ECOLE SUPÈRIEURE EN GÉNIE ELECTRIQUE ET ENERGÉTIQUE D'ORAN

Département classes préparatoires

Module : Mécanique Des Fluides

Support de cours

Notions Fondamentales en Mécanique Des Fluides

Présenté par :

Dr. KHORSI AZZEDDINE

Préface :

La mécanique des fluides est une partie de la mécanique des milieux continus. Cette discipline occupe une place centrale et importante dans la formation des ingénieurs.

Cette polycopie de cours intitulé « notions fondamentales de mécanique des fluides » est destiné aux étudiants désirant maitriser les bases du module : Mécanique des fluides, plus particulièrement aux étudiant en deuxième année du premier cycle des écoles supérieures du domaine sciences et technologie.

Le présent support de cours couvre les aspects essentiels de la mécanique des fluides tel que : notion de pression, écoulement de fluide parfait, écoulement de fluide visqueux et notion de perte de charges. Parmi les objectifs de ce support de cours on peut citer :

- Fournir des connaissances de base de la statique des fluides.
- Apprendre à décrire le mouvement d'un fluide.
- Mettre en place les théorèmes de la mécanique des fluides.
- Fournir les éléments nécessaires à la résolution des problèmes d'écoulements de fluides considérés parfaits ou réels.

Ce cours de base est composé de quatre chapitres conformément au programme pédagogique officiel de mécanique des fluides en classes préparatoires en sciences et techniques :

- Le premier chapitre présente les propriétés physiques d'un fluide ainsi que l'étude de la variation de pression dans un fluide au repos et les forces qui en résultent.
- Le deuxième chapitre présente la cinématique de fluide ou on donne les outils de description de mouvement d'un fluide par deux approches différentes.
- Le troisième chapitre traite l'écoulement de fluide considéré parfais et introduit le théorème de Bernoulli et ses applications.
- Le dernier chapitre s'intéresse aux écoulements visqueux et la détermination de pertes de charge.

Chapitre 1

Statique des Fluides

Chapitre 1 statique des fluides

Introduction :

La MDF est un sous ensemble de la mécanique des milieux continus. C'est la discipline qui étudie les gaz et les liquides à l'état d'équilibre (au repos) et en mouvement ainsi que l'interaction des fluides avec les corps solides.

Fluide au repos : - statique des gaz (aérostatique)
- statique des liquides (hydrostatique)

Fluide en mouvement : - Dynamique des liquides (hydrodynamique)
- Dynamique des gaz (aérodynamique)

Définition d'un fluide :

Un fluide est une substance qui peut prendre une forme quelle conque lorsqu'elle est soumise à un système de force convenable.

Un fluide épouse la forme du récipient qui le contient. A cause des différences de cohésion et de compressibilité, on peut distinguer deux états d'un fluide à savoir liquide et gaz.

Propriétés physiques de fluide :

- Masse volumique **:** est la quantité de la matière contenue dans une unité de volume, elle est dénotée ρ, elle est exprimée en $\mathbf{kg.m^{-3}}$ en SI.

- Poids spécifique : est le poids d'un fluide par unité de volume, il est dénoté γ tel que

$$\gamma=\rho.g \qquad \text{en SI } [\gamma]=N.m^{-3}$$

- Densité relative: est le rapport de la masse volumique d'une substance et celle de l'eau (1000 $kg.m^{-3}$) pour les liquides, ou celle de l'air (ou d'hydrogène) pour les gaz. Elle est notée **d** (sans dimensions).

$$\boldsymbol{d=\frac{\rho_{fluide}}{\rho_{réf}}}$$

- La Viscosité

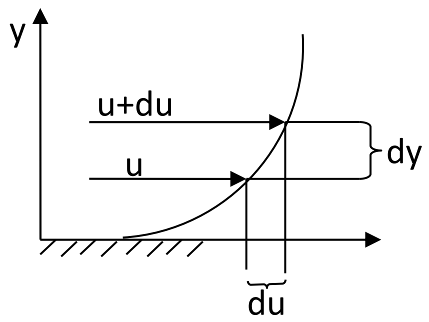
Est la propriété d'un fluide qui détermine sa résistance au cisaillement, c'est une mesure du frottement interne qui cause la résistance du fluide à s'écouler.

La contrainte de cisaillement est proportionnelle au gradient de vitesse (loi de Newton)

$$\tau \sim \frac{du}{dy}$$

Donc :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$



Le facteur de proportionnalité « **μ** » est appelé le coefficient de viscosité dynamique ou viscosité dynamique.

En SI la viscosité dynamique est exprimée en ($N.s.m^{-2}$)

Et En CGS en Poise avec 1poise =0.1 $N.s.m^{-2}$.

La viscosité cinématique : est le rapport entre la viscosité dynamique et la masse volumique du fluide

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Unité: en SI: m^2/s et en CGS: Stoke (1stoke=1cm^2/s=10^{-4} m^2/s)

Classification des fluides

Par compressibilité : La propriété physique qui permet de faire la différence entre les liquides et les gaz est ***la compressibilité***.

- Fluides incompressible (Les liquides) : Les liquides sont des fluides très peu compressibles et ont donc un volume propre. En première approximation on pourra considérer la masse volumique invariable : $\rho \approx$ Constante

On appelle coefficient de compressibilité le rapport de la diminution relative de volume à l'augmentation de pression, et ce à température constante.

Ce qui revient à considérer que la compressibilité soit négligeable pour les liquides:

$$\chi_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}\bigg|_T = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial P}\bigg|_T \approx 0\,\mathrm{Pa}^{-1}$$

- Fluides compressibles (Les gaz):

Les molécules ne sont pas liées en distance ainsi les forces permettant d'engendrer des déformations volumiques (contraction ou dilatation) sont faibles. À l'inverse des liquides les gaz sont compressibles.

Le volume d'un gaz enfermé dans un piston est très sensiblement réduit lors d'une compression même infime.

Par effet de viscosité

- Fluide parfait: est un fluide non visqueux (viscosité nulle) c'est à dire le fluide s'écoule sans aucune force de frottement résistante (interne ou externe).
- Fluide réel : dans un fluide réel la viscosité n'est pas négligeable et on peut distinguer deux types de fluides selon la variation de la viscosité
- Fluide Newtonien**:** tous les fluides qui obéissent à la loi de Newton de la viscosité ($\tau = \mu \frac{du}{dy}$) sont appelés fluides Newtoniens.
- Fluide NonNewtonien**:** un fluide qui ne suit pas la relation linéaire entre la contrainte de cisaillement et le taux de déformation est dit fluide Non Newtonien.

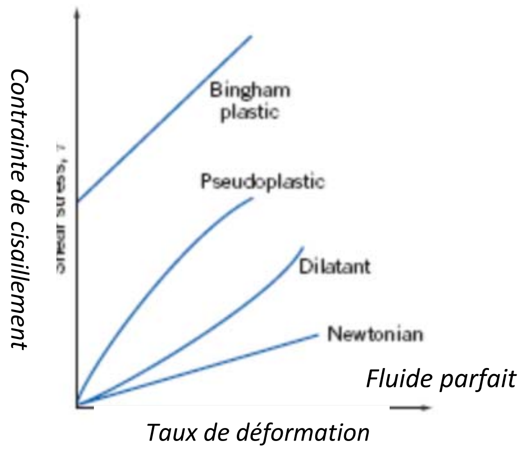
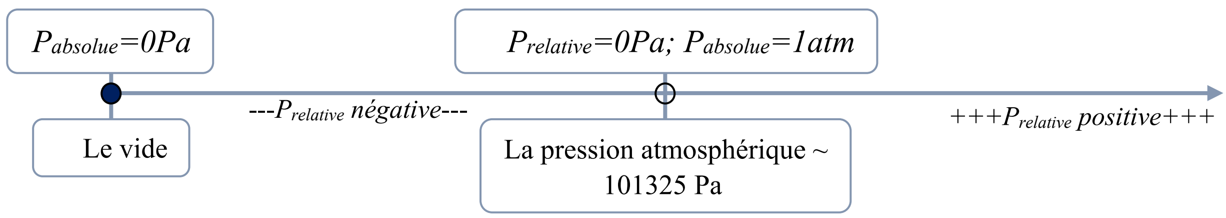


Diagramme de Rhéologie

Principe et théorèmes généraux

Notion de pression et échelle de pression



- La pression atmosphérique

La pression atmosphérique moyenne au niveau de la mer, à 15 °C, est de 1013 mbar. Elle peut varier, de ± 25 mbar, avec la pluie ou le beau temps. Elle est fonction de l'altitude (hydrostatique).

- La pression absolue

La pression absolue est la pression mesurée par rapport au vide absolu (c'est-à-dire l'absence totale de matière). Elle est toujours positive.

- Pression relative

La pression relative se définit par rapport à la pression atmosphérique existant au moment de la mesure: cette pression peut donc prendre une valeur positive si la pression est supérieure à la pression atmosphérique ou une valeur négative si la pression est inférieure à la pression atmosphérique.

La relation entre la pression absolue et la pression relative est:

$P_{absolue} = P_{relative} + P_{atmosphérique}$

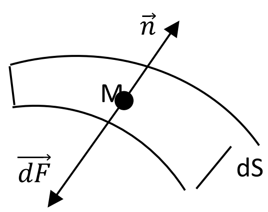
- Le vide

Le vide est une pression inférieure à la pression atmosphérique. Le vide parfait correspond théoriquement à une pression absolue nulle. Il ne peut être atteint, ni dépassé. Quand on s'en approche, on parle alors de vide poussé.

Pression en un point d'un fluide:

Dans un fluide au repos, la pression désigne la force par unité de surface qui s'exerce perpendiculairement à un élément de surface dS

$$\overrightarrow{dF} = -P.\vec{n}.ds$$



dF : est la force exercée sur l'élément de surface dS

P : la pression régnant au point M

La pression est toujours indépendante de la surface et de l'orientation de cette surface

La pression s'exprime en Pascal (Pa) en SI

Avec : 1Pa =1N.m^{-2}

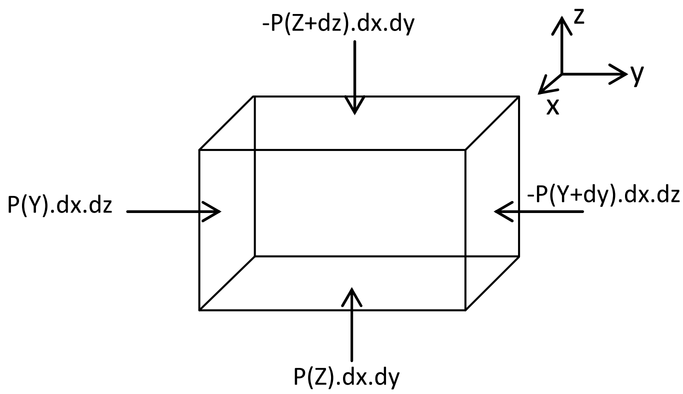
1 atmosphère =1,013.10^5 Pa

1bar = 10^{5}Pa

Lois fondamentales de l'hydrostatique :

Beaucoup de problèmes de la mécanique des fluides ne comportent pas de mouvement. Ils concernent la répartition de la pression dans un fluide statique et son effet sur les surfaces solides et sur les corps flottants et les corps submersible Soit un élément fluide de forme parallélépipédique (voir figure ci-dessous), de volume

$dV = dx.dy.dz$ et de masse volumique ρ.



Le bilan de forces : On distingue deux types de force :

- Les forces de surface : sont des forces de pression puisqu'on ne considère que les situations dans lesquelles le fluide est au repos ou uniformément accéléré.
- Les forces de volume se résument à la seule force de pesanteur, c'est-à-dire le poids $d\vec{P}$ avec:

$$d\vec{P} = dm\vec{g} = \rho\,\vec{g}dV$$

$\vec{g}$: L'accélération de la pesanteur

ρ : La masse volumique du fluide

dm: La masse de l'élément fluide

A l'équilibre (au repos) on a: $\sum \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ (Loi de Newton)

Suivant z: $p(z)dxdy - p(z+dz)dxdy - \rho\, g\, \underbrace{dxdydz}_{dV} = 0$

Avec $p(z)$ et $p(z+dz)$ sont respectivement les pressions sur la face inférieure et la face supérieure de l'élément fluide. Un développement de $p(z+dz)$ au premier ordre nous donne:

$$p(z+dz) = p(z) + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) \quad dz$$

Donc $$p(z)dxdy - p(z)dxdy - \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) \quad \underbrace{dxdydz}_{dV} - \rho\, gdV = 0$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_z \underbrace{dxdydz}_{dV} = \rho\, gdV$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho\, g$$

Par analogie, suivant les autres directions, on trouve :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

On remarque que la pression p est fonction de la seule variable z, on peut donc écrire :

$\boxed{\boldsymbol{\frac{dp}{dz} = -\rho\, g}}$ C'est la loi fondamentale de l'hydrostatique (L.F.H)

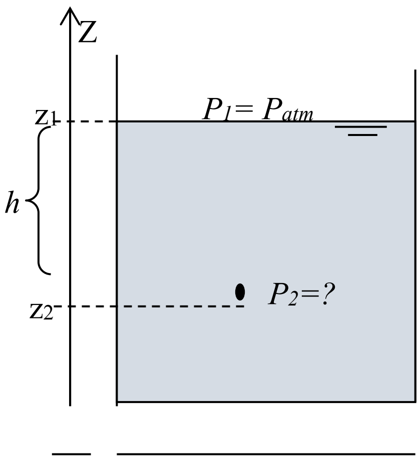
Exemple :

Au niveau de la surface libre d'eau « z_1 », la pression vaut la pression atmosphérique *Patm* , alors la pression pour un niveau quelconque « z_2 » se calcule par l'intégration de la loi fondamentale de l'hydrostatique entre les niveaux 1 et 2 comme suit:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho\, g \Leftrightarrow \int_1^2 dp = \int_1^2 -\rho g dz$$

$$\Rightarrow p_2 - p_1 = -\rho\, g\, \underbrace{(z_2 - z_1)}_{-h}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_2 = p_{atm} + \underbrace{\rho g}_{\gamma}\, h} \text{ [Pa]}$$



h: Hauteur manométrique [m]

g : Accélération de la pesanteur [m/s²]

ρ : Masse volumique de l'eau[kg/m³]

γ : Poids spécifique [N/m³]

Exemple :

Calculer la pression relative en Pa à une profondeur de **6m** d'eau et trouver la pression absolue si la pression atmosphérique est de **760 mm** de mercure (densité **13,57**).

Réponse :

Lois de Pascal

Principe des vases communicants.

La surface libre d'un liquide, qui est le lieu des points à la pression atmosphérique est un plan horizontal et cela quelle que soit la forme du récipient

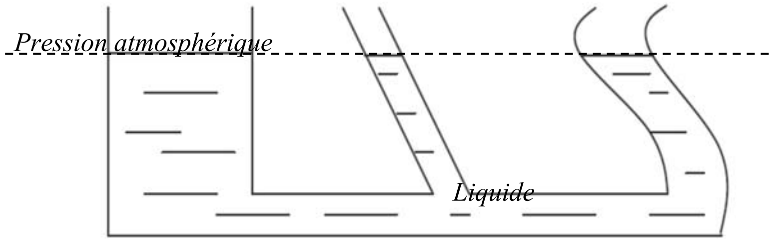


Fig. principe des vases communicants

D'après la loi fondamentale de l'hydrostatique la pression dans un fluide de masse volumique uniforme au repos n'est fonction que de la profondeur et pas de la forme du récipient ou se trouve le liquide

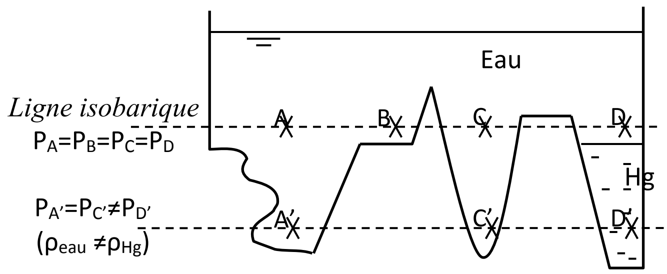
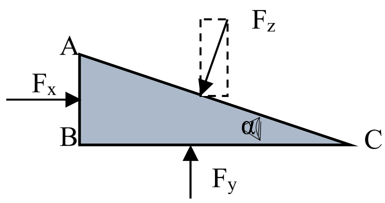


Fig. ligne isobarique

Soit l'élément fluide ABC de largeur unitaire on a :

$Fx = Fz\ sin\alpha$ avec $Fx = Px\ .AB$ et $F_z=P_z$. AC



Donc : $Px\ .AB = Pz\ .\underbrace{AC\ sin\alpha}_{AB}$

$$\Rightarrow Px\ .AB = Pz\ .AB \ \Rightarrow Px = Pz$$

L'élément est très petit donc on néglige son poids :

$Fy = Fz\ cos\alpha$ et $Fy = Py\ .BC$

$$\Rightarrow\ Py\ .BC = Pz\ .\underbrace{AC\ cos\alpha}_{AB}$$

$$\Rightarrow Py\ .BC = Pz\ .BC \ \Rightarrow \boxed{Py = Pz = Px}$$

Donc, à n'importe quel point du fluide au repos l'intensité de la pression est la même dans toutes les directions.

Théorème de Pascal – Presse hydraulique.

Une variation de pression se transmet intégralement dans un liquide incompressible en équilibre, ceci est valable même pour les gaz.

Application : La presse hydraulique

Soient deux cylindres a et b de sections $\mathbf{A_1}$ **et** $\mathbf{A_2}$ communicant entre eux, avec $\mathbf{A_1 << A_2}$ (voir figure):

On exerce un force F_1 sur la surface $\mathbf{A_1}$, la pression est alors $P_1=F_1/ A_1$. D'après le théorème de Pascal, la pression est transmise intégralement c'est-à-dire $P_1=P_2$. Or $P_2=F_2/ A_2$, donc $F_2/A_2=F_1/ A_1$ alors : $\mathbf{F_2=F_1.(A_2/ A_1)}$

Comme $A_2>>A_1$ donc : $F_2>>F_1$: on peut démultiplier les forces de manière considérable (soulever une voiture avec un vérin hydraulique)

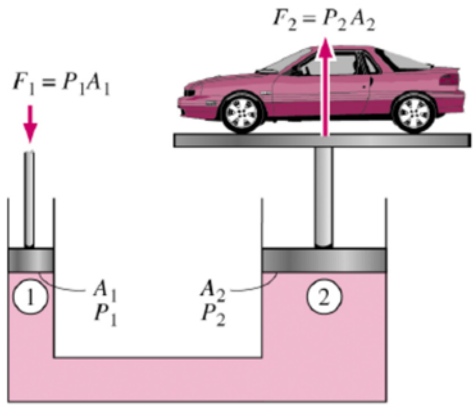


Fig. presse hydraulique

L'équation fondamentale de la statique des fluides dans le cas des gaz :

Les systèmes gazeux sont une illustration simple des cas dans lesquels la compressibilité du fluide ne peut être négligée. La masse volumique dépendant directement de la pression, celle-ci dépende évidemment de l'altitude Z . Pour un gaz parfait, l'équation d'État donne :

$pV = nRT$, d'où $P = nRT/V$. Or, la masse volumique dépend du volume V selon :

$\rho = nM/V$, où M est la masse molaire du gaz. Il vient alors :

$$p = \rho \frac{R\,T}{M} \Longrightarrow \rho = p \frac{M}{R\,T}$$

L'équation fondamentale de la statique des fluides conduit donc à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dp}{dz} = -p \frac{M\,g}{R\,T}$$

Si on considère une atmosphère isotherme (T ne dépend pas de l'altitude Z, $T=T_0$),

$\frac{M\,g}{R\,T} = Cte$ donc:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M\,g}{R\,T}dz$$

$$\Rightarrow \ln p = -\frac{M\,g}{R\,T}z + Cte \Longrightarrow p(z) = p_0 exp\left(-\frac{M\,g}{R\,T}z\right)$$

où p_0 est la pression en Z=0 (niveau de la mer) .

Remarque : l'atmosphère n'est pas isotherme et la température diminue de façon presque linéaire avec l'altitude jusqu'à environ 11 km (36000 ft).

Poussée hydrostatique :

Définition : C'est la force de pression exercée par un liquide au repos sur une paroi d'un solide totalement ou partiellement immergé, cette force est toujours normale à la surface.

Centre de poussée **:** c'est le point d'application de la force hydrostatique exercée sur une surface ou un volume solide.

Cas d'une plaque plane (surface plane) :

Soit une plaque plane de forme quelconque totalement submergée dans un liquide, et inclinée avec un angle θ par rapport à la surface libre (voir figure).

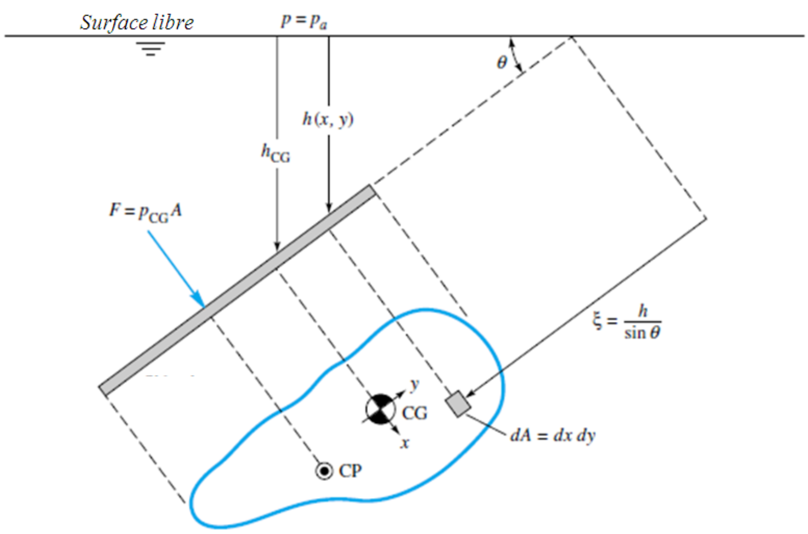


Fig. force hydrostatique et centre de pression

dA : élément de surface

h : la profondeur

CG : centre d'inertie de la plaque (centre de gravité) et origine du repère (x, y) lié à la plaque.

$p = p_a + \omega h$

$F = \int p\, dA = \int (p_a + \omega h) dA$

$= p_a A + \omega \int h\, dA$ avec $h = \xi sin\theta$

Par définition la distance du centre de gravité à la surface est :

$\xi_{CG} = \frac{1}{A}\int \xi\, dA$

Donc :

$F = p_a\, A + \omega sin\theta \int \xi dA = p_a A + \omega sin\theta \xi_{CG} A$

$\Rightarrow F = \underbrace{(p_a + \omega h_{CG})}_{p_{CG}} A$

$$\Rightarrow \boxed{F = p_{CG}.A}$$

p_{CG}: est la pression au centre de gravité de la plaque

On remarque que la force hydrostatique est indépendante de la forme de la plaque et de l'angle d'inclinaison.

Point d'application CP (Centre de poussée) :

La ligne d'action de la force hydrostatique passe par le centre de pression de coordonnées (X_{CP},Y_{CP}) qui se trouve toujours en dessous du centre de gravité pour une paroi totalement immergée.

L'égalité des moments par rapport au centre d'inertie nous donne :

$F.Y_{CP} = \int y\, p\, dA$

$= \int (p_a + \omega h) y dA$

$= p_a \int y dA + \omega \int h y dA$

$= \omega \int h y dA$ $\quad (car\ Y_{CG} = 1/A \int y dA = 0\ dans\ le\ repère\ (CG, X, Y))$

$= \omega \int \xi \sin\theta\, y dA$

$= \omega \sin\theta \int \xi y dA\ \ avec\ \xi = \xi_{CG} - Y$

$\Rightarrow FY_{CP} = \omega \sin\theta\, (\underbrace{\xi_{CG} \int y dA}_{0} - \underbrace{\int y^2 dA)}_{I_{xx}}$

avec I_{xx}: moment d'inertie de la plaque par rapport à l'axe (xx)

$$\Rightarrow \boxed{Y_{CP} = \frac{-\omega \sin\theta\, I_{xx}}{p_{CG}.A}}, (F = p_{CG}.A)$$

Le signe «–» confirme que le centre de poussée se trouve au-dessous du centre de gravité de la plaque, de même :

$$F.X_{CP} = \int x\, p\, dA$$

$$= \int x[p_a + \omega(\xi_{CG} - y) \sin\theta] dA$$

$= -\omega \sin\theta \underbrace{\int xy\, dA}_{I_{xy}}$, avec I_{xy} : est un produit d'inertie.

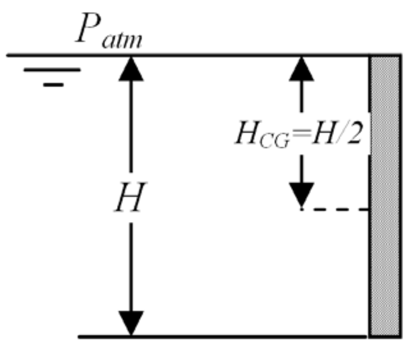
$$\Rightarrow \boxed{X_{CP} = \frac{-\omega \sin\theta \, I_{xy}}{p_{CG}.A}}$$

Pour les plaques symétriques $I_{xy} = 0$, donc $X_{CP} = 0$

Résumé :

La poussée hydrostatique appliqué sur une plaque totalement ou partiellement immergée se calcule par la pression au centre de gravité de la partie immergée : $\boxed{F = p_{CG}.A}$ et son point d'application est de coordonnées $\boxed{(X_{CP} = \frac{-\omega \sin\theta \, I_{xy}}{p_{CG}.A}, Y_{CP} = \frac{-\omega \sin\theta \, I_{xx}}{p_{CG}.A})}$ dans le repère lié au centre d'inertie de la partie immergée. Dans la plus part des cas la force de la pression atmosphérique est négligée car elle est appliquée sur les deux cotés de la plaque, la force hydrostatique s'écrit donc $F = \rho g h_{CG}.A$ et son point d'application est CP $(X_{CP} = \frac{-\sin\theta \, I_{xy}}{h_{CG}.A}, Y_{CP} = \frac{-\sin\theta \, I_{xx}}{h_{CG}.A})$

Exemple : *plaque rectangulaire verticale immergée*



$F = \omega \, h_{CG}.(H.1)$

$Y_{CP} = \frac{-\omega \sin\theta \, I_{xx}}{p_{CG}.A} = \frac{-\sin\theta \, I_{xx}}{h_{CG}.A} = \frac{-1\times\frac{H^3\times 1}{12}}{\frac{H}{2}.(H\times 1)}$

$Y_{CP} = -1/6$. Donc le centre de poussée hydrostatique se trouve à une profondeur de 2/3 H

Remarque : Dans le cas d'une paroi séparant un liquide de l'atmosphère, la résultante des forces de pression s'affranchit du terme dû à la pression atmosphérique.

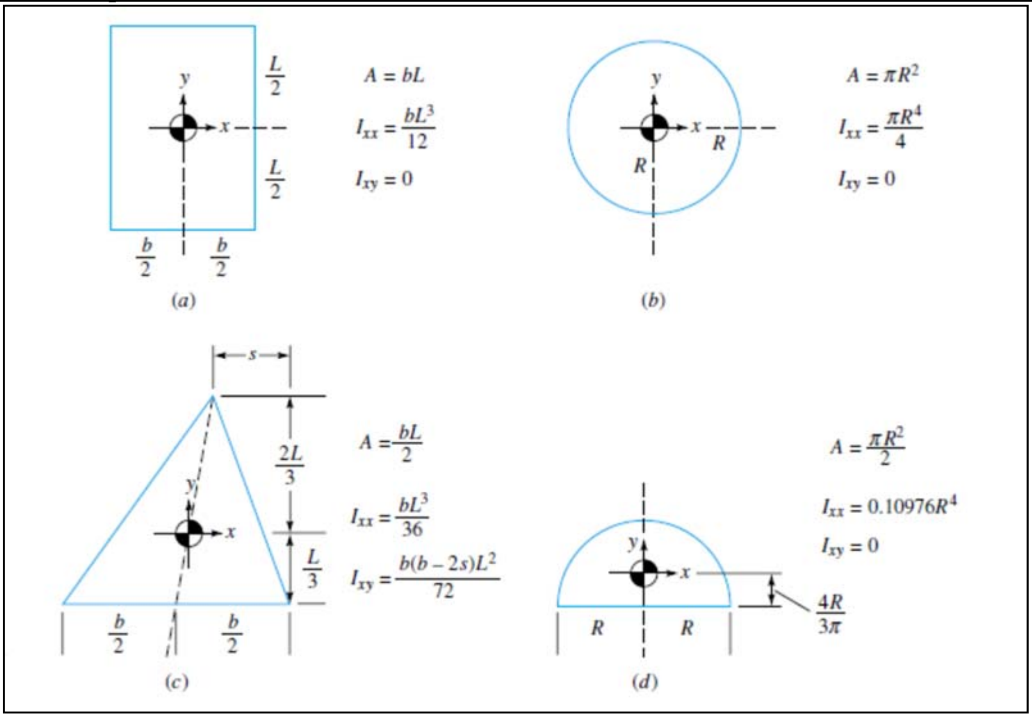


Fig: moment d'inertie de différentes formes géométrique (a): rectangle;(b):cercle; (c): triangle; (d): demi disque

Force hydrostatique sur les surfaces courbées :

La force hydrostatique sur les surfaces courbées est déterminée par ses deux composantes verticale et horizontale (voir figure)

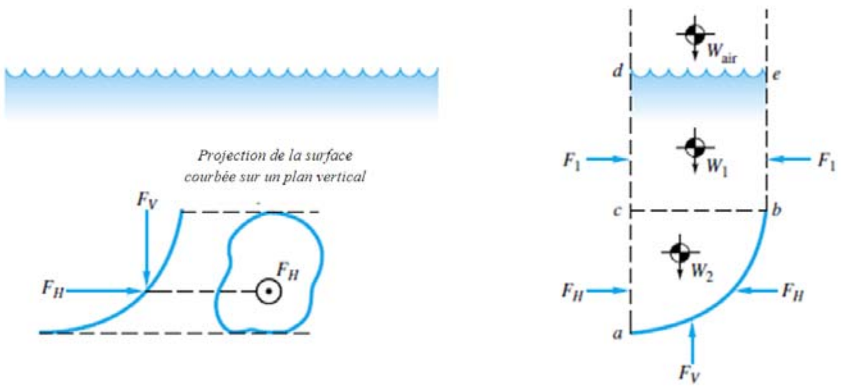


Fig: calcul de la force hydrostatique sur une surface courbée

F_H= la force appliquée sur la projection de la surface sur un plan vertical.

F_V= le poids de la colonne du fluide (réel ou imaginaire) au-dessus de la surface courbée (F_V= poids du fluide+poids de l'air): $F_V = W_1+W_2+W_{air}$

W_1: Poids du liquide de l'aire (cbde)

W_2: Poids du liquide de l'aire (abc)

W_{air}: poids de l'air

La résultante est donc :

$$\boxed{F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}}$$

Principe d'Archimède – Flottabilité.

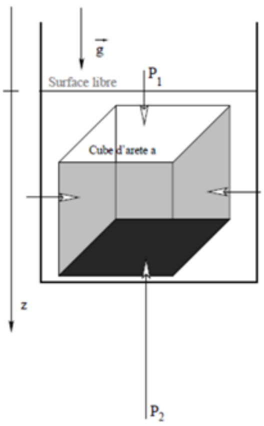
Traitons le cas d'un solide cubique d'arête « a » immergé dans un liquide (voir figure) et calculons la résultante des forces de pression : Les forces de pression horizontales se compensent. Par contre les forces verticales ne se compensent pas puisque la pression augmente avec la profondeur.

$$\Delta F = F_2 - F_1$$
$$\Delta F = P_2 S - P_1 S$$
$$\Delta F = \rho g a S = \rho g V$$

On obtient une force ascendante égale au poids du volume de liquide déplacé.

THÉORÈME : Tout corps immergé partiellement ou totalement dans un fluide subit de la part de celui-ci une poussée verticale, dirigée vers le haut, appelée poussée d'Archimède, dont l'intensité est égale au poids du fluide déplacé. Le point d'application de cette force est le centre de poussée ; il est différent, en général, du centre de gravité.

Fig: poussée d'Archimède



Liquide dans un équilibre relatif

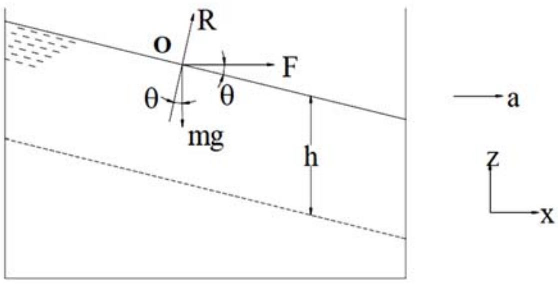
Introduction :

L'équilibre relatif du liquide est une condition dans laquelle toute la masse de liquide, y compris le récipient dans lequel le liquide est contenu, se déplace selon un mouvement accéléré uniforme par rapport à la terre, mais chaque particule de liquide n'a aucun mouvement relatif entre elles. Il y a deux cas d'équilibre relatif qui seront discutés dans ce cours : la translation linéaire et la rotation.

Translation horizontale

Si une masse de fluide se déplace horizontalement le long d'une ligne droite à une accélération constante comme, la surface du liquide prend un angle θ avec l'horizontale, voir la figure ci-dessous :

Une particule de masse m sur la surface libre en O aura la même accélération que le réservoir et sera soumise à une force d'accélération de la deuxième loi de Newton,



$F = ma$

De plus, F est la résultante de la force de pression du fluide R, agissant normalement sur la surface libre en O, et le poids de la particule mg, agissant verticalement. Par conséquent,

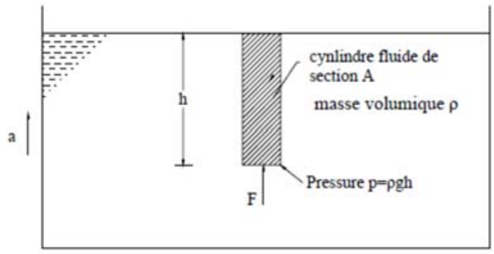
F = mg tan θ ce qui implique ma= mg tan θ

Donc : $\tan\theta = \frac{a}{g}$ et est constante pour tous les points de la surface libre. Ainsi, la surface libre est un plan incliné d'un angle constant θ par rapport à l'horizontale.

Puisque l'accélération est horizontale, les forces verticales ne sont pas modifiées et la pression à toute profondeur h sous la surface sera γh. Les plans isobariques sont parallèles à la surface libre (incliné de θ par rapport à la surface libre).

Translation verticale

Si l'accélération est verticale, la surface libre restera horizontale. Considérant un cylindre fluide vertical de section transversale A (voir figure), soumis à une accélération ascendante a,



$\sum F = ma$ donc, $pA - \gamma hA = \rho hAa$

$$p = \gamma h\left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

Si l'accélération a est vers le bas vers le centre de la terre comme accélération gravitationnelle, l'Equation prendra la forme de :

$$p = \gamma h\left(1 - \frac{a}{g}\right)$$

Expression générale

D'après la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$$

Donc pour un élément de fluide de volume dV=dx dy dz on aura:

$-\partial p/\partial x = \rho.a_x$

$-\partial p/\partial z = \rho.(a_z+g)$

Sachant que : $dP = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial z}dz$

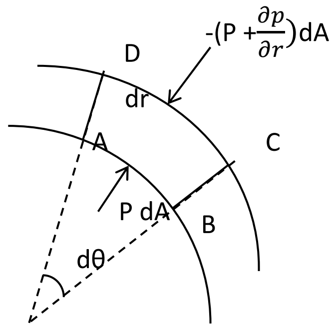
$$dP = -\rho a_x dx - \rho(a_z + g)dz$$

$dP = 0$

$$dP = 0 \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = \tan\theta = -\frac{a_x}{(g \pm a_z)}$$

Liquide en rotation uniforme (vitesse constante : ω)

Soit l'élément de fluide ABCD en rotation uniforme dans un plan horizontal et autour d'un axe vertical :



r : rayon de l'élément ; dr : l'épaisseur de l'élément ; dθ :angle de l'élément ; dA : aire de la section de l'élément.

Le système de force se résume dans ce cas au :

- Force de pression ;
- Force centrifuge = $\frac{mV^2}{r}$ avec m=ρ dr.dA et V=ωr.

Suivant la direction radiale :

$$\frac{\partial p}{\partial r} dr\, dA = \rho\, dA\, dr\, \frac{V^2}{r}$$

Donc :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\, \frac{V^2}{r} = \rho\, \omega^2 r$$

Suivant la direction axiale (z) : $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$

$dP = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz$

$dP = \rho\omega^2 r dr - \rho g dz$

$dP = \rho\omega^2 r dr - \rho g dz$

Donc $P = \rho\omega^2 \frac{r^2}{2} - \rho g dz + Cte$

La pression varie linéairement en fonction de z et paraboliquement en fonction de r.

Pour une surface isobarique dp=0 on aura :$Z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$ Donc les surfaces isobariques sont des paraboloïdes.

Chapitre 2

Cinématique des fluides

Chapitre 2 : Cinématique des fluides

Introduction :

La cinématique des fluides est l'étude de mouvement des fluides sans intéresser aux forces. La description du mouvement d'un fluide peut se faire par deux méthodes : description Lagrangienne et description Eulérienne.

Description de mouvement de fluide :

Description Lagrangienne :

Dans cette description on suit une particule fluide (p) au cours de son mouvement, la détermination de la vitesse et l'accélération de cette particule repose sur la connaissance de sa position dans l'espace en fonction du temps :

$$\overrightarrow{OP}\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

x_0, y_0, z_0 : La position de la particule P à t_0 (conditions initiales).

La vitesse de la particule s'écrit : $\overrightarrow{V(P)} = \dfrac{d\,\overrightarrow{OP}}{dt}$

$$\overrightarrow{V(P)} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

L'accélération de la particule s'écrit :

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{V}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix}$$

La trajectoire : l'ensemble des positions successives (M_1, M_2, M_3,…) occupées par une particule fluide (p) est dit trajectoire de cette particule (p).

Description Eulérienne :

Dans cette description on ne suit plus une particule donnée, mais on étudie l'évolution d'un champ où on associe à chaque point de l'espace défini un vecteur vitesse (champ de vitesse).

Ligne de courant

Dans la description d'Euler, on appelle ligne de courant la courbe qui, en chacun de ses points, est tangente au vecteur de vitesse locale du champ de l'écoulement. Son équation différentielle s'écrit :

$$\frac{dx}{U(x,y,z,t)} = \frac{dy}{V(x,y,z,t)} = \frac{dz}{W(x,y,z,t)}$$

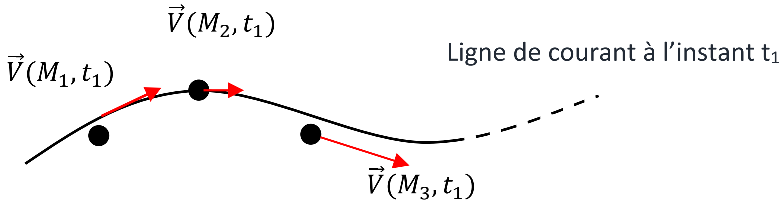


Fig. Ligne de couran

En effet, pour un déplacement $\overrightarrow{dM}$ infiniment petit du point M sur une ligne de courant, on peut écrire : $\vec{V} \wedge \overrightarrow{dM} = \vec{0}$

Ce qui s'écrit: $\begin{cases} vdz - wdy = 0 \\ wdx - udz = 0 \\ udy - vdx = 0 \end{cases}$

Tube de courant

On appelle tube de courant l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient, au même instant, sur un contour

C fermé quelconque tracé dans le fluide. Comme nous le verrons plus tard, l'introduction du tube de courant aura tout son intérêt dans l'étude des régimes stationnaires.

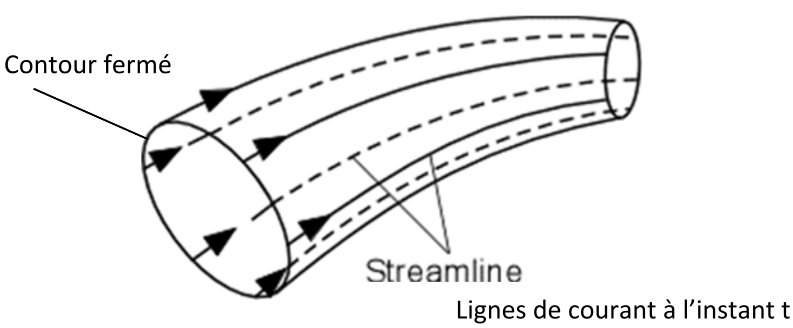


Fig. Tube de courant à l'instant t

Ligne d'émission : A un instant t, l'ensemble des positions des particules qui sont passées par le même point E forme une courbe dite ligne d'émission relative au point E

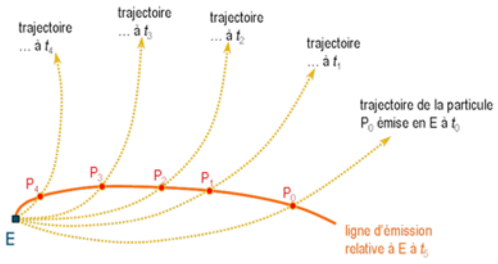


Fig. Ligne d'émission

Écoulement permanent :

Un écoulement est dit permanent (ou stationnaire) lorsque toutes les grandeurs caractéristiques du mouvement sont invariables dans le temps (vitesse, masse volumique, pression, température, etc.), ce qui se traduit symboliquement par :

Mouvement permanent $\frac{\partial}{dt} = 0$

Sur le plan cinématique, le champ de vitesse ne varie pas dans le temps. Dans ce cas :

- Les lignes de courant sont fixes dans l'espace
- Les trajectoires coïncident avec les lignes de courant et les lignes d'émission.

Dérivation particulaire : La dérivée particulaire ou totale est la somme d'une dérivée locale et une dérivée convective pour une fonction G(x, y, z, t)

$$\frac{DG}{dt} = \frac{dG}{dt} + (\vec{V}.\overrightarrow{grad}).G$$

Démonstration :

$$\vec{V}\begin{pmatrix} u = \dfrac{dx}{dt} \\ v = \dfrac{dy}{dt} \\ w = \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

$$DG = \frac{\partial G}{\partial t}dt + \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{y,z,t} dx + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{x,z,t} dy + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_{x,y,t} dz$$

En divisant et multipliant par dt on obtient :

$$DG = \frac{\partial G}{\partial t}dt + \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{y,z,t} \frac{dx}{dt}dt + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{y,z,t} \frac{dy}{dt}dt + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_{y,z,t} \frac{dz}{dt}dt$$

$$\frac{DG}{dt}=\frac{\partial G}{\partial t}+\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{y,z,t}\frac{dx}{dt}+\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{y,z,t}\frac{dy}{dt}+\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_{y,z,t}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{DG}{dt}=\frac{\partial G}{\partial t}+\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{y,z,t}\frac{dx}{dt}+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{y,z,t}\frac{dy}{dt}+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{y,z,t}\frac{dz}{dt}\right]G$$

$$\frac{DG}{dt}=\frac{dG}{dt}+\left(\vec{V}.\overrightarrow{grad}\right).G$$

Donc en formalisme Eulérien l'accélération s'écrit:

$$\vec{a}=\frac{D\vec{V}}{dt}=\frac{d\vec{V}}{dt}+\left(\vec{V}.\overrightarrow{grad}\right).\vec{V}$$

D'ou : $$\vec{a}=\begin{cases} a_x=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z} \\ a_y=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z} \\ a_z=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

Notion de débit :

Le débit est la quantité de fluide traversant une section transversale par unité de temps.

En appelant « dV » et « dm » respectivement le volume élémentaire et la masse élémentaire traversant une section donnée « S » pendant le temps élémentaire dt, nous pouvons définir :

Le débit volumique :

$$Q_V=\frac{dV}{dt}=\frac{S.dl}{dt}=S.v_{moy} \quad \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

Le débit massique :

$$Q_m=\frac{dm}{dt}=\frac{\rho.dV}{dt}=\frac{\rho.S.dl}{dt}=\rho.S.v_{moy}=\rho.Q_V \quad \left[\frac{Kg}{s}\right]$$

En générale : $Q_m=\int \rho.\vec{v}.\vec{n}\,ds$ $\qquad Q_V=\int \vec{v}.\vec{n}\,ds$

Continuité : Equation de continuité :

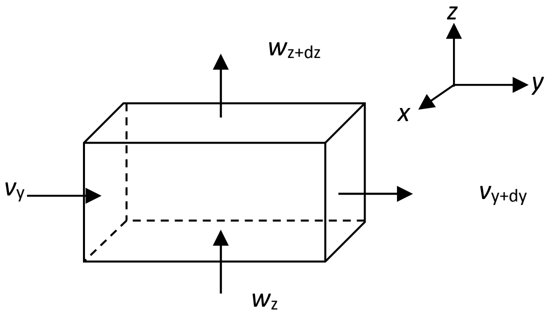
L'équation de continuité doit traduire le principe de conservation de la masse.

Soit un élément fluide (volume de control) de volume *dV=dx dy dz* et de masse

dm = ρ.dv = ρ.dx.dy.dz.

La variation de la masse pendant *dt* est

$$dm = \frac{\partial m}{\partial t}dt = \frac{\partial \rho}{\partial t}dxdydzdt$$



dm= la somme des masses de fluide entrantes **-** la somme des masses de fluide sortantes par les six faces du volume.

+ La somme des fluides spontanément détruites (puits) ou crées (sources)

Le bilan sur l'axe oy donne : $((\rho.v)_y - (\rho.v)_{y+dy})\ dx\ dz\ dt$

On a: $(\rho.v)_{y+dy} = (\rho.v)_y + \frac{\partial(\rho.v)}{\partial y}dy$

Suivant oy $((\rho.v)_y - (\rho.v)_{y+dy})\ dx\ dz\ dt\ = -\frac{\partial(\rho.v)}{\partial y}dydxdzdt$

Par analogie : Suivant ox $= -\frac{\partial(\rho.u)}{\partial x}dxdydzdt$

Suivant oz $= -\frac{\partial(\rho.w)}{\partial z}dzdxdydt$

A travers les six faces : $= -\left[\frac{\partial(\rho.u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho.v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho.w)}{\partial z}\right]dxdydzdt$

Donc

$$\boldsymbol{dm} = \frac{\partial \rho}{\partial t}\cancel{dx}dydzdt = -\left[\frac{\partial(\rho.u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho.v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho.w)}{\partial z}\right]\cancel{dx}dydzdt + \sum_i \rho.q_{vi}\cancel{dx}dydzdt$$

q_{vi} : le débit volumique de fluide crée ($q_{vi} > 0$; source) ou détruit ($q_{vi} < 0$; puits) par unité de volume.

$$\boldsymbol{dm} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left[\frac{\partial(\rho.u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho.v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho.w)}{\partial z}\right] + \sum_i \rho.q_{vi}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{+\sum_i \rho.q_{vi}\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div\ (\rho\vec{V})}$ C'est l'équation locale de continuité

Cas particuliers :

1- pour un écoulement permanent ou stationnaire

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathbf{0}$; $\boxed{-div\ (\rho\vec{V}) + \sum_i \rho.q_{vi} = 0}$

2- pour un écoulement incompressible

$\rho = cte$; $\boxed{div\ (\vec{V}) = \sum_i q_{vi}}$

3- pour un écoulement stationnaire incompressible conservatif

$\sum_i \rho.q_{vi} = 0$ $\boxed{div\ (\vec{V}) = 0}$

Types d'écoulements :

En cinématique les écoulements de fluides peuvent être classés comme suit :

1) Ecoulement stationnaire (permanent) $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{x,y,z} \rho, u, v, w, .. = 0$ ou instationnaire (non permanent) $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{x,y,z} \neq 0$
2) Uniforme ou non uniforme: l'écoulement est dit uniforme s'il n y pas de variation de vecteur vitesse en fonction de déplacement$\left(\frac{\partial}{\partial x,\ y,\ z}\right)_t u, v, w = 0.$
3) Unidimensionnel, bidimensionnel ou tridimensionnel.
4) Compressible ou incompressible.
5) Rotationnel ou irrotationnel

Ecoulement rotationnel : lorsque les particules fluides subissent un mouvement de rotation dans un écoulement, ce dernier est dit rotationnel et donc au moins une seule composante du vecteur tourbillon $\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\boldsymbol{rotV}}$ existe (non nul), avec $\overrightarrow{\boldsymbol{rotV}} = \overrightarrow{\boldsymbol{grad}} \times \vec{\boldsymbol{V}}$

Ecoulement irrationnel ou à potentiel de vitesse :

Les écoulements pour lesquels le vecteur tourbillon (vorticité) est nul; sont appelés écoulements irrotationnels ou à potentiel de vitesse. $\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\boldsymbol{rotV}} = \vec{0}$

Potentiel de vitesse

La fonction de potentiel de vitesse est définie comme étant la fonction scalaire d'espace et de temps, de telle sorte que sa dérivée suivant n'importe quelle direction donne la vitesse du fluide suivant cette direction, elle est dénotée par «**φ** ».

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{u} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \boldsymbol{v} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \boldsymbol{w} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{Bmatrix} \Longrightarrow \vec{V} = \overrightarrow{grad}(\varphi) \text{ ou } \vec{\boldsymbol{V}} = -\overrightarrow{grad}(\varphi)$$

Si la fonction de potentiel existe, l'écoulement est dit à potentiel de vitesse ou écoulement potentiel.

Les lignes ou les surfaces de même potentiel sont appelées **équipotentiels**

L'équation de continuité pour un fluide parfait incompressible est :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \, ;$$

Si on remplace les composantes de la vitesse par leurs expressions en fonction du potentiel **φ** on trouve :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta\, \varphi = 0 \text{ (équation de Laplace)}$$

Ou $\boxed{div\left(\overrightarrow{grad}(\varphi)\right) = 0}$

Donc toute fonction φ satisfait l'équation de Laplace correspond à des cas possibles d'écoulement de fluide.

Fonction de courant :

Dans un écoulement plan, la fonction de courant est définie comme étant une fonction d'espace et de temps, tel que sa dérivée partielle par rapport à une direction donne la composante du vecteur vitesse perpendiculaire à cette direction.

Ψ=f(x,y,t) en régime instationnaire

Ψ=f(x,y) en régime stationnaire

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \dfrac{\partial \Psi \Psi}{\partial y} \\ \boldsymbol{v} = -\dfrac{\partial \Psi \Psi}{\partial x} \end{cases}$$

L'équation de continuité s'écrit: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ en remplaçant u et v

$$\frac{\partial^2 \Psi \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi \Psi}{\partial x \partial y} = 0$$

Remarque: la fonction de courant est constante sur une ligne de courant.

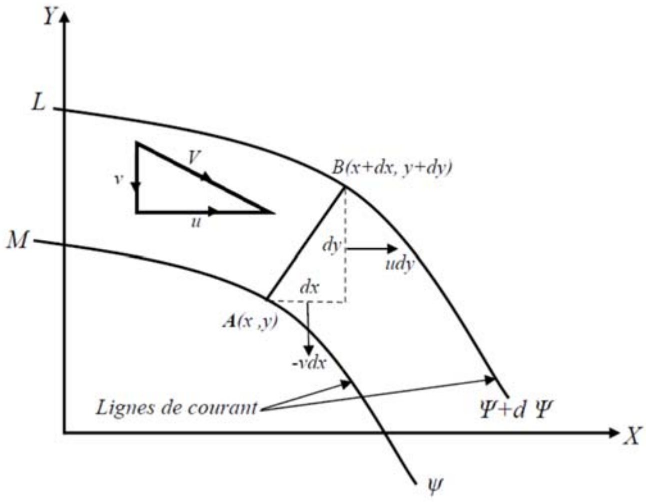
Soit deux lignes de courant adjacentes L et M (voir figure) le vecteur $\vec{V}$ perpendiculaire à (AB) a deux composantes u et v, d'après la continuité, on a

$Vds = -vdx + udy$

$Vds = \frac{\partial\Psi\Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Psi\Psi}{\partial y}dy$=dΨ$\Psi$

Donc dq_V = dΨΨ

Autrement dit: la fonction de courant peut aussi être définie comme le débit entre deux lignes de courant



Chapitre 3

Dynamique des Fluides Parfaits

Chapitre 3 Dynamique des Fluides Parfaits

Introduction

Dans ce chapitre, on ne considère que les fluides dont on peut négliger la viscosité, il n'y a pas de frottements entre les différentes couches de fluide, ces fluides sont dits parfaits.

Equation d'Euler et Théorème de Bernoulli

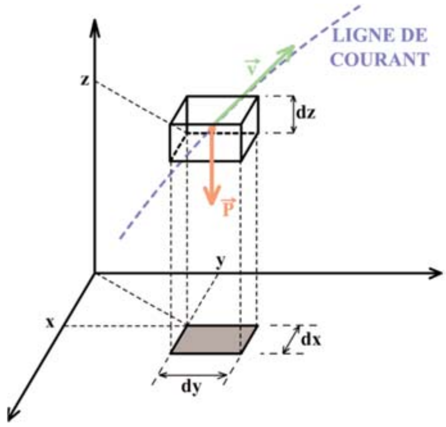
Hypothèses:

- le fluide est parfait homogène.

- l'écoulement est incompressible.

- le régime est stationnaire.

- l'écoulement est irrotationnel.



Soit une particule fluide de volume **dV = dx.dy.dz** et de masse appliquant la loi de Newton.

$$\sum \vec{F}_{ex} = dm.\vec{a} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$\sum \vec{F}_{ex} : \begin{cases} \text{forces de surface (forces de pression)} \\ \text{force de volume (poids)} \end{cases}$

rappelons que: $\vec{V}\begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases}, \quad \overrightarrow{dV}\begin{cases} du \\ dv \\ dw \end{cases}$

Pour un fluide immobile (voir chapitre 1):

$\frac{\partial p}{\partial x}dx = 0$; $\frac{\partial p}{\partial y}dy = 0$; $\frac{\partial p}{\partial z}dz = -\rho g.dz$

Pour un fluide en mouvement : par projection

Sur l'axe OX : $-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho.\frac{du}{dt}$ ....(2)

Sur l'axe OY : $-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho.\frac{dv}{dt}$ ....(3)

Sur l'axe OZ : $-\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho.\frac{dw}{dt}$ ....(4)

Sachant que : $dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$

$$dp = \left(-\rho.\frac{du}{dt}\right)dx + \left(-\rho.\frac{dv}{dt}\right)dy + \left(-\rho g - \rho.\frac{dw}{dt}\right)dz$$

$$dp = -\rho.du.\frac{dx}{dt} - \rho.dv.\frac{dy}{dt} - \rho g dz - \rho.dw.\frac{dz}{dt}$$

$$\Longrightarrow dp = -\rho.u.du - \rho.v.dv - \rho.w.dw - \rho.g.dz$$

On a : $\vec{V}.\overrightarrow{dV} = u.du + v.dv + w.dw$

Alors : $dp = -\rho.\vec{V}.\overrightarrow{dV} - \rho.g.dz$

$\Rightarrow \boxed{dp + \rho.V.dV + \rho.g.dz = 0}$ C'est l'Equation d'Euler

Par intégration de cette équation entre deux points 1 et 2 sur une ligne de courant on aura :

$$\int_1^2 dp + \int_1^2 \rho.V.dV + \int_1^2 \rho.g.dz = cte$$

$$\Longrightarrow p_1 + \frac{1}{2}\rho.V_1^2 + \rho.g.z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho.V_2^2 + \rho.g.z_2$$

Donc

$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho.v^2 + \rho.g.z = Cte}$ C'est le théorème de Bernoulli pour un fluide parfait incompressible.

Remarque: on peut obtenir le même résultat en faisant un bilan énergétique.

Interprétation du théorème de Bernoulli:

On peut faire plusieurs interprétations physiques du théorème de Bernoulli.

En terme de pression : La pression totale est conservée : la relation s'écrit :

$p + \frac{1}{2}\rho.v^2 + \rho.g.z = Cte = P_{totale}$

Il s'agit donc de la somme de plusieurs termes qui ont tous la dimension d'une pression :

$\boldsymbol{p + \rho.g.z}$: la « pression statique » Ce terme est lié à la pression qui règne dans le fluide et à la hauteur z .

$\boldsymbol{\frac{1}{2}\rho.v^2}$: La « pression dynamique » Ce terme est lié à la vitesse de l'écoulement. On constate que, en absence de mouvement (v=0), on retrouve l'équation fondamentale de l'hydrostatique

$$p + \rho.g.z = cte$$

***Cte*:** est la pression totale

En termes d'énergie l'énergie Totale est conservée et, le théorème s'écrit par unité de masse [j/kg] :

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g.z = Cte$$

$\boldsymbol{\frac{p}{\rho}}$**:** Énergie de pression par unité de masse fluide.

$\frac{v^2}{2}$: Énergie cinétique par unité de masse fluide.

$g.z$: Énergie potentielle de position par unité de masse fluide.

cte : Énergie totale.

En terme de hauteur [m], la hauteur totale est conservée le théorème s'écrit :

$\frac{p}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}+z=Cte$=$H_{totale}$

$\boldsymbol{\frac{p}{\rho g}}$: est la hauteur manométrique

$\boldsymbol{\frac{V^2}{2g}}$: est la hauteur capable

$\boldsymbol{z}$: est l'altitude de la section considérée.

cte: la charge totale

Représentation graphique :Diagramme piézométrique

On définit des lignes caractéristiques, dont les hauteurs ont une signification physique :

- L'altitude de la conduite correspond à la cote géométrique z

- La ligne piézométrique correspond à la hauteur piézométrique $\boldsymbol{\frac{p}{\rho g}+z}$

-La ligne de charge correspond à la hauteur totale qui est constante pour un fluide parfait.

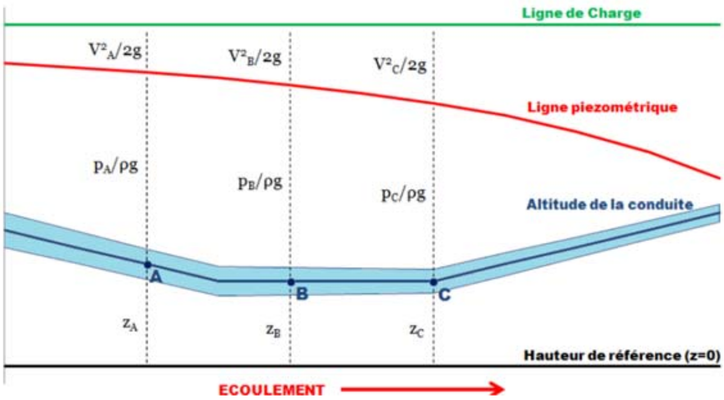
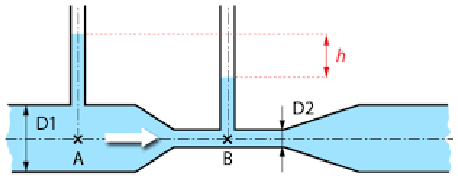


Fig. Diagramme piézométriques

Applications du Théorème de Bernoulli

1- Le tube de Venturi (Giovanni Batista **Venturi** (physicien italien, 1746–1822)

Le tube de Venturi (Venturimètre) est un instrument qui permet de mesurer le débit de l'écoulement fluide dans une conduite. C'est un tube convergent muni de prises de pressions statiques l'une en amont du convergent, l'autre au niveau de col.



D'après le théorème de Bernoulli : $p_A - p_B = \frac{1}{2}.\rho.({V_B}^2 - {V^2}_A)$

D'après la loi fondamentale de l'hydrostatique : $p_A - p_B = \rho.g.h$

D'après l'équation de continuité : $q_V = V_A.S_A = V_B.S_B$

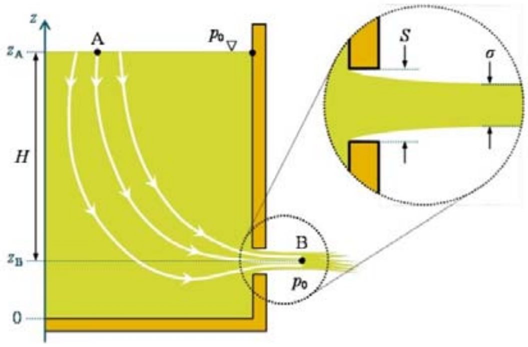
$$\rho g h = \frac{1}{2}.\rho.{q_V}^2\left(\frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2}\right)$$

$$q_V = \left(\frac{S_A\ S_B}{\sqrt{S_A^2 - S_B^2}}\right)\sqrt{2.g.h} = K_{Venturi}\sqrt{2.g.h}$$

Avec $K_{Venturi} = \frac{S_A\ S_B}{\sqrt{S_A^2 - S_B^2}}$

2- Vidange d'un réservoir :

Pour un réservoir à surface libre, la vitesse de vidange se calcule par l'application du théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre un point de la surface libre et un point du jet.



$$p_A + \frac{1}{2}\rho.V_A^2 + \rho.g.z_A = p_B + \frac{1}{2}\rho.V_B^2 + z_B$$

$p_A = p_B = p_0$ (Pression atmosphérique)

$V_A \ll V_B$

$\rho.g.(z_A - z_B) = \frac{1}{2}\rho.V_B^2$

$\Rightarrow V_B = \sqrt{2.g.h}$ C'est la formule de Torricelli

Le débit volumique $q_V = \sigma\sqrt{2.g.h}$

$$\sigma = C_c.S$$

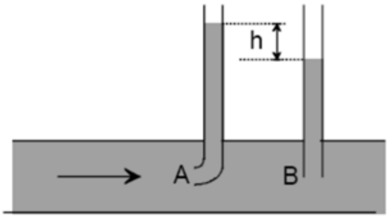
$$C_c : est\ le\ coefficient\ de\ contraction$$

Exemple :

- Paroi mince $C_c = 0.61$.
- Orifice à bord profilé $C_c = 1$.
- orifice à bord rentrant $C_c = 0.5$.

3- Le tube de Pitot (Henri Pitot (ingénieur et physicien français, 1695–1771)

Henri Pitot (ingénieur et physicien français, 1695–1771) a conçu un dispositif qui est toujours utilisé pour mesurer la vitesse des aéronefs, mais aussi pour mesurer la vitesse des écoulements en laboratoire.



$$p_A + \frac{1}{2}\rho_1.V_A^2 + \rho.g.z_A = p_B + \frac{1}{2}\rho_1.V_B^2 + \rho.g.z_B$$

On a $V_A = 0\ (point\ d'arret)$

z_A=z_B (même niveau)

Donc : $p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho_1.V_B^2$

Et $p_A - p_B = \rho.g.h$

$$\Rightarrow V_B = V_\infty = \sqrt{2.g.h}$$

Exemple de réalisation :

Trouver l'expression de la vitesse d'écoulement

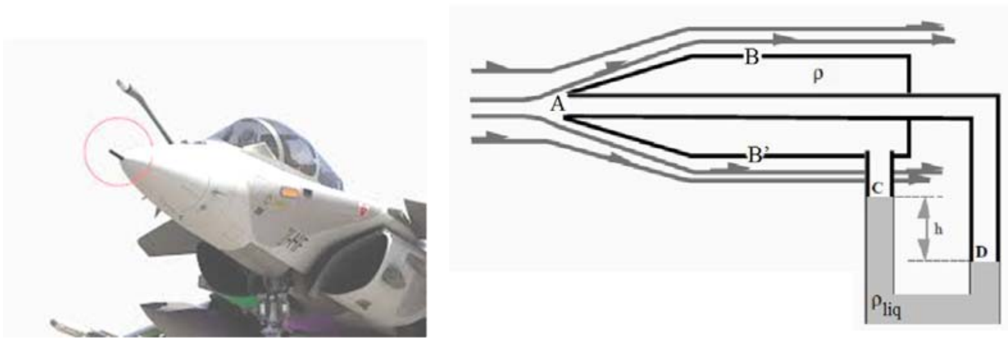
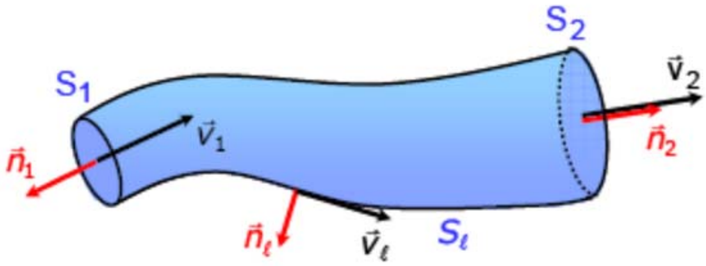


Fig. Tube Pitot

Théorème de quantité de mouvement en régime permanent :(Euler)

En régime permanent, la somme des forces extérieures qui agissent sur un fluide contenu dans un volume de contrôle est égale à la variation du débit de quantité de mouvement :

$$\boxed{\dot{m}\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right) = \vec{F}_{ext}}$$



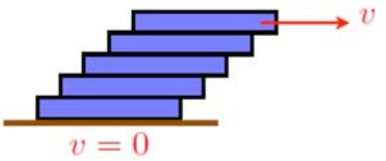
Chapitre 4

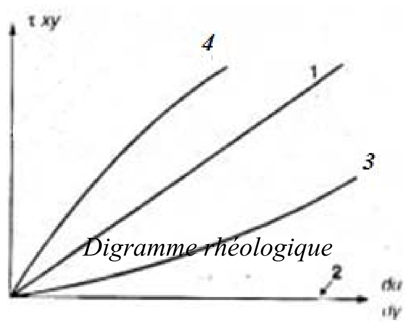
Dynamique des Fluides Réels

Chapitre 4 : Dynamique des Fluides Réels

Rappel de la viscosité :

La viscosité est donc la propriété pour un corps soumis à une déformation de cisaillement d'opposer une résistance à la vitesse de glissement des couches les unes sur les autres..





$$F_f = \mu . S . \frac{\Delta V}{\Delta Z}$$

F$_f$: est la force de frottement visqueux sur une surface de contact S

Les forces de cohésion intermoléculaire ont tendance à freiner l'écoulement d'un fluide. Cette propriété est appelée viscosité : c'est la capacité d'écoulement d'un fluide.

• Coefficient de viscosité dynamique « **μ** » : exprimé dans le système international en Poiseuille **(Pl)** ou en Pascal seconde **(Pa.s)**.

• Coefficient de viscosité cinématique « *ν* » : exprimé dans le système international en mètre carré par seconde (m^2/s).

Fluides réels : sont des fluides ou les forces de frottement (la viscosité) ne sont pas négligées et selon le comportement de la viscosité, on distingue deux types de fluides réels

Fluide newtonien : Un fluide est dit newtonien lorsque le tenseur des contraintes visqueuses est une fonction linéaire du tenseur des taux de déformation.

Fluide non newtonien : Un fluide est dit non newtonien lorsque le tenseur des contraintes visqueuses n'est pas une fonction linéaire du tenseur des taux de déformation.

1 : fluide newtonien (eau, air …)

2 : fluide parfait

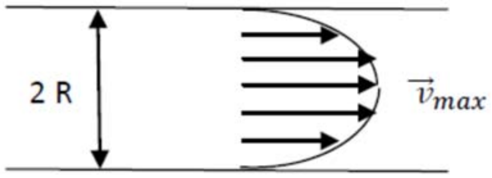
3,4: fluide non newtonien

Expression de vitesse et débit pour un tube cylindrique (La loi de POISEUILLE)

On admettra que dans une canalisation de rayon R, de longueur L, la variation de la vitesse suivant le rayon est donnée par la relation :

$$v = \frac{-\Delta P}{4\mu L}(R^2 - r^2)$$

La vitesse maximale est logiquement sur l'axe central du tube



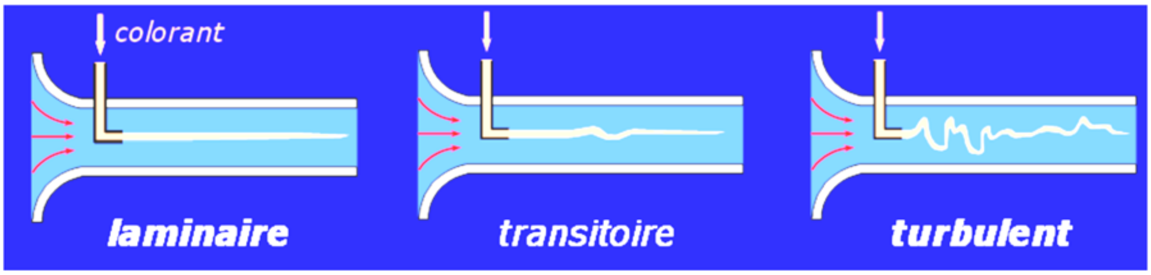
$$v_{max} = \frac{-\Delta P}{4\mu L} R^2$$

Les régimes d'écoulement : Expérience d'OSBORNE REYNOLDS (1842-1912):

Soit un courant d'eau qui circule dans une conduite à section circulaire.

On introduit un filet de colorant dans l'axe de cette conduite.

Suivant la vitesse d'écoulement de l'eau, on peut observer les phénomènes suivants :



a) Vitesse faible **b) Vitesse plus élevée** **c) Vitesse très élevée**

Fig. Régimes d'écoulements

- Pour des vitesses faibles, le filet colorant traverse le long de la conduite en position centrale.
- Pour des vitesses plus élevées, le filet colorant est perturbé.
- Pour des vitesses très élevées, le colorant se mélange immédiatement dans l'eau.

1. Régime laminaire **:** (cas a) le fluide s'écoule en couches cylindriques coaxiales ayant pour axe le centre de la conduite.

2. Régime transitoire **:** (cas b) c'est une transition entre le régime laminaire et ce lui turbulent.

3. Régime turbulent **:** (cas c) formation de mouvement tourbillonnant dans le fluide. Cette expérience est faite par Reynolds en faisant varier le diamètre de la conduite, la température, le débit, etc…, pour des divers fluides.

Le régime d'écoulement est déterminé par le calcul d'un nombre sans dimension appelé **nombre de Reynolds (Re)**.

$$Re = \frac{D.u.\rho}{\mu} = \frac{D.u}{\nu}$$

Avec : D : diamètre de la conduite (en m)

U : vitesse moyenne d'écoulement (en m/s)

ρ : masse volumique du fluide (en kg/m^3)

μ : coefficient de viscosité dynamique (en Pa.s)

ν : coefficient de viscosité cinématique (en m^2/s)

$$\text{Si Re} < 2000 \quad \text{le régime est laminaire}$$
$$\text{Si Re} > 3000 \quad \text{le régime est turbulent}$$
$$\text{Si } 2000 < \text{Re} < 3000 \quad \text{le régime est transitoire}$$

Remarque : si la section n'est pas circulaire, on définit le diamètre équivalent (De) par :

$$De = \frac{4 * \text{la section de la conduite}}{\text{le périmètre mouillé par le fluide}}$$

Théorème de Bernoulli pour un fluide réel :

Lorsque le fluide est réel, la viscosité est non nulle, alors au cours du déplacement du fluide, les différentes couches frottent les unes contre les autres et contre la paroi qui n'est pas parfaitement lisse d'où il y a une perte sous forme de dégagement d'énergie ; cette perte appelée perte de charge. La relation de Bernoulli peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{1}{2g}.V_1^2 + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{1}{2g}.V_2^2 + z_2 + \Delta H_{pertes}$$

ΔH_{pertes} : c'est l'ensemble des pertes de charge entre (1) et (2) exprimé en hauteur.

Les pertes de charge peuvent être exprimées en pression (**$\Delta p = \rho.g.\ \Delta H$**)

Pertes de charge :

Pertes de charge régulières (Linéaires) : ΔH_r

Sont due aux frottements entre les différentes couches de liquide et les frottements entre le liquide et la paroi interne de la conduite le long de l'écoulement : ce sont les pertes de charge régulières.

Dans un écoulement permanent d'un liquide dans une conduite de diamètre **D**. Les pertes de charge entre deux points séparés d'une longueur L est de la forme :

$$\Delta H_r = \lambda \frac{L}{D}.\frac{v^2}{2g}$$

Avec v : vitesse moyenne du fluide.

λ : coefficient de pertes de charge Linéaires.

Pour déterminer le coefficient de perte de charge régulière **λ**, on fait souvent appel à des formules empiriques tel que :

• **Si l'écoulement est laminaire $Re < 2000$:** on pourra utiliser la **loi de POISEUILLE**

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

• **Si l'écoulement est turbulent**, on a deux cas:

-Turbulent lisse $Re < 10^5$: on applique la loi de **BLASIUS** :

$$\lambda = 0.316\,Re^{-1/4} = (100\,Re)^{-1/4}$$

-Turbulent rugueux $Re > 10^5$: il y a d'autres lois tel que la loi de **BLENCH**

$$\lambda = 0{,}79.\sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}$$

ε/d : est la rugosité relative de la surface.

Diagramme de Moody

Le diagramme de Moody permet de connaître le coefficient de perte de charge régulière **en** fonction du nombre de Reynolds et du coefficient de rugosité relative **ε / D**.

Pertes de charge singulières ΔH_S :

Dans la pratique industrielle, ces pertes de charge sont écrites sous la forme :

$$\Delta Hs = K_S.\frac{V^2}{2g}$$

Où $\boldsymbol{K_S}$ est le coefficient de perte de charge singulière dépend de la singularité (étranglement de la conduite, vanne, coude…etc)

Pertes de charge Totale ΔH_T :

$$\Delta H_T = \Delta H_r + \Delta H_S$$

Théorème de Bernoulli généralisé :

Lorsque le fluide traverse une machine hydraulique, alors il y a un échange d'énergie entre le fluide et la machine.

Soit E l'énergie par unité de masse échangée entre le fluide et la machine.

On pose E > 0 si la machine est motrice (pompe)

E < 0 si la machine est réceptrice (turbine)

Le bilan énergétique appliqué entre (1) et (2) : E(1) + E = E(2) + E_{perdu}

Le théorème de Bernoulli s'écrit alors :

$$\frac{1}{2}V_1^{\ 2} + gZ_1 + \frac{p_1}{\rho} + E = \frac{1}{2}V_2^{\ 2} + gZ_2 + \frac{p_2}{\rho} + \Delta H_{t,1-2}$$

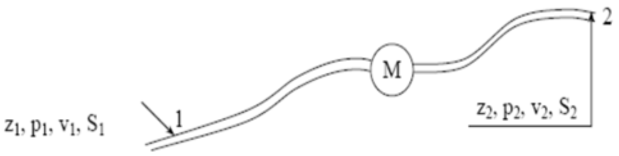


Fig. Fluide réel traversant une machine

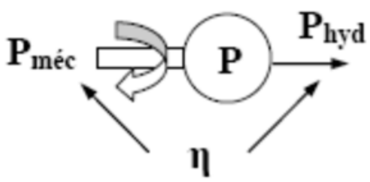
Les pertes d'énergie dans les machines sont traduites par un rendement. Ce dernier est le rapport de la puissance utile par la puissance absorbée :

$\eta\eta = \frac{P_U}{P_{abs}}$

Donc, la puissance mécanique est :

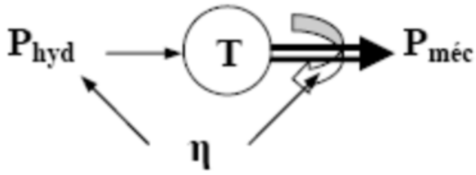
- Dans le cas d'une pompe:

$\eta\eta = \frac{P_{Hyd}}{P_{méc}}$ d'où $P_{méc} = \frac{P_{Hyd}}{\eta\eta}$



- Dans le cas d'une turbine:

$\eta\eta = \frac{P_{méc}}{P_{Hyd}}$ d'où $P_{méc} = \eta\eta . P_{Hyd}$



Références

1- Cours de Mécanique des fluides, J.ROUSSEL, C.P.I.2 - Chem.I.St2 : 2005-2006

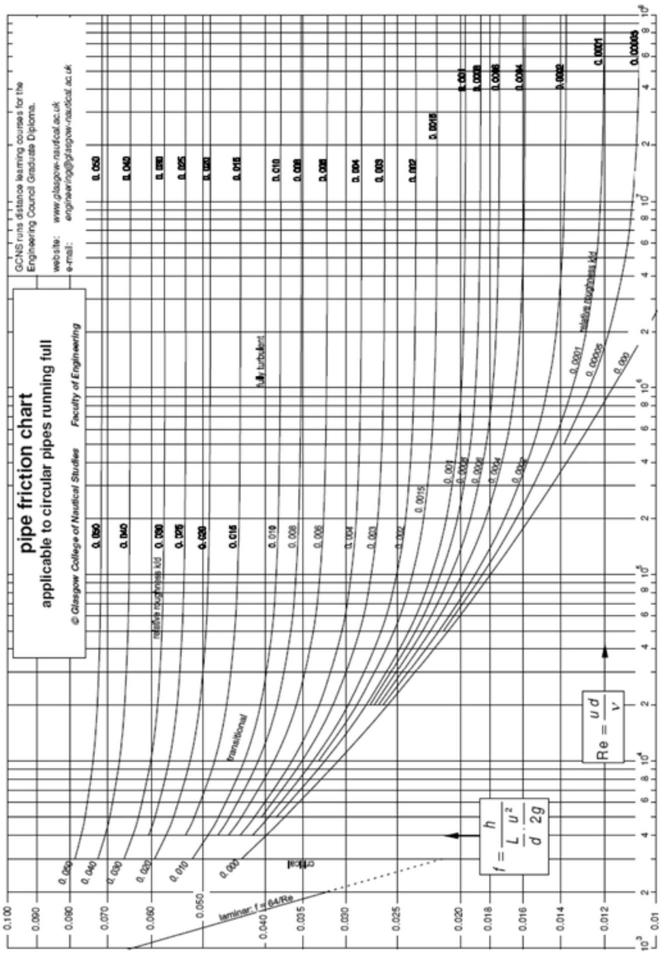
2- Mécanique des fluides, Olivier LOUISNARD

3- Mécanique des fluides appliquée, Dominique LAURENCE, 2002

4- Fluid mechanics fundamentals and Applications:YUNUS A. ÇENGEL

5- Cours de MDF Stéphane CHAUSSEDENT - Université d'Angers

….


pipe friction chart
applicable to circular pipes running full
© Glasgow College of Nautical Studies
Faculty of Engineering
laminar: f = 64/Re
transitional
full turbulent
relative roughness k/d

λ