mouvement par rapport à un repère orthonormé fixe  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . On appelle quantité de mouvement du point  $M$  la grandeur vectorielle :

$$\vec{P}^0 = m\vec{V}^0(M) \quad (V.1)$$

###### V.1.1.2. Moment cinétique

On appelle moment cinétique du point  $M$ , le moment par rapport à un point quelconque  $A$  de la quantité de mouvement :

$$\vec{\sigma}_A^0 = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{V}^0(M) \quad (V.2)$$

##### V.1.2. Système matériel continu

###### V.1.2.1. Résultante cinétique

La quantité de mouvement d'un système matériel continu ( $S$ ) en mouvement par rapport à un repère orthonormé fixe  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est donnée par :

$$\vec{P}^0 = \int_S \vec{V}^0(M) dm \quad (V.3)$$

###### V.1.2.2. Moment cinétique

Le moment cinétique d'un système matériel continu ( $S$ ) en un point  $A$  quelconque de l'espace rapport au repère  $R_0$ ,  $\vec{\sigma}_{A/R_0} = \vec{\sigma}_A^0$ , est donné par le moment de la quantité de mouvement en  $A$  :

$$\vec{\sigma}_{A/R_0} = \vec{\sigma}_A^0 = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}^0(M) dm \quad (V.4)$$

#### Remarque

Si le système est *discret*, les intégrales sont remplacés par le symbole somme, c.à.d.  $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{V}(M_i)$  et

$\vec{\sigma}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{V}(M_i)$ .  $dm$  dans les équations (V.3) et (V.4) est un *élément de masse* de ( $S$ ).

#### V.2. Torseur cinétique

Soit un solide ( $S$ ) de masse  $m$  et de centre d'inertie  $G$ , en mouvement par rapport à un repère fixe  $R_0$ . Soit  $M$  un point de ce solide et deux points  $A$  et  $B$  quelconque de l'espace mais connus dans le repère  $R_0$ . Par définition, le moment cinétique aux points  $A$  et  $B$  est donné par :

$$\vec{\sigma}_A^0 = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}^0(M) dm \quad \text{et} \quad \vec{\sigma}_B^0 = \int_S \overrightarrow{BM} \wedge \vec{V}^0(M) dm \quad (V.5)$$

d'où la relation entre les moments cinétiques en  $A$  et  $B$  :

$$\vec{\sigma}_A^0 - \vec{\sigma}_B^0 = \int_S (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) \wedge \vec{V}^0(M) dm = \int_S \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}^0(M) dm = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{P}^0 \quad (V.6)$$

Le moment cinétique *obéit* donc à la loi du transport des moments, nous pouvons alors construire un torseur cinétique dont les éléments de réduction sont : la résultante cinétique et le moment cinétique :

$$[C]_A^0 = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P}^0 \\ \vec{\sigma}_A^0 \end{array} \right\} \quad (V.7)$$

## Chapitre V : Cinétique du Solide

### V.3. Calcul de la résultante cinétique

Soit un système matériel  $(S)$  de masse  $m$  et de centre d'inertie  $G$ , en mouvement par rapport à un repère orthonormé fixe  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Quel que soit le point  $M \in (S)$  nous avons par définition :

$$\vec{P}^0 = \int_S \vec{V}^0(M) dm = \int_S \frac{d^0(\overrightarrow{OM})}{dt} dm \quad (\text{V.8})$$

On suppose que les conditions de régularité permettant d'invertir l'ordre de sommation et de dérivation sont remplies :

$$\vec{P}^0 = \frac{d^0}{dt} \int_S \overrightarrow{OM} dm = \frac{d^0}{dt} (m \overrightarrow{OG}) \quad (\text{V.9})$$

La masse étant invariante en mécanique Galiléenne, il vient :

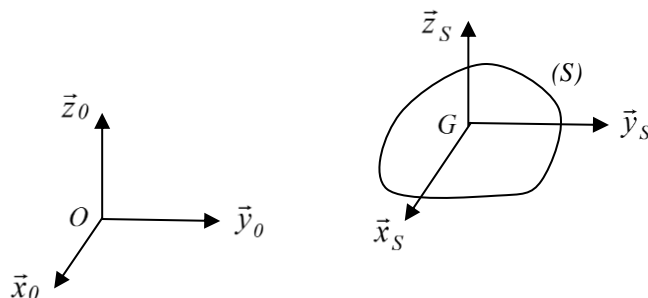
$$\vec{P}^0 = m \vec{V}^0(G) \quad (\text{V.10})$$

La quantité de mouvement système matériel  $(S)$  est égale à la quantité de mouvement du centre d'inertie  $G$  affecté de la masse totale du système.

### V.4. Théorème de Koëinig

Etudier le mouvement d'un système  $(S)$  autour de son centre de masse  $G$ , c'est l'étudier par rapport à un repère  $R_S$  (ou  $R_G$ ) centré en  $G$  et dont les axes ont des directions fixes (en pratique parallèles) par rapport au repère initial orthonormé fixe  $R_0$ . Ce repère  $R_S$  est appelé *repère de Koëinig*. Le repère Koëinig (appelé aussi repère barycentrique) est donc en translation permanente par rapport au repère de base  $R_0$  (Fig. V.1):

$$\vec{\Omega}(R_S / R_0) = \vec{\Omega}_S^0 = 0 \quad (\text{V.11})$$



**Fig. V.1 : Repère de Koëinig  $R_S$  en translation par rapport au repère  $R_0$ .**

Nous allons chercher une relation entre le moment cinétique du système en  $G$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$  et le moment cinétique du système en  $G$  dans son mouvement par rapport à  $R_S$ .

Soit  $M$  un point du système matériel. Par définition, le moment cinétique en  $G$  par rapport à  $R_0$  est :

$$\vec{\sigma}_G^0 = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^0(M) dm = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{V}^0(G) + \vec{V}^S(M)) dm \quad (\text{V.12})$$

$$\vec{\sigma}_G^0 = \left( \int_S \overrightarrow{GM} dm \right) \wedge \vec{V}^0(G) + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^S(M) dm \quad (\text{V.13})$$

or :  $\int_S \overrightarrow{GM} dm = \vec{0}$ , car  $G$  est le centre d'inertie du système matériel, et par définition :

$$\vec{\sigma}_G^k = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^S(M) dm \quad (\text{V.14})$$

On a donc l'égalité :

$$\vec{\sigma}_G^0 = \vec{\sigma}_G^S \quad (\text{V.15})$$

En un point  $A$  quelconque de l'espace nous aurons par la loi de transport des moments (éq. V.6):

$$\vec{\sigma}_A^0 = \vec{\sigma}_G^0 + \overrightarrow{AG} \wedge m \vec{V}^0(G) \Rightarrow \vec{\sigma}_A^0 = \vec{\sigma}_G^S + \overrightarrow{AG} \wedge m \vec{V}^0(G) \quad (\text{V.16})$$

Cette dernière relation est appelée *le théorème de Koëinig*.

### V.5. Moment cinétique d'un solide indéformable en $G$ (centre d'inertie du solide)

Le moment cinétique d'un solide indéformable au centre d'inertie  $G$ , est :

## Chapitre V : Cinétique du Solide

$$\vec{\sigma}_G^0 = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^0(M) dm = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{V}^0(G) + \overrightarrow{MG} \wedge \vec{\Omega}_S^0) dm \quad (\text{V.17})$$

or :  $\int_S \overrightarrow{GM} dm = \vec{0}$  et  $\int_S \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\Omega}_S^0 \wedge \overrightarrow{GM}) dm = I_G \vec{\Omega}_S^0$

d'où le moment cinétique d'un solide indéformable qui s'écrit donc :

$$\vec{\sigma}_G^0 = I_G \vec{\Omega}_S^0 \quad (\text{V.18})$$

### V.6. Moment cinétique d'un solide indéformable en un point du solide par rapport au repère fixe $R_0$

En utilisant la règle de distribution des vitesses entre les deux points  $A$  et  $M$  de  $(S)$ , on obtient :

$$\vec{\sigma}_A^0 = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}^0(M) dm = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{V}^0(A) + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}_S^0) dm \quad (\text{V.19})$$

$$\vec{\sigma}_A^0 = \int_S \overrightarrow{AM} dm \wedge \vec{V}^0(A) + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge (\overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}_S^0) dm = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2 \quad (\text{V.20})$$

or :  $\vec{\sigma}_1 = \int_S \overrightarrow{AM} dm \wedge \vec{V}^0(A) = \int_S (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}) \wedge \vec{V}^0(A) dm = \int_S \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}^0(A) dm + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^0(A) dm$

$$\vec{\sigma}_1 = \overrightarrow{AG} \wedge m \vec{V}^0(A) \quad \text{puisque} \quad \int_S \overrightarrow{GM} dm = 0$$

et :  $\vec{\sigma}_2 = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge (\overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}_S^0) dm = I_A \vec{\Omega}_S^0$

d'où finalement :

$$\vec{\sigma}_A^0 = I_A \vec{\Omega}_S^0 + \overrightarrow{AG} \wedge m \vec{V}^0(A) \quad (\text{V.21})$$

#### Cas particuliers

- Si  $A$  est fixe dans  $R_0$  ( $\vec{V}_A^0 = \vec{0}$ ), alors :

$$\vec{\sigma}_A^0 = I_A \vec{\Omega}_S^0 \quad (\text{V.22})$$

- Si le point  $A$  est confondu avec le centre de masse  $G$  ( $A \equiv G$ ), alors :

$$\vec{\sigma}_A^0 = I_A \vec{\Omega}_S^0 \quad (\text{V.23})$$

- Si la rotation a lieu autour d'un fixe  $Az$  et que  $Az$  est un axe principal d'inertie, on a :

$$\vec{\sigma}_A^0 = I_{Az} \vec{\Omega}_S^0 \quad (\text{V.24})$$

### V.7. Energie cinétique

Pour un système matériel continu  $(S)$ , on appelle énergie cinétique la quantité scalaire exprimée en joules ( $J$ ) :

$$E_C^0 = \int_S \frac{1}{2} (\vec{V}^0(M))^2 dm \quad (\text{V.25})$$

#### V.7.1. Théorème de Koëning relatif à l'énergie cinétique

L'énergie cinétique par rapport à un repère orthonormé fixe  $R_0$  ( $R_S \equiv R_G$  est le référentiel de Koëning), par définition est :

$$E_C^0 = \int_S \frac{1}{2} (\vec{V}^0(M))^2 dm = \int_S \frac{1}{2} (\vec{V}^0(G) + \vec{V}^S(M))^2 dm \quad (\text{V.26})$$

$$E_C^0 = \frac{1}{2} (\vec{V}^0(G))^2 \int_S dm + \int_S \vec{V}^0(G) \cdot \vec{V}^S(M) dm + \frac{1}{2} \int_S (\vec{V}^S(M))^2 dm \quad (\text{V.27})$$

$$E_C^0 = \frac{1}{2} (\vec{V}^0(G))^2 \int_S dm + \underbrace{\vec{V}^0(G) \cdot \frac{d}{dt} \int_S \overrightarrow{GM} dm}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_S (\vec{V}^S(M))^2 dm}_{E_C^S} \quad (\text{V.28})$$

Finalement :

## Chapitre V : Cinétique du Solide

$$E_C^0 = \frac{1}{2} m (\vec{V}^0(G))^2 + E_C^S \quad (\text{V.29})$$

L'énergie cinétique du système (S) en mouvement par rapport au repère  $R_0$  est égale à l'énergie cinétique du système dans son mouvement autour de son centre d'inertie  $G$  augmentée de l'énergie cinétique du centre d'inertie  $G$  affecté de la masse totale  $m$  du système.

### V.7.2. L'énergie cinétique d'un solide indéformable en mouvement quelconque

Soit  $R_0$  un repère orthonormé fixe et  $R_I$  un repère lié à un solide indéformable (S) et de centre de d'inertie  $G$ . Soit  $N$  un point du solide indéformable, nous pouvons écrire :

$$E_C^0 = \int_S \frac{1}{2} (\vec{V}^0(M))^2 dm = \int_S \frac{1}{2} (\vec{V}^0(N) + \Omega_S^0 \wedge \overrightarrow{NM})^2 dm \quad (\text{V.30})$$

$$E_C^0 = \int_S \frac{1}{2} (\vec{V}^0(M)) (\vec{V}^0(N) + \Omega_S^0 \wedge \overrightarrow{NM}) dm \quad (\text{V.31})$$

$$E_C^0 = \vec{V}^0(N) \cdot \int_S \frac{1}{2} (\vec{V}^0(M)) dm + \int_S \frac{1}{2} (\vec{V}^0(M)) \cdot (\Omega_S^0 \wedge \overrightarrow{NM}) dm \quad (\text{V.33})$$

$$E_C^0 = \frac{1}{2} \vec{V}^0(N) \cdot m \vec{V}^0(G) + \frac{1}{2} \Omega_S^0 \cdot \underbrace{\int_S \overrightarrow{NM} \wedge \vec{V}^0(M) dm}_{\vec{\sigma}_N^0} \quad (\text{V.34})$$

Finalement :

$$E_C^0 = \frac{1}{2} \vec{V}^0(N) \cdot m \vec{V}^0(G) + \frac{1}{2} \Omega_S^0 \cdot \vec{\sigma}_N^0 \quad (\text{V.35})$$

#### C as particuliers

- Si le point  $N$  est confondu avec le centre d'inertie  $G$ , on aura :

$$E_C^0 = \frac{1}{2} m \vec{V}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_S^0 \vec{\sigma}_G^0 = \frac{1}{2} m \vec{V}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_S^{0T} I_G \vec{\Omega}_S^0 = E_C \text{ translation} + E_C \text{ rotation} \quad (\text{V.36})$$

- Si le solide a uniquement un mouvement de translation :

$$E_C^0 = E_C \text{ translation} = \frac{1}{2} m \vec{V}_G^2 \quad (\text{V.37})$$

- Si le solide est seulement en rotation autour d'un axe  $Oz$  ( $\vec{\Omega}_S^0 = \vec{\Omega}_S^z$ ), le moment cinétique  $\vec{\sigma}_N^0$  au point  $N$  appartient à l'axe  $Oz$ , s'écrit :

$$\vec{\sigma}_N^0 = I_N \vec{\Omega}_S^0 \quad \text{car } (\vec{V}_N = 0) \quad (\text{V.38})$$

Soit :

$$\vec{\sigma}_N^0 = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{yx} & I_{yy} & 0 \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{xz} \Omega \\ -I_{yz} \Omega \\ I_{zz} \Omega \end{bmatrix} \quad (\text{V.39})$$

L'énergie cinétique est donc :

$$E_C^0 = E_C \text{ rotation} = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_S^0 \vec{\sigma}_N^0 = \frac{1}{2} I_{zz} \Omega^2 \quad (\text{V.40})$$

#### Application

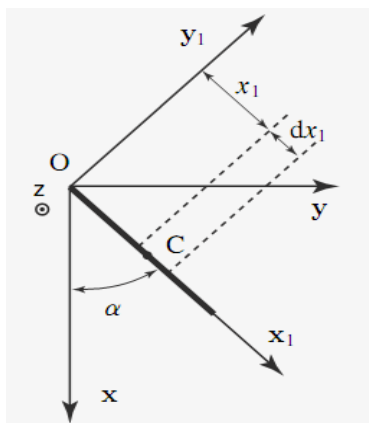
Considérons une barre d'épaisseur négligeable, de longueur  $l$ , homogène de masse  $m$  en liaison pivot d'axe  $z$  avec le bâti (Fig. 2). Calculer, par rapport à  $R$  ( $O, x, y, z$ ) :

3. Le torseur cinétique au centre de masse  $C$  et au point  $O$  origine de repère.
4. Energie cinétique  $E_C$ .

On prendra  $R_I$  ( $O, x_I, y_I, z_I$ ) comme repère de projection



## Chapitre V : Cinétique du Solide



**Fig. V.2 : Barre en rotation autour d'un axe fixe Oz.**

### Solution

1. Dans l'exemple 1 du chapitre III, on a à trouver :  $\vec{V}(C)_{/R} = \frac{L}{2} \dot{\alpha} \vec{y}_1$

Le torseur cinétique au point C et par rapport à R (O, x, y, z), s'écrit alors :

$$\vec{P}(S/R) = \vec{P} = m\vec{V}(C/R) = \frac{L}{2} m\dot{\alpha}\vec{y}_1$$

$$\vec{\sigma}_C^R = I_G \vec{\Omega}_{R_1}^R + \overrightarrow{GG} \wedge m\vec{V}(G) = I_G \vec{\Omega}_{R_1}^R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mL^2}{12} \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \frac{mL^2}{12} \dot{\alpha} \vec{z}_1$$

2. Le moment cinétique au point O (origine du repère)

On utilisant la relation (V.6) (loi de variation du moment cinétique)

$$\vec{\sigma}_O^R = \vec{\sigma}_C^R + \overrightarrow{OC} \wedge m\vec{V}^R(C) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mL^2}{12} \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge m \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{L}{2} \dot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mL^2}{3} \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \frac{mL^2}{3} \dot{\alpha} \vec{z}_1$$

3. Energie cinétique

L'énergie cinétique de la barre en rotation autour de l'axe passant par le centre de masse est donnée par :

$$E_{Cin}^0 = E_{Cin}^{rotation} = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{R_1}^R \cdot \vec{\sigma}_C^0 = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{R_1}^{R^T} I_C \vec{\Omega}_{R_1}^R = \frac{1}{2} I_{Cz} \dot{\alpha}^2 = \frac{ml^2}{24} \dot{\alpha}^2, \quad (E_{Cin}^{translation} = \frac{1}{2} m\vec{V}_G^2 = 0)$$

## Chapitre VI : Principe fondamentale de la dynamique des systèmes matériels

### Chapitre VI : Principe fondamentale de la dynamique des systèmes matériels

La dynamique porte sur l'étude du mouvement des systèmes mécaniques soumis à des actions appelées forces. Elle se préoccupe de la relation entre mouvements et forces alors que la cinématique se borne à d'écrire les mouvements.

Elle permet d'examiner le concept de force et d'une manière globale le concept d'efforts exercés sur un système matériel quelconque. Pour toutes ces raisons, nous sommes amenés à introduire la notion de torseur des efforts extérieurs, nécessaire à l'écriture du principe fondamental de la dynamique.

#### VI.1. Torseur des forces extérieures

On appelle torseur des forces extérieures, s'exerçant sur un système ( $S$ ) en mouvement dans un repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , le torseur  $\left\{ T_{\vec{F}_{ext}} \right\}_A^0$  ayant pour élément de réduction en un point  $A$  la résultante  $\vec{R}_{ext}$  et le moment  $\vec{M}_{A_{ext}}$  des forces :

$$\left\{ T_{\vec{F}_{ext}} \right\}_A^0 = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{ext} \\ \vec{M}_{A_{ext}} \end{array} \right\}_A \quad (\text{VI.1})$$

Les forces intérieures forment un torseur nul.

#### VI.2. Rappel de la dynamique des particules

La dynamique des particules est régie par des principes basés sur les lois de Newton.

##### VI.2.1. Principe d'inertie (Première loi de Newton)

Dans un repère Galiléen (absolu ou d'inertie)  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , une particule  $M$  de masse  $m$  totalement isolée possède une quantité de mouvement  $\vec{P}(M)$  constante. On écrit :

$$\vec{P}(M) = m\vec{V}(M) = Cst \quad (\text{VI.2})$$

##### VI.2.2. Principe fondamental de la dynamique (Deuxième loi de Newton)

Dans un repère galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées sur point matériel  $M$  est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement  $\vec{P}(M/R)$  point matériel  $M$  :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt} \vec{P}(M) = \frac{d}{dt} m\vec{V}(M) = m\vec{\gamma}(M) \quad (\text{VI.3})$$

##### VI.2.3. Principe d'action réaction (Troisième loi de Newton)

Si, à l'instant  $t$ , il y a interactions entre deux particules  $M_1$  et  $M_2$ , les forces de  $M_1$  sur  $M_2$ ,  $\vec{F}(M_1/M_2)$ , et de  $M_2$  sur  $M_1$ ,  $\vec{F}(M_2/M_1)$ , sont égales et opposées sur la ligne d'action  $M_1 M_2$  :

$$\vec{F}(M_1/M_2) = -\vec{F}(M_2/M_1) \quad (\text{VI.4})$$

#### VI.3. Définition des grandeurs dynamique

##### VI.3.1. Point matériel

###### VI.3.1.1. Quantité d'accélération

Soit  $\vec{\gamma}^0(M)$  l'accélération d'un point  $M$  de masse  $dm$  en mouvement par rapport à  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . On appelle quantité d'accélération du point  $M$  la quantité :

$$D_M^0 = dm\vec{\gamma}^0(M) \quad (\text{VI.5})$$

###### VI.3.1.2. Moment dynamique

On appelle moment dynamique du point  $M$ , le moment par rapport à un point quelconque  $A$  de la quantité d'accélération :

$$\vec{\delta}_A^0(M) = \vec{AM} \wedge dm\vec{\gamma}^0(M) \quad (\text{VI.6})$$

##### VI.3.2. Système matériel continu

###### VI.3.2.1. Résultante dynamique

La quantité d'accélération d'un système matériel continu ( $S$ ) (ou résultante dynamique), en mouvement par rapport à un repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est donnée par:

## Chapitre VI : Principe fondamentale de la dynamique des systèmes matériels

$$\vec{D}^0 = \int_S \vec{\gamma}(M) dm \quad (\text{VI.7})$$

### VI.3.2.2. Moment dynamique

Le moment dynamique d'un système matériel continu (S) en un point A quelconque de l'espace par rapport au repère  $R_0$ ,  $\vec{\delta}_A^0$ , est donné par le moment de la quantité d'accélération en A :

$$\vec{\delta}_A^0 = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}(M) dm \quad (\text{VI.8})$$

### VI.3.3. Torseur dynamique

Le torseur dynamique  $\{D\}_A^0$  en un point A du solide (S) par rapport au repère  $R_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , s'exprime alors sous la forme :

$$\{D\}_A^0 = \left\{ \begin{array}{l} \vec{D}^0 \\ \vec{\delta}_A^0 \end{array} \right\} \quad (\text{VI.9})$$

Le moment dynamique obéit aussi de la même manière à la *formule de transport des moments*. Les moments dynamiques en deux points quelconques A et B sont liés par :

$$\vec{\delta}_A^0 = \vec{\delta}_B^0 + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{D}^0 \quad (\text{VI.10})$$

### VI.4. Théorème de Koëinig relatif au moment dynamique

Soit le repère *Koëinig*  $R_S (G, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$  lié au solide (S) et dont l'origine passe par son centre de masse G et un autre repère Galiléen  $R_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

Par définition, le moment dynamique en G par rapport au repère  $R_0$  est :

$$\vec{\delta}_G^0 = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}^0(M) dm = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\gamma}^0(G) + \vec{\gamma}^S(M)) dm \quad (\text{VI.11})$$

$$\vec{\delta}_G^0 = \left( \int_S \overrightarrow{GM} dm \right) \wedge \vec{\gamma}^0(G) + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}^S(M) dm \quad (\text{VI.12})$$

or  $\int_S \overrightarrow{GM} dm = \vec{0}$  Car G est le centre d'inertie du système matériel, et par définition :

$$\vec{\sigma}_G^S = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}^S(M) dm \quad (\text{VI.13})$$

On a donc l'égalité :

$$\vec{\delta}_G^0 = \vec{\delta}_G^S \quad (\text{VI.14})$$

Le théorème de Koëinig est alors :

$$\vec{\delta}_G^0 = \vec{\delta}_G^S + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{\gamma}^0(G) \quad (\text{VI.15})$$

### VI.5. Calcul du moment dynamique

La dérivée du moment cinétique en A (éq. V.4) donne :

$$\frac{d^0 \vec{\sigma}_A}{dt} = \int_S \frac{d}{dt} (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}^0(M) dm) = \int_S \frac{d^0 \overrightarrow{AM}}{dt} \wedge \vec{V}^0(M) dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \frac{d^0 \vec{V}^0(M)}{dt} dm \quad (\text{IV.16})$$

or nous avons :

$$\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \frac{d^0 \vec{V}^0(M)}{dt} dm = \vec{\delta}_A^0 \quad (\text{IV.17})$$

et

$$\frac{d^0 \overrightarrow{AM}}{dt} = \frac{d^0}{dt} (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) = \vec{V}^0(M) - \vec{V}^0(A) \quad (\text{IV.18})$$

On obtient ainsi la relation finale entre le moment cinétique et le moment dynamique :

$$\vec{\delta}_A^0 = \frac{d^0 \vec{\sigma}_A}{dt} + \vec{V}^0(A) \wedge m\vec{V}^0(G) \quad (\text{IV.19})$$

## Chapitre VI : Principe fondamentale de la dynamique des systèmes matériels

### Cas particuliers

- Si le point  $A$  est confondu avec le centre d'inertie  $G$ , on aura :

$$\bar{\delta}_G^0 = \frac{d^0 \bar{\sigma}_G}{dt} \quad (IV.20)$$

- Si le point  $A$  est fixe  $\bar{V}^0(A) = \vec{0}$ :

$$\bar{\delta}_A^0 = \frac{d^0 \bar{\sigma}_A}{dt} \quad (IV.21)$$

- Si :  $\bar{V}^0(A)$  est colinéaire à  $\bar{V}^0(G)$  :

$$\bar{\delta}_A^0 = \frac{d^0 \bar{\sigma}_A}{dt} \quad (IV.22)$$

### VI.6. Principe (ou Loi) fondamentale de la dynamique pour un système matériel (S)

Ce principe correspond à la généralisation des lois de Newton pour un système matériel (S) possédant une dimension.

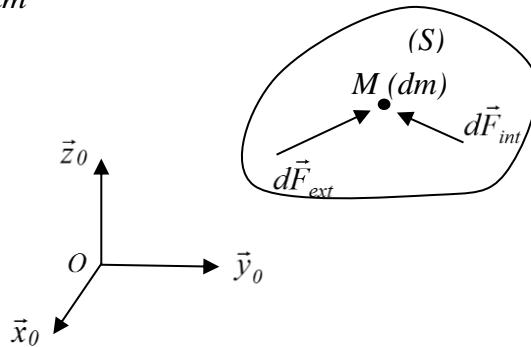
Soit un système matériel (S) non isolé et soumis à des interactions dans un repère Galiléen  $R_0(O, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ . Sur ce système (S) s'exercent deux catégories d'actions :

- Les actions provenant des corps autres que (S) ; ces actions sont appelées *forces extérieures* et notées  $d\vec{F}_{ext}$  ;
- Les actions provenant des éléments de (S) ; ces actions sont appelées *forces intérieures* et notées  $d\vec{F}_{int}$ .

*Il faut choisir convenablement les conditions aux limites du système pour pouvoir classer les actions (ou forces) intérieures et extérieures.*

En un point quelconque  $M$  de masse  $dm$  du système (S) (Fig. VII.1), la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$d\vec{F}_{int} + d\vec{F}_{ext} = \vec{\gamma}(M) dm \quad (VI.23)$$



**Fig. VII.1 : Système (S) au mouvement par rapport à  $R_0$ .**

Les actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur (S) sont représentées par un toreleur  $\left\{ T_{\vec{F}_{ext}} \right\}_A^0$ , appelé toreleur des forces extérieures dont les éléments de réduction au point A sont :

$$\left\{ T_{\vec{F}_{ext}} \right\}_A^0 = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{ext} \\ \vec{M}_{A_{ext}} \end{array} \right\}_A \quad (VI.24)$$

Le principe fondamental de la dynamique montre que dans tout référentiel Galiléen, le toreleur dynamique  $\{D\}_A^0$  du système (S) est égal au toreleur des forces extérieures  $\left\{ T_{\vec{F}_{ext}} \right\}_A^0$  calculé au même point A.

L'égalité des deux toseurs induit l'égalité de leurs éléments de réduction. Ce principe équivaut à la généralisation des lois de Newton. Les éléments des deux toseurs peuvent être calculés séparément et ensuite faire l'égalité des expressions obtenues.

## Chapitre VI : Principe fondamentale de la dynamique des systèmes matériels

### VI.7. Théorème de la résultante dynamique

Le système ( $S$ ) étant considéré comme un ensemble de points matériels. Il en mouvement dans un repère Galiléen  $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et soumis à des actions extérieures :

$$\int_{M \in (S)} d\vec{F}_{int} + \int_{M \in (S)} d\vec{F}_{ext} = \int_{M \in (S)} \vec{\gamma}^0(M) dm \quad (VI.25)$$

$$\int_{M \in (S)} d\vec{F}_{int} = 0 \rightarrow \text{Forces intérieures constituent un torseur nul}$$

$$\text{On pose : } \int_{M \in (S)} d\vec{F}_{ext} = \vec{F}_{ext} \rightarrow \text{Somme des forces extérieures}$$

d'où :

$$\vec{F}_{ext} = \vec{D}^0 = m\vec{\gamma}^0(G) \quad (VI.26)$$

Le centre de masse (ou d'inertie)  $G$  d'un système matériel ( $S$ ) quelconque se déplace comme un point matériel affecté de la masse totale du système et sur lequel agirait la somme des forces extérieures. Ce théorème élimine la fiction du point matériel.

La résultante des forces extérieures est égale à la masse du système par l'accélération de son centre d'inertie.

### VI.8. Théorème du moment dynamique

Prenons le moment en un point  $A$  quelconque :

$$\underbrace{\int_{M \in (S)} \overrightarrow{AM} \wedge d\vec{F}_{int}}_{=0} + \int_{M \in (S)} \overrightarrow{AM} \wedge d\vec{F}_{ext} = \int_{M \in (S)} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}^0(M) dm \quad (VI.27)$$

$$\int_{M \in (S)} \overrightarrow{AM} \wedge d\vec{F}_{ext} = \vec{M}_{Aext} = \vec{\delta}_A^0 \quad (VI.28)$$

et comme

$$\vec{\delta}_A^0 = \frac{d^0 \vec{\sigma}_A}{dt} + \vec{V}^0(A) \wedge m\vec{V}^0(G) \quad (VI.29)$$

donc :

$$\vec{M}_{Aext} = \vec{\delta}_A^0 = \frac{d^0 \vec{\sigma}_A}{dt} + \vec{V}^0(A) \wedge m\vec{V}^0(G) \quad (VI.30)$$

Le moment des forces extérieures en un point  $A$  quelconque est égale au moment dynamique en ce point.

#### Remarque

Le théorème de la résultante dynamique et le théorème du moment dynamique peuvent être formulés conjointement : Le torseur de forces extérieures est équivalent au torseur dynamique :

$$\left\{ \Gamma_{\vec{F}_{ext}} \right\}_A^0 = \{D\}_A^0 \text{ ou } \left\{ \begin{matrix} \vec{D}^0 \\ \vec{\delta}_A^0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_{ext} \\ \vec{M}_{Aext} \end{matrix} \right\}_A \quad (VI.31)$$

### VI.9. Travail et puissance d'une force

On considère un point matériel  $M$  mobile dans un repère Galiléen et soumis à une force  $\vec{F}$  qui dépend de la position et (également) de la vitesse, l'expression du travail élémentaire s'écrit :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F}(M) \cdot d\overrightarrow{OM} \quad (VI.32)$$

Pour obtenir le travail d'une force variable sur un déplacement quelconque, il suffit d'additionner tous les travaux élémentaires entre le point de départ  $A$  et le point d'arrivée  $B$  :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}(M) \cdot d\overrightarrow{OM} \quad (VI.33)$$

La puissance que reçoit le point  $M$  est égal à :

## Chapitre VI : Principe fondamentale de la dynamique des systèmes matériels

$$P = \frac{\delta W(\vec{F})}{dt} = \vec{F}(M) \cdot \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{F}(M) \cdot \vec{V}(M) \quad (\text{VI.34})$$

### VI.10. Théorème de l'énergie cinétique

Dans de nombreux cas, pour déterminer l'équation du mouvement d'un solide ou d'un système de solide, il est plus judicieux d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique afin d'aboutir à la solution du problème mécanique.

Au voisinage de la surface terrestre, dans un repère Galiléen, pour chaque point  $M$ , on a :

$$dm\vec{\gamma}^0(M) = d\vec{F}_{int} + d\vec{F}_{ext} \quad (\text{VI.35})$$

Les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis sont négligeables devant  $d\vec{F}_{int}$  et  $d\vec{F}_{ext}$ .

Multipliant scalairement l'équation (VI.35) par  $\vec{V}^0(M)$ , on obtient :

$$dm \frac{d\vec{V}^0(M)}{dt} \cdot \vec{V}^0(M) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} dm (\vec{V}^0(M))^2 \right) = (d\vec{F}_{int} + d\vec{F}_{ext}) \cdot \vec{V}^0(M) \quad (\text{VI.36})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m (\vec{V}^0(G))^2 \right) = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{V}^0(M) \quad (\text{VI.37})$$

Intégrant entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  :

$$\frac{1}{2} m (\vec{V}^0(M_2))^2 - \frac{1}{2} m (\vec{V}^0(M_1))^2 = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{OM} \quad (\text{VI.38})$$

Le second terme de l'équation (VI.45) représente le travail de force extérieure au cours du déplacement  $M_1M_2$

d'où :

$$E_{C2} - E_{C1} = W_{ext} \quad (\text{VI.39})$$

La variation de l'énergie cinétique entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  est égale au travail de la force extérieure qui s'applique sur l'ensemble des particules.

### VI.11. Conservation de l'énergie totale

Si la force extérieure dérive d'une fonction énergie potentielle  $U(M) : \vec{F}_{ext} = -\overrightarrow{\text{grad}U}$ , en en déduit :

$$dW_{ext} = \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{OM} = -dU \quad (\text{VI.40})$$

et en appliquant le théorème de l'énergie cinétique sous forme différentielle, il vient :

$$dE_C = dW_{ext} = -dU \Rightarrow dE_C + dU = 0 \Rightarrow E_C + U = Cst = \text{Energie totale} \quad (\text{VI.41})$$

Cette expression traduit le théorème de conservation de l'énergie totale.

#### Application

Soit une barre homogène de longueur  $AB=L$ , de masse  $m$ , de centre de masse  $G$  dont l'extrémité  $A$  repose sur un sol lisse et l'extrémité  $B$  s'appuie contre mur vertical parfaitement lisse (Fig. 2). Initialement la barre fait un angle  $\theta_0$  avec le mur. Les deux extrémités glissent, sans frottement, respectivement sur le sol et sur le mur. On prendra :  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  comme repère fixe et  $R_I(O, \vec{x}_I, \vec{y}_I, \vec{z}_I)$  comme repère mobile lié à la barre.

3. 1. Faire une figure à l'instant  $t$  (Indiquer les différentes forces qui agissent sur la barre).
4. En utilisant les théorèmes de la résultante dynamique et du moment dynamique, établir les trois équations scalaires du mouvement de la barre.
5. En déduire, à partir de ces équations, l'accélération angulaire de la barre.

## Chapitre VI : Principe fondamentale de la dynamique des systèmes matériels

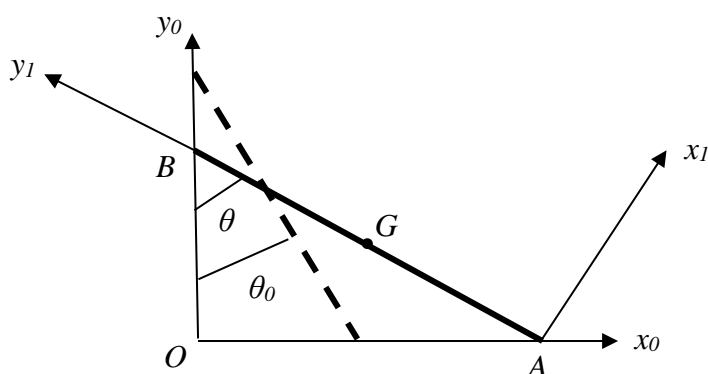
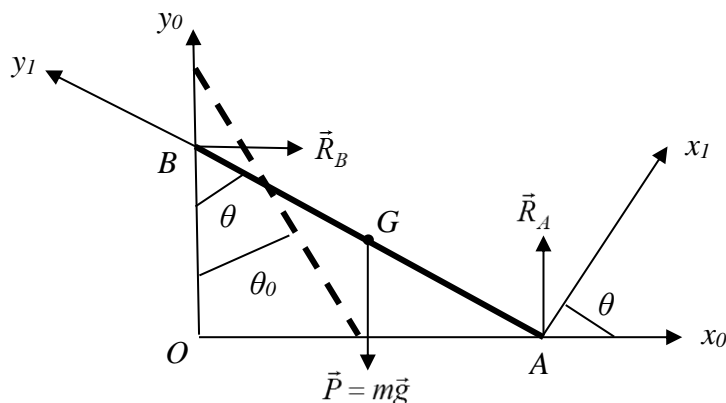


Fig. 2 : Barre en mouvement plan

### Solution

1. Mur lisse  $\implies \vec{R}_B = R_B \vec{x}_0$  et sol lisse  $\implies \vec{R}_A = R_A \vec{y}_0$



2. Équations scalaires du mouvement de la barre

Le vecteur vitesse rotation à pour composantes :  $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{z}_0 = \dot{\theta} \vec{z}_1$

Théorème de la résultante dynamique

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{R}_A + \vec{R}_B + m\vec{g} = m\vec{\gamma}^0(G) \quad (A1)$$

L'obtention de  $\vec{\gamma}^0(G)$  nécessite la détermination du vecteur position  $\vec{OG}^0$  puis la vitesse  $\vec{V}^0(G)$ .

On a, en appliquant la relation (III.23) du chapitre III :

$$\vec{OG} = \begin{pmatrix} \frac{L}{2} \sin(\theta) \\ \frac{L}{2} \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} \Rightarrow \vec{V}^0(G) = \begin{pmatrix} \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos(\theta) \\ -\frac{L}{2} \dot{\theta} \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} \Rightarrow \vec{\gamma}^0(G) = \begin{pmatrix} \frac{L}{2} (\ddot{\theta} \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \sin(\theta)) \\ -\frac{L}{2} (\ddot{\theta} \sin(\theta) + \dot{\theta}^2 \cos(\theta)) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

La projection de (A1) sur les deux axes donne les deux premières équations scalaires:

$$R_A - mg = -m \frac{L}{2} (\ddot{\theta} \sin(\theta) + \dot{\theta}^2 \cos(\theta)) \quad (A2)$$

$$R_B = m \frac{L}{2} (\ddot{\theta} \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \sin(\theta)) \quad (A3)$$

## Chapitre VI : Principe fondamentale de la dynamique des systèmes matériels

### Théorème du moment dynamique

$$\sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_{ext}) = \vec{\delta}_O^0 \Leftrightarrow \vec{OA} \wedge \vec{R}_A + \vec{OB} \wedge \vec{R}_B + \vec{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{d\vec{\sigma}_O^0}{dt} \quad (A4)$$

On doit calculer le moment cinétique  $\vec{\sigma}_O^0$

$$\vec{\sigma}_O^0 = I_G \vec{\Omega}_I^0 + \vec{OG} \wedge m\vec{V}^0(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{L}{2} \sin(\theta) \\ \frac{L}{2} \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge m \begin{pmatrix} \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos(\theta) \\ -\frac{L}{2} \dot{\theta} \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_O^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{mL^2}{6} \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_0}$$

On déduit le moment dynamique :

$$\vec{\delta}_O^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{mL^2}{6} \ddot{\theta} \end{pmatrix}_{R_0}$$

L'équation (A4) sous forme matricielle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} L \sin(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ L \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (L/2) \sin(\theta) \\ (L/2) \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\vec{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{mL^2}{6} \ddot{\theta} \end{pmatrix}$$

D'où la troisième équation scalaire :

$$-L \cos(\theta) R_B + L \sin(\theta) R_A - \frac{mgL}{2} \sin(\theta) = -\frac{mL^2}{6} \ddot{\theta} \quad (A5)$$

### 3. Accélération angulaire de la barre

On remplaçant  $R_A$  et  $R_B$  par leurs expressions dans (A5), on obtient :

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2L} \sin(\theta)$$



## Chapitre VII : Principe des travaux virtuels et équations de Lagrange

### Chapitre VII : Principe des travaux virtuels et équations de Lagrange

#### VII.1. Liaisons (ou contraintes) et degrés de liberté

Par définition, un corps libre est un corps qui peut effectuer des déplacements quelconques dans l'espace. Un corps, dont les déplacements dans l'espace sont limités par d'autres corps liés à lui ou se trouvant en contact avec lui, s'appelle un corps non libre. *Nous appellerons liaison tout ce qui limite les déplacements d'un système donné (solide, point matériel) dans l'espace et diminue ainsi ses degrés de liberté.*

Le degré de liberté (*ddl*) d'une liaison est le *nombre de déplacements élémentaires indépendants autorisés* par cette liaison.

Par opposition, le degré de liaison (*ddl<sub>n</sub>*) est le *nombre de déplacements élémentaires interdits*

Un corps libre possède *six* degrés de liberté dans l'espace et *trois* dans un plan. Un point matériel libre possède *trois* degrés de liberté dans l'espace et *deux* dans un plan

#### Exemples de liaisons

1. Dans un corps indéformable (Fig. VII.1), la distance entre deux points doit rester constante :

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 = r_{ij}^2 \quad (\text{VII.1})$$

2. Un pendule de longueur  $l$  (Fig. VII.2), bougeant dans le plan ( $Oxy$ ). Ses coordonnées obéissent à la contrainte :

$$x^2 + y^2 = l^2 \quad (\text{VII.2})$$

Le mouvement est plan, le seul degré de liberté est l'angle  $\theta$  que fait le pendule avec l'axe  $Ox$ .

3. Une boule roulant sans glisser sur un plan peut se déplacer selon deux directions  $Ox$  et  $Oy$ . La force de liaison qui l'empêche de glisser est dirigée selon l'axe  $Oz$  et ne va donc pas engendrer de travail.

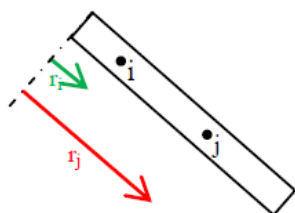


Fig. VII.1 : Corps rigide.

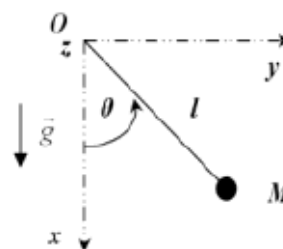


Fig. VII.2 : Pendule simple.

#### VII.2. Classification des liaisons

##### VII.2.1. Liaisons holonomes (ou géométriques)

C'est le type de liaisons qui ne dépendent que de la position des points matériels  $m_i$  déterminée par le vecteur position  $\vec{r}_i$ . La forme de l'équation de liaison est :

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad \text{ou} \quad f(\vec{r}_i, t) = 0 \quad \text{avec} : i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{VII.3})$$

Si la liaison *dépend explicitement temps*  $t$ , alors il s'agit de *liaison non stationnaire* (rhéonome). Dans le cas contraire on parle de *liaison stationnaire* (scléronome).

Exemple 1 : Le pendule montré dans la figure VII.2

##### VII.2.1. Liaisons non holonomes (ou cinématiques)

C'est le type de liaisons qui dépendent en plus des vitesses  $\vec{V}_i = \dot{\vec{r}}_i$  des points matériels  $m_i$ . L'équation de liaison est de la forme :

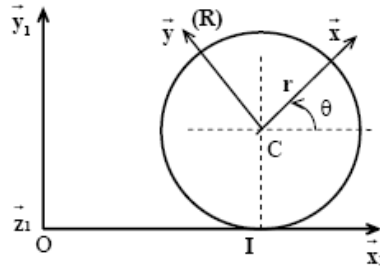
$$f(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) = 0 \quad \text{avec} : i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{VII.4})$$

- Toute liaison holonome peut être rendue non holonome par dérivation par rapport au temps.
- Certaines liaisons non holonomes peuvent être rendues holonomes par intégration (liaisons semi holonomes).

## Chapitre VII : Principe des travaux virtuels et équations de Lagrange

**Exemple 2 :** Disque de rayon  $R$  roulent sans glisser sur un axe (Fig. VII.3). Les équations de liaison sont :

$$y_{IC} - R = 0 \rightarrow \text{liaison holonome et } \dot{x}_{IC} - R\dot{\theta} = 0 \rightarrow \text{liaison non holonome} \quad (\text{VII.5})$$



**Fig. VII.3 :** Disque roulent sans glisser sur un axe.

### VII.3. Principe des Travaux Virtuels-Principe d'Alembert

Le principe des travaux virtuels est un autre procédé *plus général* de résolution des problèmes de la statique, procédé qui permet de trouver immédiatement les conditions d'équilibre d'un système mécanique quelconque. La différence fondamentale entre ce procédé et ceux de la statique géométrique consiste à tenir compte de l'effet de l'action des liaisons non pas au moyen de l'introduction des forces des réactions, mais par l'étude des déplacements qu'on pourrait communiquer aux points du système en l'écartant de la position qu'il occupe. En mécanique ces déplacements sont appelés *déplacements virtuels*.

Nous appellerons déplacement virtuel d'un système tout ensemble de déplacements *infinitement petits* des points du système qui est, au moment donné, *compatible* avec les liaisons appliquées à ce système. On le note  $\delta\vec{r}$ , ses coordonnées spatiales étant  $\delta x_i, i = 1, 2, 3$ .

Le travail virtuel  $\delta W$  d'une force  $\vec{F}$  sur un déplacement élémentaire virtuel  $\delta\vec{r}$  est :

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} \quad (\text{VII.6})$$

Or dans un système les forces sont la somme des :

- forces extérieures appliquées au système :  $\vec{F}_{ext}$
- forces internes de liaison, responsables des contraintes de liaison au sein du système :  $\vec{F}_{lia}$

La dynamique d'un système de  $N$  points matériels est décrite par les équations de Newton :

$$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = \vec{F}_{ext\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (\text{VII.7})$$

Ici  $m_\alpha$  est la masse du point matériel,  $r_\alpha$  sa position à l'instant  $t$  et  $F_{ext\alpha}$  la force externe agissant sur lui.

Sans contraintes, le système décrit par les équations de Newton a  $n = 3N$  degrés de liberté. Supposons maintenant que le système dynamique est soumis à  $k$  contraintes holonomes de la forme :

$$f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = 0 \quad \text{avec} : j = 1, 2, \dots, k \quad (\text{VII.8})$$

Dans ce cas on aura alors  $n = 3N - k$  degrés de liberté. Dans les équations du mouvement les contraintes imposées sont reflétées par la présence de forces de contrainte. Si  $\vec{F}_{lia}$  est la force de contrainte sur la particule  $\alpha$ , les équations de Newton deviennent :

$$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = \vec{F}_{ext\alpha} + \vec{F}_{lia\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (\text{VII.9})$$

D'après d'Alembert, Lors d'un déplacement virtuel d'un système, les forces de liaison ne travaillent pas :

$$\delta W_{lia} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{lia\alpha} \cdot \delta\vec{r}_\alpha = 0 \quad (\text{VII.10})$$

En utilisant l'équation (VII.9) on peut alors écrire :

$$\delta W(\vec{F}_{ext\alpha} + \vec{F}_{ine\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{F}_{ext\alpha} - m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha) \cdot \delta\vec{r}_\alpha = 0 \quad (\text{VII.11})$$

Ici  $\vec{F}_{ine\alpha}$  est la force d'inertie agissant sur le point matériel  $\alpha$ .

L'équation (VII.11) est souvent appelée *principe d'Alembert*.

## Chapitre VII : Principe des travaux virtuels et équations de Lagrange

A l'équilibre (configuration statique), ou les accélérations sont nuls  $\vec{\ddot{r}}_\alpha$ , le principe (VII.10) donne la relation bien connue :

$$\delta W(\vec{F}_{ext\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{ext\alpha} \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0 \quad (\text{VII.12})$$

Cette dernière relation exprime le Principe des Travaux Virtuels : à l'équilibre statique d'un système le travail virtuel de toutes les forces extérieures est nul.

### VII.4. Coordonnées généralisées et Forces généralisées

L'exemple simple du pendule montre que la description d'un système mécanique sous contraintes en coordonnées cartésiennes n'est pas pratique pour le calcul analytique. Au lieu de décrire un système mécanique en coordonnées cartésiennes et des contraintes du type (VII.3), on exprime maintenant les positions  $\vec{r}_\alpha$  tout simplement par  $n$  coordonnées généralisées et indépendantes.

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1, q_1, \dots, q_n) \quad (\text{VII.13})$$

Les paramètres *indépendant entre eux* de dimension quelconque qui détermine de façon univoque la position d'un système mécanique dans l'espace et dont le nombre est égal à son degrés de liberté sont appelées *coordonnées généralisées* et sont désignées par la lettre  $q$ .

Les dérivées des coordonnées généralisées par rapport au temps sont appelées *vitesse généralisées* du système et sont désignées  $\dot{q}$ .

Les déplacements virtuels  $\delta \vec{r}_\alpha$  peuvent être exprimés par les variations virtuelles des coordonnées généralisées :

$$\delta \vec{r}_\alpha = \sum_{f=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_f} \delta q_f \quad (\text{VII.14})$$

On utilisant cette définition de  $\delta \vec{r}_\alpha$ , L'équation (VII.12) devient :

$$\delta W(\vec{F}_{ext}) = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{ext\alpha} \cdot \sum_{f=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_f} \delta q_f = \sum_f Q_f \delta q_f \quad (\text{VII.15})$$

où nous avons introduit la *force généralisée* dont la f-ième composante s'écrit

$$Q_f = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{ext\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_f} \quad (\text{VII.16})$$

Lorsque les forces  $\vec{F}_{ext\alpha} = -\vec{\nabla}_\alpha U$  dérivent d'un potentiel  $U$ , les forces généralisées s'écrivent :

$$Q_f = - \sum_{\alpha=1}^N \vec{\nabla}_\alpha U \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_f} = - \frac{\partial U}{\partial q_f} \quad (\text{VII.17})$$

### VII.5. Equations de Lagrange

Pour l'exprimer l'équation (VII.11) en fonction des coordonnées généralisées  $q_f$ , on fait emploi de l'équation (VII.14). On obtient :

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{F}_{ext\alpha} - m_\alpha \vec{\ddot{r}}_\alpha) \cdot \sum_{f=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_f} \delta q_f = 0 \quad (\text{VII.18})$$

ou encore :

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^N \left[ \vec{F}_{ext\alpha} \cdot \sum_{f=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_f} - m_\alpha \vec{\ddot{r}}_\alpha \cdot \sum_{f=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_f} \right] \delta q_f = \sum_{f=1}^n \left[ \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{ext\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_f} - \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{\ddot{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_f} \right] \delta q_f = 0 \quad (\text{VII.19})$$

Le premier terme de l'équation (VII.19) est la force généralisée donnée par :

$$\vec{Q}_f = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{ext\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_f} \quad (\text{VII.20})$$

Il faut remarquer que le second terme est égal :

## Chapitre VII : Principe des travaux virtuels et équations de Lagrange

$$\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \ddot{\vec{r}}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_f} = \sum_{\alpha=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_f} \right) - m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_f} \right) \right] \quad (\text{VII.21})$$

On peut montrer qu'on a :

$$\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_f} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_f} \quad (\text{VII.22})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_f} \right) = \frac{\partial}{\partial q_f} \left( \frac{d\vec{r}_{\alpha}}{dt} \right) \quad (\text{VII.23})$$

Nous pouvons donc intervertir la dérivation totale par rapport au temps et la dérivation partielle par rapport aux coordonnées généralisées.

Avec les équations (VII.22) et (VII.23), l'équation (VII.19) devient :

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_f} \right) - \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_f} \right) = Q_f \quad (\text{VII.24})$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_f} \left( \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_f} \left( \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2 \right) = Q_f \quad (\text{VII.25})$$

En notant  $T$  l'énergie cinétique :

$$\forall f = 1, 2, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_f} = Q_f \quad (\text{VII.26})$$

Si la force (totale) extérieure qui s'exerce sur chaque particule du système dérive d'un potentiel  $U$ , nous utilisons la relation (VII.17) et nous avons :

$$\forall f = 1, 2, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_f} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_f} = - \frac{\partial U}{\partial q_f} \quad (\text{VII.27})$$

et si le potentiel  $U(q, t)$  ne dépend pas des vitesses généralisées  $\dot{q}_f$ , nous pouvons ajouter le terme nul

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_f} :$$

$$\forall f = 1, 2, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_f} (T - U) \right] - \frac{\partial}{\partial q_f} (T - U) = 0 \quad (\text{VII.28})$$

La fonction des  $n$  coordonnées généralisées  $q$ , des  $n$  vitesses généralisées  $\dot{q}_f$ , et du temps  $t$  :  $L(q, \dot{q}, t) = T - U$  est appelée *fonction de Lagrange* ou *Lagrangien*.

### Application

Soit un pendule simple, de la figure (VII.2), de longueur  $l$  avec une masse  $m$  placée dans un champ de pesanteur  $g$  et astreint à se déplacer dans un plan  $(x, y)$  muni de la base mobile  $(\vec{u}_r, \vec{u}_{\theta})$ . La position du point  $M$  est repérée par  $\overrightarrow{OM} = l\vec{u}_r$ .

1. Déterminer le nombre de degré de liberté de ce pendule
2. Calculer la vitesse et déduire l'expression de l'énergie cinétique.
3. Calculer le travail effectué lors d'un déplacement virtuel  $\delta\vec{r} = l\delta\theta\vec{u}_{\theta}$ . En déduire l'expression de la composante de la force généralisée selon  $\theta$ .
4. En utilisant la relation entre la composante de la force généralisée de pesanteur et celle de d'inertie selon  $\theta$ , déduire l'équation du mouvement en  $\theta$ .
5. Calculer l'expression du Lagrangien et déduire l'équation du mouvement en utilisant l'équation de Lagrange.

## Chapitre VII : Principe des travaux virtuels et équations de Lagrange

### Solution 3

Soit  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  le repère d'étude.  $Oz$  est perpendiculaire au plan du mouvement et l'axe  $Ox$  est pris dans la direction descendante, d'où  $\vec{g} = g\vec{x}$  (Fig. VII.4). Le repère mobile et de projection  $R_m(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{z})$  est lié au fil inextensible et sans masse  $OM$ .

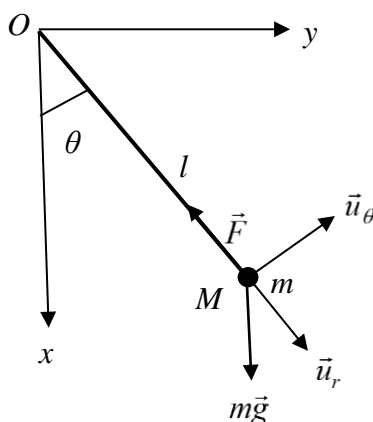


Fig. VII.4

1. La masse  $m$  peut être considérée sans volume et donc comme un point matériel. Comme le mouvement du pendule est dans le plan vertical  $(x, y)$ , le nombre de mouvements possibles est donc 2 et la position du pendule est contrainte par  $z = 0$ . Le fil étant inextensible, alors la distance qui sépare  $M$  de  $O$  est constante et égale à  $l$  et donc  $x^2 + y^2 = l^2$ , ce qui entraîne un degré de liaison. Aussi, le nombre de degrés de liaison est 2 et donc le nombre de degrés de liberté est  $3 - 2 = 1$ . La coordonnée la mieux adaptée pour d'écrire le système est l'angle  $\theta$ .
2. Le vecteur position dans la base mobile est :  $\overrightarrow{OM} = l\vec{u}_r$ , ce qui donne pour la vitesse :

$$\vec{V}^R(M) = \frac{d^R \overrightarrow{OM}}{dt} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

L'énergie cinétique dans  $R$  peut être déduite ainsi comme suit :

$$T = \frac{1}{2} mV^2 = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$$

3. Considérons le déplacement virtuel,  $\delta\vec{r} = l\delta\theta\vec{u}_\theta$ , qui est confondu dans ce cas avec le déplacement réel. Le travail effectué est donné par :

$$\delta\vec{r} = m\vec{g} \cdot \delta\vec{r} = mgl\delta\theta\vec{x} \cdot \vec{u}_\theta = -mgl\delta\theta \sin(\theta)$$

Or :

$$\delta W = Q_\theta \delta\theta \Rightarrow Q_\theta = -mgl \sin(\theta) \text{ qui est la composante de la force généralisée de pesanteur selon } \theta.$$

4. La composante généralisée d'inertie selon  $\theta$  est définie par :

$$Q_\theta^{in} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = ml(\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - \dot{\theta}^2\vec{u}_r) \cdot l\vec{u}_\theta = ml^2\ddot{\theta}$$

Nous avons grâce au principe d'Alembert :

$$Q_\theta^{in} = Q_\theta \Rightarrow ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin(\theta) \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

5. Pour établir l'expression du lagrangien, nous avons besoin en plus de cinétique de l'expression de l'énergie potentielle

$$dU = -m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -mgl d\theta \vec{x} \cdot \vec{u}_\theta = mgl d\theta \sin(\theta)$$

Ce qui donne :

$$U = -mgl \cos(\theta) + Cst$$

On peut prendre :  $Cst = 0$

## Chapitre VII : Principe des travaux virtuels et équations de Lagrange

Alors, l'expression du lagrangien est donnée ainsi par :

$$L = T - U = \frac{1}{2} ml \dot{\theta}^2 + mgl \cos(\theta)$$

En appliquant les équations de Lagrange, sachant que  $\partial L / \partial \theta = -mgl \sin(\theta)$  et  $\partial L / \partial \dot{\theta} = ml^2 \dot{\theta}$ , nous obtenons :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$-mgl \sin(\theta) - ml^2 \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

## Références bibliographiques

## Références bibliographiques

1. DETREZ (2011) : "Mécanique". Polycopié de cours.
2. Emmanuel. Plaut (2007) : "Mécanique générale et analytique".
3. Ferdinand P. Beer : "Mécanique à l'usage des ingénieurs" STATIQUE", Edition Russell.
4. HAMZAOUI. N (1986) : "Mécanique Rationnelle" (Module TEC005), polycopie, USTHB.
5. HÉNON. Gérard (2004) : "Année 2004Éléments de Mécanique des Solides Indéformables".
6. KADI. A : "Mécanique Rationnelle". UMBB Boumerdès, Faculté des sciences, Département de physique.
7. KASSOUL. Amar (2009) : "Physique 4 : Mécanique Rationnelle". Polycopié.
8. MCGILL D.J., WING W.W (1989): "Engineering mechanics-Dynamics". Second Edition. Publishing Company, Pws - Kent. Boston.
9. Targ. S (1975) : "Eléments de Mécanique Rationnelle". EDITION MIR MOUSCOU.
10. YVES BERTHAUD (2006) : "Mécanique des solides rigides". Notes de cours.