Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques d'Oran

Rappels de cours sur les vibrations, exercices corrigés et exercice supplémentaires

Dr. Mostafa Kerim BENABADJI

Novembre 2016

Avant-Propos

La pratique d'enseignement, nous a amené à constater la difficulté qu'ont les étudiants pour bien assimiler le cours, et c'est pour cette raison qu'il a paru utile d'écrire ce polycopié.

Le programme de ce support correspond à ce qui peut être dispensé raisonnablement durant un semestre de cours, en permettant une assimilation progressive des systèmes en vibration.

Ce recueil d'exercices résolus et autres supplémentaires en vibrations est un support pédagogique destiné aux étudiants de la deuxième année de l'Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques d'Oran. Ce manuel regroupe des séries exercices des différents chapitres, à savoir :

- Rappel de cours sur les vibrations,
- Généralités sur les vibrations
- Oscillations libres des systèmes à un seul degré de liberté,
- Oscillations amorties des systèmes à un seul degré de liberté,
- Oscillations forcées des systèmes à un seul degré de liberté
- Oscillations libres des systèmes à deux degrés de libertés.

Comme pour tous les exercices auto-correctifs, les solutions profitent plus aux étudiants qui fournissent l'effort nécessaire pour réfléchir et essayer de résoudre les exercices proposés.

Je souhaite que ce recueil d'exercices corrigés et exercices supplémentaires en vibrations puisse aider de manière efficace la majorité d'étudiants.

Tu me dis, j'oublie. Tu m'enseignes, je me souviens.
Tu m'impliques, j'apprends.

(Benjamin Franklin)

SOMMAIRE

<u>Chapitre 1 :</u>

Généralités sur les vibrations « *Rappels de Cours* »

I. Généralités sur les vibrations :

1. Définitions :

1.1.Mouvement Vibratoire :

On appel mouvement vibratoire le mouvement d'un système qui s'effectue périodiquement de part et d'autre d'une position d'équilibre.

1.2.Mouvement périodique :

On appel mouvement périodique, un mouvement qui se répète identique à lui-même à des intervalles de temps successifs de même durée T.

1.3.Mouvement sinusoïdale :

On dit qu'un mouvement vibratoire est sinusoïdal, si l'élongation x (y ou z) d'un point vibrant est une fonction sinusoïdale simple du temps.

$$x(t) = A.\sin(\omega t + \varphi) \ \ ou\ bien\ x(t) = A.\cos(\omega t + \varphi)$$

Avec A : l'amplitude d'un mouvement, elle se place à l'origine.

et ω : étant sa pulsation : $\omega = 2.\pi.f = \frac{2.\pi}{T}$

Ce type de mouvement est appelé mouvement harmonique simple (MHS)

Un mouvement oscillatoire n'est harmonique que s'il est linéaire au voisinage d'une position d'équilibre stable.

- On dit que le mouvement oscillatoire est linéarisé si la réponse est directement proportionnelle à la force appliquée.
- Pour linéariser le mouvement d'un système oscillatoire, on fait appel à des petites oscillations au voisinage d'une position d'équilibre stable afin d'obtenir des équations différentielles du mouvement linéarisé facile à résoudre.

Soit q_i une coordonnée généralisée (variable), si q_i est petit (petite oscillation) on peut écrire :

$$\sin(q_i) \approx q_i \ et \cos(q_i) \approx 1$$

1.4.Coordonnées généralisées :

On appel coordonnées généralisées d'un système physique, un ensemble de variables réelles permettant de décrire ce système (position et mouvement).

$$Un\ système\ en\ mouvement\ \begin{cases} Translation\ (x, y, z) \\ Rotation\ (Ox, Oy, Oz) \end{cases}$$

1.5.Degré de liberté :

On appel degré de liberté (ddl) d'un système la capacité de ce système d'effectuer le mouvement de translation et de rotation par rapport aux axes.

Exemple : Une bille roulant sur le sol (Ox, Oy, Oz) présente 3 ddl.

Remarque : A chaque coordonnée généralisée correspond un degré de liberté (1 ddl).

2. Equation de Newton :

2.1.Mouvement de translation :

Si un système de masse m est soumis à des forces extérieures, la loi fondamentale de la dynamique (L.F.D.) nous donne : $\sum_i \vec{F_i} = m\vec{\gamma_i} = m\vec{a_i}$

2.2.*Mouvement de rotation :*

La Loi fondamentale de la dynamique d'un mouvement de rotation s'écrit :

$$\sum_i M_\Delta(\vec{F_i}) = J.\ddot{\theta} = J.\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

3. Bilan énergétique :

L'énergie totale d'un système isolé se conserve : $E_T = E_C + E_P = Cste$

L'équation différentielle du mouvement d'un système est donnée par : $\frac{dE_T}{dt} = 0$

4. Equation de Lagrange :

La fonction de Lagrange ou Lagrangien représente la variation : $L = E_C - E_P$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = \sum_j F_{ext} = F - F_f \qquad \dots équation\ de\ Lagrange\ de\ Translation$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = \sum_j M_\Delta(F_{ext}) \qquad \ldots \textit{équation de Lagrange de Rotation}$$

- *Définition :*

Par définition la fonction de dissipation est égale à la demi-puissance dissipée.

$$D = \frac{1}{2}P_d = \frac{1}{2}\beta\dot{q}^2$$

Où : $P_d = \beta\dot{q}^2$ la puissance dissipée par les forces de frottement sous forme de chaleur

Et β est la constante de frottement.

$$F_{ext} : \text{ forces extérieures appliquées } \begin{cases} - \text{Force de Frotttement au système} \\ - \text{Force entrainant le mouvement (sinusoïdal)} \end{cases}$$

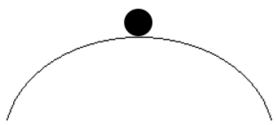
Si $F_{ext} = 0$, le système est **isolé** et la fonction de Lagrange est différente d'une fonction du temps ($\mathcal{L} \neq f(t)$), le système est dit **conservatif**.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

5. Stabilité à l'équilibre :

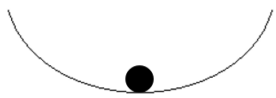
Posons q_0 la position d'équilibre d'un système.

Si $\left.\frac{dq_i}{dt}\right|_{q_i=q_0} = 0$, E_P vérifie la relation $\left.\frac{\partial E_P}{\partial q_i}\right|_{q_i=q_0} = 0$ et $\left.\frac{\partial^2 E_P}{\partial {q_i}^2}\right|_{q_i=q_0} > 0$.



Equilibre *instable* :

On dit qu'une position q_0 est instable si E_P présente un maximum en q_0



Equilibre *stable :*

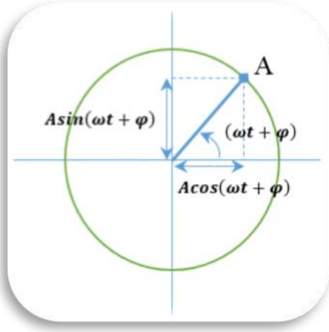
On dit d'une position q_0 est stable si cette dernière est un minimum de E_P

II. Cinématique des vibrations harmoniques :

1. Interprétation vectorielle de la vibration harmonique :

On peut considérer une vibration harmonique comme étant un vecteur de module A dont l'extrémité exécute une rotation uniforme sur un cercle de rayon R=A, tandis que les extrémités de ses projections sur les axes ont des vibrations définies par :

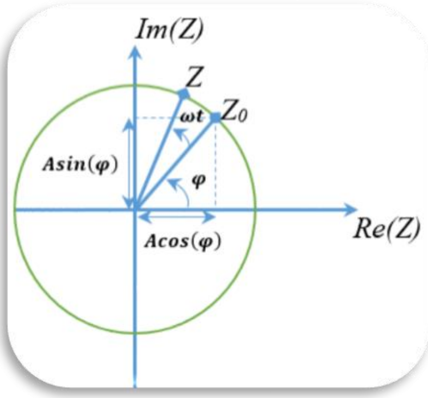
$$\boldsymbol{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)} \text{ et } \boldsymbol{y(t) = A\sin(\omega t + \varphi)}$$



Ce mode de représentation d'une vibration harmonique présente surtout l'intérêt pour l'étude de la composition d'une vibration.

2. Représentation d'une vibration à l'aide d'une variable complexe :

La vibration harmonique peut être représentée dans le plan complexe par la variable complexe *Z*, telque : $Z = A.e^{i(\omega t+\varphi)}$ qui est explicité comme la somme de deux variables de vibration harmoniques $Z = x + iy = A[cos(\omega t + \varphi) + i.sin(\omega t + \varphi)]$.



La partie réelle de cette expression représente une vibration harmonique sur l'axe *Ox* et la partie imaginaire une deuxième vibration sur l'axe *Oy* (figure ci-contre).

$$x = Re(Z) = Acos(\omega t + \varphi)$$

$$y = Im(Z) = Asin(\omega t + \varphi)$$

Le nombre complexe $Z_0 = Ae^{i\varphi}$ représente le vecteur $\vec{A}$ sur le même support à *t=0* tandis que le nombre $Z = A.e^{i(\omega t+\varphi)}$ représente le vecteur $\vec{A}$ que forme avec l'axe *Ox* (*ω* étant la vitesse angulaire égale $\frac{2\pi}{T}$, et $(\omega t + \varphi)$ étant l'angle au temps t).

III. Oscillateur harmonique simple sans amortissement :

1. Définition :

On appel oscillations libres ou naturelles le mouvement d'un système isolé auquel on donne une excitation initiale à l'aide d'un système de perturbation extérieure et on l'abandonne à ses oscillations libres (à lui-même).

Un oscillateur est un système qui n'est immobile qu'à la position d'équilibre.

2. Equation de mouvement (régime sinusoïdal) :

Considérons un système physique de position *x* à un instant quelconque. On dit qu'il effectue un mouvement sinusoïdal si la loi d'évolution avec le temps est donnée par :

$$x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$$

ω_0 : étant la pulsation propre du système.

Sa vitesse est : $V = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega t + \varphi)$

Son accélération est : $\gamma = a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -A{\omega_0}^2 \cos(\omega t + \varphi) = -{\omega_0}^2 . x(t)$

Ce qui donne : $\frac{d^2x}{dt^2} + {\omega_0}^2 . x(t) = 0$

Ou encore : $\ddot{x} + {\omega_0}^2 . x = 0$ qui représente l'équation différentielle du mouvement libre non amorti.

La solution générale d'une équation de ce type est : $x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$.

Chaque fois qu'un système physique obéit à une équation du type : $\ddot{x} + {\omega_0}^2 . x = 0$, il décrit un mouvement penulaire sinusoïdal, un tel système physique est appelé « *Oscillateur harmonique* ».

On obtient des oscillateurs harmoniques chaque fois que la force de rappel est proportionnelle au déplacement.

IV. Exemples d'oscillateurs mécaniques simple :

1. Relations fondamentales de la dynamique :

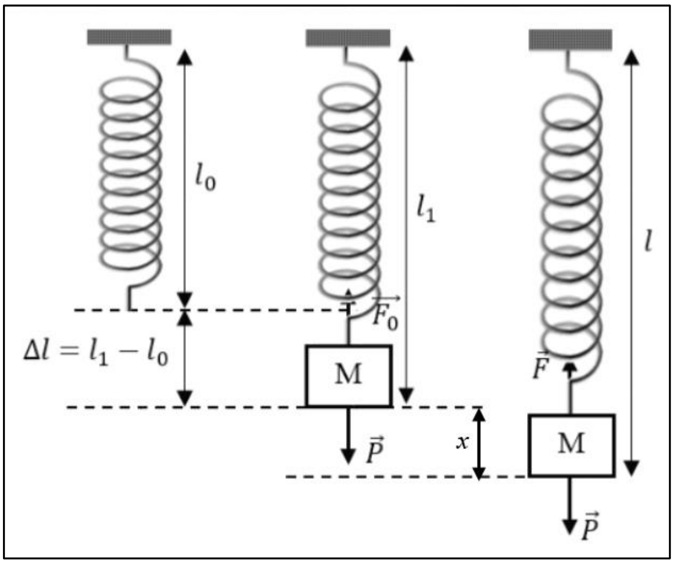
1.1.Pendule à ressort (Mouvement de la translation) :

Δl : Allangement à l'équilibre,

x : Allangement en mouvement,

F_0 : Force de rappel statique,

F : Force de rappel dynamique.



A l'équilibre : $\sum_i \vec{F_i} = \vec{P} - \vec{F_0} = \vec{0} \Rightarrow mg - k(l_1 - l_0) = 0$ sachant que $\Delta l = l_1 - l_0$

En mouvement $\sum_i \vec{F_i} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{P} - \vec{F_0} = m.\vec{a} \Rightarrow P - F = m.a$

$mg - k(l - l_0) = m\ddot{x}$ sachant que $l=l_1+x \Rightarrow mg - k(l_1 - l_0) - kx = m\ddot{x}$ ... (1)

Connaissant qu'à l'équilibre $mg - k(l_1 - l_0) = 0$, ceci implique que l'équation (1) devient :

$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$, enfin : $\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$.

Equation différentielle du mouvement dans cette équation x est le déplacement de la masse m par rapport à la position d'équilibre, et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est appelée pulsation propre du système.

Par la suite : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ est appelée période propre du système.
La solution de l'équation différentielle du mouvement est donnée par : $x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$

Sachant que A et φ sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales qui sont réparties en deux catégories :

1^er^ cas : à $t = 0, x(t = 0) = x_0$ et $\dot{x}(t = 0) = 0$

$x(t = 0) = x_0 = Acos(\varphi) \Rightarrow A = \frac{x_0}{\cos(\varphi)}$

$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega t + \varphi)$

Et à partir des conditions initiales on a : $\dot{x}(t=0)=0$

$$\dot{x}(t=0) = -A\omega_0 \sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ ou \\ \varphi = \pi \end{cases} \text{avec} \begin{cases} A \neq 0 \\ et \\ \omega_0 \neq 0 \end{cases}.$$

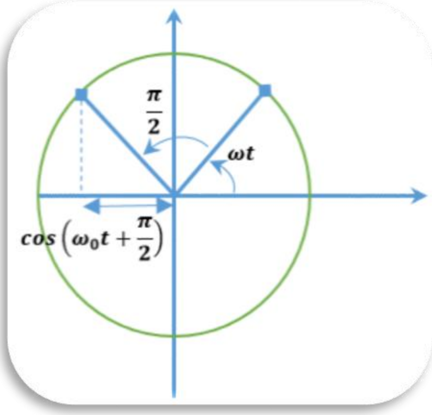
- Si $\varphi = 0 \rightarrow A = \frac{x_0}{\cos(0)} = x_0 \rightarrow x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$
- Si $\varphi = \pi \rightarrow A = \frac{x_0}{\cos(\pi)} = -x_0 \rightarrow x(t) = -x_0\cos(\omega_0 t + \pi) = x_0\cos(\omega_0 t)$

Et on remarque que dans les deux les solutions sont les mêmes et uniques : $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$

2ème cas : à *t=0*, $x(t=0)=0$ et $\dot{x}(t=0)=v_0$

$$x(t=0) = A\cos(\varphi) \rightarrow \cos(\varphi) = 0 \rightarrow \varphi = +\frac{\pi}{2}\ (A \neq 0)$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0 = -A\omega_0\sin(\varphi) \rightarrow A = -\frac{v_0}{\omega_0\sin(\varphi)}$$

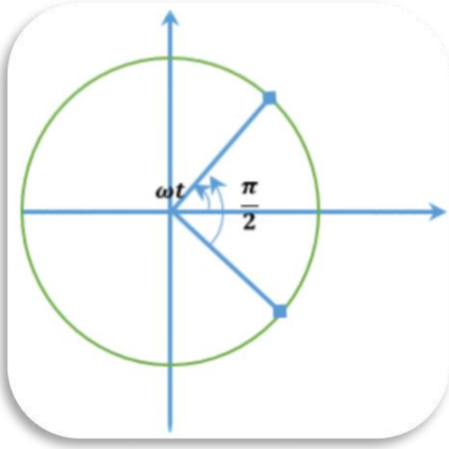


- Si $\varphi = +\frac{\pi}{2} \rightarrow A = -\frac{v_0}{\omega_0\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{v_0}{\omega_0} \rightarrow$

  $x(t) = -\frac{v_0}{\omega_0}\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$

  $\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\omega_0 t) \rightarrow$

  $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$



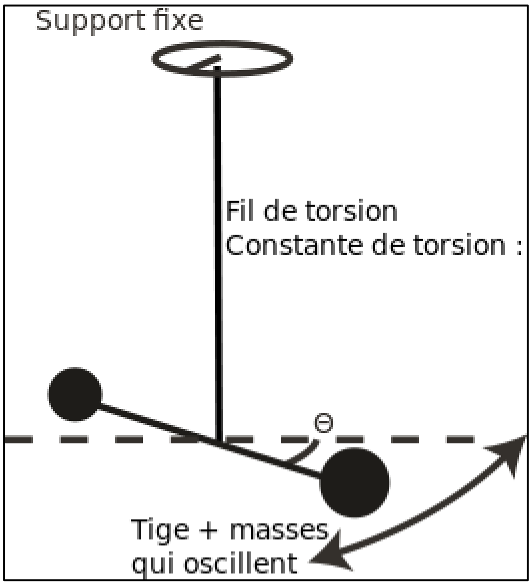
- Si $\varphi = -\frac{\pi}{2} \rightarrow A = -\frac{v_0}{\omega_0\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{v_0}{\omega_0} \rightarrow$

  $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$

  $\rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

1.2. Pendule de torsion (mouvement de rotation) :

Si on écarte le pendule de sa position d'équilibre il est soumis à un couple de rappel (ou couple de torsion) proportionnel à l'angle de déformation $\mathcal{M} = C.\theta$



C : Constante de torsion du fil.

Le principe fondamental de la dynamique (P.F.D) de rotation nous donne :

$$\sum_i \mathcal{M}_{\Delta G}\left(\vec{F_i}\right) = J\ddot{\theta} \rightarrow -C\theta = J\ddot{\theta}$$

L'équation du mouvement du système autour de l'axe OG est donc :

$$J\ddot{\theta} = J\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta$$

Ce qui nous donne :

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J}\theta = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0$$

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}$ pulsation propre du système.

Et $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$ période propre du système.

La solution de cette équation est : $\theta(t) = Acos(\omega t + \varphi)$

A et φ sont des constantes à déterminer par les conditions initiales.

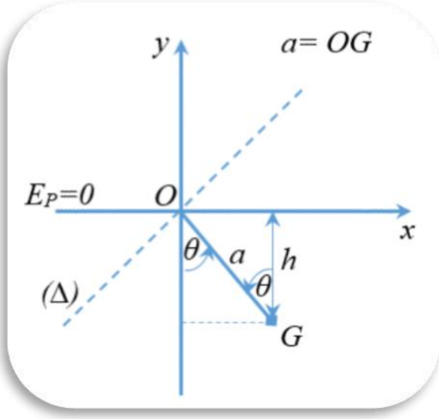
$$\left.\begin{aligned} Sphère: J &= \frac{2}{5}MR^2 \\ Cylindre: J &= \frac{1}{2}MR^2 \end{aligned}\right\} On\ note: MR^2 = I$$

2. Bilan énergétique :

- *Pendule simple (pesant) :*
  - Energie cinétique de rotation : $E_C = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2$
  - Energie potentielle : $E_P = mgh$ <u>avec :</u>

    $h = -\text{a}.\cos(\theta); (h < 0)$ <u>donc :</u>

    $E_P = -m.g.a.\cos(\theta)$



L'énergie totale du système isolé se conserve : $E_T = E_C + E_P$

$$E_T = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 - m.g.a.cos(\theta) = Cste$$

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2} J.2\ddot{\theta}\dot{\theta} + m.g.a.\dot{\theta}.sin(\theta) = 0$$

Comme $\theta \neq 0 \rightarrow J\ddot{\theta} + m.g.a.\sin(\theta) = 0 \ldots (1)$

Dans le cas des petites oscillations on a : $\sin(\theta) \approx \theta$

Et si on remplace $\sin(\theta)$ par θ l'équation (1) devient :

$$J\ddot{\theta} + m.g.a.\theta = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{m.g.a}{J}.\theta = 0$$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0{}^2.\theta = 0$ <u>avec :</u> $\omega_0 = \sqrt{\frac{m.g.a}{J}}$ et $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m.g.a}}$

Chapitre 2 :

Généralités sur les vibrations *« Exercices résolus »*

- **Enoncés des exercices**
- **Solutions des exercices**

Enoncés :

Exercice n°01 :

Calculer l'amplitude A et la phase ϕ pour les sommes suivantes :

a) $3.2 \times \sin(\omega t) + \cos(\omega t)$

b) $3\sin(\omega t) + 4\cos(\omega t)$

c) $11.5 \times \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) - 8\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$

Exercice n°02 :

Déterminer l'amplitude A et la phase ϕ du mouvement vibratoire G résultant de la composition de quatre (4) mouvements vibratoires de même pulsation ω.

$$G = A_0[\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t + 2\varphi) + \cos(\omega t + 3\varphi)]$$

Exercice n°03 :

Décrire la forme des vibrations dont les composantes rectangulaires ont pour expressions :

a) $x = Acos(\omega t), y = Asin(\omega t)$

b) $x = Acos(\omega t), y = -Acos(\omega t)$

c) $x = Acos(\omega t), y = Acos\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right)$

Solutions :

Exercice n°01 :

a) $3.2 \times \sin(\omega t) + \cos(\omega t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$= A\cos(\omega t)\cos(\varphi) - A\sin(\omega t)\sin(\varphi)$$

$$\begin{matrix} (1) \ldots\ldots\ldots \\ (2) \ldots\ldots\ldots \end{matrix} \begin{cases} A\cos(\varphi) = 1 \\ -A\sin(\varphi) = 3.2 \end{cases} \Rightarrow tg(\varphi) = -3.2 \Rightarrow \boldsymbol{\varphi = -72.64}^{\circ}$$

Si on élève au carré l'expression (1) et (2) et après sommation on obtient :

$$A^2 = (3.2)^2 + 1^2$$

$$A = \sqrt{(3.2)^2 + 1} \Rightarrow \boldsymbol{A = 3.35}$$

b) $3\sin(\omega t) + 4\cos(\omega t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$= A\cos(\omega t)\cos(\varphi) - A\sin(\omega t)\sin(\varphi)$$

$$\begin{cases} A\cos(\varphi) = 4 \\ -A\sin(\varphi) = 3 \end{cases} \Rightarrow tg(\varphi) = -\frac{3}{4} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi = -36.86}^{\circ}$$

$$A = \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow \boldsymbol{A = 5}$$

c) $11.5 \times \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) - 8\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = A\cos(\omega t + \varphi)\ \ldots(1)$

On sait que par transformation trigonométrique que :

$\sin(\omega t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$ vu que la fonction « cos » est une fonction paire et donc :

$$11.5 \times \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = 11.5 \times \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 11.5 \times \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

En remplaçant dans l'expression (1) ont obtient :

$$11.5 \times \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) - 8\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow 3.5 \times \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = A\ \cos(\omega t + \varphi)$$

Et par analogie : $\begin{cases} A = 3.5 \\ \varphi = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$

Exercice n°02 :

On a :

$$G = A_0[\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t + 2\varphi) + \cos(\omega t + 3\varphi)] = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$Ae^{j(\omega t+\phi)} = A_0\left[e^{j\omega t} + e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{j(\omega t+2\varphi)} + e^{j(\omega t+3\varphi)}\right]$$

$$Ae^{j\phi} = A_0\left[1 + e^{j(\varphi)} + e^{j(2\varphi)} + e^{j(3\varphi)}\right]$$

$$Ae^{j\phi} = A_0 e^{j\frac{3\varphi}{2}}\left[e^{-j\frac{3\varphi}{2}} + e^{-j\frac{\varphi}{2}} + e^{j\frac{\varphi}{2}} + e^{j\frac{3\varphi}{2}}\right]$$

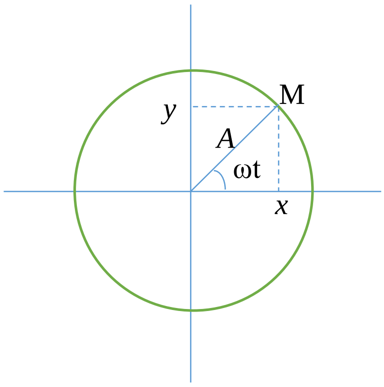
$$Ae^{j\phi} = A_0 e^{j\frac{3\varphi}{2}}\left[2\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) + 2\cos(\frac{\varphi}{2})\right]$$

$$Ae^{j\phi} = 2A_0\left[\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) + \cos(\frac{\varphi}{2})\right]e^{j\frac{3\varphi}{2}}$$

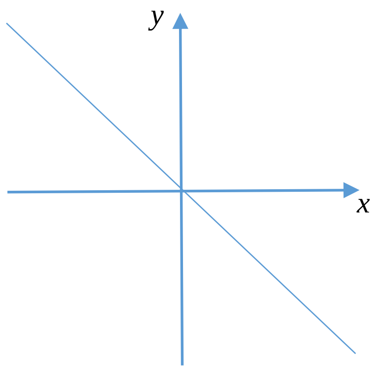
Par analogie on obtient : $\begin{cases} A = 2A_0\left[\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) + \cos(\frac{\varphi}{2})\right] \\ \phi = \frac{3\varphi}{2} \end{cases}$

Exercice n°03 :

a) $\begin{cases} x = A\cos(\omega t) \\ y = A\sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow une\ polarisation\ circulaire$



b) $\begin{cases} x = A\cos(\omega t) \\ y = -A\sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow x = -y \ \Rightarrow une\ polarisation\ linéaire$



c) $\begin{cases} x = Acos(\omega t) \\ y = Acos\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) \end{cases}$

$$y = Acos(\omega t)\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - Asin(\omega t)\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$y = Acos(\omega t)\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) - Asin(\omega t)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$y = -x\frac{\sqrt{2}}{2} - A\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(y + x\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = A^2(1 - \frac{x^2}{A^2}).\frac{1}{2}$$

$$y^2 + \frac{x^2}{2} + x.y.\sqrt{2} = (\frac{A^2 - x^2}{2})$$

$$y^2 + x^2 + x.y.\sqrt{2} = \frac{A^2}{2}$$

$$\frac{y^2}{\frac{1}{2}A^2} + \frac{x^2}{\frac{1}{2}A^2} + \frac{x.y.\sqrt{2}}{\frac{1}{2}A^2} = 1 \quad ......(2)$$

En se basant sur les règles trigonométriques et du développement de la fonction « sin » :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2.x.y}{a.b}\cos(\varphi) = sin^2(\varphi)$ ......(3)

L’expression (2) devient :

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{x^2}{A^2} + \frac{2.x.y}{\sqrt{2}A^2} = \frac{1}{2}$$

Et par analogie avec l’expression (3) :

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}, \cos(\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ et\ sin^2(\varphi) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ et\ donc\ \boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{3\pi}}{\boldsymbol{4}}$$

Chapitre 3 :

Oscillations libres des systèmes à un seul degré de liberté

- **Enoncés des exercices**
- **Exercices supplémentaires**
- **Solutions des exercices**

Enoncés :

Exercice n°01 :

Pour le système mécanique de la figure ci-contre, on considère une barre de masse négligeable de longueur 2L. Sur ses extrémités sont fixés deux masses m_1 et m_2 et des ressorts k_1, k_2 et k_3. La position d'équilibre correspond à θ(0)=0.

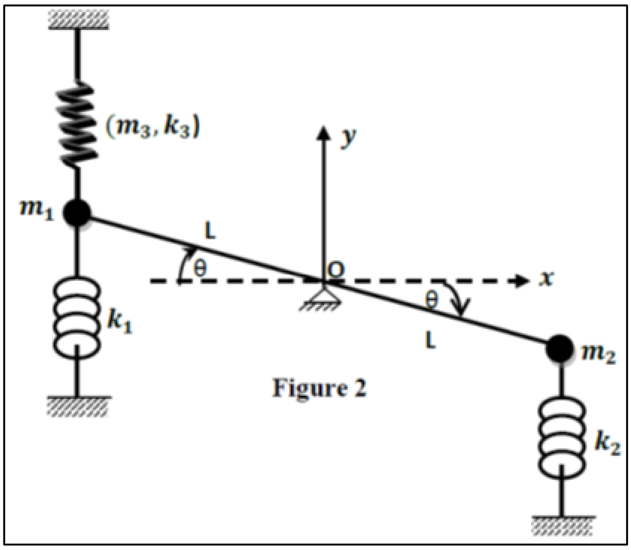
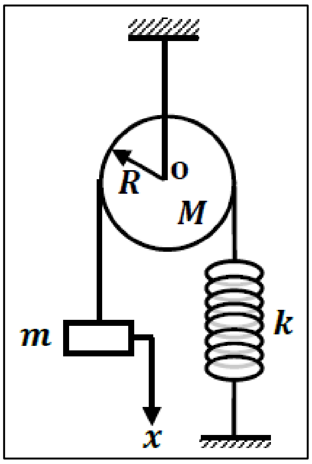


Figure 2

1- Etablir l'équation différentielle du mouvement libre pour des oscillations de faibles amplitudes.
2- Trouver la solution θ(t).

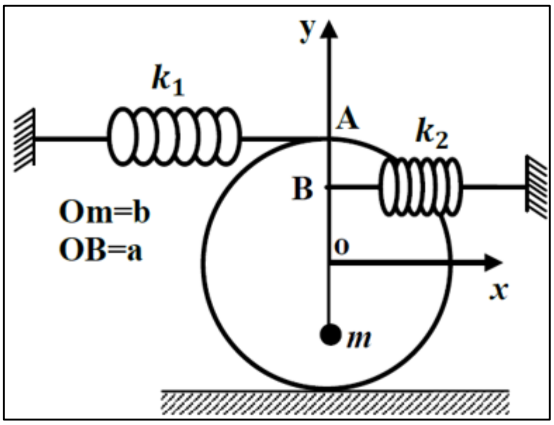
Exercice n°02 :

Dans la figure ci-contre, M et R représentent respectivement la masse et le rayon d'une poulie homogène de moment d'inertie $J_{/O} = \frac{1}{2}\boldsymbol{MR^2}$. A la poulie sont fixés un ressort de raideur k et un corps de masse m par un fil non élastique de masse négligeable. On néglige aussi la masse du ressort et le frottement autour de l'axe de la poulie. Si x est le déplacement vertical de la masse m. Trouvez l'équation du mouvement et la pulsation propre du système.



Exercice n°03 :

Dans la figure ci-dessous, un disque circulaire homogène, de masse M, de rayon R, peut osciller sur un plan horizontal en roulant sans glisser autour de son axe O. Deux resorts k_1 et k_2 sont fixés sur le disque aux points A et B tels que : OA=R et OB=a. une masse m est fixée sur le disque à une distance b du centre O. la position



d'équilibre du système est telle que les 2 points A, B et la masse m se trouvent simultanément sur l'axe vertical OY.

1. Représenter le système en étant de mouvement.
2. Calculer la fonction de Lagrange L.
3. Déterminer l'équation du mouvement et la pulsation propre pour des oscillations de faibles amplitudes.
4. Déterminer la solution θ(t), sachant que $\theta(0)=\theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

<u>Exercice n°04 :</u>

Ecrire l'équation du mouvement pour chacun des systèmes illustrés ci-dessous :

Figure 1 : Barre de longueur ***l*** sans masse portant une masse ***m*** et oscillant autour de l'axe O. à l'équilibre la barre est horizontale et ***θ=0***.

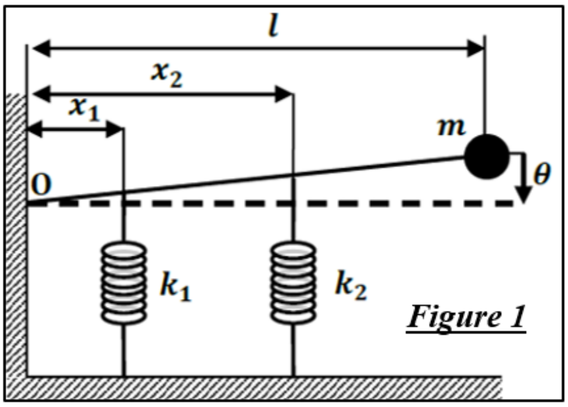


Figure 2 : Cylindre de masse m autour d'un axe fixe rappelé par un ressort de contante de raideur ***k***. le fil qui relie les masse ***m*** et ***μ*** s'enroule sans glisser sur le pourtour du cylindre.

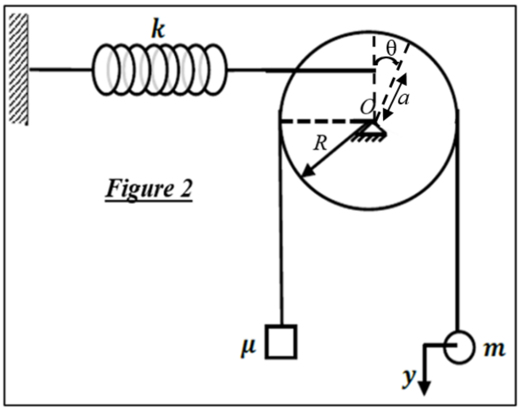


Figure 3 : Fléau portant des masses ***m*** et ***M*** oscillant autour d'un axe fixe O. A l'équilibre la barre est horizontale et $\varphi=0$.

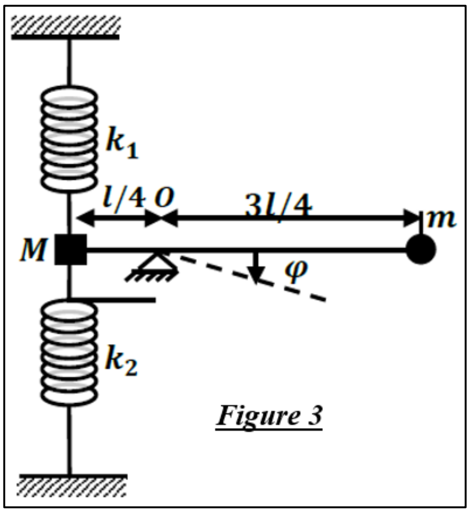


Figure 3

Figure 4 : Bras de longueur ***l*** solidaire du cylindre de masse ***M*** qui roule sans glisser. A l'équilibre le bras est verticale et $\varphi=0$.

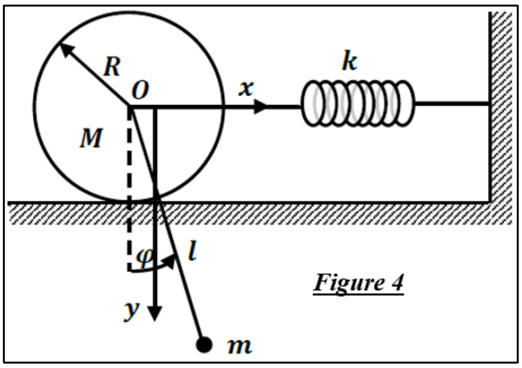
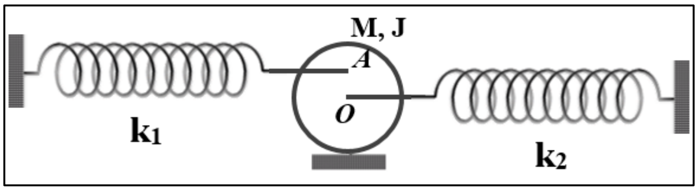


Figure 4

Exercice n°05 :

Déterminer l'équation du mouvement du système mécanique suivant : la poulie a un rayon *R* et *OA=R/2*



Exercices supplémentaires :

Exercice n°06 :

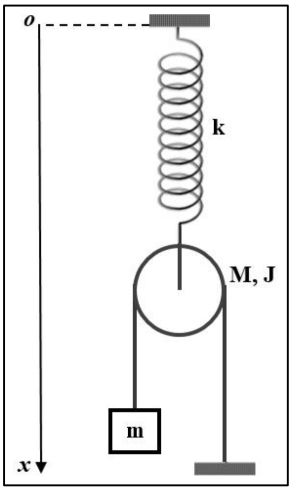
Soit le système mécanique ci-contre :

- Le fil est inextensible, sans masse et de longueur L ;
- x_1 et x_2 étant les positions de la masse M et m respectivement.

1- Montrer de $x_2=2x_1$,

2- Déterminer l'équation du mouvement :

- Par la loi fondamentale de la dynamique
- Par la conservation de l'énergie totale,
- Par le biais du Lagrangien.

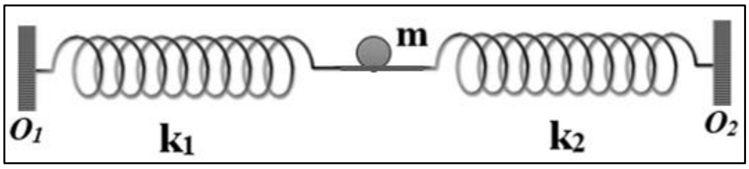


Exercice n°07 :

Trouver l'équation du mouvement vibratoire du système mécanique représenté par la figure 1, en utilisant les deux méthodes suivantes :

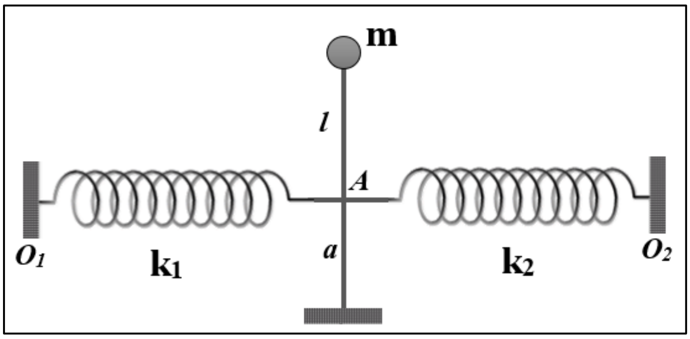
a- La relation fondamentale de la dynamique,

b- Les équations de Lagrange.



Exercice n°08 :

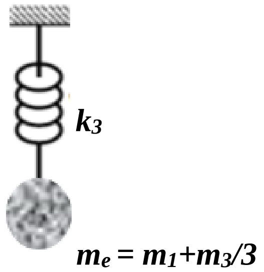
Déterminer l'équation du mouvement du système suivant : O_1 et O_2 sont symétriques par rapport à A. Quelle est la condition avoir l'équilibre stable.

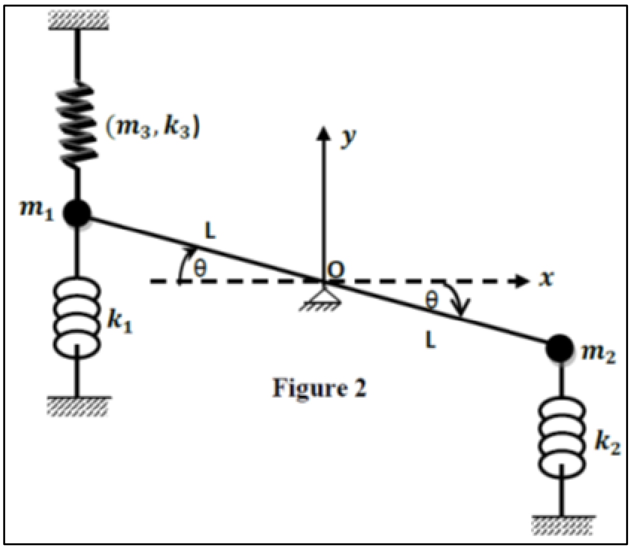


Solutions :

Exercice n°01 :

On peut remplacer le ressort ***(m_3, k_3)*** par un ressort ***k_3*** avec une masse ***$m_3/3$*** à sa fin donc on aura :





1. Ecriture de l'équation différentielle du mouvement :

- Les coordonnées :

$$m_e\begin{cases}-lcos(\theta)\\+lsin(\theta)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}l\dot{\theta}sin(\theta)\\l\dot{\theta}cos(\theta)\end{cases}$$

$$m_2\begin{cases}+lcos(\theta)\\-lsin(\theta)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-l\dot{\theta}sin(\theta)\\-l\dot{\theta}cos(\theta)\end{cases}$$

- Energie cinétique : $T = T_{m_e} + T_{m_2}$

$T = \frac{1}{2}\left(\underbrace{m_e + m_2}_{m}\right)l^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ Sachant que $m = m_e + m_2$

- Energie potentielle : $U = U_{k_1} + U_{k_2} + U_{k_3}$

$$U = \frac{1}{2}k_1(lsin(\theta))^2 + \frac{1}{2}k_2(lsin(\theta))^2 + \frac{1}{2}k_3(lsin(\theta))^2$$

$U = \frac{1}{2}k(lsin(\theta))^2$ où $k = k_1+k_2+k_3$

- Le Lagrangien : $L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(lsin(\theta))^2$
- Formalise de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -k\big(lcos(\theta)\big)\big(lsin(\theta)\big) = kl^2\theta$, Car dans le cas des petites oscillations : $\begin{cases}\sin(\theta) \approx \theta \\ \cos(\theta) \approx 1\end{cases}$

Donc l'équation différentielle s'écrit :

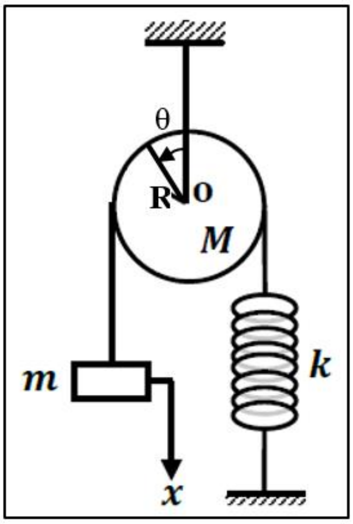
$$ml^2\ddot{\theta} + kl^2\theta = 0 \text{ Ou } m\ddot{\theta} + k\theta = 0$$

2. Ecriture de la solution *θ(t)* :

$\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0$ Système libre non amorti donc la solution est de la forme :

$\theta(t) = Asin(\omega_0 t + \varphi)$ où ${\omega_0}^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2+k_3}{m_1+\frac{m_3}{3}+m_2}}$

Exercice n°02 :



Une poulie homogène $J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2$

Ecriture de l'équation du mouvement et la pulsation propre ω_0 du système :

- Energie cinétique : $T = T_M + T_m$

$T = \frac{1}{2}J_{/O}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ Avec : $x=R\theta$

$T = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(\frac{M}{2} + m)R^2\dot{\theta}^2$

$T = \frac{1}{2}(\frac{M}{2} + m)R^2\dot{\theta}^2$

- Energie potentielle : $U = \frac{1}{2}k(R\theta)^2$
- Fonction de Lagrange : $L = T - U$

$L = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + m\right)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(R\theta)^2$

- Formalisme Lagrangien :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{M}{2} + m\right) R^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{M}{2} + m\right) R^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -k(R)(R\theta)$$

Donc : $\left(\frac{M}{2} + m\right) R^2 \ddot{\theta} + kR^2\theta = 0 \Rightarrow \left(\frac{M}{2} + m\right) \ddot{\theta} + k\dot{\theta} = 0$

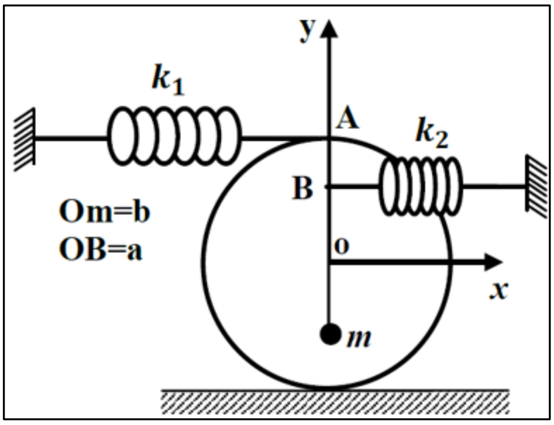
- Pulsation propre ω_0 :

$\ddot{\theta} + \frac{2k}{(M+2m)}\dot{\theta} = 0 \Rightarrow {\omega_0}^2 = \frac{2k}{(M+2m)}$ Et donc : $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{(M+2m)}}$

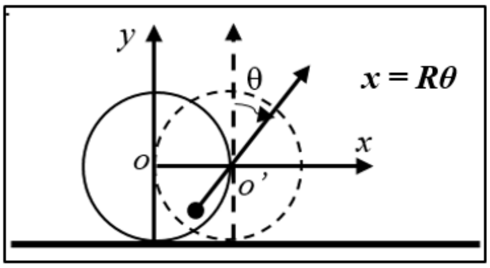
Exercice n°03 :

$$J_{/O} = \frac{1}{2} MR^2$$

Le disque roule sans glissement sur le plan



1. Représentation du système en mouvement :



2. Calcul de la fonction de Lagrange $L = T\text{-}U$:

- Coordonnées :

Masse M : $\begin{cases} x = Rsin\theta \\ 0 \end{cases}$

Masse m : $\begin{cases} x - bsin\theta \\ Rcos\theta - bcos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Rsin\theta - bsin\theta \\ Rcos\theta - bcos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R\dot{\theta}cos\theta - b\dot{\theta}cos\theta \\ -R\dot{\theta}sin\theta - b\dot{\theta}sin\theta \end{cases}$

- Energie cinétique :

$$T = T_M + T_m$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_{/O}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m[(R-b)^2\dot{\theta}^2]$$

$$T = (\frac{3}{4}MR^2 + \frac{1}{2}m(R-b)^2)\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}MR^2 + m(R-b)^2)\dot{\theta}^2$$

- Energie potentielle :

$$U = U_m + U_{k_1} + U_{k_2}$$

$$U = -mgbcos\theta + \frac{1}{2}k_1(2R\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(R\theta + a\theta)^2$$

- Fonction de Lagrange :

$$L = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}MR^2 + m(R-b)^2)\dot{\theta}^2 + mgbcos\theta - \frac{1}{2}k_1(2R\theta)^2 - \frac{1}{2}k_2(R\theta + a\theta)^2$$

3. Détermination de l'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{3}{2}MR^2 + m(R-b)^2\right)\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{3}{2}MR^2 + m(R-b)^2\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgbsin\theta - k_1(2R)(2R\theta) - k_2(R+a)^2\theta$$

Dans le cas des petites oscillations : *sin(θ)=θ*

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}MR^2 + m(R-b)^2\right)\ddot{\theta} + (mgb + 4k_1R^2 + k_2(R+a)^2)\theta = 0$$

4. Détermination de la solution $\theta(t)$:

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{mgb + 4k_1R^2 + k_2(R+a)^2}{\frac{3}{2}MR^2 + m(R-b)^2}}_{\omega_0{}^2}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mgb + 4k_1R^2 + k_2(R+a)^2}{\frac{3}{2}MR^2 + m(R-b)^2}}$$

Donc : $\ddot{\theta} + \omega_0{}^2\theta = 0$ ceci est une équation d'un système libre non amorti, donc la solution est du type : $\theta(t) = Asin(\omega_0 t + \varphi)$.

Sachant que : $\theta(0)=\theta_0$ et $\dot{\theta}(0)=0$

$$\dot{\theta}(t)=A\omega_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

$$\theta(0)=Asin\varphi=\theta_0$$

$$\dot{\theta}(0)=A\omega_0\cos\varphi=0\Rightarrow cos\varphi=0\Rightarrow\begin{cases}\varphi=\dfrac{\pi}{2}\\ A=\theta_0\end{cases}$$

Finalement : $\theta(t)=\theta_0 sin\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{2}\right)$.

<u>Exercice n°04 :</u> On traite les systèmes aux petites oscillations

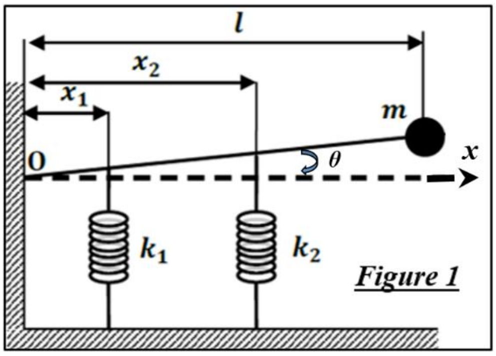


Figure 1

1- ***Figure 1*** **:** Barre de longueur ***l*** sans masse portant une masse ***m*** et oscillant autour de l'axe O. à l'équilibre la barre est horizontale et ***θ=0***.

$$m\begin{cases}+lcos(\theta)\\+lsin(\theta)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-l\dot{\theta}sin(\theta)\\+l\dot{\theta}cos(\theta)\end{cases}$$

- Energie cinétique : $T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$
- Energie potentielle : $U=U_{k_1}+U_{k_2}$

$$U=\frac{1}{2}k_1(x_1\sin(\theta))^2+\frac{1}{2}k_2(x_2\sin(\theta))^2$$

$$U=\frac{1}{2}(k_1{x_1}^2+k_2{x_2}^2)sin^2(\theta)$$

- Fonction de Lagrange L=T-U

$$L=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}(k_1{x_1}^2+k_2{x_2}^2)sin^2(\theta)$$

- Formalisme de Lagrange :

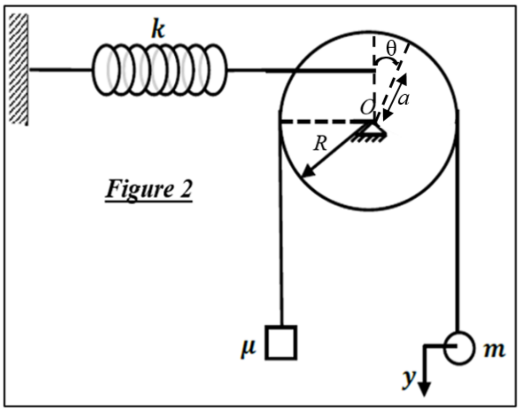
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right)=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta}\ \Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -(k_1 {x_1}^2 + k_2 {x_2}^2)\underbrace{\cos(\theta)}_{1}\underbrace{\sin(\theta)}_{\theta}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{ml^2\ddot{\theta} + (k_1 {x_1}^2 + k_2 {x_2}^2)\theta = 0}$$

2- ***Figure 2 :*** Cylindre de masse m autour d'un axe fixe rappelé par un ressort de constante de raideur $\boldsymbol{k}$. le fil qui relie les masse $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{\mu}$ s'enroule sans glisser sur le pourtour du cylindre.



- Energie cinétique : $T = T_M + T_m + T_\mu$

$$y = R\theta \;\Rightarrow\; \dot{y} = R\dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}J_{/O}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\mu(R\dot{\theta})^2$$

$$T = \frac{1}{2}(J_{/O} + (m + \mu)R^2)\dot{\theta}^2$$

- Energie potentielle : $U = \frac{1}{2}k(a\sin(\theta))^2$
- Fonction de Lagrange : L=T-U

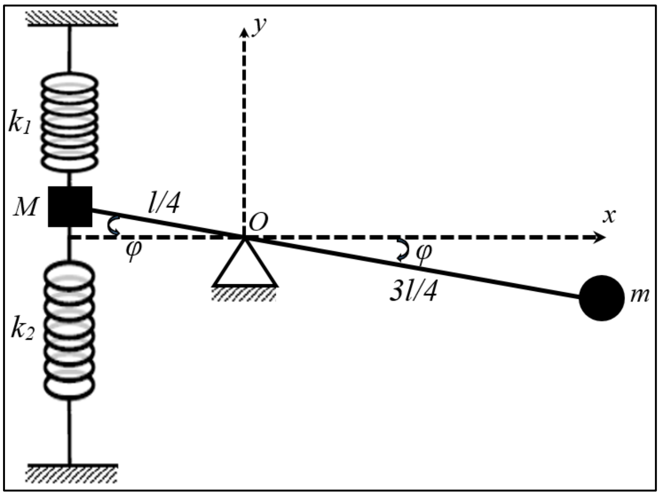
$$L = \frac{1}{2}\left(J_{/O} + (m + \mu)R^2\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(a\sin(\theta))^2$$

- Formalisme de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(J_{/O} + (m + \mu)R^2\right)\dot{\theta} \;\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = (J_{/O} + (m + \mu)R^{\mathbf{2}})\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -k(a\;\underbrace{cos\theta}_{1})(a\;\underbrace{sin\theta}_{\theta})$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\left(J_{/O} + (m + \mu)R^2\right)\ddot{\theta} + ka^2\theta = 0}$$



3- Figure 3 : Fléau portant des masses ***m*** et ***M*** oscillant autour d'un axe fixe O. A l'équilibre la barre est horizontale et ***φ=0***.

- Coordonnées et composantes de vitesses :

$$M\begin{cases}-\frac{l}{4}cos\varphi\\+\frac{l}{4}sin\varphi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{l}{4}\dot{\varphi}sin\varphi\\\frac{l}{4}\dot{\varphi}cos\varphi\end{cases}$$

$$m\begin{cases}\frac{3l}{4}cos\varphi\\-\frac{3l}{4}sin\varphi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{3l}{4}\dot{\varphi}sin\varphi\\-\frac{3l}{4}\dot{\varphi}cos\varphi\end{cases}$$

On pose : $\frac{l}{4}=a$ et $\frac{3l}{4}=b$

- Energie cinétique : $T=T_M+T_m$

$$T=\frac{1}{2}Ma^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}mb^2\dot{\varphi}^2\Rightarrow T=\frac{1}{2}(Ma^2+mb^2)\dot{\varphi}^2$$

- Energie potentielle : $U=U_{k_1}+U_{k_2}$

$$U=\frac{1}{2}k_1(asin\varphi)^2+\frac{1}{2}k_2(asin\varphi)^2$$

$U=\frac{1}{2}k(asin\varphi)^2$, comme les deux ressorts sont en séries donc : $k=k_1+k_2$.

- Fonction de Lagrange : $L=T-U$

$$L=\frac{1}{2}(Ma^2+mb^2)\dot{\varphi}^2-\frac{1}{2}k(asin\varphi)^2$$

- Formalisme de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi}\right)=0$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=(Ma^2+mb^2)\dot{\varphi}\ \Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)=(Ma^2+mb^2)\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=-k(a\underbrace{cos\varphi}_{1})(a\underbrace{sin\varphi}_{\varphi})$$

$\Rightarrow (Ma^2 + mb^2)\ddot{\varphi} + ka^2\varphi = 0$

$\Rightarrow \left(M\frac{l^2}{16} + \frac{9ml^2}{16}\right)\ddot{\varphi} + k\frac{l^2}{16}\varphi = 0$

$\Rightarrow \boldsymbol{(M + 9m)\ddot{\varphi} + k\varphi = 0}$

4- ***Figure 4 :*** Bras de longueur ***l*** solidaire du cylindre de masse ***M*** qui roule sans glisser. A l'équilibre le bras est verticale et ***φ=0***.

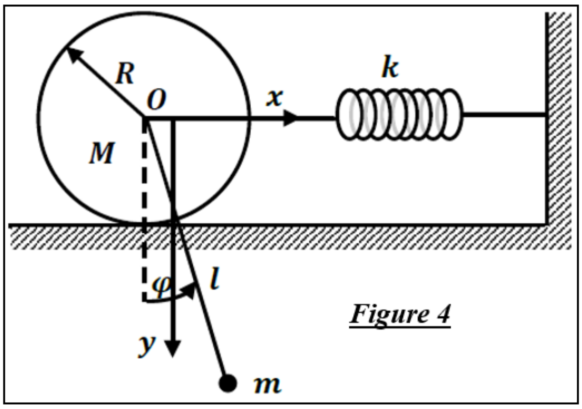


Figure 4

- Coordonnées et composantes de vitesse :

$M = \begin{cases} -R\varphi \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -R\dot{\varphi} \\ 0 \end{cases}$

$m = \begin{cases} -R\varphi + l sin\varphi \\ 0 + l cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -R\dot{\varphi} + l\dot{\varphi}cos\varphi \\ -l\dot{\varphi}sin\varphi \end{cases}$

Le moment d'inertie du disque : $J_{/o} = \frac{1}{2}MR^2$

- Energie cinétique : $T = T_M + T_m$

$T_M = \frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J_{/o}\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}MR^2\dot{\varphi}^2$

$T_m = \frac{1}{2}m(l-R)^2\dot{\varphi}^2$

$T = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}MR^2 + m(l-R)^2)\dot{\varphi}^2$

- Energie potentielle : $U = U_m + U_k$

$U = -mglcos\varphi + \frac{1}{2}kR^2\varphi^2$

- Fonction de Lagrange : $L = T - U$

$L = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2 + m(l-R)^2\right)\dot{\varphi}^2 + mglcos\varphi - \frac{1}{2}kR^2\varphi^2$

- Formalisme de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial\varphi}\right) = 0$

$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = [\frac{3}{2}MR^2 + m(l-R)^2]\dot{\varphi}$

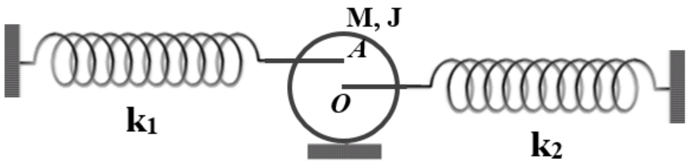
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = [\frac{3}{2}MR^2 + m(l-R)^2]\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\,\underbrace{sin\varphi}_{\varphi} - kR^2\varphi$$

Donc l'équation différentielle s'écrit :

$$\left[\frac{3}{2}\boldsymbol{MR^2} + \boldsymbol{m(l-R)^2}\right]\boldsymbol{\ddot{\varphi}} + (\boldsymbol{mgl} + \boldsymbol{kR^2})\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{0}$$

Exercice n°05 :



$$OA = \frac{R}{2}; x = R\theta$$

- Energie cinétique : $E_C = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{J}{R^2}\dot{x}^2$
- Energie potentielle : $E_P = \frac{1}{2}k_1(x + \frac{R}{2}\theta + \Delta l_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(x - \Delta l_2)^2$
- Fonction de Lagrange : $L = \left(\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}\frac{J}{R^2}\right)\dot{x}^2 - [\frac{1}{2}k_1\left(\frac{3}{2}x + \Delta l_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_2(x - \Delta l_2)^2]$
- Formalisme Lagrangien : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \left(M + \frac{J}{R^2}\right)\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \left(M + \frac{J}{R^2}\right)\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -[k_1\left(\frac{3}{2}x + \Delta l_1\right)\frac{3}{2} + k_2(x - \Delta l_2)]$$

$$\left(M + \frac{J}{R^2}\right)\ddot{x} + \left[k_1\left(\frac{3}{2}x + \Delta l_1\right)\frac{3}{2} + k_2(x - \Delta l_2)\right] = 0$$

A l'équilibre : $\left.\frac{\partial E_P}{\partial q_i}\right|_{q_i=q_0} = 0$, On dit d'une position q_0 est stable si cette dernière est un minimum de E_P , ceci veux dire que $q_0=0$.

Donc : $\left.\frac{\partial E_P}{\partial q_i}\right|_{q_i=0} = 0.$

$$\left.\frac{\partial E_P}{\partial x}\right|_{x=0} = k_1(\Delta l_1)\frac{3}{2} + k_2(-\Delta l_2) = 0$$

$$\left(M+\frac{J}{R^2}\right)\ddot{x}+\left(\frac{9}{4}k_1+k_2\right)x=0$$

L'équation différentielle de mouvement est de la forme :

$$\boldsymbol{\ddot{x}+\underbrace{\frac{\left(\frac{9}{4}k_1+k_2\right)}{\left(M+\frac{J}{R^2}\right)}}_{\omega_0{}^2}x=0}$$

$\omega_0{}^2=\frac{\left(\frac{9}{4}k_1+k_2\right)}{\left(M+\frac{J}{R^2}\right)} \Longrightarrow \boldsymbol{\omega_0}=\sqrt{\frac{\left(\frac{9}{4}\boldsymbol{k_1}+\boldsymbol{k_2}\right)}{\left(\boldsymbol{M}+\frac{\boldsymbol{J}}{\boldsymbol{R^2}}\right)}}$: Pulsation propre du système.

Chapitre 4 :
Oscillations amorties des systèmes à un seul degré de liberté

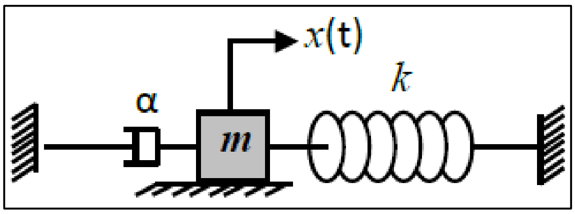
- **Enoncés des exercices**
- **Exercices supplémentaires**
- **Solutions des exercices**

Enoncés :

Exercice n°01 :

Supposons que le système suivant effectue des oscillations de faibles amplitudes.

- Déterminer l'équation différentielle du mouvement en fonction de δ et ω_0 et déduire ω_a.
- Pour $\delta < \omega_0$, trouver la solution de l'équation différentielle.

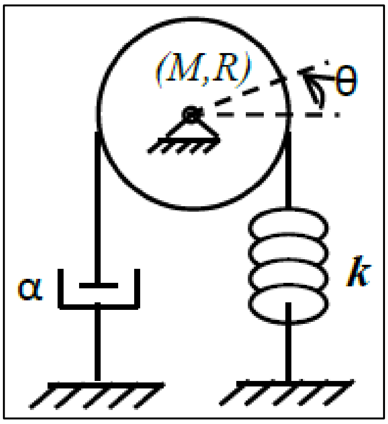


Exercice n°02 :

Supposons que le système suivant effectue des oscillations de faibles amplitudes.

- Déterminer l'équation différentielle du mouvement en fonction de δ et ω_0.
- Pour $\delta < \omega_0$, trouver la solution générale de l'équation différentielle.

$(J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2)$.

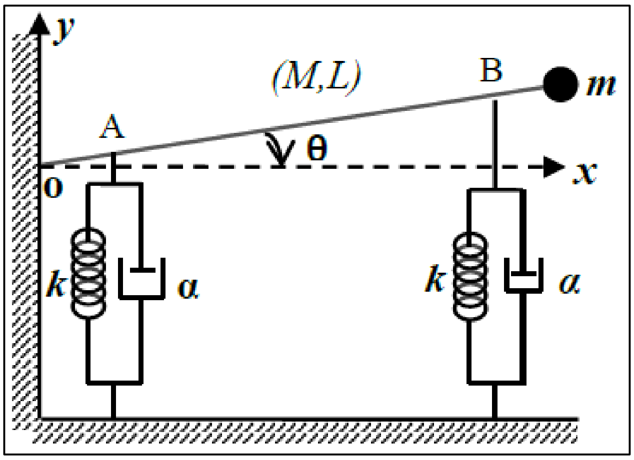


Exercice n°03 :

Soit le système mécanique vibratoire représenté sur la figure ci-contre.

Si G est le centre de gravité de la barre de masse M et de longueur L.

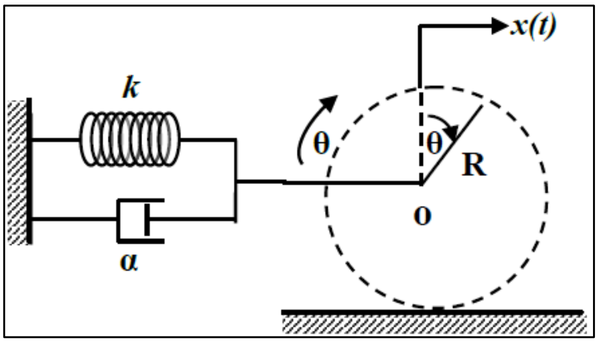
- Trouver l'équation différentielle du mouvement. Déduire ω_0 et δ.
- Ecrire l'équation du mouvement dans le cas $\delta < \omega_0$.



$(J_{/G} = \frac{1}{12}ML^2, OA = L_1, OB = L_2)$.

Exercice n°04 :

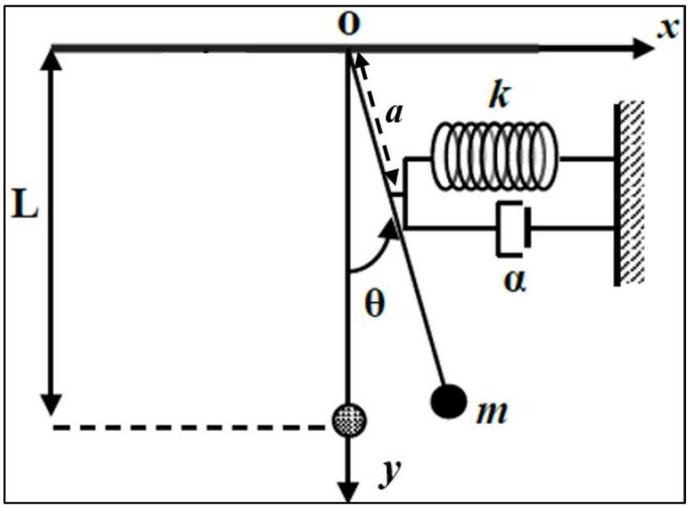
Soit le système mécanique composé d'un disque (**M,R**) qui peut rouler sans glisser sur un plan horizontal, d'un ressort k et d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α.



- Déterminer l'équation différentielle du mouvement en fonction de δ et ω_0 et déduire ω_0.
- Trouver la solution de l'équation du mouvement quand $\delta=\omega_0$, ($J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2$).

Exercice n°05 :

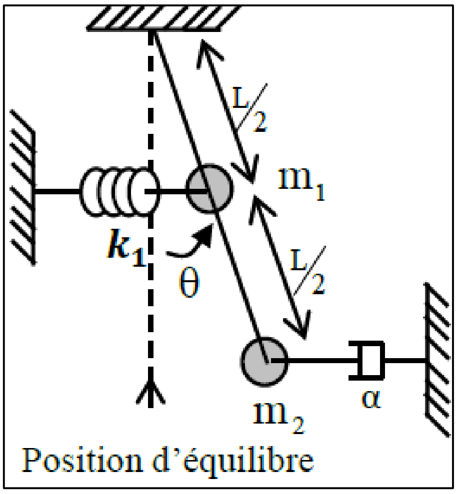
Soit une masse m fixée à l'extrémité d'une tige de masse négligeable et de longueur L. la tige effectue des oscillations de faibles amplitudes autour d'un axe fixe passant par le point O et perpendiculaire au plan du mouvement.



- Etablir l'équation différentielle du mouvement.
- Déterminer la pulsation propre du système.
- Trouver l'équation du mouvement.
- Ecrire la solution de l'équation quand $\lambda < \omega_0$.

Exercice n°06 :

Le système est constitué de 2 masses m_1 et m_2, d'une tige de masse négligeable et de longueur L et d'un ressort k_1 et d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α (voir la figure).

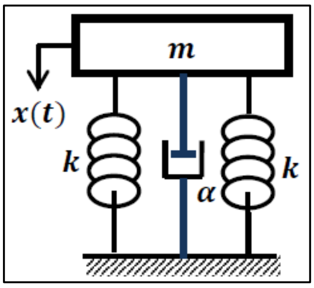


- Ecrire l'équation différentielle du mouvement, sachant que le système effectue des oscillations de faible amplitude.
- Déterminer la pulsation propre du système.
- Trouver l'équation du mouvement, sachant que $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$. On donne : $\frac{m_1}{4} = m_2 = m$ et $\frac{k_1}{4} = k$

Exercices supplémentaires :

Exercice n°07 :

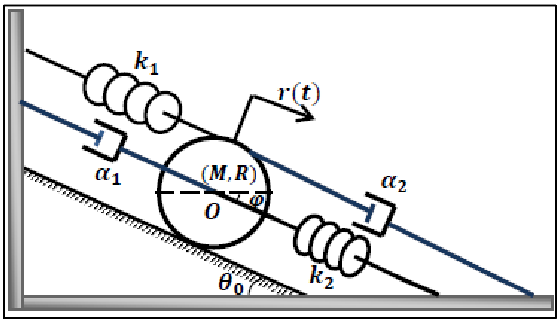
Dans la figure ci-contre, on a ***m*= 4.5 Kg** , ***k*=3500 N/*m*** , **α=30 Kg/s**



1- Est-ce que le système admet un système équivalent ?
2- Ecrire l'équation différentielle du mouvement.
3- Quel est le type de mouvement ?
4- Donner l'équation du mouvement (la solution de l'équation différentielle), sachant que le système effectue des oscillations de faible amplitude.

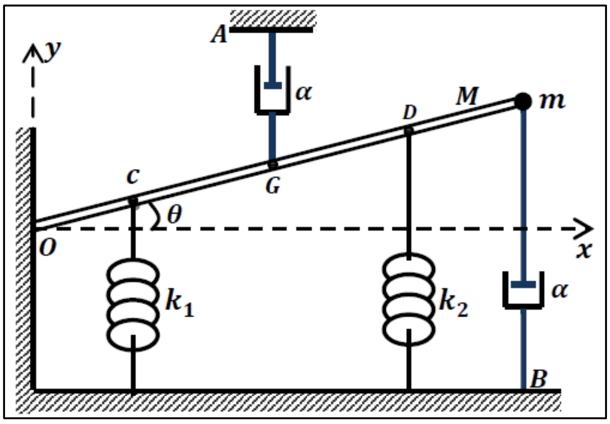
Exercice n°08 :

Dans le système de la figure ci-contre, le disque homogène (M, R) roule sans glissement sur un plan incliné, en effectuant un mouvement oscillatoire ***r(t)***.



1- Quel est le nombre de degrés de liberté ?
2- Quelle est la nature du mouvement ?
3- Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
4- Donner l'équation du mouvement ***r(t)*** dans le cas des faibles oscillations. Déduire la pulsation propre ω_0 et le facteur d'amortissement δ. On donne : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ et $k_1 = k_2 = k$, $J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2$

Exercice n°09 :



Soit le système mécanique vibratoire de la figure ci-contre.

Si le point G est le centre de gravité de la barre de masse $\boldsymbol{M}$ et de longueur $\boldsymbol{L}$, et sachant que $\overline{\boldsymbol{OC}} = \boldsymbol{L_1}$ et $\overline{\boldsymbol{OD}} = \boldsymbol{L_2}$.

1- Trouver l'équation différentielle du mouvement.

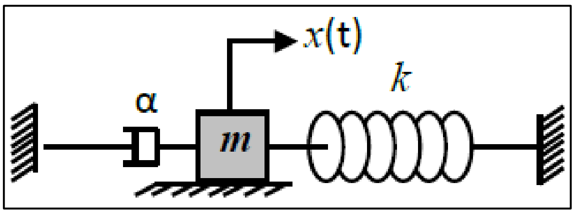
   Déduire la pulsation propre $\boldsymbol{\omega_0}$ et le facteur d'amortissement $\boldsymbol{\delta}$.

2- Ecrire l'équation du mouvement dans le cas $\boldsymbol{\delta} < \boldsymbol{\omega_0}$ en supposant que $\boldsymbol{\theta(0) = \theta_0}$ et $\dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{(0) = 0}$.

   On donne le moment d'inertie de la barre par rapport à son centre de gravité **G** : $J_{/G} = \frac{1}{12}ML^2$.

Solutions :

Exercice n°01 :



- Détermination de l'équation différentielle en fonction de δ et ω_0 :
  - Energie cinétique : $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$
  - Energie potentielle : $U = \frac{1}{2}kx^2$
  - Fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$
  - Fonction de Lagrange : $L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$
  - Formalisme de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx, \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x}$$

Donc : $m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x}$

L'équation différentielle s'écrit : $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$

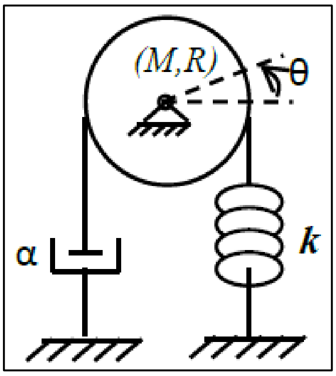
$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

Tel que : $2\delta = \frac{\alpha}{m}$ et ${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$

- Déduction de ω_a : $\omega_a = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$
- Ecriture de la solution de l'équation différentielle pour $\delta<\omega_0$:

$$x(t) = Ce^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi)$$

Exercice n°02 :



$$J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2$$

- Détermination de l'équation différentielle en fonction de δ et ω_0 :
  - Energie cinétique : $T = \frac{1}{2}J_{/O}\dot{\theta}^2$
  - Energie potentielle : $U = \frac{1}{2}k(R\theta)^2$
  - Fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha(R\dot{\theta})^2$
  - Fonction de Lagrange : $L = T - U = \frac{1}{2}J_{/O}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(R\theta)^2$
  - Formalisme de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J_{/O}\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = J_{/O}\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -kR^2\theta, \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta}$$

$$J_{/O}\ddot{\theta} + kR^2\theta = -\alpha R^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + kR^2\theta = 0$$

$M\ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + 2k\theta = 0$ ou $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0$ tel que : $\begin{cases} \delta = \frac{\alpha}{M} \\ {\omega_0}^2 = \frac{2k}{M} \end{cases}$

- Solution de l'équation différentielle lorsque $\delta<\omega_0$:

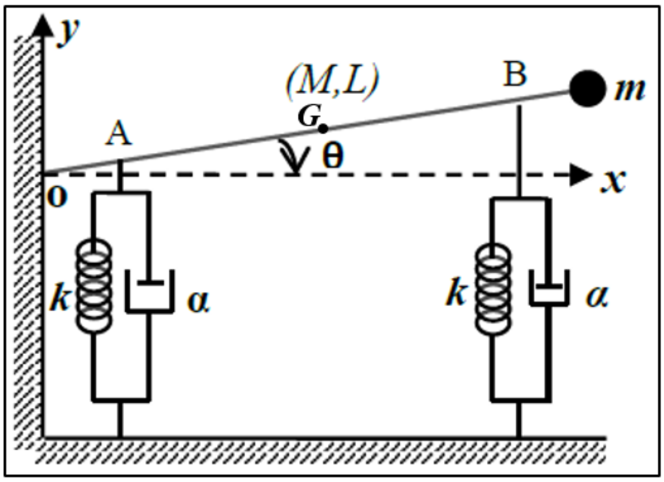
$$x(t) = Ce^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi), \ \omega_a = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{2k}{M} - \frac{\alpha^2}{M^2}}$$

Exercice n°03 :

$$J_{/G} = \frac{1}{12}ML^2$$

$$OA = L_1$$

$$OB = L_2$$



1. **Ecriture de l'équation différentielle du mouvement :**

- Coordonnées et composantes de vitesse :

$$M \begin{cases} Lcos\theta \\ Lsin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -L\dot{\theta}sin\theta \\ +L\dot{\theta}cos\theta \end{cases}$$

- Energie cinétique : $T = T_M + T_m$

$T = \frac{1}{2}J_{/o}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$, sachant que : $J_{/o} = J_{/G} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$

$$J_{/o} = \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4} = \frac{1}{3}ML^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{3} + m\right)L^2\dot{\theta}^2$$

- Energie potentille : $U = U_{k_1} + U_{k_2}$

$$U = \frac{1}{2}k(L_1sin\theta)^2 + \frac{1}{2}k(L_2sin\theta)^2$$

- Fonction de dissipation : $D = D_{\alpha_A} + D_{\alpha_B}$

$$D = \frac{1}{2}\alpha(L_1\dot{\theta}cos\theta)^2 + \frac{1}{2}\alpha(L_2\dot{\theta}cos\theta)^2$$

- La fonction de Lagrange : $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{3} + m\right)L^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(L_1sin\theta)^2 - \frac{1}{2}k(L_2sin\theta)^2$$

- Le formalisme de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{M}{3} + m\right) L^2 \dot{\theta} \ \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{M}{3} + m\right) L^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -k(L_1 cos\theta)(L_1 sin\theta) - k(L_2 cos\theta)(L_2 sin\theta)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha(L_1 cos\theta)\left(L_1 \dot{\theta} cos\theta\right) + \alpha(L_2 cos\theta)(L_2 \dot{\theta} cos\theta)$$

L'équation différentielle s'écrit comme suit pour des oscillations de faibles amplitude ($sin\theta \approx \theta, cos\theta \approx 1$).

$$\left(\frac{M}{3} + m\right) L^2 \ddot{\theta} + \left({L_1}^2 + {L_2}^2\right) k\theta = -\alpha\left({L_1}^2 + {L_2}^2\right)\dot{\theta}$$

$$\left(\frac{M}{3} + m\right) L^2 \ddot{\theta} + \alpha\left({L_1}^2 + {L_2}^2\right)\dot{\theta} + k\left({L_1}^2 + {L_2}^2\right)\theta = 0$$

- Déduction de ω_0 et δ :

On peut écrire l'équation différentielle comme :

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{\alpha\left({L_1}^2 + {L_2}^2\right)}{\left(\frac{M}{3} + m\right) L^2}}_{2\delta} \dot{\theta} + \underbrace{\frac{k\left({L_1}^2 + {L_2}^2\right)}{\left(\frac{M}{3} + m\right) L^2}}_{{\omega_0}^2} \theta = 0$$

$$2\delta = \frac{\alpha\left({L_1}^2 + {L_2}^2\right)}{\left(\frac{M}{3} + m\right) L^2} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha\left({L_1}^2 + {L_2}^2\right)}{2\left(\frac{M}{3} + m\right) L^2}$$

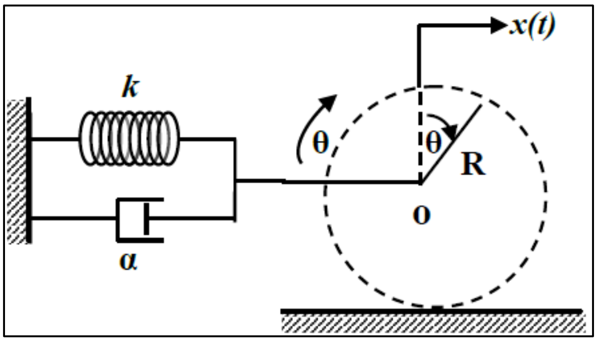
$${\omega_0}^2 = \frac{k\left({L_1}^2 + {L_2}^2\right)}{\left(\frac{M}{3} + m\right) L^2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k\left({L_1}^2 + {L_2}^2\right)}{\left(\frac{M}{3} + m\right) L^2}}$$

2. **Ecriture de l'équation du mouvement dans le cas $\delta<\omega_0$:**

La solution est de la forme : $\theta(t) = Ce^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi)$

Avec : $\omega_a = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{k\left({L_1}^2+{L_2}^2\right)}{\left(\frac{M}{3}+m\right)L^2} - \left(\frac{\alpha\left({L_1}^2+{L_2}^2\right)}{2\left(\frac{M}{3}+m\right)L^2}\right)^2}$

Exercice n°04 :



Disque roule sans glisser

$J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2$

- Coordonnées : $x = R\theta \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$

1- Détermination de l'équation différentielle du mouvement :

- Energie cinétique : $T = \frac{1}{2}J_{/O}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2$
- Energie potentielle : $U = \frac{1}{2}k(R\theta)^2$
- Fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha(R\dot{\theta})^2$
- Fonction de Lagrange : $L = T - U = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(R\theta)^2$
- Formalisme de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2}MR^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -kR^2\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta}$$

Donc le formalisme de Lagrange s'écrit :

$$\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} + kR^2\theta = -\alpha R^2\dot{\theta} \Rightarrow 3M\ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + 2k\theta = 0$$

- Déduction de δ et ω_0 : $\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{2\alpha}{3M}}_{2\delta}\dot{\theta} + \underbrace{\frac{2k}{3M}}_{\omega_0{}^2}\theta = 0$

$$2\delta = \frac{2\alpha}{3M} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{3M},\ \omega_0{}^2 = \frac{2k}{3M} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$$

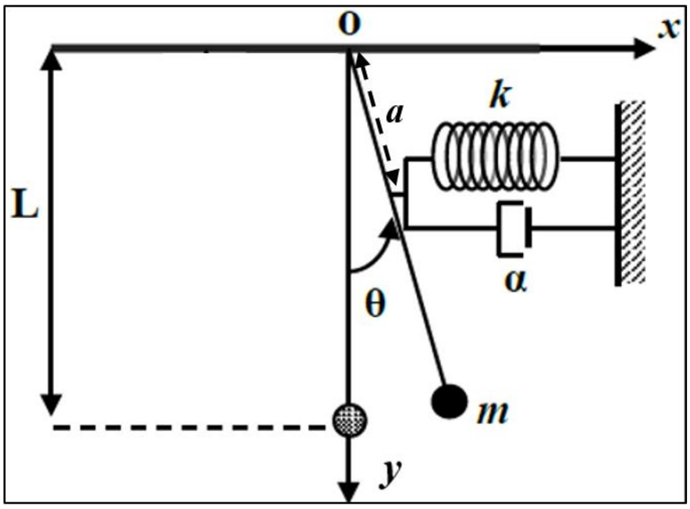
Equation différentielle : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0{}^2\theta = 0$

$$\omega_a = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{2k}{3M} - \frac{\alpha^2}{9M^2}}$$

2- Trouvons la solution de l'équation de mouvement quand $\delta = \omega_0$:

$$\theta(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\delta t}$$

Exercice n°05 :



1- Ecriture de l'équation différentielle de mouvement :

$$m \begin{cases} +l sin\theta \\ -l cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +l\dot{\theta} cos\theta \\ -l\dot{\theta} sin\theta \end{cases}$$

- Energie cinétique : $T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$
- Energie potentielle $U = U_m + U_k = -mglcos\theta + \frac{1}{2}k(asin\theta)^2$
- Fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha(a\dot{\theta}cos\theta)^2$
- Fonction de Lagrange : $L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mglcos\theta - \frac{1}{2}k(asin\theta)^2$
- Le formalisme de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mglsin\theta - k(a\underbrace{cos\theta}_{1})(a\underbrace{sin\theta}_{\theta})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha(a\underbrace{cos\theta}_{1})(a\dot{\theta}\underbrace{cos\theta}_{1})$$

$$\Rightarrow ml^2\ddot{\theta} + (mgl + ka^2)\theta = -\alpha a^2\dot{\theta}$$

- Equation différentielle du mouvement : $ml^2\ddot{\theta} + \alpha a^2\dot{\theta} + (mgl + ka^2)\theta = 0$

2- Détermination de la pulsation propre ω_a :

On peut écrire l'équation différentielle comme suit :

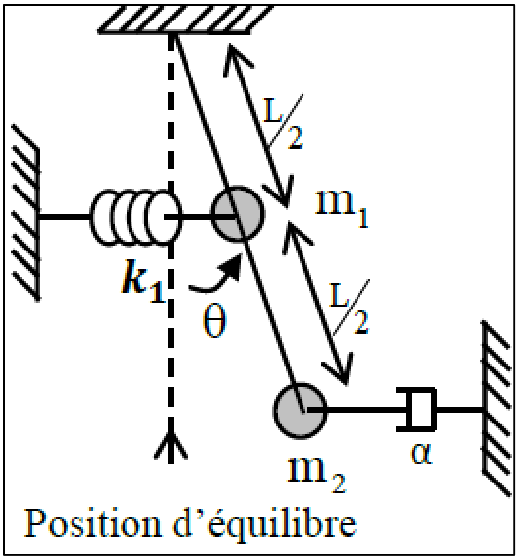
$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{\alpha a^2}{ml^2}}_{2\delta}\dot{\theta} + \underbrace{\frac{(mgl + ka^2)}{ml^2}}_{\omega_0{}^2}\theta = 0$$

Donc : $\delta = \frac{\alpha a^2}{2ml^2}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{(mgl+ka^2)}{ml^2}}$

Et la pulsation propre est : $\omega_a = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{(mgl+ka^2)}{ml^2} - \frac{\alpha^2 a^4}{4m^2 l^4}}$

- Ecriture de la solution du mouvement quand $\delta < \omega_0$: $\theta(t) = Ce^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi)$

Exercice n°06 :



1- Ecriture de l'équation différentielle du mouvement :

- Coordonnées et vitesses :

$$m_1 \begin{cases} +\frac{l}{2}sin\theta \\ +\frac{l}{2}cos\theta \end{cases} \Rightarrow m_1 \begin{cases} +\frac{l}{2}\dot{\theta}cos\theta \\ -\frac{l}{2}\dot{\theta}sin\theta \end{cases} \qquad m_2 \begin{cases} +lsin\theta \\ +lcos\theta \end{cases} \Rightarrow m_1 \begin{cases} +l\dot{\theta}cos\theta \\ -l\dot{\theta}sin\theta \end{cases}$$

- Energie cinétique : $T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2}m_1\frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(\frac{m_1}{4} + m_2)l^2\dot{\theta}^2$
- Energie potentielle : $U = U_{m_1} + U_{m_2} + U_k$

$$U = -m_1 g\frac{l}{2}cos\theta - m_2 glcos\theta + \frac{1}{2}k(\frac{l}{2}sin\theta)^2$$

$$U = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) glcos\theta + \frac{1}{2}k(\frac{l}{2}sin\theta)^2$$

- Fonction de Dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha(l\dot{\theta}cos\theta)^2$
- Fonction de Lagrange : $L = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{4} + m_2\right) l^2\dot{\theta}^2 + \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) glcos\theta - \frac{1}{2}k(\frac{l}{2}sin\theta)^2$
- Formalisme Lagrangien : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{m_1}{4} + m_2\right) l^2\dot{\theta} \;\; \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{m_1}{4} + m_2\right) l^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) \; glsin\theta - k(\frac{l}{2}\underbrace{sin\theta}_{1})(\frac{l}{2}\underbrace{cos\theta}_{\theta})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \; \alpha(l\underbrace{cos\theta}_{1})(l\dot{\theta}\underbrace{cos\theta}_{1})$$

$$\left(\frac{m_1}{4} + m_2\right) l^2\ddot{\theta} + \left[\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) \; gl + \frac{kl^2}{4}\right]\theta = -\alpha l^2\dot{\theta}$$

$$\left(\frac{m_1}{4} + m_2\right) l^2\ddot{\theta} + \alpha l^2\dot{\theta} + \left[\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) \; gl + \frac{kl^2}{4}\right]\theta = 0$$

On donne : $\frac{m_1}{4} = m_2 = m$ et $\frac{k}{4} = k'$

Donc l'équation de mouvement devient :

$$\boldsymbol{2ml^2\ddot{\theta} + \alpha l^2\dot{\theta} + (3mgl + kl^2)\theta = 0}$$

2- Détermination de la pulsation propre ω_a :

On peut écrire l'équation différentielle comme :

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{\alpha}{2m}}_{2\delta}\dot{\theta} + \left(\underbrace{\frac{3g}{2l} + \frac{k}{2m}}_{{\omega_0}^2}\right)\theta = 0$$

$$2\delta = \frac{\alpha}{2m} \;\Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{4m} \; ; {\omega_0}^2 = \frac{3g}{2l} + \frac{k}{2m}$$

$$\boldsymbol{\omega_a = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{3g}{2l} + \frac{k}{2m} - \frac{\alpha^2}{16m^2}}}$$

3- Détermination de la solution du mouvement quand $\delta<\omega_0$ pour les conditions initiales suivantes : $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$

La solution est de la forme :

$$\begin{cases} \theta(t) = e^{-\delta t}(C_1 sin\omega_a t + C_2 cos\omega_a t) \\ \dot{\theta}(t) = -\delta e^{-\delta t}(C_1 sin\omega_a t + C_2 cos\omega_a t) + e^{-\delta t}(C_1\omega_a cos\omega_a t - C_2\omega_a sin\omega_a t) \end{cases}$$

$$\theta(0) = C_2 = \theta_0$$

$$\dot{\theta}(0) = -\delta C_2 + C_1\omega_a = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\delta}{\omega_a}C_2 \Rightarrow C_1 = \frac{\delta}{\omega_a}\theta_0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\theta(t) = e^{-\delta t}\left(\frac{\delta}{\omega_a}\theta_0 sin\omega_a t + \theta_0 cos\omega_a t\right)}$$

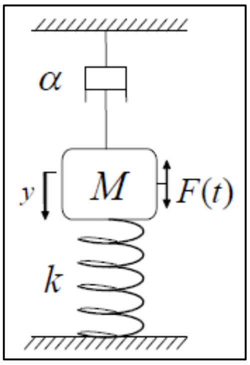
Chapitre 5 : Oscillations forcées des systèmes à un seul degré de liberté

- **Enoncés des exercices**
- **Exercices supplémentaires**
- **Solution des exercices**

Enoncés :

Exercice n°01 :

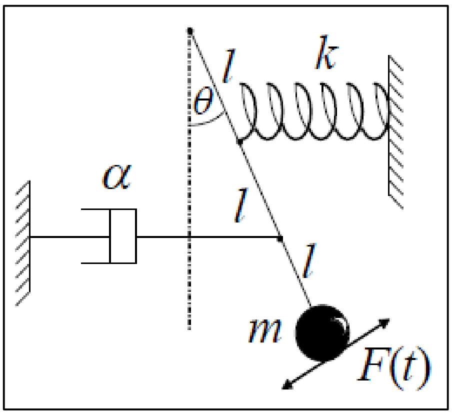
Une masse m, suspendue par un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient de frottement α, oscille verticalement sous l'effet d'une excitation F de la forme $F(t)=F_0\cos(\Omega t)$.



1- Trouver l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle U, et la fonction de dissipation D.
2- Trouvez le Lagrangien puis l'équation du mouvement.
3- Trouvez, à l'aide de la représentation complexe, la solution permanente de l'équation du mouvement. *(Préciser son amplitude A et sa phase ϕ).*
4- Donnez la condition de résonance et la pulsation de résonance Ω_R.
5- Donner la bande passante B pour un amortissement faible : $\lambda << \omega_0$.

Exercice n°02 :

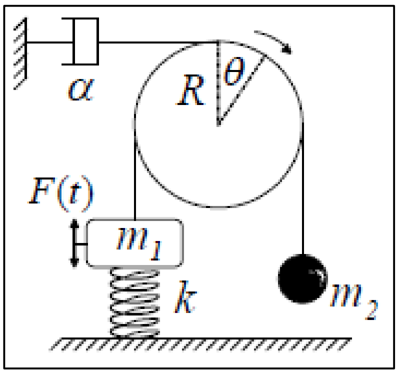
Dans le système ci-contre, la boule est ponctuelle et la tige est de longueur total $3l$ et de masse négligeable. Avec $\boldsymbol{F(t)=F_0\cos(\Omega t)}$.



1- Trouver l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle U et la fonction de dissipation D. ($\theta << 1$).
2- Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement.
3- Trouver, à l'aide de la représentation complexe, la solution permanente de l'équation du mouvement. (*Préciser son amplitude A et sa phase ϕ*).
4- Déduire la pulsation de résonance Ω_R.
5- Donner les pulsations de coupure Ω_{c1}, Ω_{c2} et la bande passante B pour un amortissement faible : $\lambda << \omega_0$.
6- Calculer Ω_R, B et le facteur de qualité si m=1 Kg, k=15 N/m, l=0.5 m, α=0.5 N.s/m, g=10 m.s^{-2}.

Exercice n°03 :

Le fil autour du disque (de masse négligeable) est inextensible et non glissant.



1- Trouver l'énergie cinétique T, potentille U et la fonction de dissipation D.
2- Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement. (***F(t)=F₀ cos(Ωt)***)
3- Trouver, à l'aide de la représentation complexe, la solution permanente de l'équation du mouvement (*Préciser son amplitude A et sa phase ϕ*).
4- Déduire la pulsation de résonance Ω_R.
5- Donner les pulsations de coupure Ω_{c1}, Ω_{c2} et la bande passante B pour un amortissement faible : $\lambda << \omega_0$.
6- Calculer Ω_R, B et le facteur de qualité si m_1=2 Kg, m_2= 1 Kg, k=10 N/m, α=0.1 N.s/m.

Exercices supplémentaires :

Exercice n°04 :

Dans la figure N°01, la masse m est fixée à un ressort de constante de raideur k et un amortisseur de coefficient α.

On applique à la masse m une force $F(t)=F_0 \sin(\omega t)$.

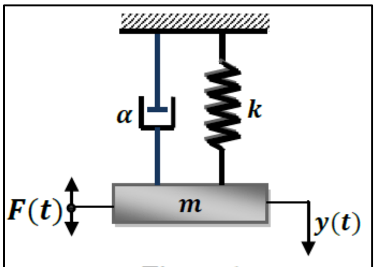


Figure 1

1- Trouver l'équation différentielle du mouvement forcé amoti.
2- Trouver la solution générale de l'équation différentielle, en calculant la solution homogène et la solution particulière.

Exercice n°05 :

Le système de la figure n°02, représente les oscillations des immeubles sous l'action d'un déplacement excitateur ***Y(t)*** résultant d'un tremblement de terre. Ces oscillations agissent sur les deux ressorts et l'amortisseur en même temps. On donne : $Y(t)=Be^{j\omega t}$.

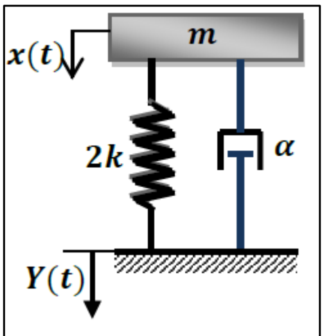


Figure 2

1- Déterminer l'équation différentielle du mouvement forcé amorti en fonction de δ et ω_0.
2- Trouver la solution de l'équation différentielle, en donnant les expressions de l'amplitude et de la phase des oscillations forcées.

Exercice n°06 :

Dans la figure 3, un disque circulaire homogène, de masse M et de rayon R, peut osciller sans frottements autour de son axe horizontal O. Deux masses m_1 et m_2 sont soudées aux extrémités d'une tige de masse négligeable liée rigidement au disque passant par O. les distances de m_1 et m_2 au centre sont notées respectivement l_1 et l_2. Un ressort vertical, de constante de raideur k a une extrémité fixe et l'autre est reliée au disque en un point A situé à une distance « a » de O. En position d'équilibre la tige est verticale avec m_1 en bas et le point A est au même niveau que le centre O. Le disque subit un frottement visqueux de coefficient α au point B. La masse m_1 est soumise à une force $\boldsymbol{F(t)=F_0 \cos(\Omega t)}$ perpendiculaire à la tige.

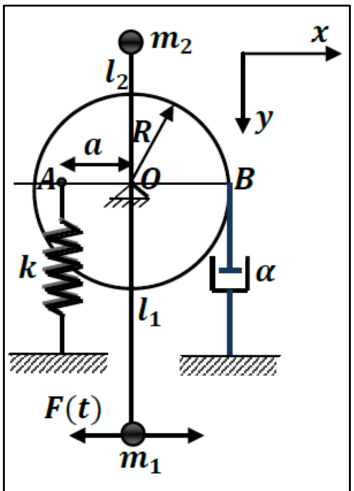


Figure 3

Valeurs numériques :

$M=1$ Kg, $m_1=m_2=0.1$ Kg, $k=16$ N/m, $R=20$ cm, $l_1=50$ cm, $l_2=25$ cm, $a=10$ cm, $g=10$ m/s^2, $\alpha=7.25.\ 10^{-2}$ Kg/s.

1- Etablir l'équation différentielle du mouvement, et trouver sa solution.
2- Calculer le facteur de qualité Q du système.
3- Déterminer la valeur de F_0 pour qu'à la résonance l'amplitude maximale soit égale à $(\pi/30)$ *rad*.

Solutions :

Exercice n°01 :

1- Trouvons l'énergie cinétique, potentielle et fonction de dissipation :

- Energie cinétique : $T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$
- Energie potentielle : $U = U_m + U_k = -mg(y_0 + y) + \frac{1}{2}(y_0 + y)^2$ →Grâce à la condition d'équilibre→ $U = \frac{1}{2}ky^2 + C^{ste}$
- Fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$

2- Formalisme Lagrangien et Equation de mouvement :

- Fonction de Lagrange : $L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}ky^2$
- Formalisme Lagrangien : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}} + F$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}$$

$\frac{\partial L}{\partial y} = -ky$; $\frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = \alpha\dot{y}$

$m\ddot{y} + ky = -\alpha\dot{y} + F$

Donc l'équation différentielle de mouvement s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{F_0}{m}cos\Omega t}$$

3- La solution permanente de l'équation de mouvement :

L'équation est de la forme : $\ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + {\omega_0}^2 y = \frac{F_0}{m}cos\Omega t$ avec : $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ et ${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$.

La solution permanente est : $y = Acos(\Omega t + \phi)$. Utilisons la représentation complexe pour trouver A et ϕ :

$$\frac{F_0}{m}cos\Omega t \rightarrow \frac{F_0}{m}e^{j\Omega t}$$

$$y = Acos(\Omega t + \phi) \rightarrow \underline{y} = \underline{A}e^{j\Omega t}$$

On obtient : $-\Omega^2\underline{A}e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega\underline{A}e^{j\Omega t} + {\omega_0}^2\underline{A}e^{j\Omega t} = \frac{F_0}{m}e^{j\Omega t} \Rightarrow \underline{A} = \frac{\frac{F_0}{m}}{{\omega_0}^2 - \Omega^2 + 2\lambda j\Omega}$

L'amplitude est : $A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}$ La phase est donnée par : $tan\phi = -\frac{2\lambda\Omega}{{\omega_0}^2 - \Omega^2}$

4- La pulsation de résonance est Ω_R telle que $\left.\frac{\partial A}{\partial \Omega}\right|_{\Omega_R} = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2\lambda^2}$

5- Pour un amortissement faible $\lambda \ll \omega_0$: $\Omega_{c_1} \approx \omega_0 - \lambda$ et $\Omega_{c_2} \approx \omega_0 + \lambda$,

Et $B = \Omega_{c_2} - \Omega_{c_1} = 2\lambda$.

<u>Exercice n°02 :</u>

1- Trouvons l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et fonction de dissipation :

- Energie cinétique : $T = T_m = \frac{1}{2}m(3l\dot{\theta})^2 = \frac{9}{2}ml^2\dot{\theta}^2$
- Energie potentielle : $U = U_m + U_k \approx mg(3l - 3lcos\theta) + \frac{1}{2}k(sin\theta)^2 \approx \frac{3}{2}mgl\theta^2 + \frac{1}{2}kl^2\theta^2$
- Fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha(2l\dot{\theta})^2 = 2\alpha l^2\dot{\theta}^2$

2- Formalisme Lagrangien et Equation différentielle de mouvement :

- Fonction de Lagrange : $L = \frac{9}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(3mgl + kl^2)\theta^2$
- Formalisme Lagrangien : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + F.3l$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 9ml^2\dot{\theta} \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 9ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -(3mgl + kl^2)\theta \; ; \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 4\alpha l^2\dot{\theta}$$

$$9ml^2\ddot{\theta} + (3mgl + kl^2)\theta = -4\alpha l^2\dot{\theta} + F.3l$$

Donc l'équation différentielle de mouvement s'écrit :

$$\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{4\alpha}{9m}\dot{\theta} + \left(\frac{g}{3l} + \frac{k}{9m}\right)\theta = \frac{F_0}{3ml}cos\Omega t}$$

3- La solution de l'équation permanente de mouvement :

L'équation est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = \frac{F_0}{3ml}cos\Omega t$

<u>Avec :</u> $\lambda = \frac{2\alpha}{9m}$ et ${\omega_0}^2 = \left(\frac{g}{3l} + \frac{k}{9m}\right)$

La solution permanente est de la forme : $\theta = Acos(\Omega t + \phi)$, Utilisons la représentation complexe pour trouver A et ϕ.

$$\frac{F_0}{3ml}cos\Omega t \to \frac{F_0}{3ml}e^{j\Omega t}$$

$$\theta = A\cos(\Omega t + \phi) \rightarrow \underline{\theta} = \underline{A}e^{j\Omega t}$$

On obtient : $-\Omega^2\underline{A}e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega\underline{A}e^{j\Omega t} + {\omega_0}^2\underline{A}e^{j\Omega t} = \frac{F_0}{3ml}e^{j\Omega t} \Rightarrow \underline{A} = \frac{\frac{F_0}{3ml}}{{\omega_0}^2-\Omega^2+2\lambda j\Omega}$

L'amplitude est : $A = \frac{\frac{F_0}{3ml}}{\sqrt{({\omega_0}^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2}}$ La phase est donnée par : $tan\phi = -\frac{2\lambda\Omega}{{\omega_0}^2-\Omega^2}$

4- La pulsation de résonance est Ω_R telle que $\left.\frac{\partial A}{\partial \Omega}\right|_{\Omega_R} = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2\lambda^2}$

5- Pour un amortissement faible $\lambda \ll \omega_0$: $\Omega_{c_1} \approx \omega_0 - \lambda$ et $\Omega_{c_2} \approx \omega_0 + \lambda$,

Et $B = \Omega_{c_2} - \Omega_{c_1} = 2\lambda.$

6- A.N :$\Omega_R \approx 2.88\, rad/s$. $B \approx 0.22Hz$. Le facteur de qualité est : $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{\omega_0}{B} \approx 13.1$

Exercice n°03 :

1- Trouvons l'énergie cinétique, potentielle et la fonction de dissipation :

- Energie cinétique : $T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2}m_1R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2R^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)R^2\dot{\theta}^2$
- Energie potentielle : $U = U_{m_1} + U_{m_2} + U_k = m_1gR\theta - m_2gR\theta + \frac{1}{2}k(z_0 - R\theta)^2$

$U = \frac{1}{2}kR^2\theta^2$ (La condition d'équilibre élimine tous les termes linéaires).

- Fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2$

2- Formalisme Lagrangien et Equation de mouvement :

- Fonction de Lagrange : $L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kR^2\theta^2$
- Formalisme Lagrangien : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + FR$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (m_1+m_2)R^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = (m_1+m_2)R^2\ddot{\theta}$$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\, kR^2\,\theta$; $\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta}$

$(m_1+m_2)R^2\ddot{\theta} + kR^2\,\theta = -\alpha R^2\dot{\theta} + FR$

Donc l'équation différentielle de mouvement est sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{(m_1+m_2)}\dot{\theta} + \frac{k}{(m_1+m_2)}\theta = \frac{F_0}{(m_1+m_2)R}\cos\Omega t}$$

3- La solution permanente de l'équation de mouvement :

L'équation est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = \frac{F_0}{a}cos\Omega t$, Avec : $\lambda = \frac{\alpha}{2(m_1+m_2)}$, $\omega_0{}^2 = \frac{k}{(m_1+m_2)}$, $a = (m_1 + m_2)R$.

La solution permanente est : $\theta = Acos(\Omega t + \phi)$, Utilisons la représentation complexe pour trouver A et ϕ.

$$\frac{F_0}{a}cos\Omega t \rightarrow \frac{F_0}{a}e^{j\Omega t}$$

$$\theta = Acos(\Omega t + \phi) \rightarrow \underline{\theta} = \underline{A}e^{j\Omega t}$$

On obtient : $-\Omega^2\underline{A}e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega\underline{A}e^{j\Omega t} + \omega_0{}^2\underline{A}e^{j\Omega t} = \frac{F_0}{a}e^{j\Omega t} \Rightarrow \underline{A} = \frac{\frac{F_0}{a}}{\omega_0{}^2-\Omega^2+2\lambda j\Omega}$

L'amplitude est : $A = \frac{\frac{F_0}{a}}{\sqrt{(\omega_0{}^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2}}$ La phase est donnée par : $tan\phi = -\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0{}^2-\Omega^2}$

4- La pulsation de résonance est Ω_R telle que $\left.\frac{\partial A}{\partial \Omega}\right|_{\Omega_R} = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0{}^2 - 2\lambda^2}$

5- Pour un amortissement faible $\lambda \ll \omega_0$: $\Omega_{c_1} \approx \omega_0 - \lambda$ et $\Omega_{c_2} \approx \omega_0 + \lambda$,

Et $B = \Omega_{c_2} - \Omega_{c_1} = 2\lambda$.

6- A.N :$\Omega_R \approx 1.82\ rad/s$. $B \approx 3.10^{-2}Hz$. Le facteur de qualité est : $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{\omega_0}{B} \approx 60.9$.

<u>Chapitre 6 :</u>
Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté

- **Enoncés des exercices**
- **Solutions des exercices**

Enoncés :

Exercice n°01 :

Soit le système mécanique représenté par la Figure 1, composé de deux oscillations linéaires (***m, k***) couplés par un ressort de raideur ***k’***.

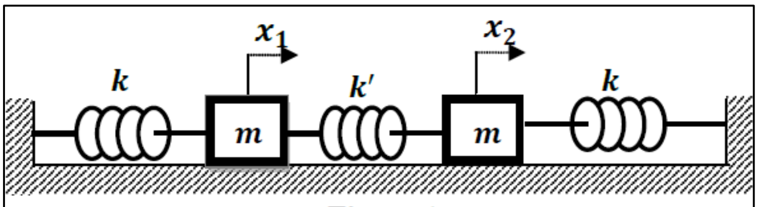


Figure 1

1. Ecrire le Lagrangien du système.
2. Mettre ce Lagrangien sous la forme : $L = \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \omega_0^2\left(x_1^2 + x_2^2 - 2Cx_1x_2\right)\right]$.
3. Donner les expressions de ω_0^2 et C (Coefficient de couplage). En déduire les équations du mouvement.
4. Déterminer les pulsations propres du système.
5. Donner les solutions (t) et (t) avec les conditions initiales suivantes :

$$x_1(0) = x_0, \dot{x}_1 = 0, x_2(0) = 0, \dot{x}_2 = 0$$

Exercice n°02 :

On considère le système représenté par la figure 2 constitué de deux oscillateurs verticaux (m_1, k) et (m_2, k) couplés par un amortisseur α.

1. Déterminer les équations différentielles du mouvement en fonction des variables $y_1(t)$ et $y_2(t)$.
2. En utilisant deux nouvelles variables $Y_1(t)$ et $Y_2(t)$ (à déterminer), déduire les deux équations différentielles indépendantes si : $m_1=m_2=m$.

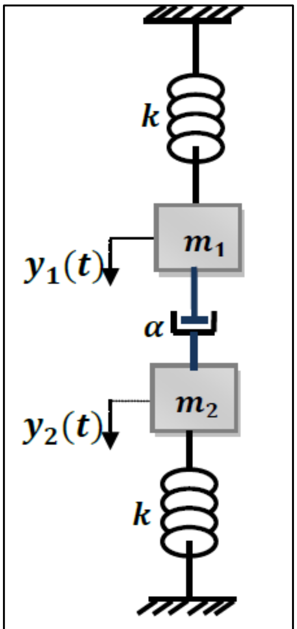


Figure 2

Exercice n°03 :

Le système de la Figure 3 est constitué d'une masse **M** qui glisse sans frottement sur un plan horizontal et d'un pendule ***(m,l)*** suspendu au point A. Ce pendule oscille sans frottement dans le plan *xoy*.

On choisit les coordonnées généralisées *x* (position de la masse **M**) et θ (angle que fait le pendule avec la verticale).

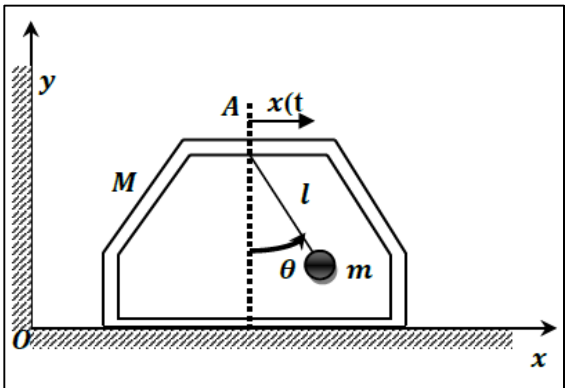


Figure 03

1. Ecrire le Lagrangien du système.
2. Montrer que les équations du mouvement de ce système s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\ddot{x}}{l} + \dfrac{m}{m+M}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) = 0 \\ \ddot{\theta} + \dfrac{\ddot{x}}{l}\cos\theta + \dfrac{g}{l}\sin\theta = 0 \end{cases}$$

3. Montrer que dans le cas des petites oscillations (θ<<1), l'équation différentielle pour θ s'écrit sous la forme : $\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0$.
4. Donner la valeur de ω_0 en fonction de ***g, l, M*** et ***m.***
5. Etablir les solutions des équations différentielles du système, dans le cas : $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = V_0, \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0$

Exercice n°04 :

Les équations du mouvement d'un système à deux degrés de liberté sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k & -2k \\ -2k & 2k \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On donne les conditions d'équilibres suivantes : $x_1(0) = x_0, x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

Donner les solutions.

Exercice n°05 :

Une masse m_1, glisse sans frottement sur un plan horizontal et entraine un pendule (m_2,l) dans son mouvement. Un ressort horizontal, de constante k se situe à une distance $\overline{OA} = \alpha$ et relie les deux oscillateurs, (Voir figure 5).

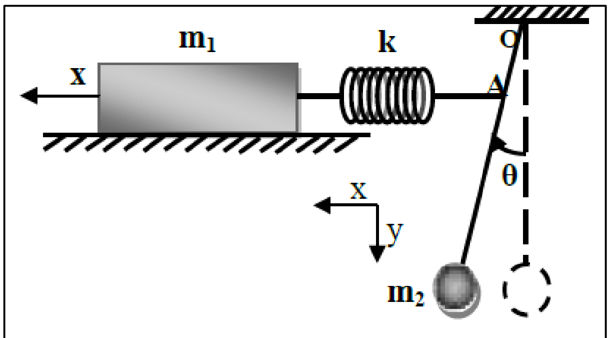


Figure 5

1. Ecrire les équations du mouvement en fonction de x et θ.
2. Calculer les pulsations du système et déduire les modes propres, on donne : $m_1=m_2=m$, $a=l/4$, $mg = \frac{15}{16}kl$
3. Donner les équations du mouvement $x(t)$ et $\theta(t)$.

Solutions :

Exercice n°01 :

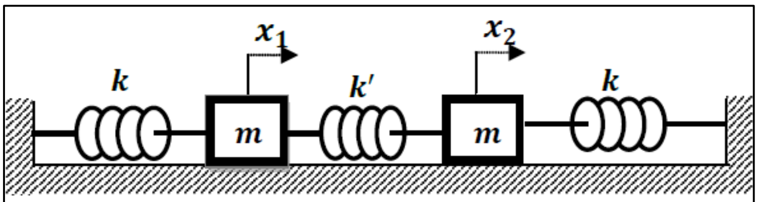


Figure 1

1- Déterminer le Lagrangien du système :

- L'énergie cinétique du système : $T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$
- L'énergie potentielle du système : $U = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(-x_2)^2$

Donc : le Lagrangien est : $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

2- Mettre ce Lagrangien sous la forme : $\boldsymbol{L = \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \omega_0^2\left(x_1^2 + x_2^2 - 2Cx_1x_2\right)\right]}$.

$$L = \frac{1}{2}m[(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{m}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{k'}{m}(x_2^2 + x_1^2 - 2x_2x_1)]$$

$$L = \frac{1}{2}m[(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{(k + k')}{m}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{2k'}{m}x_1x_2]$$

$$L = \frac{1}{2}m\left[(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{(k + k')}{m}\left[(x_1^2 + x_2^2) - \frac{2k'}{(k + k')}x_1x_2\right]\right]$$

$L = \frac{1}{2}m\left[(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \omega_0^2[(x_1^2 + x_2^2) - 2Cx_1x_2]\right]$, Avec $\omega_0^2 = \frac{(k+k')}{m}$, $C = \frac{k'}{(k+k')}$

3- Ecrire les équations de mouvement :

On écrit les 2 équations différentielles en fonction des coordonnées généralisées.

On remarque bien deux coordonnées généralisées qui décrit le mouvemebt donc on aura deux équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m\ddot{x}_1 \\ \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right) = -m\omega_0^2(x_1 - Cx_2) \end{cases} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\ddot{x}_2 \\ \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right) = -m\omega_0^2(x_2 - Cx_1) \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = C\omega_0^2 x_2 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = C\omega_0^2 x_1 \end{cases} \ldots\ldots (1)$$

4- Déterminer les pulsations propres du système.

On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :

Donc : $\begin{cases} x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \\ x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 \end{cases}$ On remplace dans la relation (1)

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)x_1 - C\omega_0^2 x_2 = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)x_2 - C\omega_0^2 x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -C\omega_0^2 \\ -C\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -C\omega_0^2 \\ -C\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (C\omega_0^2)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow Les\ pulsations\ propres\ du\ système. \begin{cases} \omega_1 = \omega_0\sqrt{1 - C} \\ \omega_2 = \omega_0\sqrt{1 + C} \end{cases}$$

5- Donner les solutions $(\boldsymbol{t})$ et $(\boldsymbol{t})$ avec les conditions initiales suivantes :

$$\boldsymbol{x_1(0) = x_0, \dot{x}_1 = 0, x_2(0) = 0, \dot{x}_2 = 0}$$

- Calcul des modes d'oscillations :

Quand $\begin{cases} \omega = \omega_1 \Longrightarrow x_2 = x_1 \Longrightarrow v_1\binom{1}{1} \\ \omega = \omega_2 \Longrightarrow x_2 = -x_1 \Longrightarrow v_1\binom{1}{-1} \end{cases}$

- La solution :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

- Les conditions aux limites :

$x_1(0) = x_0 \Longrightarrow Acos\varphi_1 + Bcos\varphi_2 = x_0$

$$\dot{x}_1(t) = -A\omega_1 sin(\omega_1 t + \varphi_1) - B\omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \Longrightarrow \dot{x}_1(0) = 0$$

$$\Longrightarrow -A\omega_1 sin\varphi_1 - B\omega_2 sin\varphi_2 = 0$$

$$x_2(0) = 0 \Longrightarrow Acos\varphi_1 - Bcos\varphi_2 = 0$$

$$\dot{x}_2(t) = -A\omega_1 sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B\omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \Longrightarrow \dot{x}_2(0) = 0$$

$$\Longrightarrow -A\omega_1 sin\varphi_1 + B\omega_2 sin\varphi_2 = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} Acos\varphi_1 + Bcos\varphi_2 = x_0 \dots\dots\dots\dots.(1) \\ -A\omega_1 sin\varphi_1 - B\omega_2 sin\varphi_2 = 0 \dots\dots(2) \\ Acos\varphi_1 - Bcos\varphi_2 = 0 \dots\dots\dots\dots..(3) \\ -A\omega_1 sin\varphi_1 + B\omega_2 sin\varphi_2 = 0 \dots.\dots(4) \end{cases}$$

$$(2) + (4) \Longrightarrow sin\varphi_1 = 0 \Longrightarrow \varphi_1 = k\pi$$

$$(4) - (2) \Longrightarrow sin\varphi_2 = 0 \Longrightarrow \varphi_2 = k\pi$$

Si $k = 0 \Longrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (1) \Longrightarrow A + B = x_0 \\ (3) \Longrightarrow A - B = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \frac{x_0}{2} \\ B = \frac{x_0}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{x_0}{2}[cos\omega_1 t + cos\omega_2 t] \\ x_2(t) = \frac{x_0}{2}[cos\omega_1 t - cos\omega_2 t] \end{cases}$$

Exercice n°02 :

On considère le système représenté par la figure 2 constitué de deux oscillateurs verticaux (***m₁, k***) et (***m₂, k***) couplés par un amortisseur $\boldsymbol{\alpha}$.

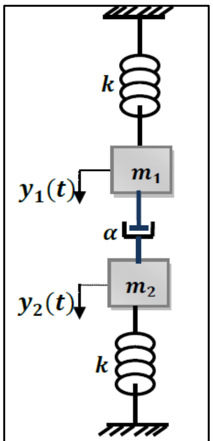


Figure 2

3. Déterminer les équations différentielles du mouvement en fonction des variables $y_1(t)$ et $y_2(t)$.

- L'énergie cinétique du système : $\boldsymbol{T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2{}^2}$
- L'énergie potentielle du système : $\boldsymbol{U = \frac{1}{2}ky_1{}^2 + \frac{1}{2}ky_2{}^2}$
- La fonction de dissipation : $\boldsymbol{D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2}$
- La fonction de Lagrange : $\boldsymbol{L = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2{}^2 - \frac{1}{2}ky_1{}^2 - \frac{1}{2}ky_2{}^2}$
- Le formalisme Lagrangien : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial y_1}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial y_2}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + ky_1 = \alpha(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \\ m_1\ddot{y}_2 + ky_2 = \alpha(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + \alpha\dot{y}_1 + ky_1 = \alpha\dot{y}_2 \\ m_1\ddot{y}_2 + \alpha\dot{y}_2 + ky_2 = \alpha\dot{y}_1 \end{cases}$$

4. Condition : $m_1=m_2=m$.

$$m_1 = m_2 = m \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{y}_1 + \alpha\dot{y}_1 + ky_1 = \alpha\dot{y}_2 \dots\dots\dots (1) \\ m\ddot{y}_2 + \alpha\dot{y}_2 + ky_2 = \alpha\dot{y}_1 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow m(\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2) + \alpha(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k(y_1 - y_2) = \alpha(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$$

$$\Rightarrow m(\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2) + 2\alpha(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k(y_1 - y_2) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow m(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) + \alpha(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + k(y_1 + y_2) = \alpha(\dot{y}_2 + \dot{y}_1)$$

$$\Rightarrow m(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) + k(y_1 + y_2) = 0 \dots\dots\dots (4)$$

On pose : $Y_2 = y_2 + y_1, Y_1 = y_1 - y_2 \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{Y}_1 + 2\alpha\dot{Y}_1 + kY_1 = 0 \\ m\ddot{Y}_2 + kY_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{Y}_1 + \frac{2\alpha}{m}\dot{Y}_1 + \frac{k}{m}Y_1 = 0 \\ \ddot{Y}_2 + \frac{k}{m}Y_2 = 0 \end{cases}$

Exercice n°03 :

1. Le Lagrangien du système :

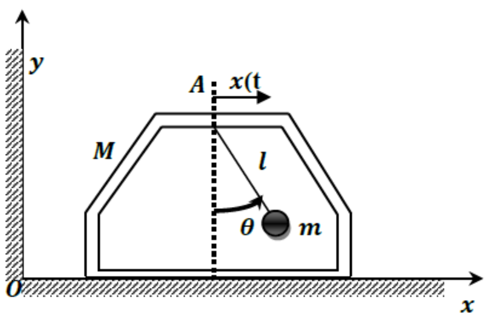


Figure 03

La masse M : $x(t) \longrightarrow \dot{x}(t)$

Le pendule (m, l) : $\begin{cases} x + l\sin\theta \\ -l\cos\theta \end{cases} \Rightarrow {v_m}^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2$

- L'énergie cinétique du système : $T = T_M + T_m$

$T_M = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$, $T_m = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2)$

$$\Rightarrow \boldsymbol{T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2)}$$

- L'énergie potentielle du système : $\boldsymbol{U = U_m = mgl(1 - \cos\theta)}$
- Le Lagrangien : $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\right) - mgl(1 - \cos\theta)$$

2. On remarque bien deux coordonnées généralisées qui décrivent le mouvement donc on aura deux équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left((M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta}cos\theta\right) = (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}cos\theta - ml\dot{\theta}^2 sin\theta \\ \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}lcos\theta + ml^2\dot{\theta}\right) = ml\ddot{x}cos\theta - ml\dot{x}\dot{\theta}sin\theta + ml^2\ddot{\theta} \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -ml\dot{x}\dot{\theta}sin\theta - mglsin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}cos\theta - ml\dot{\theta}^2 sin\theta = 0 \ldots\ldots\ldots(1) \\ ml\ddot{x}cos\theta + ml^2\ddot{\theta} + mglsin\theta = 0 \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

On divise l'équation (1) sur *(M+m)l* :$\frac{\ddot{x}}{l} + \frac{m}{(M+m)}(\ddot{\theta}cos\theta - \dot{\theta}^2 sin\theta) = 0$

On divise l'équation (2) sur ml^2 : $\ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{l}cos\theta + +\frac{g}{l}sin\theta = 0$

Donc :

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\frac{\ddot{x}}{l} + \frac{m}{(M+m)}(\ddot{\theta}cos\theta - \dot{\theta}^2 sin\theta) = 0} \\ \boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{l}cos\theta + +\frac{g}{l}sin\theta = 0} \end{cases}$$

3. Dans le cas des petites oscillations (θ<<1) :

$$\begin{cases} cos\theta \approx 1 \\ sin\theta \approx \theta \\ \dot{\theta}^2 sin\theta \approx \dot{\theta}^2\theta \approx 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\ddot{x}}{l} + \frac{m}{(M+m)}\ddot{\theta} = 0 \ldots\ldots\ldots(3) \\ \ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{l} + \frac{g}{l}\theta = 0 \ldots\ldots\ldots(4) \end{cases}$$

$$(3)-(4) \rightarrow \frac{m}{(M+m)}\ddot{\theta} - \ddot{\theta} - \frac{g}{l}\theta = 0 \;\Rightarrow \boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{g(M+m)}{Ml}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0{}^2\theta = 0}$$

4. La valeur de ω_0 en fonction de *g,l,M* et *m* : $\boldsymbol{\omega_0{}^2 = \frac{g(M+m)}{Ml} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g(M+m)}{Ml}}}$

5. Les solutions des équations différentielles du système :

- **<u>Ecriture de *θ(t)* :</u>** $\ddot{\theta} + \omega_0{}^2\theta = 0 \Rightarrow \theta(t) = Acos(\omega_0 t + \varphi)$
- **<u>Ecriture de *x(t)* :</u>** $(3) \Rightarrow \ddot{x} = \frac{-ml}{M+m}\ddot{\theta} = -\frac{ml}{M+m}[-\omega_0{}^2\theta] = \frac{ml\omega_0{}^2}{M+m}\theta(t) = \frac{ml\omega_0{}^2}{M+m}[Acos(\omega_0 t + \varphi)]$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{ml\omega_0}{M+m}[Asin(\omega_0 t + \varphi)] + B \Rightarrow \boldsymbol{x(t) = -\frac{-ml}{M+m}Acos(\omega_0 t + \varphi) + Bt + C} \ldots\ldots\ldots\boldsymbol{(5)}$$

<u>Calcul des coefficients *A* et *φ* :</u>

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Acos\varphi = \theta_0 \\ -A\omega_0 sin\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\varphi = 0} \\ \boldsymbol{A = \theta_0} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\theta(t) = \theta_0 cos(\omega_0 t)}$$

<u>Calcul des coefficients B et C :</u>

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ A = \theta_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = -\frac{-ml}{M+m}\theta_0 \cos(\omega_0 t) + Bt + C \Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{ml\theta_0}{M+m}\omega_0 sin(\omega_0 t) + B$$

$$\dot{x}(0) = V_0 \Rightarrow \frac{ml\theta_0}{M+m}\omega_0 sin(0) + B = V_0 \Rightarrow \boldsymbol{B = V_0}$$

$$x(0) = x_0 \Rightarrow \frac{-ml\theta_0}{M+m} + C = x_0 \Rightarrow \boldsymbol{C = x_0 + \frac{ml\theta_0}{M+m}}$$

$$(\mathbf{5}) \Rightarrow x(t) = -\frac{-ml}{M+m}\theta_0\cos(\omega_0 t) + V_0 t + x_0 + \frac{ml\theta_0}{M+m}$$

Donc la solution générale est : $\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = x_0 + V_0 t + \frac{ml\theta_0}{M+m}(1+\cos(\omega_0 t))} \\ \boldsymbol{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)} \end{cases}$

Exercice n°04 :

Les équations de mouvement d'un système à deux degrés de liberté sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k & -2k \\ -2k & 2k \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 - 2kx_2 = 0 \ldots\ldots\ldots(1) \\ 2m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - 2kx_1 = 0 \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

- Calcul des pulsations propres (valeurs propres) :

On se base sur l'hypothèse que le système admet des solutions sinusoïdales donc : $\begin{cases} x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \rightarrow \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \ldots\ldots(3) \\ x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 \ldots\ldots(4) \end{cases}$

Remplaçons (3) et (4) dans (1) et (2) :

$$\begin{cases} (k - m\omega^2)x_1 - 2kx_2 = 0 \ldots\ldots\ldots(5) \\ -2kx_1 + 2(k - m\omega^2)x_2 = 0 \ldots\ldots(6) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} (k - m\omega^2) & -2k \\ -2k & 2(k - m\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$\left[\sqrt{2}(k - m\omega^2)\right]^2 - (2k)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}(k - m\omega^2) = 2k \\ ou \\ \sqrt{2}(k - m\omega^2) = -2k \end{cases}$$

On remplace dans les équations (5) et (6), on obtient : $\begin{cases} {\omega_1}^2 = \frac{k(\sqrt{2}+2)}{m\sqrt{2}} \\ ou \\ {\omega_2}^2 = \frac{k(\sqrt{2}-2)}{m\sqrt{2}} \end{cases}$

- **Les modes propres :**
  - **1^er mode :** $\omega^2 = {\omega_1}^2 = \frac{k(\sqrt{2}+2)}{m\sqrt{2}} \Rightarrow x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 \Rightarrow \overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$
  - **2^ème mode :** $\omega^2 = {\omega_2}^2 = \frac{k(\sqrt{2}-2)}{m\sqrt{2}} \Rightarrow x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 \Rightarrow \overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

- **La solution générale est :**

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\overrightarrow{V_1}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B\overrightarrow{V_2}\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}B\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

- Pour les conditions d'équilibres suivantes : $\boldsymbol{x_1(0) = x_0, x_2(0) = \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = x_0}$

Donc : $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A\omega_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\omega_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}A\omega_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{\sqrt{2}}{2}B\omega_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$

On remplace avec les conditions d'équilibres et on trouve :

$$\begin{cases} x_1(0) = A\sin(\varphi_1) + B\sin(\varphi_2) = x_0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(7) \\ x_2(0) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}A\sin(\varphi_1) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}B\sin(\varphi_2) = 0 \dots\dots\dots\dots(8) \\ \dot{x}_1(0) = A\omega_1\cos(\varphi_1) + B\omega_2\cos(\varphi_2) = 0 \dots\dots\dots\dots.\dots(9) \\ \dot{x}_2(0) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}A\omega_1\cos(\varphi_1) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}B\omega_2\cos(\varphi_2) = 0 \dots(10) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(0) = A\sin(\varphi_1) + B\sin(\varphi_2) = x_0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(7) \\ x_2(0) = -A\sin(\varphi_1) + B\sin(\varphi_2) = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(8) \\ \dot{x}_1(0) = A\omega_1\cos(\varphi_1) + B\omega_2\cos(\varphi_2) = 0 \dots\dots\dots\dots.\dots(9) \\ \dot{x}_2(0) = -A\omega_1\cos(\varphi_1) + B\omega_2\cos(\varphi_2) = 0 \dots\dots\dots\dots(10) \end{cases}$$

(7)+(8) : $2B\sin(\varphi_2) = x_0$

(7)-(8) : $2A\sin(\varphi_1) = x_0$

(9)+(10) : $2B\omega_2\cos(\varphi_2) = 0$

(9)-(10) : $2A\omega_1\cos(\varphi_1) = 0$

$$\cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2} \\ A = B = \dfrac{x_0}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_1(t) = \dfrac{x_0}{2}\left[\sin\left(\omega_1 t + \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\omega_2 t + \dfrac{\pi}{2}\right)\right]} \\ \boldsymbol{x_2(t) = -\dfrac{x_0}{2}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega_1 t + \dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega_2 t + \dfrac{\pi}{2}\right)\right]} \end{cases}$$

Exercice n°05 :

Le chariot de masse m_1 glisse sans frottement sur un plan horizontal donc : $x_{m_1} = x$.

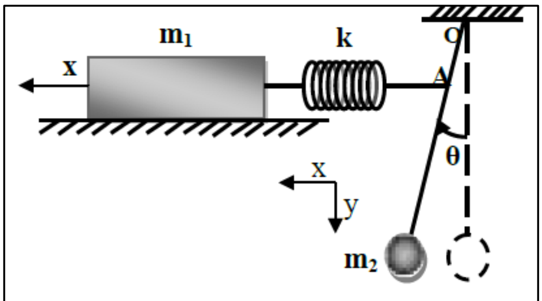


Figure 5

Le ressort horizontal de constante de raideur k relie les deux oscillateurs donc : $x_k = x - asin\theta$.

La masse m_2 tourne autour de l'axe O, donc : $\begin{cases} x_{m_2} = lsin\theta \\ y_{m_2} = lcos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{m_2} = l\dot{\theta}cos\theta \\ \dot{y}_{m_2} = -l\dot{\theta}sin\theta \end{cases}$

1. Equations différentielles du mouvement en fonction de *x* et *θ* :

- Energie cinétique : $T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}^2$
- Energie potentielle : $U = U_k + U_{m_2} = \frac{1}{2}k(x - asin\theta)^2 - mglcos\theta$
- La fonction de Lagrange : $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(x - asin\theta)^2 + mglcos\theta$$

- Le formalisme Lagrangien :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0 \dots (1) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0 \dots (2) \end{cases}$$

- *Equation (1) :*

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_1\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m_1\ddot{x}$ et $\frac{\partial L}{\partial x} = -k(x - asin\theta)$

- *Equation (2)* :

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_2l^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m_2l^2\ddot{\theta}$ et $\frac{\partial L}{\partial \theta} = akcos\theta(x - acos\theta) - mglsin\theta$

Avec : $sin\theta \approx \theta, cos\theta \approx 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x} + k(x - a\theta) = 0 \\ m_2l^2\ddot{\theta} - ak(x - a\theta) + mgl\theta = 0 \end{cases}$$

Donc les équations du mouvement en fonction de *x* et *θ* sont :

$$\begin{cases} \boldsymbol{m_1\ddot{x} + kx = ak\theta} \\ \boldsymbol{m_2l^2\ddot{\theta} + (m_2gl + a^2k)\theta = akx} \end{cases}$$

2. Détermination des pulsations et des modes propres du système :

On a : $m_1=m_2=m$, $a=l/4$, $mg = \frac{15}{16}kl$

Donc les équations différentielles deviennent :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = \dfrac{lk}{4}\theta \\ ml^2\ddot{\theta} + kl^2\theta = \dfrac{lk}{4}x \end{cases}$$

a- Calcul des pulsations propres du système :

On suppose que les solutions sont sinusoïdales donc : $\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x \\ \ddot{\theta} = -\omega^2\theta \end{cases}$

On aura : $\begin{cases} -\omega^2 mx + kx = \frac{lk}{4}\theta \\ -\omega^2 ml^2\theta + kl^2\theta = \frac{lk}{4}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k-\omega^2 m)x - \frac{lk}{4}\theta = 0 \\ (kl^2 - \omega^2 ml^2)\theta - \frac{lk}{4}x = 0 \end{cases}$

On peut écrire les deux équations sous la forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} (k-\omega^2 m) & -\dfrac{lk}{4} \\ -\dfrac{lk}{4} & l^2(k-\omega^2 m) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} (k-\omega^2 m) & -\dfrac{lk}{4} \\ -\dfrac{lk}{4} & l^2(k-\omega^2 m) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (k-\omega^2 m)^2 - \frac{k^2}{16} = 0 \Rightarrow \begin{cases} {\omega_1}^2 = \dfrac{3k}{4m} \\ {\omega_2}^2 = \dfrac{5k}{4m} \end{cases}$$

b- Les vecteurs propres :

$$\omega^2 = {\omega_1}^2 = \frac{3k}{4m} \Rightarrow x - l\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{x}{l} \Rightarrow \overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{l} \end{pmatrix}$$

$$\omega^2 = {\omega_2}^2 = \frac{5k}{4m} \Rightarrow -x - l\theta = 0 \Rightarrow \theta = -\frac{x}{l} \Rightarrow \overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-1}{l} \end{pmatrix}$$

3. Les équations de mouvement *x(t)* et *θ(t)* :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\overrightarrow{V_1}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B\overrightarrow{V_2}\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{l} \end{pmatrix}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{l} \end{pmatrix}\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Donc :

$$\begin{cases} x(t) = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta(t) = \frac{A}{l}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{B}{l}\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{4m}}t + \varphi_1\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{5k}{4m}}t + \varphi_2\right)} \\ \boldsymbol{\theta(t) = \frac{A}{l}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{4m}}t + \varphi_1\right) - \frac{B}{l}\sin\left(\sqrt{\frac{5k}{4m}}t + \varphi_2\right)} \end{cases}$$

Références

Références :

1. F. HAMMAD, « Vibrations et Ondes », Faculté de Technologie, Université A. Mira – Bejaïa (2012).
2. N. AKLOUCHE, « Exercices sur les vibrations », Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université Ferhat Abbas – Sétif (2011).
3. L. ACHOU, « Mouvement Oscillatoire », Faculté des Sciences, Université Badji Mokhtar- Annaba (2012).
4. A. DIB, « Ondes et Vibrations », Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen (2008).
5. B. DALI YOUCEF, « Cours de Vibrations », Faculté des Sciences, Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen (2013).