OUTILS MATHEMATIQUES POUR LA PHYSIQUE

INTRODUCTIO :

Ce polycopie n'est censé remplacer ni les cours de mathématique, ni les cours de physique. En effet, ce n'est pas du tout un cours de théorie, Ce document est un rappel de notions de mathématiques "de base (i.e. niveau première et deuxième année). Ce n'est en aucun cas un cours complet et rigoureux, mais plutôt une liste d'outils mathématiques dont vous aurez besoin un jour ou l'autre, aussi bien en physique qu'en chimie ou math. Il est fait pour mettre les étudiants en confiance et de les familiariser avec les calculs mathématiques, ce qui est plus difficile dans un cours traditionnel.

I. Rappelle et définition :

I.1. Scalaires :

En algèbre linéaire un vrai scalaire est un nombre qui est indépendant de la base choisie pour exprimer les vecteurs, il peut être représenté soit par des nombres réels soit par des lettres grecques.

En physique, le scalaire est une quantité pouvant être décrite par un nombre et l'unité correspondante. Les quantités scalaires sont invariables par rapport aux rotations de coordonnées et aux transformations de système. Donc un scalaire est une quantité qui n'est associé à aucune direction où sens comme exemple: la masse ***m*** d'un objet, le temps ***t***.

I.2. Vecteurs:

On doit à Hamilton le terme *vecteur* (1843, du latin ***vector*** : qui transporte, déjà utilisé en astronomie depuis Kepler sous la forme de rayon-vecteur). La notation surlignée fléchée $\vec{u}$ n'a été définitivement adoptée en France qu'en 1960. Le vecteur est un objet très important qui comprend trois grandeurs physiques : la direction, la norme ou module (longueur) notée $\|\vec{u}\|$ et le sens. La force en est un bon exemple puisqu'elle doit contenir ces trois informations : la norme du vecteur matérialise l'intensité de la force, tandis que la direction et le sens du vecteur matérialisent l'orientation de la force. Le vecteur ne contient cependant pas d'information sur la position ; ainsi deux forces de mêmes intensité, direction et sens sont identiques, même si les points d'application de ces deux forces sont différents. Un vecteur aura donc une infinité de représentants.

Le vecteur $\vec{u}$ est défini selon le système des coordonnées données : cartésiennes, polaire, cylindrique et sphérique.

En effet, dans l'espace cartésienne orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, le vecteur $\vec{u}$ est défini comme (Figure 1):

$$\vec{u} = u_x\vec{\imath} + u_y\vec{\jmath} + u_z\vec{k}$$

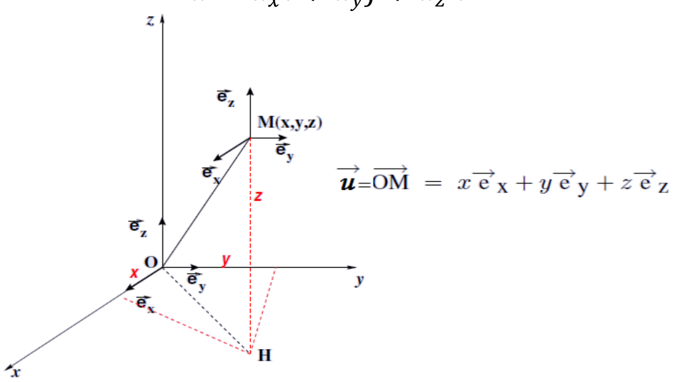


Figure 1 : Schéma caractéristique d'un vecteur dans les coordonnées cartésiennes

Par ailleurs son module est donc : $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

En outre, dans le cas d'un système plan, il est préférable d'utilisée les coordonnée polaire $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ pour décrit le mouvement intrinsèque des point matérielle, dont $\vec{u}$ est donnée par (Figure 2):

$$\vec{u} = r\,\vec{e_r}$$

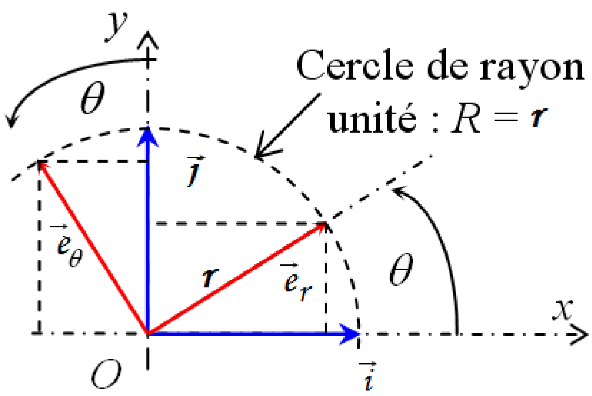


Figure 2 : Schéma caractéristique d'un vecteur dans les coordonnées Polaires

Par une simple utilisation du théorème de Pythagore, le module du vecteur est égale à :

$$\|\vec{u}\| = r = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

Avec : $\begin{cases} u_x &= r\cos\theta \\ u_y &= r\sin\theta \end{cases}$

Cependant, dans les phénomènes de physique et de science de terre et astronomie, le système de coordonnées cylindrique et sphérique est souvent utilisé, le vecteur $\vec{u}$ dans une base cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{k})$est donné par (Figure 3):

$$\vec{u} = r\,\vec{e_r} + z\,\vec{k}$$

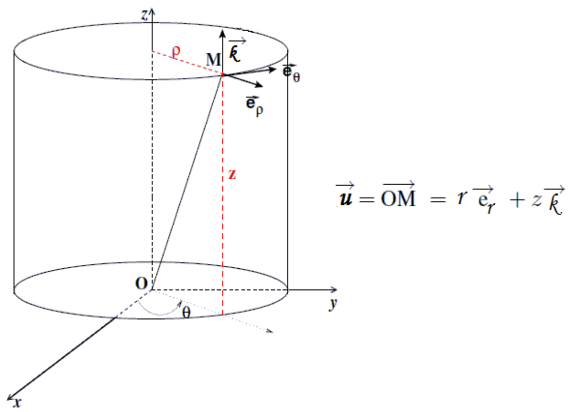


Figure 3 : Schéma caractéristique d'un vecteur dans les coordonnées cylindriques

Or que dans l'espace des coordonnées sphérique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$, le vecteur $\vec{u}$ est défini comme (Figure 4):

$$\vec{u} = r\,\overrightarrow{e_r}$$

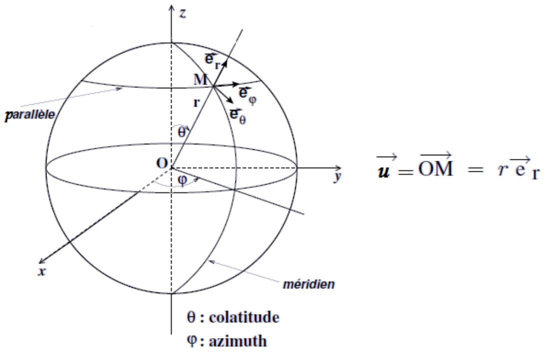


Figure 4 : Schéma caractéristique d'un vecteur dans les coordonnées Sphériques

Etant que r est calculé sur l'espace tridimensionnel comme la démontre l'égalité suivante :

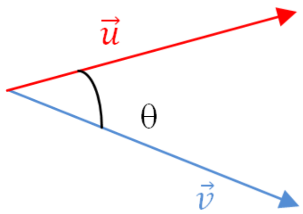
$$\|\vec{u}\| = r = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

Avec : $\begin{cases} u_x = r \sin\varphi \cos\theta \\ u_y = r \sin\varphi \sin\theta \\ u_z = r \cos\varphi \end{cases}$

I.3. ***Produit scalaire :***

Le produit scalaire, initialement appelé produit linéaire de deux vecteurs, est une multiplication de deux vecteurs. Le résultat de ce produit est un scalaire (un nombre), et pas un vecteur, d'où son nom. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos\theta = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$



L'exemple fondamental du concept apparaît en dynamique avec le travail d'une force : si une force $\vec{F}$ déplace un corps selon un chemin rectiligne $\vec{d}$, alors le travail fourni par la force est donné par le produit scalaire des deux vecteurs. Par exemple, si l'angle entre la force et le déplacement est nul, le travail sera ***maximal***. Toute l'énergie de la force est utilisée pour le déplacement. A l'inverse, si l'angle est de 90°, le travail sera ***nul***. Une force perpendiculaire au déplacement ne pourra en aucun cas fournir de l'énergie à ce déplacement, et sera donc sans effet. Un produit scalaire de 2 vecteurs orthogonaux sera donc toujours nul.

I.4. Produit vectorielle :

Le produit vectoriel est l'autre forme de multiplication de deux vecteurs dont le résultat, comme son nom l'indique, sera un vecteur. Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$ dans l'espace euclidien réel est noté $\vec{u} \wedge \vec{u}$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\|.\,\|\vec{v}\| \sin\alpha\,\vec{n}$$

Etant que : $\vec{n}$ le vecteur unitaire normale à la surface délimité par le plan $(\vec{u}, \vec{v})$(Figure5)

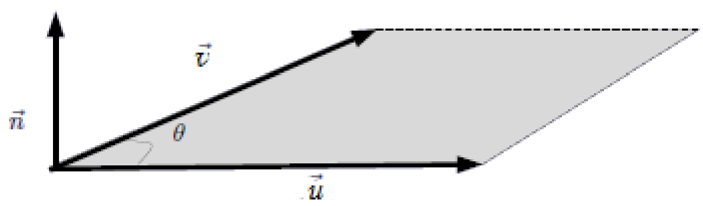


Figure 5 : Représentation du plan de produit vectorielle

Les composantes du vecteur résultat sont : (y_1z_2-y_2z_1, x_2z_1-x_1z_2, x_1y_2-x_2y_1). L'espace est généralement orthonormé. Dans une base vectorielle $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on peut utiliser le déterminant d'ordre 3 :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \oplus & & \\ \vec{i} & \cancel{\vec{j}} & \cancel{\vec{k}} \\ \cancel{x_1} & y_1 & z_1 \\ \cancel{x_2} & y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & \ominus & \\ \cancel{\vec{i}} & \vec{j} & \cancel{\vec{k}} \\ x_1 & \cancel{y_1} & z_1 \\ x_2 & \cancel{y_2} & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & \oplus \\ \cancel{\vec{i}} & \cancel{\vec{j}} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & \cancel{z_1} \\ x_2 & y_2 & \cancel{z_2} \end{vmatrix}$$

$$= +\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (y_1z_2 - y_2z_1)\,\vec{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\,\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\vec{k}$$

Le vecteur produit est ***nul*** si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (même direction). Sinon, c'est un vecteur normal au plan $(\vec{u}, \vec{v})$ dont le sens est obtenu par la règle des trois doigts ou la règle de la main droite (dite aussi du bonhomme d'Ampère : voir Figure 6).

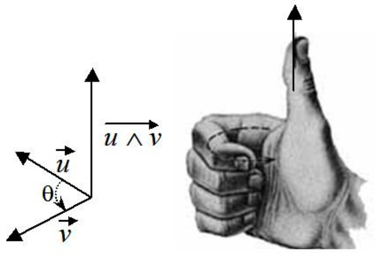


Figure 6 : Règle de la main droite

La fameuse force de Lorentz est la force que subit une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$: $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$

II. Dérivées :

II.1. Fonction d'un seul variable x :

Soient $\mathbb{I}$ et $\mathbb{J}$ deux ensembles d'éléments. La correspondance qui à tout élément x de $\mathbb{I}$ fait correspondre un élément appartenant à $\mathbb{J}$ est appelé fonction. On dit que la fonction f est dérivable en x s'il existe un réel $f'(x)$ tel que :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La dérivée $f'(x)$ correspond donc à l'accroissement de la fonction f au point x, c'est la pente de la tangente de f en x.

La différentielle df qui est une approximation linéaire de la fonction f pour une variation infinitésimale dx est donc :

$$df = f(x + dx) - f(x) = f'(x)dx$$

II.2. Fonction à plusieurs variables x et y :

Soit une fonction à deux variables $f(x, y)$ caractérisant une surface dans l'espace tridimensionnelle. La fonction f est dérivable en x et en y si à chaque variable on correspond une dérivée *partielle* définie pour la dimension donnée, c'est-à-dire en considérant l'ensemble des autres variables *constantes*. Ces dérivées partielles en x et en y sont notées respectivement comme :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

Ces derniers correspondent aux accroissements de la fonction f dans la direction de la variable considérée. Ainsi qu'il présente les pentes des tangentes de *f* au point *(x,y)* le long des direction (O*x*) et (O*y*) respectivement . Le même raisonnement est à appliquer pour plus de deux variables.

Néanmoins, La différentielle totale df est l'approximation linéaire définie par la somme de toutes les dérivées partielles, elle caractérise la variation totale de la fonction $f(x,y)$par rapport aux variations infinitésimales $dx\ et\ dy$ (voir Figure 7):

$$df = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

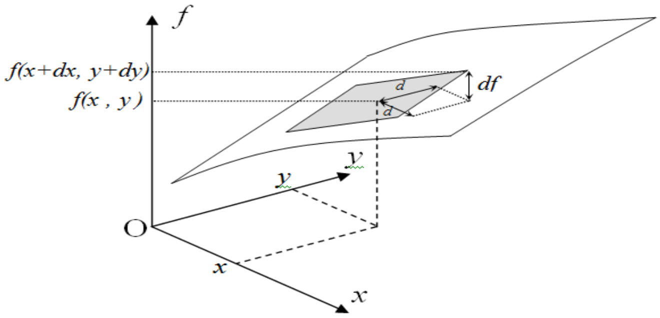


Figure 6 : Représentation géométrique de la différentielle totale d'une fonction *df* au point (*x*,*y*)

II.3. Calcul des dérivées

Les dérivées usuelles sont rappelées dans le tableau suivant :

f(x)	**f'(x)**
a (constante)	0
Ax	A
$au(x)$	$au'(x)$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$u(x).v(x)$	$u'.v + u.v'$
u/v	$(u'.v - u.v') / v^2$
u^n	$nu'.u^{n-1}$
$\sin(u)$	$u'.\cos(u)$
$\cos(u)$	$-u'.\sin(u)$
$\tan(u)$	$u'(1 + \tan^2(u))$
$\ln(u)$	u' / u
$\exp(u)$	$u'.\exp(u)$

Tableau 1 : Dérivées usuelles

III. Opérateur mathématiques :

Les opérateurs différentiels agissent comme leur nom l'indique par dérivation sur des champs scalaires ou vectoriels. Ces opérateurs sont dits du 1er ordre si leur définition ne met en jeu que des dérivées partielles du 1er ordre, du second ordre si apparaissent des dérivées secondes...etc.

III.1. Le gradient scalaire :

En physique et en analyse vectorielle, le gradient est une grandeur vectorielle indiquant la façon dont une grandeur physique varie dans l'espace, il est obtenu en suivant l'évolution d'une grandeur physique $df(x, y, z)$ par rapport aux variations infinitésimales du vecteur $\overrightarrow{dM}$ de mouvement définie dans l'espace $d\Omega$ (dans notre cas, cartésienne) comme:

$$\overrightarrow{dM} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$$

Etant que :

$$df = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz$$

Et utilisant la définition du $\overrightarrow{dM}$, on peut réécrire df comme :

$$df = \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\,\vec{k}\right).\left(dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}\right)$$

Par conséquent, on définie le gradient scalaire comme :

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\,\vec{k}$$

On note l'opérateur différentielle nabla $\vec{\nabla}$ comme:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}$$

Donc :

$$\overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla}.f$$

Néanmoins, le composante du gradient scalaire dans les coordonnées cylindrique et sphérique est obtenue par changeant les variable et ils sont définie respectivement comme :

$$\vec{\nabla}.f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\nabla}.f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

III.2. <u>La divergence d'un vecteur :</u>

L'opérateur divergence est un opérateur différentiel linéaire de degré **1**, il représente le flux par unité de volume d'un vecteur du champ $\vec{A}$ à travers une surface délimitant une unité de volume en point donnée de l'espace.

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Le résultat de la divergence est un scalaire, s'il est différent de zéro $div\vec{A} \neq 0$, on dit que le champ de $\vec{A}$ possède une source ou un ***puits*** de champ ce qui décrit un flux ***non conservatif***.

Or si la divergence est nulle $div\vec{A} = 0$, le flux est ***conservé*** où **solénoïdal**.

L'exemple le plus connue en physique utilisant la divergence c'est le théorème local de la loi de Gauss où souvent notée par l'équation de Maxwell-Gauss (Figure 7) qui calcule Le champ électrique créé par une sphère chargée en un point de l'espace :

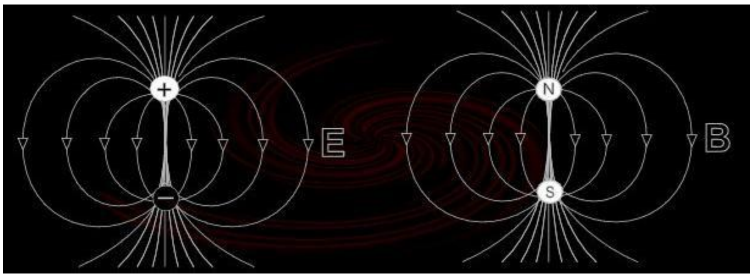


Figure 7 : champ électrique créé par une sphère chargée en un point de l'espace

- Si $r < R_{sphére} \rightarrow div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
- Si $r > R_{sphére} \rightarrow div\vec{E} = 0$

Néanmoins, par changement de variable on définie la divergence dans les coordonnées cylindrique et sphérique comme respectivement:

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta\, A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

III.3. Le rotationnelle d'un champ de vecteur:

Le rotationnelle vient du mot rotation qui décrit le mouvement d'un corps autour d'un point ou d'un axe. En mathématique et en physique, on parle de boucler ou tourbillonner un vecteur autour d'un autre c'est la somme des circulations d'un vecteur $\overrightarrow{A}$ le long d'un chemin dl qui entoure une surface dS.

Le résultat d'un rotationnel est un vecteur qui fait intervenir des dérivées partielles croisées :

$$\overrightarrow{Rot}.\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Donc les composante du vecteur rotationnelle $\overrightarrow{Rot}.\vec{A}$ est :

$$\overrightarrow{Rot}.\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

L'exemple le plus simple décrivant l'effet du rotationnel est l'étude du mouvement dans un fluide, le rotationnel dans ce cas caractérise le champ de tourbillon influent sur le vecteur vitesse $\vec{v}$.

Le rotationnelle est définie dans la base cylindrique et sphérique comme :

$$\overrightarrow{Rot}.\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{Rot}.\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\, A_\varphi\right)}{\partial \theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_\varphi\right)}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Le rotationnel est nul c'est la circulation du champ vecteur est nulle c'est-à-dire le champ vecteur ne tourne pas sur un point fixe ou axe de l'espace.

En outre le rotationnelle d'un gradient scalaire est nul quelque soit le phénomène physique :

$$\overrightarrow{Rot}.\left(\overrightarrow{grad}f\right) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = \vec{0}$$

III.4. La décomposition de Helmholtz :

Ce théorème de décompositions sert à associe à toute champ vectorielle $\overrightarrow{A}$ une entité scalaire et d'autre vectorielle, donc chaque vecteur $\vec{A}$ peut s'écrit comme :

$$\vec{A} = \overrightarrow{grad}\phi + \overrightarrow{Rot}.\vec{\Psi}$$

Etant que, ϕ est le potentiel scalaire cependant $\vec{\Psi}$ est le potentiel vecteur qui est choisie on générale de tel sort que : $\overrightarrow{div}.\vec{\Psi} = 0$

- Le champ vecteur $\vec{A}$ est solénoïdal à flux conservatif si $div\,\vec{A} = 0$, ce qui signifie que le champ de vecteur $\vec{A}$ n'est que le rotationnel de $\vec{\Psi}$

$$\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,.\,\vec{\Psi} \qquad \boldsymbol{car} \quad div.\left(\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,.\,\vec{\Psi}\right) = 0 \quad \forall \vec{\Psi}$$

- Le champ vecteur $\vec{A}$ est irrotationnel lorsque $\overrightarrow{Rot}.\vec{A} = \vec{0}$, ce qui signifie que le champ de vecteur $\vec{A}$ s'écrit comme :

$$\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi \qquad \boldsymbol{car} \quad \overrightarrow{\mathrm{Rot}}.\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi\right) = 0 \quad \forall \phi$$

III.5. <u>Le Laplacien scalaire :</u>

Le dernier opérateur que nous utiliserons est le laplacien. Il est défini comme la divergence du gradient. On distingue le laplacien scalaire :

$$\Delta f = div.\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\right) = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}f = \nabla^2 f$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}$$

Le laplacien interviendra dans tous les problèmes de diffusion: diffusion de la chaleur, concentré chimique, de la quantité de mouvement, etc...

Les coordonnées de cet opérateur sont définies dans la base cylindrique et sphérique comme se suit :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

IV. <u>Primitives et Intégrales :</u>

IV.1. <u>Primitive d'une fonction f(x) :</u>

Soit $f(x)$ une fonction définie sur un intervalle I. Une fonction F, définie et dérivable sur I, est appelée primitive de f si et seulement si f est sa dérivée sur I :

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Il existe donc une infinité de primitives de la fonction $f(x)$ à une constante a près ($da/dx = 0$). On note : $F(x) = \int f(x)\,dx$

Les primitives usuelles sont rappelées dans le tableau suivant :

f(x)	***F(x)***
a (constante)	$ax + c$ (constante)
Ax	$ax^2/2 + c$
ax^k (k réel ≠ 1)	$ax^{k+1}/(k+1) + c$
$au(x)$	$aU(x) + c$
$u'.u^k$ (k réel ≠ 1)	$u^{k+1}/(k+1) + c$
u'/u ($x \neq 0$)	$\ln(\|u\|) + c$
$u'.\sin(u)$	$-\cos(u) + c$
$u'.\cos(u)$	$\sin(u) + c$
$u'.\exp(u)$	$\exp(u) + c$

Tableau 2 : Primitives usuelles

IV.2. ***Calcul d'une primitive par parties :***

En présence d'un produit compliqué de deux fonctions, cette méthode consiste à déplacer la difficulté en utilisant la relation :

$$(u.v)' = u'.v + u.v'$$

On peut donc calculer la primitive du premier terme de la partie droite de l'égalité par :

$$\int u'v\,dx = u.v - \int u.v'dx$$

Ce qui ne sera utilisé que lorsque la primitive de droite est plus facile à calculer que celle de gauche.

Exemple : calcule de l'intégrale suivant : $F(x) = \int x.\ln(x)\,dx$

En pose que : $u'(x) = x$ et $v = \ln(x)$ on obtient :

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}(\ln(x) - 1/2) + c \ .$$

IV.3. Intégrales :

Soit a et b deux réels d'un intervalle I . L'intégrale de a à b de la fonction f est le réel $F(b)$ - $F(a)$, où F est une primitive quelconque de f sur I. Et on note :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Physiquement, l'intégrale ci-dessus est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la fonction f entre $x = a \ et \ x = b$ (figure 8).

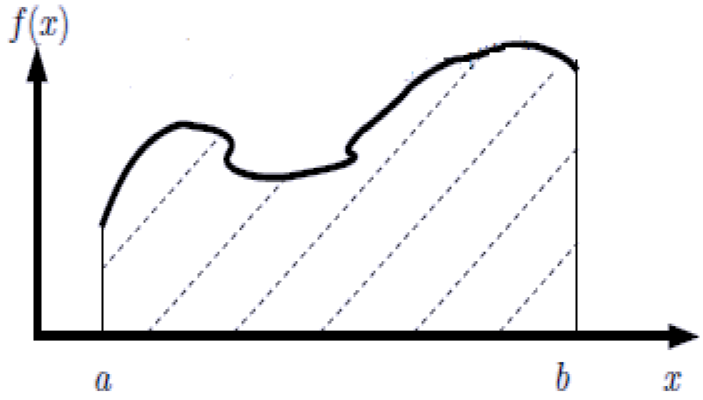


Figure 8 : Représentation d'une intégrale d'une fonction entre deux points arbitraire

Néanmoins, l'intégrale désigne aussi la sommation sur toutes les configurations de la fonction f entre $x = a \ et \ x = b.$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, dx$$

IV.4. Calcul d'intégrales :

Le calcul d'intégrale se déduit du calcul de primitives des sections précédentes. Pour la méthode par changement de variable cependant, la variable $u(x)$ doit être une bijection sur l'intervalle $[a, b]$ considéré. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$$

Pour le reste, on se servira des propriétés suivantes (avec les réels a, b, c de I et k quelconque) :

Relation de Chasles	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
Linéarité	$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
	$\int_a^b k.f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
Signe	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Tableau 3: Principales propriétés des intégrales

Exemple : Calcul de la surface S délimitée par la courbe C représentative de :

$$f(x) = exp(1 - x) - x$$

Les bornes d'intégrale sont limitées par les axes du repère et la droite d'équation $x = 2$ (voir figure suivante) :

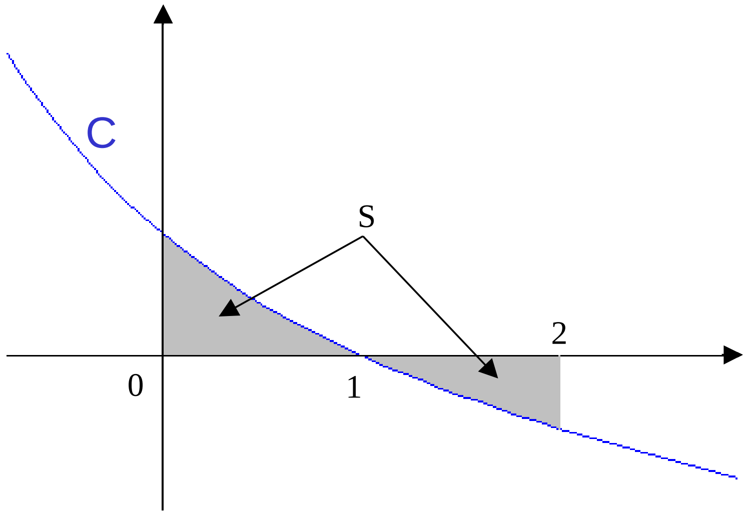


Figure 9 : Air délimité par la courbure $\boldsymbol{C}$ de la fonction $\boldsymbol{f(x)}$

En fait, l'intégrale d'une fonction négative étant négative (une surface étant toujours positive), nous utilisons la relation de Chasles pour séparer les parties positives et négatives :

$$S = \int_0^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx = \left[-\frac{x^2}{2} - \exp(1-x)\right]_0^1 - \frac{x^2}{2} - \exp(1-x)12$$

$$S = e - 1 + \frac{1}{e}$$

IV.4.A. Intégrale double (de surface) :

On a maintenant à intégrer une surface dans un repère cartésien. On découpe alors la surface en une infinité de petits éléments de surface $dx_i dx_j$.

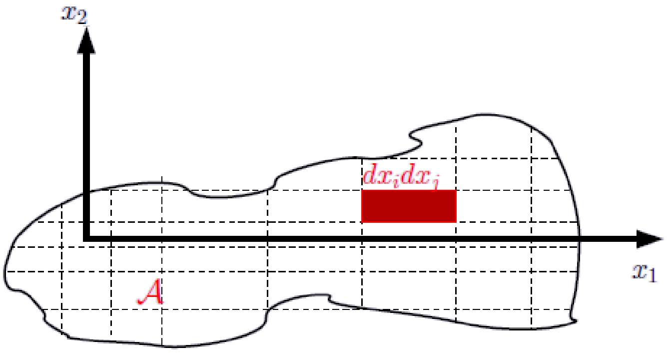


Figure 10 : Division élémentaire dans une Intégrale double

Ce qui signifie mathématiquement l'intégrale suivant :

$$\int dS = \iint_{\mathcal{A}} dx_i dx_j \;= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} dx_i dx_j$$

IV.4.B. Intégrale triple (volume) :

Dans ce cas la On découpe alors le volume en une infinité de petits éléments de volume $dx_i dx_i dx_k$.

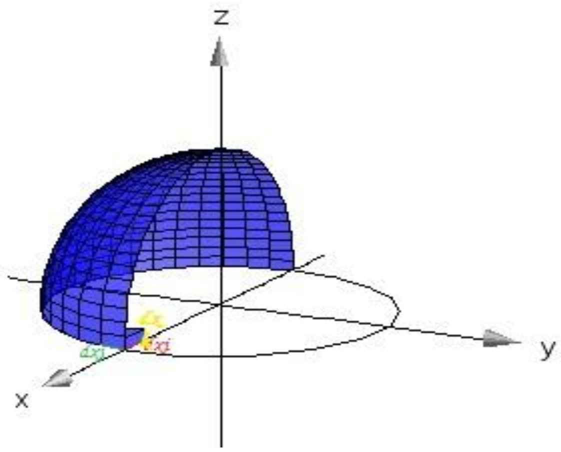


Figure 11 : Division élémentaire dans une intégrale de volume

Ce qui est décrit mathématiquement comme :

$$\int dS = \iiint_{\mathcal{V}} dx_i dx_j dx_k \;= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{L} dx_i dx_j dx_k$$

IV.4.C. La circulation d'un vecteur :

Dans un système de coordonnée le champ de vecteur $\vec{A}$ se déplace suivant un chemin délimité par les points M_1 *et* M_2 , le chemin crée est découpé en une infinité de vecteurs infinitésimaux $\overrightarrow{dM}$.

Par définition, la circulation de $\vec{A}$ entre les points M_1 *et* M_2 est :

$$C_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{A}\,.\overrightarrow{dM}$$

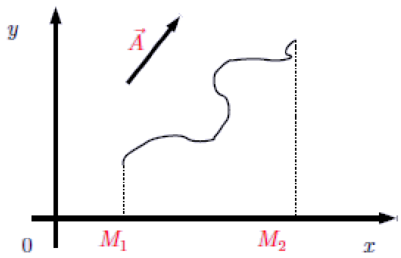


Figure 12 : Chemin crée par un champ de vecteur entre deux points de l'espace

Néanmoins, La circulation d'un vecteur $\vec{A}$ est indépendante du chemin choisi, puisqu'elle ne dépendant que du point de départ et du point d'arrivée.

Dans le cas particulier ou l'on intègre sur un contour fermé, on a :

$$\oint \vec{A}\,.dM$$

IV.4.D. Flux vectorielle :

Par définition, le flux du champ de vecteur $\vec{A}$ à travers une surface dont le vecteur unitaire normal à la surface s'écrit $\vec{n}$ est:

$$\phi = \iint_S \vec{A}\,.\,\overrightarrow{dS} = \iint_S \vec{A}\,.\,dS\,\vec{n}$$

Ce qui est représenter dans la figure suivante :

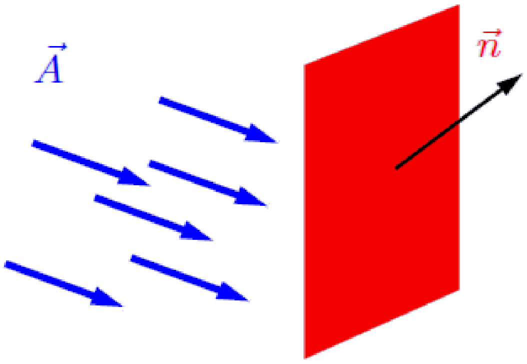


Figure 13 : Flux d'un champ de vecteur

Le flux correspond à la quantité intégrée du champ de vecteur $\vec{A}$ traversant la surface S. La seule composante de $\vec{A}$ qui va intervenir dans le flux est la composante parallèle à $\vec{n}$, puisque la composante perpendiculaire à la surface ne peut la traverser.

V. Relation Trigonométrique :

En mathématique, les fonctions trigonométriques sont des fonctions dont la variable est une mesure d'angle. Elles permettent de relier les longueurs des côtés d'un triangle (***trigonon*** en grec) en fonction de la mesure des angles aux sommets. Plus généralement, les fonctions trigonométriques sont importantes pour étudier les triangles et les polygones et les cercles car ils sont essentiellement des fonctions périodiques.

Afin de définir l'ensemble de ces équations il est nécessaire d'avoir quelque notion de base sur les angles :

V.1. Cercle trigonométrique :

On appelle cercle trigonométrique dans un repère orthogonal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, le cercle de centre *O* et de rayon 1.

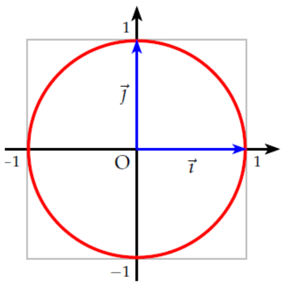


Figure 14 : cercle trigonométrique

V.2. Le radian :

Le radian est une unité de mesure des angles, Il est défini comme la longueur de l'arc entre 2 points du cercle unité.

Le demi-cercle unité est de longueur deπ, ce qui implique que l'angle de 180°vaut π radian $180° = \pi\ rd$. Et alors la mesure en dégrée d'un radiant est donnée par :

$$1\ rad = \frac{180°}{\pi} \approx 57°$$

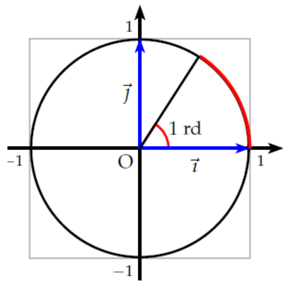


Figure 15 : représentations du radian

Par conséquent, toutes angle du cercle trigonométrique est peut être convertie en radian selon :

$$\alpha\ (rad) \approx \frac{\alpha(°) * \pi}{180°}$$

V.3. Angles dans le cercle trigonométrique :

La mesure d'un angle α repéré par un point M dans le cercle trigonométrique, est la valeur algébrique de la longueur de l'arc AM où $A(1;\ 0)$ Le sens trigonométrique ou direct correspond au sens antihoraire.

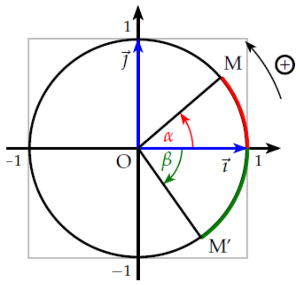


Figure 16 : représentations des angles dans le cercle trigonométrique

Autrement dit, on peut toujours associes une valeur d'angle pour chaque droite passant par l'origine O, et découpe le cercle unité en un point quelconque. La figure suivante présente les principaux angles du cercle trigonométrique :

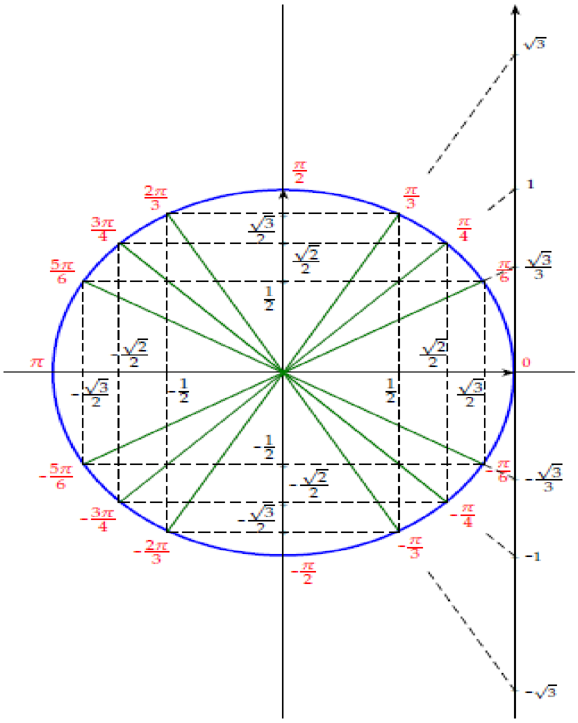


Figure 17 : représentations des angles principales dans le cercle trigonométrique

V.4. *Fonctions trigonométriques :*

Soit un angle α repéré par un point M sur le cercle trigonométrique; on appelle :

- $\boldsymbol{\cos\alpha}$: La projection de M sur l'axe des abscisses $(\overline{OH})$
- $\boldsymbol{\sin\alpha}$: *La* projection de M sur l'axe des ordonnées $(\overline{OK})$
- $\boldsymbol{\tan\alpha}$: *L'*intersection de (OM) avec la ligne de tangente opposé à (OY) dans le point A

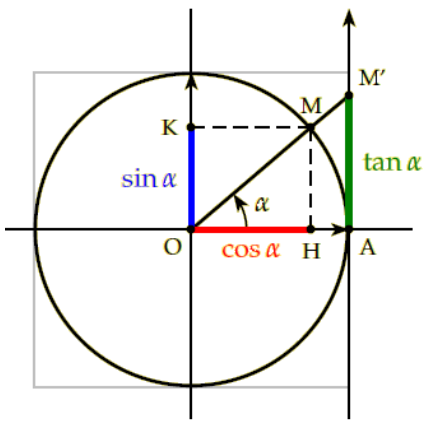


Figure 16 : représentations des fonctions trigonométriques

Remarque : Pour tout réel x, on a :

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad et -1 \leq \sin x \leq 1$$

V.5. ***Relations trigonométriques :***

L'ensemble des relations reliant les différentes fonctions trigonométriques entre eux constituent la suite de cette partie :

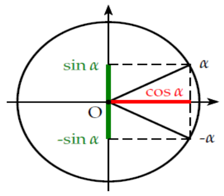
En effet, par une simple lecture des angles à partir du cercle trigonométrique on aboutie à l'ensemble des équations reliant deux angles différentes :

- **Angles opposés :** on définie les égalités suivantes :

$$sin(-\alpha) = -sin\ \alpha$$

$$cos(-\alpha) = cos\ \alpha$$

$$tan(-\alpha) = -tan\ \alpha$$



A partir de ces équations, on constate que les fonctions sinus et tangente sont des fonctions impaires tandis que la fonction cosinus est une fonction paire

- **Angles supplémentaires et opposés supplémentaires :** sont l'ensemble des angles adjacentes dont leurs somme égale à π

  - ***Angles supplémentaires :***

$$sin(\pi - \alpha) = sin\ \alpha$$

$$cos(\pi - \alpha) = -cos\ \alpha$$

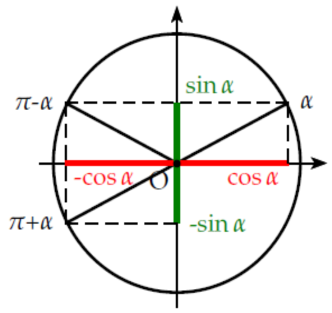
$$tan(\pi - \alpha) = -tan\ \alpha$$

  - ***Angles opposés supplémentaires :***

$$sin(\pi + \alpha) = -sin\ \alpha$$

$$cos(\pi + \alpha) = -cos\ \alpha$$

$$tan(\pi + \alpha) = tan\ \alpha$$

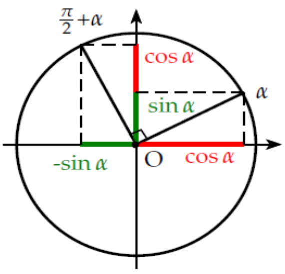


- **Angles complémentaires et opposés complémentaires** : sont l'ensemble des angles adjacentes dont leurs somme égale à $\frac{\pi}{2}$

  - ***Angles complémentaires***

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$



- ***Angles opposés complémentaires***

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin(\alpha)$$

D'autre part les fonction sinus, cosunus et tagante sont relier entre eux par:

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1 \qquad\qquad 1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

Nénmoins, il existe des protocole et des formule d'addition, de duplication et de linéarisation .

- **Formule d'addition :** on définie les équations suivantes :

$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b) \qquad \cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b) \qquad \sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$$

$$\tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

- **Formule de duplication :** on trouve :

$$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1+2\sin^2(a)$$

$$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$$

$$\tan(2a)=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

D'une manière générale on utilise la formule de ***Moivre*** :

$$(\cos(a)+\ i\sin(a))^n\ =\ cos(na)\ +\ i\ sin(na)$$

- **Formule de linéarisation :** dans cette partie nous avons :

$$\cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$

$$\tan^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}$$

En terme générale et pour des puissances supérieures de 2 on utilise la formule d'***Euler*** :

$$\cos(a)+i\sin(a)=e^{ia}$$

Donc : $\begin{cases} \cos(a) = \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} \\ \sin(a) = \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2} \end{cases}$

V.6. ***Représentation graphique es fonctions trigonométriques :***

Les courbes des fonctions sinus et cosinus s'appelle des sinusoïdes. Elles sont identiques à une translation périodique.

La courbe de la fonction tangente n'a pas de nom. On peut remarquer que cette dernière n'est plus définie en $\frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

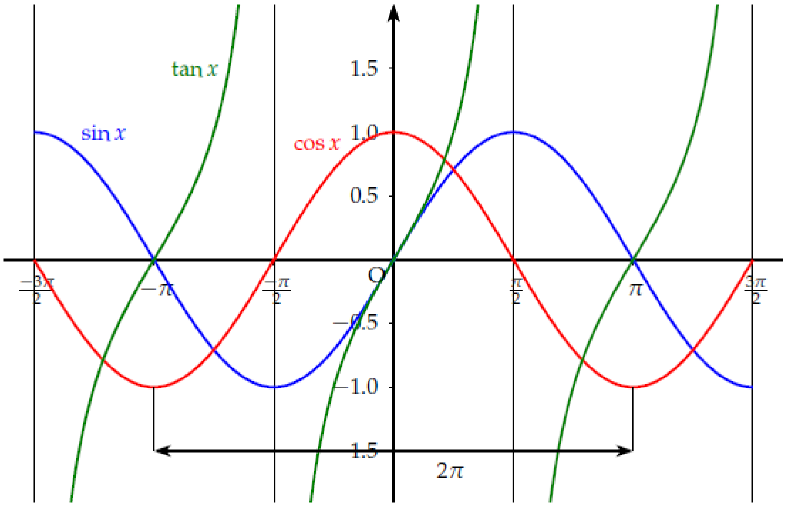


Figure 17 : représentations graphique des fonctions trigonométriques