Ecole Supérieure en Génie

Electrique et Energétique

Tronc commun préparatoire

Section technologie

Mécaniques Rationnelles

Cours 2ème Année classe préparatoire

K. KHELLOUFI & L. NOURINE

Année Universitaire 2016-2017

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 03 : CINEMATIQUE DES SYSTEMES

CHAPITRE 04 : GEOMETRIE DES MASSES

CHAPITRE 05 : CINETIQUE & DYNAMIQUE DES SOLIDES

CHAPITRE 06 : PRINCIPE FONDAMENTAL DES DYNAMIQUES DES SYSTEMES

CHAPITRE 07 : ETUDE DES SYSTEMES DYNAMIQUES

« LES EQUATION DE LAGRANGE »

CHAPITRE 08 : ETUDE DES SYSTEMES OUVERTS

Outils Mathématiques

I. Scalaires :

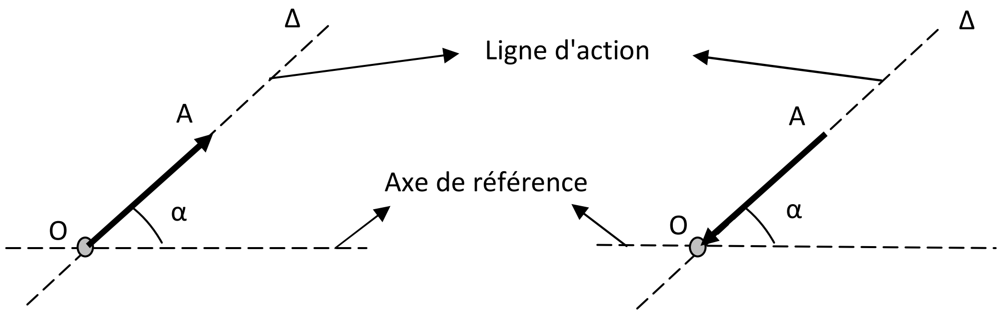
En algèbre linéaire un vrai scalaire est un nombre qui est indépendant de la base choisie, il peut être représenté soit par des nombres réels soit par des lettres grecques.

En physique, le scalaire est une quantité pouvant être décrite par un nombre et l'unité correspondante. Les quantités scalaires sont invariables par rapport aux rotations de coordonnées et aux transformations de système. Donc un scalaire est une quantité qui n'est associé à aucune direction où sens comme exemple: la masse ***m*** d'un objet, le temps ***t***.

II. *Vecteurs:*

Le vecteur est un objet très important qui comprend à trois grandeurs physiques : la direction, la norme ou module (longueur) notée $\|\vec{u}\|$ et le sens. La force en est un bon exemple puisqu'elle doit contenir ces trois informations : la norme du vecteur matérialise l'intensité de la force, tandis que la direction et le sens du vecteur matérialisent l'orientation de la force.

Le vecteur ne contient cependant pas d'information sur la position; il est défini par un point d'application O et une extrémité A qui appartiennent à la même ligne d'action (Δ).



Néanmoins, le vecteur peut se représenté en plusieurs types :

- ***Vecteur libre :*** se déplace librement dans l'espace. sa direction, son sens et son module sont donnés mais son support et son point d'application sont inconnus.
- ***Vecteur glissant :*** se glisser le long de sa ligne d'action en conservant son effet.
- ***Vecteur lié (pointeur):*** tous les éléments du vecteur sont déterminés son point d'application est fixé.
- ***Vecteur unitaire :*** c'est un vecteur dont le module est égal à 1.
- ***Vecteurs colinéaires :*** ils possèdent le même support.
- ***Vecteurs coplanaires :*** leurs supports se trouvent dans un même plan,
- ***Vecteurs équipollents (équivalents) :*** ils ont les mêmes grandeurs et les mêmes orientations, même s'ils n'ont pas le même point d'application.

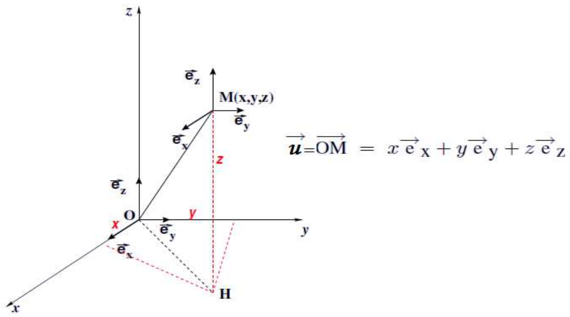
- ***Vecteurs égaux :*** vecteurs équipollents de même sens.
- ***Vecteurs opposés :*** vecteurs équipollents de sens contraires ou opposés.
- ***Vecteurs identiques :*** vecteurs équipollents égaux de même origine.

III. Composante d'un vecteur :

Un vecteur $\vec{u}$ est défini selon le système des coordonnées données d'étude : cartésiennes, polaire, cylindrique et sphérique.

En effet, dans l'espace cartésienne orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le vecteur $\vec{u}$ est défini comme :

$$\vec{u} = u_x\vec{\imath} + u_y\vec{\jmath} + u_z\vec{k}$$

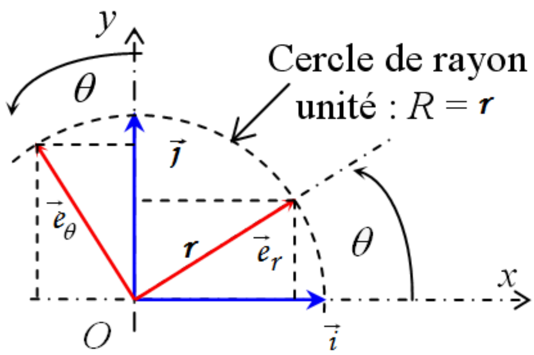


Composante d'un vecteur dans les coordonnées cartésiennes

Par ailleurs son module est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

En outre, dans le cas d'un système plan, il est préférable d'utilisée les coordonnée polaire $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ pour décrit le mouvement intrinsèque des point matérielle, dont $\vec{u}$ est donnée par :

$$\vec{u} = r\,\vec{e_r}$$



Composante d'un vecteur dans les coordonnées Polaires

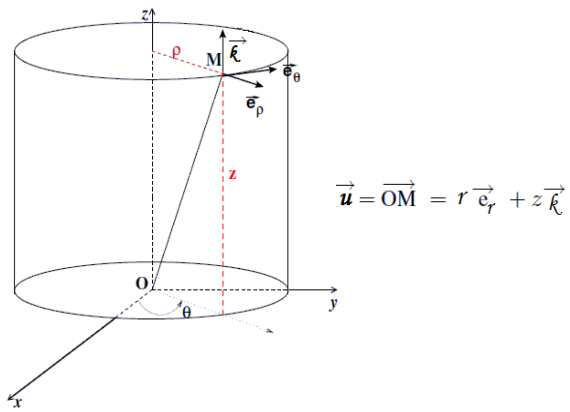
Par une simple utilisation du théorème de Pythagore, le module du vecteur est égale à :

$$\|\vec{u}\| = r = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

Avec : $\begin{cases} u_x = r\cos\theta \\ u_y = r\sin\theta \end{cases}$

Cependant, dans les phénomènes de physique et de science de terre et astronomie, le système de coordonnées cylindrique et sphérique est souvent utilisé, le vecteur $\vec{u}$ dans une base cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \vec{k})$est donné par :

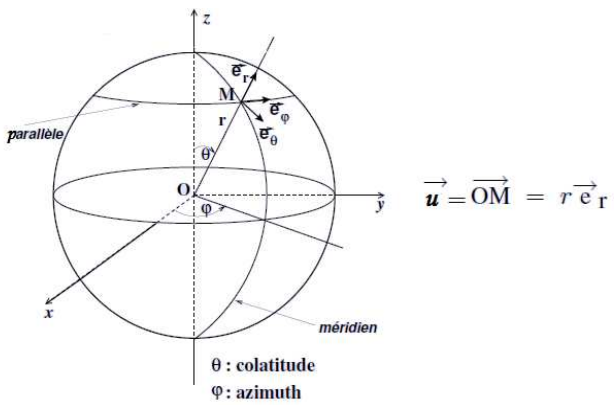
$$\vec{u} = r\,\overrightarrow{e_r} + z\,\vec{k}$$



Composante d'un vecteur dans les coordonnées cylindriques

Or que dans l'espace des coordonnées sphérique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$, le vecteur $\vec{u}$ est défini comme :

$$\vec{u} = r\,\overrightarrow{e_r}$$



Composante d'un vecteur dans les coordonnées Sphériques

Etant que **r** est calculé sur l'espace tridimensionnel comme la démontre l'égalité suivante :

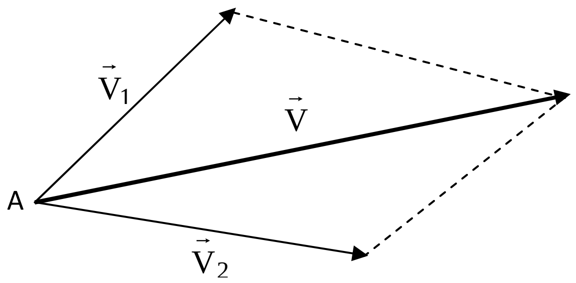
$$\|\vec{u}\| = r = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

Avec : $\begin{cases} u_x = r\sin\varphi\cos\theta \\ u_y = r\sin\varphi\sin\theta \\ u_z = r\cos\varphi \end{cases}$

IV. Opération sur les vecteurs :

1) Addition des vecteurs :

La sommation des deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ s'effectue en transportant les origines des deux vecteurs en un seul point A afin de construire un parallélogramme dont les cotés sont $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

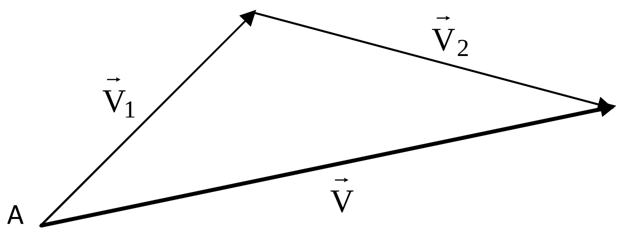


Règle du parallélogramme

Le vecteur résultant $\vec{V}$ est défini par :

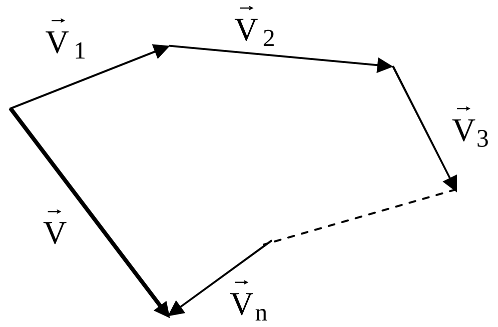
$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (V_{1x} + V_{1y} + V_{1z})\vec{e}_1 + (V_{2x} + V_{2y} + V_{2z})\vec{e}_2 + (V_{3x} + V_{3y} + V_{3z})\vec{e}_3$$

À partir de la construction du parallélogramme, nous pouvons déduire une autre méthode graphique pour l'addition des vecteurs. Cette méthode est connue sous le nom ***règle du triangle***. Nous pourrons dessiner seulement la moitie du parallélogramme. Le vecteur résultant de l'addition de deux vecteurs peut être trouvé en disposant $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ bout à bout et en joignant ensuite l'origine de $\vec{V}_1$ à l'extrémité de $\vec{V}_2$



Règle du triangle

L'addition de plusieurs vecteurs de fait en disposant tous les vecteurs bout à bout et en traçant le vecteur qui a comme origine, l'origine du premier vecteur, et comme extrémité, l'extrémité du dernier. Cette façon de procéder traduit graphiquement la *règle du polygone*.



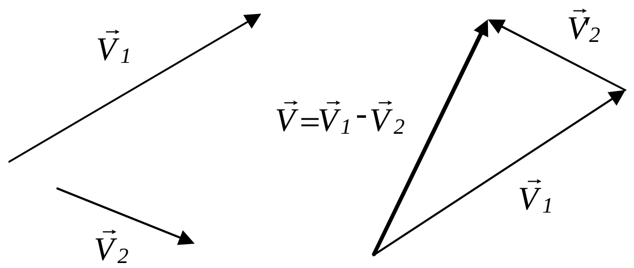
Règle du polygone

D'autre part, La sommation des vecteurs est :

- Commutative : $\vec{V}_1+\vec{V}_2=\vec{V}_2+\vec{V}_1$
- Associative : $(\vec{V}_1+\vec{V}_2)+\vec{V}_3=\vec{V}_1+(\vec{V}_2+\vec{V}_3)$
- Distributive par rapport à la somme vectorielle : $\lambda(\vec{V}_1+\vec{V}_2)=\lambda\vec{V}_1+\lambda\vec{V}_2$
- Distributive par rapport à la somme scalaire : $\vec{V}(\lambda_1+\lambda_2)=\lambda_1\vec{V}+\lambda_2\vec{V}$

2) ***Soustraction des vecteurs :***

La soustraction de deux vecteurs $\vec{V}_1-\vec{V}_2$ est le vecteur $\vec{V}$ défini comme l'addition du vecteur $\vec{V}_1$ à un vecteur $\vec{V}'_2$ égal et opposé à $\vec{V}_2$.



Soustraction de deux vecteurs

3) ***Décomposition des vecteurs :***

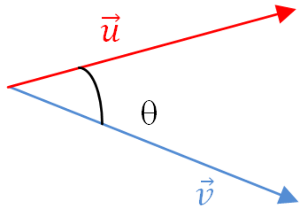
Nous avons montrés jusqu'à maintenant qu'il est toujours possible de remplacer deux ou plusieurs vecteurs par un vecteur unique. Réciproquement, il est toujours possible de remplacer un vecteur unique $\vec{V}$ par deux ou plusieurs vecteurs. Ces vecteurs sont appelés les *composantes* du vecteur original $\vec{V}$. Nous devons considérer deux cas d'intérêt particulier :

1. Une des composantes $\vec{V}_1$ est fixée. On calcule la deuxième composante en utilisant la règle du triangle.
2. Les deux directions de décomposition sont données. La grandeur et l'orientation des composantes sont obtenues en appliquant le principe du parallélogramme.

4) *Produit des vecteurs :*

A) Produit scalaire : initialement appelé produit linéaire de deux vecteurs, est une multiplication de deux vecteurs. Le résultat de ce produit est un scalaire (un nombre), et pas un vecteur, d'où son nom. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos\theta = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$



L'exemple fondamental du concept apparaît en dynamique avec le travail d'une force : si une force $\vec{F}$ déplace un corps selon un chemin rectiligne $\vec{d}$, alors le travail fourni par la force est donné par le produit scalaire des deux vecteurs.

Un produit scalaire de deux vecteurs est :

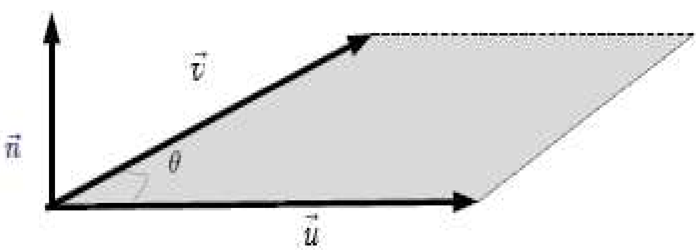
- Commutatif : $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$
- Associatif par rapport la multiplication d'un scalaire :

$$\lambda(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = (\lambda\vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \cdot (\lambda\vec{V}_2)$$

- Distributif par rapport la somme vectorielle : $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3$
- Nul si seulement si les deux vecteurs sont orthogonaux : $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \Leftrightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$

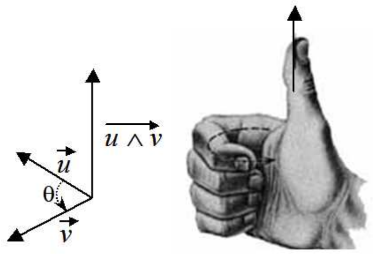
B) Produit vectoriel : est l'autre forme de multiplication de deux vecteurs dont le résultat, comme son nom l'indique, sera un vecteur. Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$ dans l'espace euclidien réel est noté $\vec{u} \wedge \vec{u}$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \sin\alpha\, \vec{n}$$



Représentation du plan de produit vectorielle

Etant que : $\vec{n}$ le vecteur unitaire normale à la surface délimité par le plan $(\vec{u},\vec{v})$ dont le sens est obtenu par la règle des trois doigts ou la règle de la main droite (dite aussi du bonhomme d'Ampère).



Règle de la main droite

Les composantes du vecteur résultat sont déterminées en utilisant le déterminant d'ordre 3 dans une base orthonormé vectorielle $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$:

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \overset{\oplus}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \cancel{\vec{j}} & \cancel{\vec{k}} \\ \cancel{x_1} & y_1 & z_1 \\ \cancel{x_2} & y_2 & z_2 \end{vmatrix}} + \overset{\ominus}{\begin{vmatrix} \cancel{\vec{i}} & \vec{j} & \cancel{\vec{k}} \\ x_1 & \cancel{y_1} & z_1 \\ x_2 & \cancel{y_2} & z_2 \end{vmatrix}} + \overset{\oplus}{\begin{vmatrix} \cancel{\vec{i}} & \cancel{\vec{j}} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & \cancel{z_1} \\ x_2 & y_2 & \cancel{z_2} \end{vmatrix}}$$

$$= +\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}$$

D'autre part, Le produit vectoriel est :

- Distributif à gauche et à droite pour la somme vectorielle :

$$(\vec{V}_2+\vec{V}_3)\wedge\vec{V}_1=\vec{V}_2\wedge\vec{V}_1+\vec{V}_3\wedge\vec{V}_1 \quad \text{et} \quad \vec{V}_1\wedge(\vec{V}_2+\vec{V}_3)=\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2+\vec{V}_1\wedge\vec{V}_3$$

- Associatif par rapport la multiplication par un scalaire :

$$\lambda(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2)=(\lambda\vec{V}_1)\wedge\vec{V}_2=\vec{V}_1\wedge(\lambda\vec{V}_2)$$

- Antisymétrique où anticommutatif :

$$(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2)=-(\vec{V}_2\wedge\vec{V}_1)$$

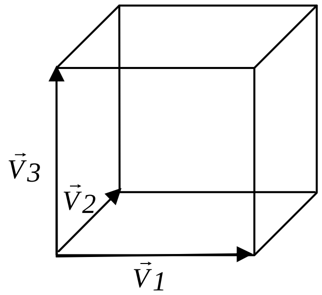
- Nul si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires :

$$\vec{V}_1 // \vec{V}_2 \Leftrightarrow \vec{V}_1\wedge\vec{V}_2=0$$

C) Produit mixte : On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ pris dans cet ordre, le nombre réel défini par:

$$\vec{V}_1\cdot(\vec{V}_2\wedge\vec{V}_3) \text{ ou parfois } (\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3)$$

Le produit mixte est donc un scalaire égal au volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$.



Néanmoins, les composantes du produit mixte est donné par :

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \\ V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \\ V_{3x} & V_{3y} & V_{3z} \end{vmatrix}$$

$$= V_{1x}(V_{2y}V_{3z} - V_{2z}V_{3y}) + V_{1y}(V_{2z}V_{3x} - V_{2x}V_{3z}) + V_{1z}(V_{2x}V_{3y} - V_{2y}V_{3x})$$

En outre, Le produit mixte est nul, si :

- les trois vecteurs sont dans le même plan ;
- deux des vecteurs sont colinéaires ;
- l'un des vecteurs est nul.

Cependant, le produit mixte est invariant scalaire par permutation circulaire direct des trois vecteurs car le produit scalaire est commutatif:

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{V}_2 \cdot (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) = \vec{V}_3 \cdot (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$$

D) Double produit vectoriel : Le double produit vectoriel de trois vecteurs respectifs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ est un vecteur $\vec{W}$ exprimé par la relation :

$$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 . \vec{V}_3).\vec{V}_2 - (\vec{V}_1 . \vec{V}_2).\vec{V}_3$$

Le vecteur $\vec{W}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{V}_1$ et au vecteur formé par le produit $(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$, il est donc dans le plan formé par les vecteurs $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$.

V. Torseur:

1) *Définition :*

Le torseur est un outil mathématique privilégié de la mécanique du solide. Il lui permet une représentation condensée et simplifiée des actions mécaniques, des vitesses et diverses autres grandeurs.

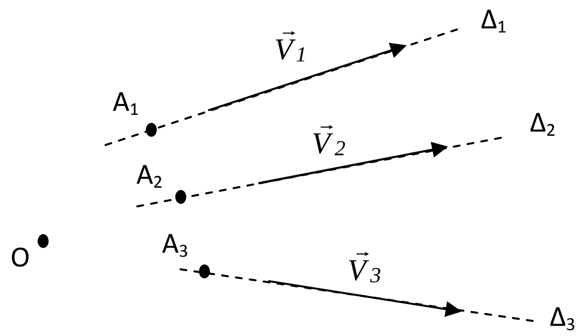
Soit un ensemble fini de vecteurs glissants $(\Delta_i, \vec{V}_i)$. Cet ensemble de vecteur constitue un torseur défini par ses deux éléments dits *éléments de réduction* :

- Un vecteur noté $\vec{R}$ (ne dépendant pas du point choisi) appelé la résultante du torseur :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V_i}$$

- Un champ de vecteur $\vec{M}$ (dépendant du point choisi) vérifiant la relation:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{V_i}$$



Alors, le torseur T au point O s'écrit :

$$\{T\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_O \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{Bmatrix}_O^b \quad \text{ou} \quad \{T\}_O = \{\vec{R}, \vec{M}_O\}$$

Etant que : R_x, R_y et R_z (resp M_x, M_y et M_z) sont les coordonnées de $\vec{R}$ (resp de $\vec{M}_O$) dans la base orthonormé $b(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

Néanmoins, les champs de moments où de vecteur sont relier entre eux par une relation fondamentale dite formule de transport des moments :

$$\forall O, \forall P : \vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}$$

Cette relation permet la détermination du torseur en tout point P du l'espace d'étude en connaissant juste la $\vec{R}$ et $\vec{M}_O$ en un point particulier O

Le type de torseur est différent selon le domaine d'étude, par exemple :

- Torseur cinématique $\{T\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_A \end{Bmatrix}_A$: torseur vitesse d'un solide S en mouvement

- Torseur force $\{T\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A$: $\vec{M}_A$ est le moment de la force $\vec{F}$.

Remarque : *Ne jamais omettre* le point choisi de réduction du torseur;

2) *Propriétés des torseurs*

a) *Invariants d'un torseur :* un invariant du torseur est un paramètre scalaire où vectorielle indépendant du point de réduction du torseur, tel que :

- La résultante $\vec{R}$ d'un torseur est un invariant.
- L'invariant scalaire (Automoment) d'un torseur est le produit : $I = \vec{R}.\vec{M}_O = \vec{R}.\vec{M}_P$
- L'invariant vectoriel d'un torseur est le vecteur : $\vec{I} = I\dfrac{\vec{R}}{R^2}$

b) *Axe central d'un torseur* : On appelle axe central d'un torseur, l'ensemble des points P pour lequel la résultante et le moment en P *sont colinéaires*. Le coefficient de linéarité s'appelle le *pas du torseur*.

$$\vec{M}_P = \lambda\vec{R}\ (\lambda \in IR) \Leftrightarrow P \in \Delta$$

Soit le $\{T\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A$ avec $\vec{R} \neq 0$ Si P est un point de l'axe central on a :

$$\vec{M}_P = \lambda\vec{R} \quad \text{et} \quad \vec{M}_P = \vec{M}_A + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{R} // \vec{M}_P \Leftrightarrow \vec{R} \wedge \vec{M}_P = \vec{0} = \vec{R}.(\vec{M}_A + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{R}) = \vec{R} \wedge \vec{M}_A + \vec{R} \wedge (\overrightarrow{PA} \wedge \vec{R})$$

En utilisant la relation du double produit vectoriel, on obtient l'équation vectorielle de l'axe central du torseur :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_A}{R^2} + \frac{\vec{R}.\overrightarrow{AP}}{R^2}.\vec{R} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_A}{R^2} + \mu\vec{R}$$

Etant que, λ le pas du torseur est :

$$\vec{M}_P = \lambda\vec{R} \Leftrightarrow \vec{M}_P.\vec{R} = \lambda\vec{R}.\vec{R} \Rightarrow \lambda = \frac{\vec{M}_P.\vec{R}}{R^2}$$

En outre, au niveau de l'axe central du torseur on à :

- le moment en tout point de l'axe central est invariant appeler *moment central du torseur*.
- la norme du moment central est minimale.
- le vecteur directeur de la droite de l'axe central du torseur est la résultante du torseur.

3) Espace vectoriel des torseurs

a) ***Addition de torseurs :*** La somme de deux torseurs $\{T\}_1$ et $\{T\}_2$ est un torseur $\{T\}_A$ dont les éléments de réduction sont respectivement la somme des éléments de réduction des deux torseurs $\{T\}_1$ et $\{T\}_2$:

$$\{T\}_A = \{T\}_1 + \{T\}_2 = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{M_{1A} + M_{2A}} \end{Bmatrix}_A$$

b) Produit par un scalaire : On définie le produit par un scalaire du torseur $\{T\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A$ par le torseur :

$$\{T\}' = \lambda\{T\} = \begin{Bmatrix} \lambda\vec{R} \\ \lambda\vec{M}_A \end{Bmatrix}_A$$

c) ***Produit de deux torseurs (Comoment) :*** On appelle comoment des deux torseurs $\{T\}_1$ et $\{T\}_2$, le réel défini par :

$$\Phi(A) = \{T\}_1 \otimes \{T\}_2 = \vec{R}_1.\vec{M}_{2A} + \vec{R}_2.\vec{M}_{1A}$$

Ce produit est indépendant du point de réduction des torseurs choisie dans le repère d'étude :

$$\begin{aligned}\Phi_A &= \vec{R}_1.\vec{M}_{2A} + \vec{R}_2.\vec{M}_{1A} = \vec{R}_1.(\vec{M}_{2B} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_2) + \vec{R}_2.(\vec{M}_{1B} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_1) \\ &= \Phi_B + \vec{R}_1.(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_2) + \vec{R}_2.(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_1) = \Phi_B \quad car \quad \vec{R}_1.(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_2) = -\vec{R}_2.(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_1)\end{aligned}$$

4) Type des torseurs :

a) ***Couple :*** On appelle couple un torseur dont la résultante est nulle. Le moment d'un couple est un invariant du torseur et par conséquent les invariants scalaire et vectoriel sont nuls aussi.

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix}_A$$

b) ***Glisseur*** **:** On appelle glisseur tout torseur de résultante non nulle qui admet un point P pour lequel son moment est nul.

$$\{G\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

c) *Torseur nul :* Un torseur est dit nul s'il existe un point où ses éléments de réduction sont nuls. Ils le sont alors en tout point.

$$\{0\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

d) *Torseur quelconque :* Un torseur est quelconque, si et seulement si, son invariant scalaire n'est pas nul.

$$\vec{R}.\vec{M}_A \neq \vec{0}$$

Statique des Solides

I. Introduction :

La statique traite l'équilibre des corps matériels par rapport à un système de référence supposé fixe, et ses moyens de réduire un système de forces à une forme élémentaire. Dans ce chapitre on aborde des notions sur le point matériel, le corps solide parfait, la force, le moment d'une force et les torseurs des forces extérieures.

Ensuite, on donne les conditions d'équilibres statiques, et les différents types des liaisons et de réactions.

II. Notions fondamentales de la statique :

1) Point matériel :

Un point matériel est une particule matérielle dont les dimensions sont négligeables. La différence par rapport au point géométrique, réside en le fait que le point matériel est supposé contenir une certaine quantité de matière concentrée. Un point matériel jouit donc de la propriété d'inertie, et d'interactions avec d'autres points matériels.

2) Solide parfait :

Tout corps physique se présente en mécanique comme un système de points matériels : on entend par-là un ensemble de particules matérielles qui agissent les unes sur les autres conformément au principe d'égalité de l'action et de la réaction.

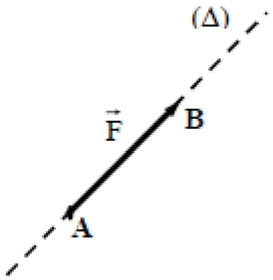
Par corps solide, on entend un corps dont deux points quelconques restent en toutes circonstances séparés par une distance inchangée. Autrement, le corps solide conserve une forme géométrique constante (il reste indéformable).

3) Force :

La force désigne en mécanique la mesure quantitative d'interaction mécanique des corps matériels. On appellera force l'action d'un corps sur un autre, se traduisant par une pression, une attraction, une répulsion….

L'action de la force sur le corps est déterminé par :

- le point d'application : A
- le sens : $A \rightarrow B$
- La direction où la ligne d'action : (Δ)
- le module où la valeur numérique : $|\vec{F}| = |\overrightarrow{AB}|$



Les forces exercées sur un solide sont de deux types. Les forces extérieures qui sont exercées par d'autres corps et appliquées aux points du solide donné. Par contre, les forces intérieures sont les forces d'interaction, qui se développent entre les points matériels du solide donné et dont leur résultante est nulle.

En outre, l'ensemble de ces forces se distinge en deux grand groupe selon le contacte avec du corps solide et l'entourage exterieur : force à distance et de contacte.

Néanmoin, la direction de la force est obtenue selon l'orientation d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ dont le module est un et qui appartient au support de la force (Δ).

Ce vecteur unitaire est obtenue en connaisant les composante de la force soit par :

A) *Coordonnées ponctuelle sur la ligne d'action :*

Soit deux points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ appartenant à la droite (Δ) support de la force $\vec{F}$; Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrira :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

Avec :

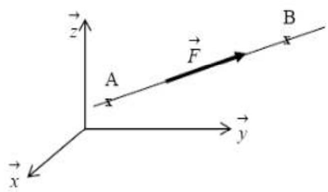
$$|\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2 + {F_z}^2}$$

La vecteur unitaire $\vec{u}$ le long de la ligne d'action de la force est donné par :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} = \frac{1}{F}(F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k})$$

Est donc, la force s'écrit comme:

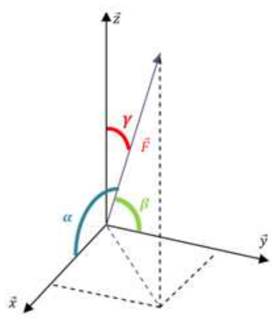
$$\vec{F} = F\vec{u}$$



B) *Cosnus directeur :*

Le vecteur force $\vec{F}$ forme des angles différents avec chacun des axes du repère d'étude, le cosinus directeur réfere au cosinus des ces angles tel que :

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\vec{F}\,.\,\vec{x}}{|\vec{F}|} = \dfrac{F_x}{F} \\ \cos\beta = \dfrac{\vec{F}\,.\,\vec{y}}{|\vec{F}|} = \dfrac{F_y}{F} \\ \cos\gamma = \dfrac{\vec{F}\,.\,\vec{z}}{|\vec{F}|} = \dfrac{F_z}{F} \end{cases}$$



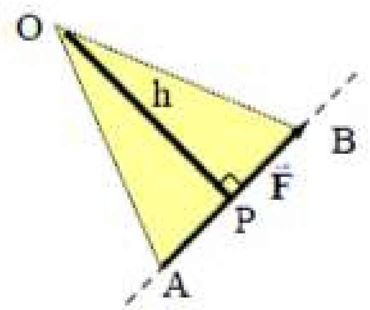
Sachant que : $\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$, le vecteur de direction $\vec{u}$ est definie par:

$$\vec{F} = F\,\vec{u} = F\left(\cos\alpha\,\vec{\imath} + \cos\beta\,\vec{\jmath} + \cos\gamma\,\vec{k}\right)$$

Etant que : $|\vec{u}| = 1$

III. Moment d'une force :

On définie dans un repère un vecteur de force $\overrightarrow{F}$ quelconque qui forme un plan avec un point arbitraire O du même repère. On appelle le *bras de levier* de la force $\overrightarrow{F}$ la perpendiculaire $\overrightarrow{OP}$ sur la direction AB de la force

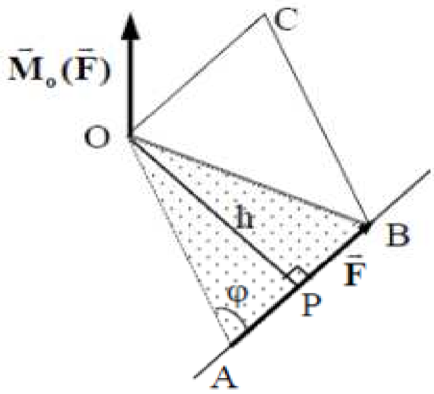


Bras de Levier d'une force

Le moment de la force $\overrightarrow{F}$ par rapport à O est le produit vectorielle du $\overrightarrow{F}$ par le bras de Levier qui peut être affecté des directions différentes.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F}) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$$

Le vecteur moment $\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F})$ est égal en module à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{F}$, il est toujours perpendiculaire au plan de ces deux vecteurs et lié en O.

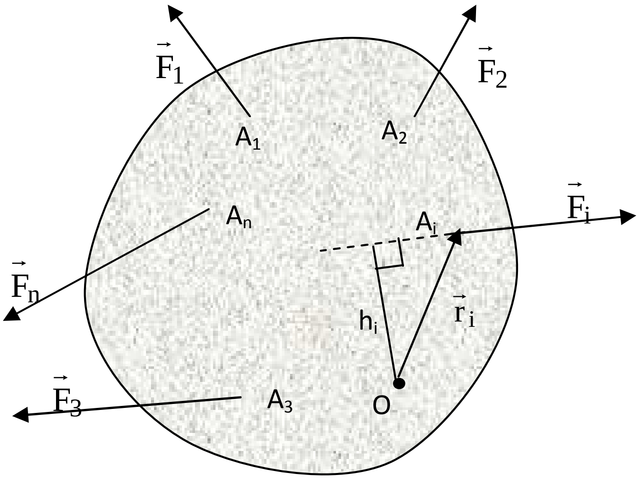


Le moment de la force $\overrightarrow{F}$

IV. Torseur de force :

1) Equilibre de solide :

Prenant un solide (S) soumis à des forces ($\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$,………$\overrightarrow{F_n}$) appliquées aux points (A_1, A_2,……..A_n) respectivement.



Le solide (S) est dit en équilibre si les forces externes qui agissent sur lui forment un système de forces équivalent à *zéro*, c'est-à-dire un système où la résultante et le moment résultant de toutes les forces par rapport à un point quelconque **O** du plan d'action des forces soient égaux à *zéro* :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \cdots + \vec{F_n} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F_e}) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F_i}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F_1}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F_2}) + \cdots + \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F_n}) = \vec{0}$$

2) Torseur de forces extérieures :

L'ensemble des efforts appliqués et des couples exercés sur un système matériel peuvent être représentés mathématiquement par un torseur, appelé torseur d'action, qui s'écrit en un point O :

$$[F_e]_o = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{R}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \\ \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F_i} \end{Bmatrix}$$

Par conséquent, le système matériel (S) est en équilibre statique si seulement si le torseur des efforts extérieurs est un torseur nul :

$$[F_e]_o = [0]_o \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{R}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

V. Liaison et réaction :

1) *Définition :*

Les solides considérés en mécanique peuvent être libres ou liés, suivant le cas. Un solide est dit libre s'il peut se déplacer en toute direction par contre le solide est lié s'il ne peut se déplacer que dans des directions déterminées ou s'il est assujetti à rester immobile.

Les corps matériels rigide qui s'opposent au mouvement du solide sont appelés liaisons, et les forces qu'ils exercent sur le solide, sont des réactions de liaisons.

La direction de vecteur réaction $\overrightarrow{R}$ dépend de la surface de contacte :

A) Contact sans frottement :

Dans le cas d'une liaison sans frottement (surface lisse) entre un solide et un plan, la réaction est toujours suivant la *normale au plan de contact* quelques soit le nombre de forces extérieures appliquées au solide.

Dans le cas d'un contact sans frottement, la condition d'équilibre est réalisée, si la somme de toutes les forces extérieures appliquées en ce point est égale à la réaction normale en ce point :

$$\vec{N} + \sum_i \vec{F_i} = \vec{0}$$

B) Contacte avec frottement :

Dans le cas d'une surface avec frottement, la réaction $\vec{R}$ est dirigée dans le sens contraire du mouvement et peut prendre une direction quelconque dans le plan formé par la force de frottement $\overrightarrow{F_r}$ et la force normale $\vec{N}$ au plan de contacte.

Dans ce cas, la somme des actions et des réactions est nulle ce qui traduit par :

$$\vec{N} + \overrightarrow{F_r} + \sum_i \vec{F_i} = \vec{0}$$

Etant que : $\overrightarrow{R} = \vec{N} + \overrightarrow{F_r}$

2) *Type de liaison :*

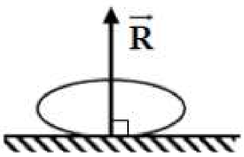
Les liaisons peuvent être matérialisées soit par des appuis, articulations, encastrements, etc. Dans les cas énumérés sont confectionnées à partir d'un matériau absolument rigide, et que le frottement, aux points de contact avec les solides considérés, est généralement négligeable.

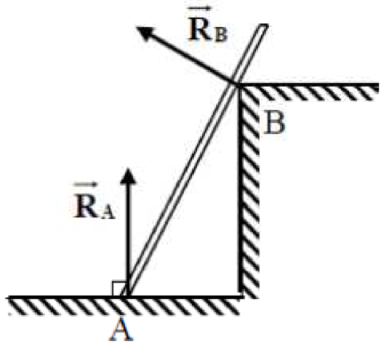
A) Liaison ponctuelle (appui simple/plan) :

Le solide repose simplement sur une surface polie dont la réaction est appliquée au solide en point de contact et dirigée suivant la normale à la surface d'appui.

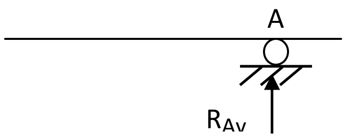
Dans ce type de liaison l'appui du solide est soit :

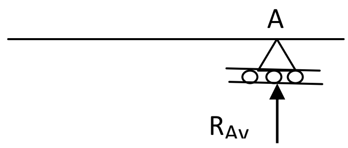
- ***Simple :*** le solide repose sur un substrat horizontal, vertical où incliné de façon permanente en un seul point de contacte quelque soit la forme du solide (S)





- ***A rouleau où à dilatation :*** le solide repose sur un rouleau cylindrique qui permet une translation dans une direction précise selon le chemin de roulement des rouleaux autour du point d'appui comme exemple les bases des ponts.



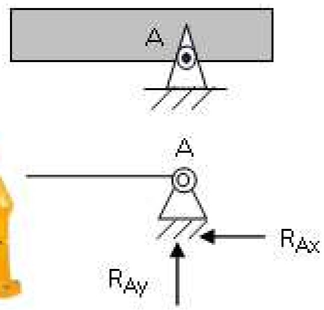


B) <u>Liaison articulée (appui double) :</u>

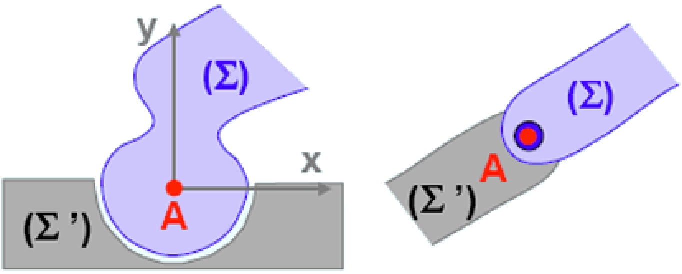
Une articulation est le lieu de réunion de deux ou plusieurs solides, elle n'est pas mobiles et elle se définie lorsque les solide sont relier entre eux où soudés.

Dans la pratique, le corps solide est articulé soit par :

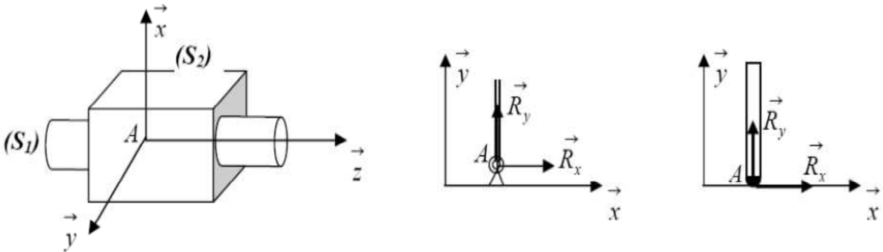
- ***Articulation rotoïde (charnière) :*** permet uniquement une rotation relative sur un pivot cylindrique commun, elle est équivalente à un appui fixe comme exemple bras humain où le robot manipulatrice



- ***Articulation cylindrique :*** est une articulation dans laquelle s'affrontent une portion de cylindre plein et une portion de cylindre creux. C'est une articulation synoviale qui est mobile et qui permet une rotation et une translation relative sur le même axe. Il n'y a donc qu'un degré de liberté.



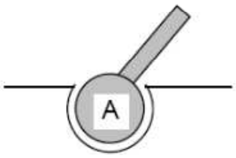
L'articulation cylindrique introduisant deux contraintes et deux inconnues : qui sont la composante de force perpendiculaire à la direction du mouvement de translation et un couple s'opposant à la rotation relative donc la composante suivant l'axe de cylindre est nulle comme exemple :

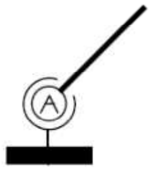


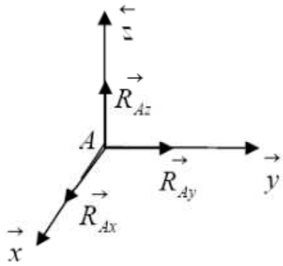
$\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay}$ Avec $\vec{R}_{Az} = \vec{0}$ (la réaction suivant l'axe de l'articulation Oz est nulle).

- ***Articulation sphérique (rotule):*** le solide peut bouger dans tous les sens de l'espace en restant en contacte avec un autre solide comme celles de l'épaule, la hanche humain, les attelages de caravane, les billettes.

La liaison rotule s'identifie facilement par ses degrés de libertés: elle lie complètement deux pièces en translation mais les laisse libres en rotation. Elle comporte donc 3 degrés de liaisons (les 3 translations) et 3 degrés de liberté (les 3 rotations).

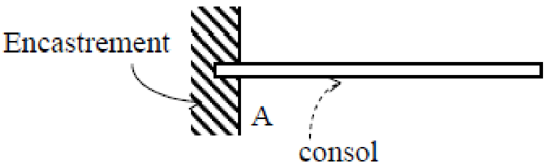


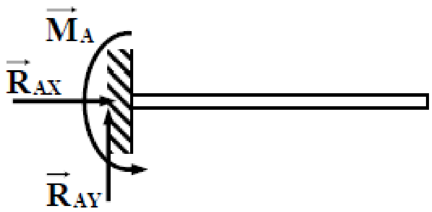




C) Liaison d'encastrement :

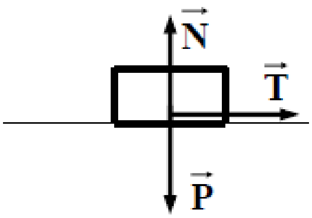
La liaison encastrement ne permet aucun mouvement relatif entre les deux solides. Leurs réactions sont représentées par un moment qui empêche la rotation du solide, et des réactions horizontale et verticale, qui empêchent les déplacements horizontaux et verticaux, c'est donc une fixation à zéro degré de liberté.

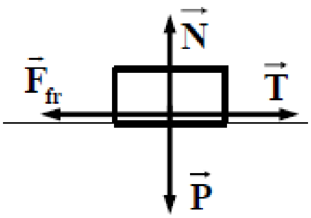




VI. Frottement statique :

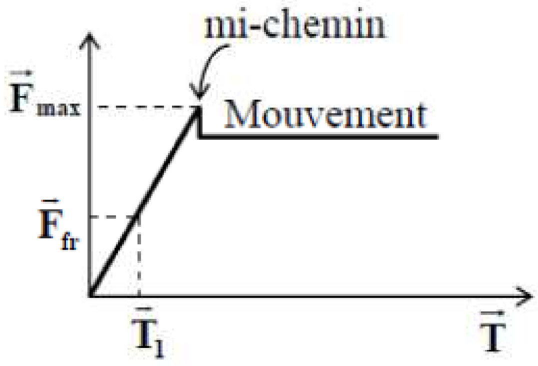
1) ***Définition :*** Soit un solide de poids $\vec{P}$ qui repose sur une surface horizontale. Appliquons à ce solide une force horizontale $\vec{T}$





La force du poids $\vec{P}$ est équilibrée par la réaction $\vec{N}$. Le solide peut rester au repos, dans ce cas, il existe une autre force qui s'oppose au mouvement du solide de même direction et de sens opposée à $\vec{T}$ On appellera cette force, force de frottement de glissement $\vec{F_r}$.

Augmentons progressivement la force $\vec{T}$; la force $\vec{F_r}$ augmente avec elle jusqu'à une valeur maximale Fmax (Fr $\leq$ Fmax) où le corps solide est en mouvement. La force maximale Fmax correspond au cas limite de l'équilibre du solide, c'est à dire à l'instant où celui-ci est à mi-chemin (dans la zone de transition) entre le repos et le mouvement.



Alors, on définie la force de frottement de glissement comme une force résistante qui agit dans le plan tangent aux deux surfaces de contact dans le sens opposé à la force motrice et de direction parallèle aux surfaces de contact.

La force de frottement qui agit lorsque le corps se trouve avant le mouvement (immobile) s'appelle force de frottement de repos ou force de *frottement statique*.

D'après la loi d'Amontons – Coulomb, la valeur maximale du module de la force de frottement statique Fmax où Fs est proportionnelle à la pression normale du solide sur la surface d'appui:

$$\overrightarrow{F_{max}} = \mu_s \vec{N}$$

Etant que : $\boldsymbol{\mu_s}$ est le coefficient de frottement de glissement, qui dépend des natures des matériaux des surfaces en contact et de l'état de ces surfaces.

2) <u>Angle de frottement :</u> Lorsque le corps solide est au repos, la réaction totale d'une surface rugueuse $\vec{R}$, compte tenue du frottement, est déterminée en module et en direction par la diagonale du rectangle formé par la réaction normale $\vec{N}$ et la force de frottement $\vec{F_r}$.

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F_r}$$

La direction de $\vec{R}$ fait un angle β avec $\vec{N}$ du coté opposé à $\vec{T}$. Dans ce cas, plus que $\vec{T}$ est grand, plus la direction de $\vec{R}$ s'écarte de la normale.

L'écart maximal est constaté lorsque $F_r = Fmax$. La valeur maximale de l'angle d'écart β s'appelle angle de frottement φ, et est exprimée par :

$$Tg\varphi = \frac{F_{max}}{N} = \frac{\mu_s\, N}{N} = \mu_s$$

Cinématiques des Systèmes

I. Introduction :

La cinématique traite le mouvement mécanique uniquement de point de vue géométrique, sans tenir compte des causes qui ont provoqué ce mouvement. La cinématique étudie le changement de position géométrique des corps dans le temps. Or, cela ne peut être fait que par rapport à un référentiel où l'on pourrait déterminer la position du corps mobile.

II. Notion d'un solide parfait « indéformable » :

Un solide indéformable (S_k) est par définition composé d'une multitude de particules, ou points matériels, dont les distances mutuelles sont constantes dans le temps. Par conséquent, les vitesses entre ces points ne sont pas indépendantes.

On peut privilégier un point O_k dans le quelle on défini une base orthonormée $R_k(o_k, \overrightarrow{x_k}, \overrightarrow{y_k}, \overrightarrow{z_k})$ liée au solide (S_k) ; la position de ce repère R_k par rapport à un autre repère Ri est définie par 6 paramètres ou degrés de liberté (*ddl*) :

- Trois (3) *translations* pour la position du point O_k .
- Trois (3) rotations pour l'orientation du repère R_k.

III. Mouvement d'un repère mobile par rapport à un repère fixe :

Soit un repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ pris comme référence dit *fixe* (appelé parfois *repère d'étude*) et $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ un repère dit *mobile* (par rapport à R_i et appelé parfois *repère de projection*). Les deux repères sont *orthonormés directs*.

Tout point de l'espace peut être totalement repéré dans R_k et déduite par ailleurs dans R_i où inversement en connaissant le mouvement de R_k par rapport à R_i.

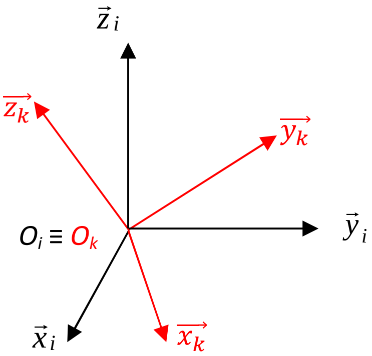
Le mouvement du repère R_k est complètement déterminée si :

- La position de son centre (ou origine) O_k est totalement connu dans R_i ;
- L'orientation des axes de R_k est connu par rapport à ceux de R_i.

1) ***Repérage du centre O_k du repère R_k :*** Le repérage du point O_k centre du repère R_k est déterminé par les composantes du vecteur liant les deux centres des repères dans R_i, ceci se traduit par les relations suivantes :

$$\overrightarrow{O_iO_k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{R_i} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{O_iO_k}\,\vec{x_i} \\ \overrightarrow{O_iO_k}\,\vec{y_i} \\ \overrightarrow{O_iO_k}\,\vec{z_i} \end{pmatrix}_{R_i}$$

2) Repérage de l'orientation des axes du repère R_k : Pour repérer l'orientation des axes du repère R_k on ramène ce repère en O_i de telle sorte que les centres O_i et O_k soient confondues $(O_i \equiv O_k)$



Le repère R_k est en rotation quelconque par rapport au repère R_i, donc chacun des vecteurs unitaires $(\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ aura des composantes par rapport le repère R_i, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{cases} \vec{x_k} = \alpha_{11}\vec{x_i} + \alpha_{12}\vec{y_i} + \alpha_{13}\vec{z_i} \\ \vec{y_k} = \alpha_{21}\vec{x_i} + \alpha_{22}\vec{y_i} + \alpha_{23}\vec{z_i} \\ \vec{z_k} = \alpha_{31}\vec{x_i} + \alpha_{32}\vec{y_i} + \alpha_{33}\vec{z_i} \end{cases}$$

La forme matricielle des équations de passage d'un vecteur unitaire du repère au repère fixe crée la matrice de passage (A) qui permet la coïncidence le système entre les deux repères R_i et R_k :

$$\begin{pmatrix} \vec{x_k} \\ \vec{y_k} \\ \vec{z_k} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \vec{x_i} \\ \vec{y_i} \\ \vec{z_i} \end{pmatrix}$$

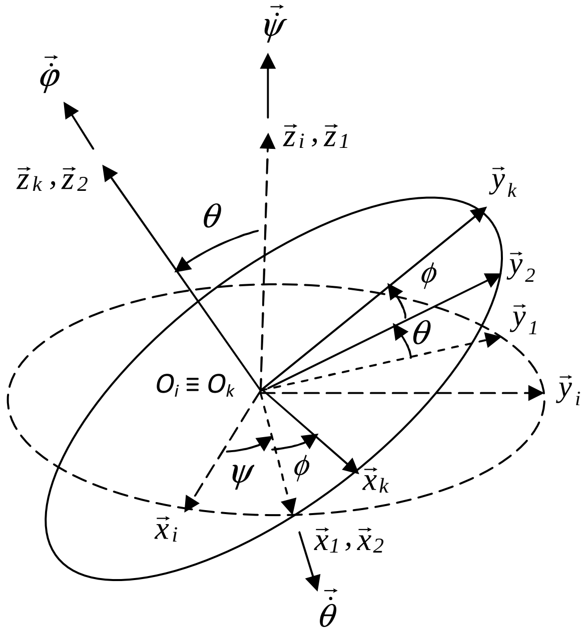
Les éléments α_{ik} de la matrice A sont la projection de la base R_k sur la base R_i :

$$\alpha_{ik} = \vec{x}_i \cdot \vec{x}_k$$

IV. Angles d'Euler (les axes sont tous distincts) :

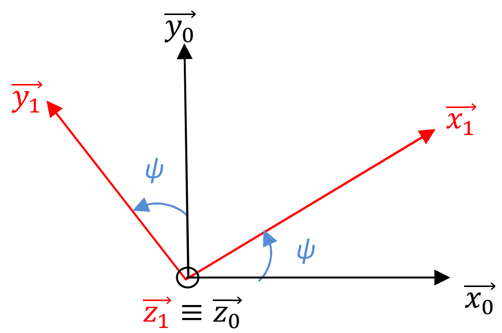
Toute rotation peut être considérée comme la suite de trois rotations élémentaires, autour de trois axes particuliers, et d'amplitudes égales aux *angles d'Euler*.

Les *angles d'Euler* qui sont en nombre de trois : ψ, θ et φ permet le passage du repère R_0 au repère R par le passage sur deux repères intermédiaires R_1 et R_2 qui seront définis par la suite.



1) <u>Angle de précession :</u>

L'angle de précession ψ est l'amplitude de la première rotation qui fait naissance d'un nouveau repère $R_1(o, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$, cette rotation est autour d'un axe commun $(\overrightarrow{z_1} \equiv \overrightarrow{z_0})$ entre les deux repères R_1 et R_0.



Néanmois, la rotation instantanée du repère R_1 par rapprt au répère fixe est donné par :

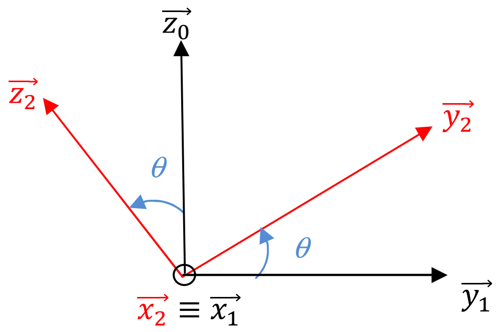
$$\overrightarrow{\Omega_1^0} = \frac{d}{dt}\left(\psi\left(\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{y_1}\right)\right) = \dot{\psi}\,\overrightarrow{z_1}$$

Par ailleurs, le passage du repère R_1au repère R_0 est donné par la matrice A_ψ:

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{z_1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_\psi} \begin{pmatrix} \overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{z_0} \end{pmatrix}$$

2) Angle de nutation :

La deuxième rotation d'Euler est dite angle de nutation θ,elle permet la création d'un autre repère intermédiaire $R_2(0,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$ qui est en rotation par rapport à R_1suivant un axe commun $(\overrightarrow{x_1} \equiv \overrightarrow{x_2})$ entre les deux repères.



Le vecteur de rotation instantanée du repère R_2 au répère R_1 est :

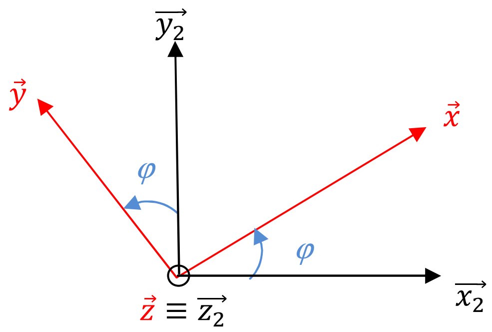
$$\overrightarrow{\Omega_2^1} = \frac{d}{dt}\left(\theta\left(\overrightarrow{y_2} \wedge \overrightarrow{z_2}\right)\right) = \dot{\theta}\,\overrightarrow{x_1}$$

Est donc, la matrice de passage A_θ entre le repère R_1 et R_2 est :

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{x_2} \\ \overrightarrow{y_2} \\ \overrightarrow{z_2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{A_\theta} \begin{pmatrix} \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{z_1} \end{pmatrix}$$

3) Angle de rotation propre :

L'angle de rotation propre φ est la dernière rotation d'Euler pour atteindre le repère finale R, elle est selon l'axe commun $(\overrightarrow{z_2} \equiv \vec{z})$ des deux repères R_2 et R.



par définition, Néanmois, le vecteur de rotation instantanée du repère R_2 par rapprt au répère R est:

$$\overrightarrow{\Omega_R^2} = \frac{d}{dt}\left(\varphi\left(\overrightarrow{x_2} \wedge \overrightarrow{y_2}\right)\right) = \dot{\varphi}\,\overrightarrow{z_1}$$

Par ailleurs, le passage du repère R_2 au repère R est donné par la matrice A_φ:

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{x_2} \\ \overrightarrow{y_2} \\ \overrightarrow{z_2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_\varphi} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$$

En outre, la marice globale qui permet le passage direct du repère R_0 à R est le produit des trois matrice A_ψ, A_θ et A_φ :

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{z_0} \end{pmatrix} = A_\psi .\ A_\theta\ .\ A_\varphi \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$$

Et le vecteur de rotation instantané globale est la somme des vecteurs de rotation :

$$\overrightarrow{\Omega_R^0} = \overrightarrow{\Omega_R^2} + \overrightarrow{\Omega_2^1} + \overrightarrow{\Omega_1^0} = \dot{\psi}\,\overrightarrow{z_1} + \dot{\theta}\,\overrightarrow{x_1} + \dot{\varphi}\,\overrightarrow{z_1}$$

V. Différentiation d'un vecteur dans un système d'axes mobiles :

Considérons un repère R_k en mouvement par rapport à un repère fixe R_i. Les composantes d'un vecteur $\vec{A}$ dans le repère mobile $R_k\left(o, \overrightarrow{x_k}, \overrightarrow{y_k}, \overrightarrow{z_k}\right)$ est :

$$\vec{A} = A_x\overrightarrow{x_k} + A_y\overrightarrow{y_k} + A_z\overrightarrow{z_k}$$

Si nous dérivons ceci en considérons le mouvement des vecteurs $\overrightarrow{x_k}, \overrightarrow{y_k}, \overrightarrow{z_k}$ par rapport à repère R_i, on obtient :

$$\frac{d^i\vec{A}}{dt} = \frac{d^iA_x}{dt}\overrightarrow{x_k} + \frac{d^iA_y}{dt}\overrightarrow{y_k} + \frac{d^iA_z}{dt}\overrightarrow{z_k} + \frac{d^i\overrightarrow{x_k}}{dt}A_x + \frac{d^i\overrightarrow{y_k}}{dt}A_y + \frac{d^i\overrightarrow{z_k}}{dt}A_z$$

Les trois premiers termes existeraient seuls si l'on avait considéré les vecteurs de base comme fixes, ils représentent donc la dérivée du vecteur $\vec{A}$ dans le repère mobile : $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{Rk}$.

Utilisant la formule de la base mobile, les trois dernière termes sont égales à :

$$\frac{d\vec{x}_k}{dt} = (\vec{\Omega}_k)_{R_i} \wedge \vec{x}_k = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{x}_k$$

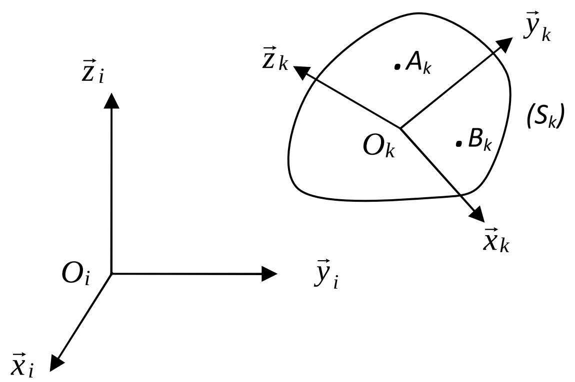
Et donc Finalement :

$$\frac{d^i\vec{A}}{dt} = \frac{d^k\vec{A}}{dt} + \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \vec{A}$$

VI. Champ des vitesses d'un solide

A chaque point (A_k) d'un solide (S), on peut associer un vecteur vitesse absolue par rapport au repère fixe R_i défini par :

$$\vec{V}^i(A_k) = \frac{d^i\,\overrightarrow{O_i A_k}}{dt}$$



Sachant que le repère R_k est en mouvement par rapport au repère fixe, le vecteur vitesse absolue peut être écrit en fonction du repère mobile en utilisant la formule de dérivation :

$$\vec{V}^i(A_k) = \frac{d^i}{dt}(\overrightarrow{O_i A_k}) = \frac{d^k}{dt}(\overrightarrow{O_i A_k}) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_i A_k}$$

Par ailleurs la vitesse absolue au point A_k peut obtenue à l'aide de la vitesse d'un autre point B_k du solide indéformable (S) qui est en mouvement par rapport au repère fixe selon :

$$\vec{V}^i(B_k) - \vec{V}^i(A_k) = \frac{d^k}{dt}(\overrightarrow{A_k B_k}) + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\overrightarrow{A_k B_k})$$

$Or : \overrightarrow{A_k B_k} = Cte \ \ dans\ (\vec{R}_k) \Rightarrow \frac{d^k}{dt}(\overrightarrow{A_k B_k}) = 0$

D'où, la formule de vitesse par cinématique du solide :

$$\vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\overrightarrow{A_k B_k})$$

Cette dernière relation est très importante dans la cinématique, elle permet de déduire la vitesse de tous les autres points du solide en connaissant la vitesse de rotation du repère lié à celui-ci

VII. Champ des accélérations d'un solide :

A chaque point d'un solide (S), on associer un vecteur accélération absolue par rapport au repère fixe défini par :

$$\vec{\gamma}^i(A_k) = \frac{d^i}{dt}(\vec{V}^i(A_k))$$

Elle est obtenue en fonction des paramètres du repère mobile par dérivation :

$$\overrightarrow{\gamma^i}(A_k) = \frac{d^k \overrightarrow{V^i}(A_k)}{dt} + \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \overrightarrow{V^i}(A_k)$$

En outre, et sachant que : $\vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\overrightarrow{A_k B_k})$ l'accélération absolue peut s'écrit comme :

$$\vec{\gamma}^{i}(B_k) = \frac{d^i}{dt}(\vec{V}^{i}(A_k)) + \frac{d^i}{dt}(\vec{\Omega}_k^i \wedge (\overrightarrow{A_k B_k}))$$

$$\Leftrightarrow \vec{\gamma}^{i}(B_k) = \frac{d^i}{dt}(\vec{V}^{i}(A_k)) + \frac{d^i}{dt}(\vec{\Omega}_k^i) \wedge \overrightarrow{A_k B_k} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \frac{d^i}{dt}(\overrightarrow{A_k B_k})$$

Or que:

$$\frac{d^i}{dt}(\overrightarrow{A_k B_k}) = \underbrace{\frac{d^k}{dt}(\overrightarrow{A_k B_k})}_{0} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k}$$

D'où, la forme finale de l'accélération absolue par cinématique du solide:

$$\vec{\gamma}^{i}(B_k) = \vec{\gamma}^{i}(A_k) + \frac{d^i}{dt}(\vec{\Omega}_k^i) \wedge \overrightarrow{A_k B_k} + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k})$$

VIII. Torseur cinématique :

Le torseur cinématique exprimé au point A_k du solide **(S)** dans son mouvement par rapport au repère R_i , est défini par :

$$[C]_{B_k} = \begin{cases} \vec{\Omega}_k^i \\ \vec{V}^i(B_k) \end{cases}$$

Ce torseur caractérise complètement le mouvement d'un solide par rapport au repère R_i en ce qui concerne les vitesses. Il permet de représenter de façon pratique le champ des vitesses et donc décrire les comportements de translation, rotation et mouvement quelconque indépendamment des causes de mouvement.

Remarque : Comme les éléments de réduction du torseur cinématique sont des fonctions de temps alors le torseur cinématique en dépend, il a donc à chaque instant une résultante et un champ de vitesse différent.

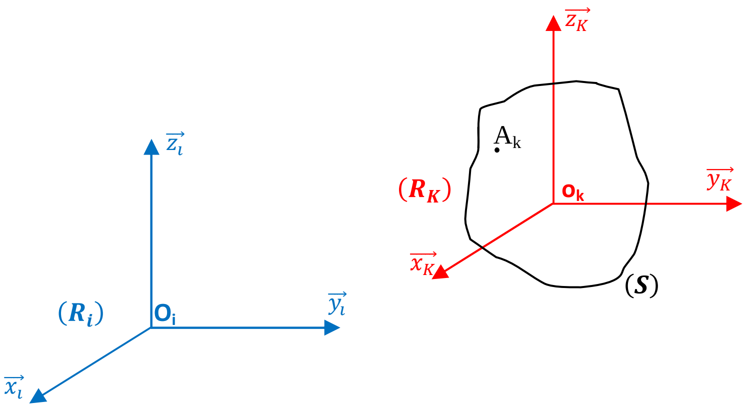
IX. Mouvements et champs de vitesse et accélération :

1) *Mouvement de translation*

Un solide (S) lié à un repère R_k est dit en translation par rapport à un repère R_i si les axes de R_k garde une direction fixe par rapport à R_i au cours du temps ($\overrightarrow{O_k A_k} = Cte$) :

$$\vec{\Omega}_k^i = \vec{0}$$
$$\vec{V}_k^i(A_k) = \vec{V}_k^i(O_k)$$

Etant que : $\vec{V}_k^i(A_k)$: vitesse du point A_k appartenant à (S) par rapport à R_i.



Dans un mouvement de translation, tous les points du solide (S) décrivent les même trajectoires à chaque instant ils possèdent des vitesses et des accélérations égales en module et en direction, le vecteur rotation est nul.

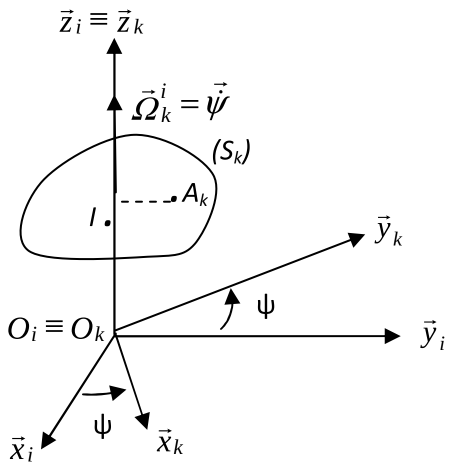
Alors, Le *torseur cinématique* dans ce type de mouvement définie un *couple* :

$$[C]_{o_k} = \begin{cases} \vec{\Omega}_k^i = \vec{0} \\ \vec{V}^i(o_k) \end{cases}$$

2) *Mouvement de rotation*

Un solide (S) lié à un repère R_k est dit en rotation par rapport à un repère R_i si un axe de R_k reste fixe à tout instant dans R_i.

Soit le point I de l'axe de rotation : $I \in \vec{z}_i \; ou \; \vec{z}_k$ et $\vec{\Omega}_k^i = \dot{\psi}\,\vec{z}_i = \dot{\psi}\,\vec{z}_k$, alors :



La vitesse au point I est donnée par : $\vec{V}_k^i(I) = \underbrace{\vec{V}^k(O_k)}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k I}}_{=\vec{0}\,(\vec{\Omega}_k^i \,//\, \overrightarrow{O_k I})} = \vec{0}$

Et par cinématique du solide nous avons :

$$\overrightarrow{V^i}(A_k) = \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \overrightarrow{IA_k}$$

Ce qui permet de dire que le *torseur cinématique* dans un mouvement de rotation est équivalent à un *glisseur* :

$$[C]_I = \begin{cases} \vec{\Omega}_k^i \\ \vec{V}^i(I) = \vec{0} \end{cases}$$

L'axe central du glisseur n'est que l'axe instantané de rotation de R_k par rapport à R_i.

D'autre part, l'accélération absolue au point A_k est :

$$\overrightarrow{\gamma^i}(A_k) = \frac{d^i \overrightarrow{V^i}(A_k)}{dt} = \frac{d^i \overrightarrow{\Omega_k^i}}{dt} \wedge \overrightarrow{IA_k} + \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \frac{d^i \overrightarrow{IA_k}}{dt}$$

Or que le dernier terme est obtenue par :

$$\frac{d^i}{dt}(\overrightarrow{IA_k}) = \frac{d^k}{dt}(\overrightarrow{IA_k}) + (\vec{\Omega}_k^i) \wedge \overrightarrow{IA_k} \quad avec \quad \frac{d^k}{dt}(\overrightarrow{IA_k}) = 0$$

Donc, l'accélération absolue dans un mouvement de rotation est:

$$\overrightarrow{\gamma^i}(A_k) = \frac{d^i \overrightarrow{V^i}(A_k)}{dt} = \frac{d^i \overrightarrow{\Omega_k^i}}{dt} \wedge \overrightarrow{IA_k} + \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \overrightarrow{IA_k}\right)$$

Utilisant les propriétés du produit vectoriel, on :

$$\vec{\Omega}_k^i \wedge (\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{IA_k}) = \vec{\Omega}_k^i \cdot \underbrace{(\vec{\Omega}_k^i \cdot \overrightarrow{IA_k})}_{=0\,(\vec{\Omega}_k^i \perp \overrightarrow{IA_k})} - \overrightarrow{IA_k} \cdot (\vec{\Omega}_k^i \cdot \vec{\Omega}_k^i) = -\overrightarrow{IA_k} \cdot (\vec{\Omega}_k^i \cdot \vec{\Omega}_k^i)$$

Et donc :

$$\vec{\gamma}^i(A_k) = \overrightarrow{IA_k} \cdot (\vec{\Omega}_k^i)^2 + \frac{d}{dt}(\vec{\Omega}_k^i) \wedge \overrightarrow{IA_k} = \underbrace{\vec{\gamma}_n^i(A_k)}_{Normale} + \underbrace{\vec{\gamma}_t^i(A_k)}_{Tangentielle}$$

3) ***Mouvement hélicoïdal :***

Un solide (S_k) lié à un repère R_k est animé d'un mouvement hélicoïdal par rapport à un repère fixe R_i, si :

- Un axe de R_k reste en coïncidence avec un axe de R_i.
- L'angle ψ qui repère la rotation autour de l'axe commun de R_k par rapport à R_i, est proportionnel à la côte z qui repère le déplacement du point O_k par rapport au point O_i :

Un point A_k, de (S_k), en mouvement sur une trajectoire hélicoïdale dans R_i, décrit une hélice droite, dessinée sur un cylindre de rayon $\left|\overrightarrow{O_k A_k}\right| = a$.

Les coordonnées cartésiennes du point A_k dans R_i sont données par les équations paramétriques en fonction du temps sous la forme suivante :

$$x = a\cos(\psi); \quad y = a\sin(\psi); \quad z = b\psi$$

Avec : a et b sont respectivement le rayon et le pas réduit de l'hélice ($b = h/2\pi$, h est le pas de l'hélice).

Si on suppose que : $\overrightarrow{O_i O_k} = z\,\vec{z}_i = z\,\vec{z}_k$, le vecteur position du point A_k est alors donné dans R_k par :

$$\overrightarrow{O_i A_k} = a\,\vec{x}_k + z\,\vec{z}_k = a\,\vec{x}_k + b\psi\,\vec{z}_k$$

Le vecteur vitesse est donc :

$$\vec{V}(A_k) = a(\vec{\dot{\psi}} \wedge \vec{x}_k) + b\dot{\psi}\,\vec{z}_k = a\dot{\psi}\,\vec{y}_k + b\dot{\psi}\,\vec{z}_k$$

Ainsi que le vecteur accélération est donnée par:

$$\vec{\gamma}(A_k) = -a\dot{\psi}^2\,\vec{x}_k + a\ddot{\psi}\,\vec{y}_k\, b\ddot{\psi}\,\vec{z}_k$$

4) *Mouvement composé du point matériel :*

Examinons le mouvement composé du point *M*, se déplaçant par rapport au système de référence mobile $R_j(O_j, \vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_j)$, qui se meut à son tour d'une manière arbitraire par rapport au système de référence $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ considéré comme fixe.

Pour déterminer les relations de composition de mouvement, il suffit d'exprimer le vecteur position sous la forme :

$$\overrightarrow{O_i M} = \overrightarrow{O_i O_j} + \overrightarrow{O_j M}$$

La vitesse du point *M* par rapport à R_i est par définition :

$$\vec{V}(M/R_i) = \vec{V}^i(M) = \frac{d^i(\overrightarrow{O_i M})}{dt} = \frac{d^i(\overrightarrow{O_i O_j})}{dt} + \frac{d^i(\overrightarrow{O_j M})}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \vec{V}^i(M) = \vec{V}^i(O_j) + \frac{d^j(\overrightarrow{O_j M})}{dt} + \Omega_j^i \wedge \overrightarrow{O_j M}$$

$$\Leftrightarrow \vec{V}^i(M) = \vec{V}^i(O_j) + \vec{V}^j(M) + \Omega_j^i \wedge \overrightarrow{O_j M}$$

Et donc la vitesse du point M 's'écrit :

$$\vec{V}^i(M) = \vec{V}^j(M) + \vec{V}_j^i(M)$$

Etant que :

$\vec{V}^i(M) = \vec{V}_a(M)$ c'est la *vitesse absolue* du *M* pour un observateur lié à R_i

$\vec{V}^j(M) = \vec{V}_r(M)$ c'est la *vitesse relative* où la vitesse du *M* pour à un observateur lié à R_j.

$\vec{V}^i_j(M)=\vec{V}^i(O_j)+\vec{\Omega}^i_j\wedge\overrightarrow{O_jM}=\vec{V}_e(M)$ c'est la *vitesse d'entraînement* où la vitesse à l'instant ***t*** par rapport à R_i du point lié à R_j coïncidant avec M à l'instant ***t***.

D'autre part, le vecteur d'accélération $\vec{\gamma}^i(M)$, est obtenue en dérivons chaque terme du vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\vec{\gamma}^i(M)=\frac{d^i(\vec{V}^i(M))}{dt}=\frac{d^i(\vec{V}^i(O_j))}{dt}+\frac{d^i(\vec{V}^j(M))}{dt}+\frac{d^i(\vec{\Omega}^i_j\wedge\overrightarrow{O_jM})}{dt}$$

Or que le premier terme est:

$$\frac{d^i(\vec{V}^i(O_j))}{dt}=\vec{\gamma}^i(O_j)$$

Cependant le deuxième terme est :

$$\frac{d^i(\vec{V}^j(M))}{dt}=\frac{d^j(\vec{V}^j(M))}{dt}+(\Omega^i_j\wedge\vec{V}^j(M))=\vec{\gamma}^j(M)+(\Omega^i_j\wedge\vec{V}^j(M))$$

Alors que le troisième est :

$$\begin{aligned}\frac{d^i(\vec{\Omega}^i_j\wedge\overrightarrow{O_jM})}{dt}&=\frac{d^i(\vec{\Omega}^i_j)}{dt}\wedge(\overrightarrow{O_jM})+(\vec{\Omega}^i_j)\wedge\frac{d^i(\overrightarrow{O_jM})}{dt}\\&=\frac{d^i(\vec{\Omega}^i_j)}{dt}\wedge(\overrightarrow{O_jM})+(\vec{\Omega}^i_j)\wedge(\frac{d^j(\overrightarrow{O_jM})}{dt}+(\vec{\Omega}^i_j\wedge\overrightarrow{O_jM}))\\&=\frac{d^i(\vec{\Omega}^i_j)}{dt}\wedge(\overrightarrow{O_jM})+(\vec{\Omega}^i_j)\wedge(\vec{V}^j(M)+(\vec{\Omega}^i_j\wedge\overrightarrow{O_jM}))\end{aligned}$$

Et donc finalement, l'accélération absolue s'écrit comme :

$$\vec{\gamma}^i(M)=\vec{\gamma}^j(M)+\underbrace{\vec{\gamma}^i(O_j)+\frac{d^i(\vec{\Omega}^i_j)}{dt}\wedge(\overrightarrow{O_jM})+(\vec{\Omega}^i_j)\wedge(\vec{\Omega}^i_j\wedge\overrightarrow{O_jM})}_{\vec{\gamma}^i_j(M)}+2\Omega^i_j\wedge\vec{V}^j(M)$$

Etant que :

$\vec{\gamma}^{i}(M) = \vec{\gamma}_{a}(M)$: *Accélération absolue*

$\vec{\gamma}^{j}(M) = \vec{\gamma}_{r}(M)$: *Accélération relative*

$\vec{\gamma}^{i}_{j}(M) = \vec{\gamma}_{e}(M)$: *Accélération d'entraînement*;

$2\Omega^{i}_{j} \wedge \vec{V}^{j}(M)$: *Accélération complémentaire* ou de *Coriolis.*

Géométrie des masses

I. Introduction :

Dans le but de pouvoir décrire le mouvement d'un système matériel, il est important de connaitre la répartition géométrique de la masse afin de se préparer au concept de cinétique et dynamique des solides indéformables.

Cette répartition géométrique est basée sur deux points principaux, le centre de masse ou d'inertie, et la matrice d'inertie.

II. Masse d'un système Matériel :

En Mécanique classique, chaque système est associes d'une quantité scalaire appelé *masse*, qui définie la quantité de la matière contenue dans le volume de ce solide :

1) Système discrets :

La masse d'un système discret est la somme de n points matériels discrets de masse m_i

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

2) Système continue :

On dit qu'un système est continu si le nombre de particule contenue dans un élément de volume est suffisamment grand afin de négligé les fluctuations, ce qui permet de remplacer la somme par un continue :

$$m = \int_{Solide} dm(p)$$

L'élément $dm(p)$ est la mesure de la masse au voisinage du point p.

Selon le type du système (S), la forme d'intégrale change :

- *Volume :* La masse totale est en fonction de la densité volumique $\rho(p)$ au point p :

$$m = \int_V \rho(p)\, dV$$

- *Surface :* La masse totale est en fonction de la densité surfacique $\sigma(p)$ au point p :

$$m = \int_S \sigma(p)\, dS$$

- *Linéaire :* La masse totale est en fonction de la densité linéaire $\lambda(p)$ au point p :

$$m = \int_l \lambda(p)\, dl$$

Si le système est homogène, les densités $\lambda(p)$, $\sigma(p)$ et $\rho(p)$ seront constantes

III. Centre d'inertie d'un solide :

1) Définition : On appel centre d'inertie où de masse d'un système (S) le barycentre (G) des différents point (p) du solide (S) affecter de leur masse respectivement :

$$\int_{P\in(S)} \overrightarrow{GP}\, dm = \vec{0}$$

La notion du barycentre été établie pour la 1ére foie par Archimède dans leur expérience de balance, où il cherche d'équilibré le système de masse par rapport la distance au G :

$$M_1\overline{AG} = M_2\overline{BG}$$

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormé ou on peut écrire $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}$ avec :

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}$$

Alors, dans le but de déterminer les coordonnées de G, on calcule :

$$\int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP} dm = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OG} dm + \underbrace{\int_{P\in(S)} \overrightarrow{GP}\, dm}_{=0}$$

Sachant que $(\overrightarrow{OG})$ est indépendant de la messe (m), nous aurons :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\int_{P\in(S)} dm} \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP} dm \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP} dm$$

Où l'opérateur $\int_{P\in(S)}$ représente $\iiint_V$, $\iint_S$ $ou \int_L$ ou $\sum$ selon le type du solide (S).

En forme générale, les coordonnées du centre d'inertie G dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ sont :

$$x_G = \frac{\int_{P\in(S)} x dm}{\int_{P\in(S)} dm} = \frac{1}{m} \int_{P\in(S)} x\, dm$$

$$y_G = \frac{\int_{P\in(S)} y dm}{\int_{P\in(S)} dm} = \frac{1}{m} \int_{P\in(S)} y\, dm$$

$$z_G = \frac{\int_{P\in(S)} z dm}{\int_{P\in(S)} dm} = \frac{1}{m} \int_{P\in(S)} z\, dm$$

Remarque : Si le solide (S) est homogène et il présente :

- Un plan de symétrie (ou un axe de symétrie), le centre d'inertie doit situer sur ces éléments de symétrie.
- Un centre de symétrie, le centre d'inertie sera ce point de symétrie.

2) *<u>Centre d'inertie d'un système composé</u> :* Si notre système (S) est un système composé, la détermination du centre d'inertie globale (G) nécessite la détermine le centre d'inertie G_i de chaque élément (i) constituant le système (S) selon :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

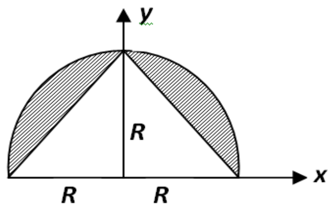
$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

où x_i, y_i, z_i sont les coordonnées des points G_i.

Exemple :

Déterminer les coordonnées du centre d'inertie du système ci-dessous :



Solution :

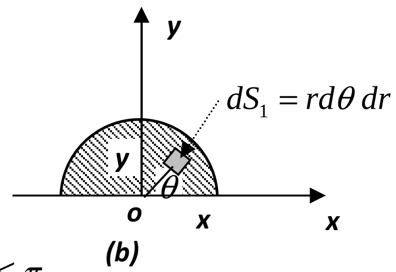
Notre système est un système composé de deux éléments : un demi cercle de rayon R et un tringle isocèle.

Néanmoins, l'axe (oy) est un axe de symétrie alors le centre d'inertie se trouve sur cet axe et donc : $x_G = 0$

a) *<u>Centre d'inertie du disque plein de rayon R :</u>*

Le solide est un demi disque, sa masse est donnée par :

$$m_1 = \int_S \sigma \, dS_1$$



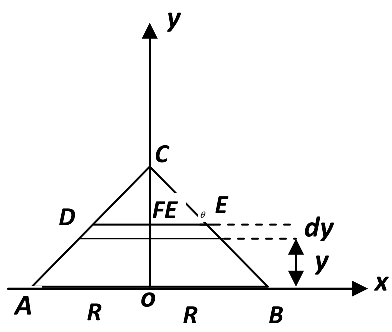
Où : σ est la densité surfacique et dS_1 l'élément de surface.

Les coordonnées de la surface $S_1 \begin{cases} r \cos\theta \\ r \sin\theta \end{cases}$ avec : $0 \le \theta \le \pi$

$$m_1 = \int_S \lambda dS_1 = \int_0^{\pi} \lambda r d\theta dr = \lambda \int_0^R r dr \int_0^{\pi} d\theta = \sigma \frac{\pi R^2}{2}$$

$$y_{G1} = \frac{1}{m_1} \int_S y dm = \frac{1}{m_1} \int_S y \sigma ds = \frac{2}{\sigma \pi R^2} \int_0^{\pi} r \sin\theta \, \sigma \, r d\theta dr = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = \frac{4R}{3\pi}$$

D'où : $G_1\begin{cases} x_{G1} = 0 \\ y_{G1} = \dfrac{4R}{3\pi} \end{cases}$



b) *Centre d'inertie de la surface triangulaire :*

Masse du triangle plan : $m_2 = \sigma\, S_2 = \sigma.\frac{1}{2} 2R.R = \sigma\, R^2$

Calculons $y_{G2} = \frac{1}{m_2}\int_S y dm = \frac{1}{m_2}\int_S y\sigma\, ds$

Afin de calculer l'élément de surface, on partage le triangle en petite bandes assimilable à un rectangle de largueur dy dont l'élément de surface sera : $ds_2 = Ldy$; avec $L = DE$

Etant que $OA = OB = OC = R$ et selon le théorème de Thales, dans les triangles semblables ABC et DEC , nous avons : $\frac{DE}{AB} = \frac{FC}{OC} \quad \Leftrightarrow \frac{L}{2R} = \frac{R-y}{R}$

Ce qui permet d'écrire : $L = 2(R-y)$ et donc : $ds_2 = 2(R-y)dy$ avec $0 \leq y \leq R$

$$y_{G2} = \frac{1}{m}\int_S y\sigma\, ds_2 = \frac{1}{\sigma R^2}\int_0^R y\sigma 2(R-y)dy = \frac{2}{R^2}\left(\frac{Ry^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = \frac{R}{3} \quad ;$$

D'où : $G_2\begin{cases} x_{G2} = 0 \\ y_{G2} = \dfrac{R}{3} \end{cases}$

c) *Centre d'inertie globale du solide:*

$x_G = 0$

$$y_G = \frac{y_{1G}.m_1 - y_{2G}.m_2}{m_1 - m_2} = \frac{y_{1G}.s_1 - y_{2G}.s_2}{s_1 - s_2} = \frac{\frac{4R}{3\pi}.\frac{\pi R^2}{2} - \frac{R}{3}.R^2}{\frac{\pi R^2}{2} - R^2} = \frac{2}{3}\frac{R}{\pi - 2}$$

IV. Tenseur d'Inertie :

1) *Moment d'inertie :*

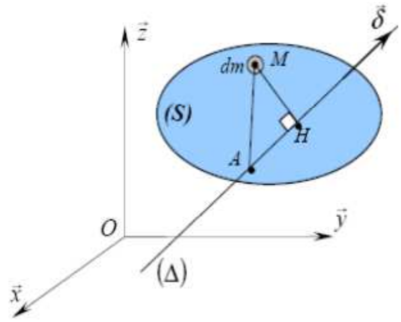
Soit une tige de longueur (L) et de masse (dm) tourne librement sur un axe (Δ), le temps nécessaire pour que la tige atteindre une vitesse de rotation fixe est proportionnelle à $r^2 dm$.

Cette quantité est appelée *Le Moment d'Inertie* $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{S})$, elle représente la résistance d'un solide à une mise en rotation ou à une accélération angulaire.

Le Moment d'Inertie est un scalaire exprimé en $Kg.m^2$, il peut être calculé par rapport à un point ou par rapport à un axe.

A) *Moment d'inertie de (S) par rapport un point :*

Le moment d'inertie d'un solide (S) de masse dm par rapport a un point A, s'écrit :



$$I_A(S) = \int_{Solide} \overrightarrow{AM}^2\, dm$$

B) *Moment d'inertie de (S) par rapport un axe (Δ) :*

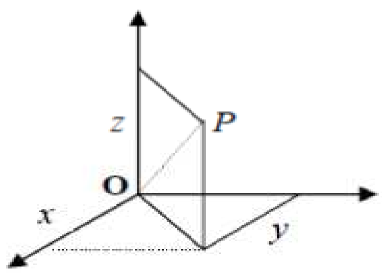
On appelle moment d'inertie du solide (S) par rapport à un axe (Δ), la quantité positive :

$$I_\Delta(S) = \int_{Solide} \overrightarrow{HM}^2\, dm$$

C) *Expression analytique des moments d'inertie*

Soit $M(x, y, z)$ un point du solide indéformable(S).

La position M par rapport au repère d'étude $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est donnée par le vecteur :



$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$$

Alors le moment d'inertie par rapport au centre O est :

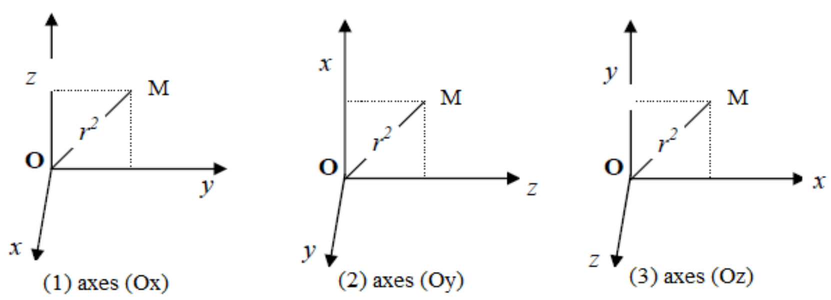
$$I_{(S/_O)} = \int_S r^2 dm \int_S x^2 + y^2 + z^2 dm$$

En outre, les moments d'inertie par rapport aux axes du repère sont donné par :

Axe (Ox) : $A = I_{Ox} = \int_S (y^2 + z^2)dm$

Axe (Oy) : $B = I_{Oy} = \int_S (x^2 + z^2)dm$

Axe (Oz) : $C = I_{Oz} = \int_S (x^2 + y^2)dm$



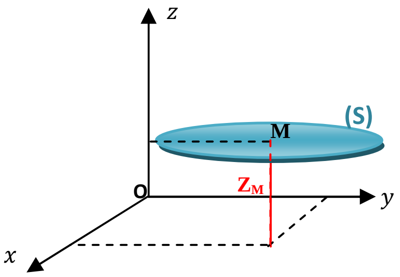
Moment d'inertie d'un solide (S) par rapport aux axes du repère

Par ailleurs, dans le cas des solides plans les moments d'inertie sont données en fonction de la distance qui sépare le point M du plan de solide :

Plan (yOz) : $A' = I_{yOz} = \int_S x^2 dm$

Plan (xOz) : $B' = I_{xOz} = \int_S y^2 dm$

Plan (xOy) : $C' = I_{xOy} = \int_S z^2 dm$



Moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un plan (xoy)

Remarque

- Les moments d'inertie sont des quantités positives présentées par une matrice diagonale dans un repère orthonormé.
- La somme des moments d'inertie par rapport aux plans du repère est égale au moment d'inertie par rapport à son centre $I_O = A' + B' + C'$
- La somme des moments d'inertie par rapport aux axes du repère est égale au double du moment d'inertie du solide par rapport au centre du repère $2\, I_O = (A + B + C)$

2) <u>Produit d'inertie d'un solide :</u>

On appel produit d'inertie d'un solide par rapport aux plans de coordonnées associés deux à deux axes du repère, les quantités algébriques suivantes :

Par rapport aux axes $Oy\ et\ Oz$ (plan yoz):

$$D = I_{yoz} = \int_S yz\, dm$$

Par rapport aux axes $Ox\ et\ Oz$ (plan xoz):

$$E = I_{xoz} = \int_S xz\, dm$$

Par rapport aux axes $Ox\ et\ Oy$ (plan yox):

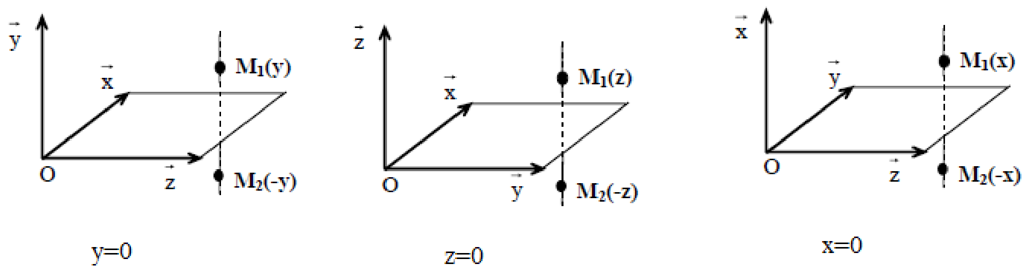
$$F = I_{xoy} = \int_S xy\, dm$$

Si le système présente des plans de symétrie, chaque point M est associé à un point $\acute{M}$ similaire dans le coté négative, ce qui implique :

Plan de symétrie (yOz) : $\begin{cases} F = I_{xoy} = \int_S \ xy\ dm = 0 \\ E = I_{xoz} = \int_S \ xz\ dm = 0 \end{cases}$

Plan de symétrie (xOz) : $\begin{cases} D = I_{yoz} = \int_S \ yz\ dm = 0 \\ E = I_{xoz} = \int_S \ xz\ dm = 0 \end{cases}$

Plan de symétrie (xOy) : $\begin{cases} D = I_{yoz} = \int_S \ yz\ dm = 0 \\ F = I_{xoy} = \int_S \ xy\ dm = 0 \end{cases}$



Schématisation des plans de symétrie et produit d'inertie

Remarque

- Les produits d'inertie sont des quantités de signe quelconque exprimés

3) *Matrice d'inertie d'un solide (S) en O :*

Les éléments d'inertie (moment et produit) sont représentés dans la base orthonormée R par une matrice symétrique d'inertie qui s'écrit sous la forme suivante :

$$[I_{(S)}]_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

Avec ; ***A, B et C*** sont respectivement les moments d'inertie par rapport aux axes du repère $(O,\vec{x})$; $(O,\vec{y})$ et $(O,\vec{z})$ et les éléments ***D, E et F*** sont les produits d'inertie.

D'une façon générale, on note la matrice d'inertie come :

$$[I_{(S)}]_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2).dm & -\int_S xy.dm & -\int_S xz.dm \\ -\int_S xy.dm & \int_S (x^2+z^2).dm & -\int_S yz.dm \\ -\int_S xz.dm & -\int_S yz.dm & \int_S (x^2+y^2).dm \end{bmatrix}$$

Si le solide admet des plans de symétrie, alors deux produits d'inertie s'annulent :

Plan de symétrie (yOz) : $\begin{cases} F = I_{xoy} = \int_S \; xy\,dm = 0 \\ E = I_{xoz} = \int_S \; xz\,dm = 0 \end{cases}$

Plan de symétrie (xOz) : $\begin{cases} D = I_{yoz} = \int_S \; yz\,dm = 0 \\ E = I_{xoz} = \int_S \; xz\,dm = 0 \end{cases}$

Plan de symétrie (xOy) : $\begin{cases} D = I_{yoz} = \int_S \; yz\,dm = 0 \\ F = I_{xoy} = \int_S \; xy\,dm = 0 \end{cases}$

Si le solide admet deux plans de symétrie parmi les trois du repère, alors les trois produits d'inertie sont nuls.

$$F = E = D = 0$$

Si le solide admet axe de révolution, alors les moments d'inertie par rapport aux autres axes du repère sont égaux

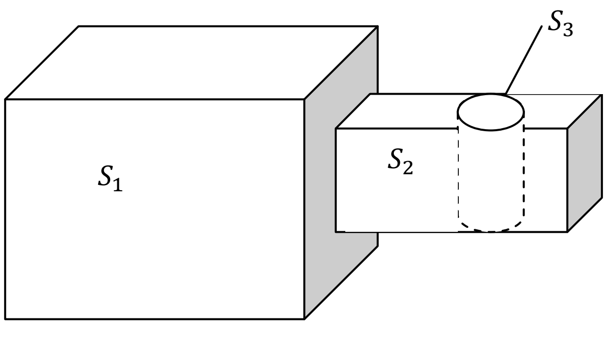
$$(Oz) \text{ Axe de révolution } \Longrightarrow A = I_{xx} = B = I_{yy}$$

4) <u>Matrice d'inertie pour un solide complexe « composé » :</u>

Généralement, les solides utilisés dans la science sont de forme complexe, ils sont composés d'un certain nombre de solide élémentaire.

La matrice d'inertie globale du solide n'est que la sommation des matrices d'inertie de chaque solide élémentaire par rapport au même point où axe.

$$[I_O(\Sigma)]_R = [I_{O(S_1)}]_R + [I_{O(S_2)}]_R - [I_{O(S_3)}]_R$$



Solide complexe $(\boldsymbol{\Sigma})$ composé de solides élémentaires $(\boldsymbol{S_i})$

5) *Matrice d'inertie d'un solide en mouvement de translation « Théorème de Huygens » :*

Le théorème de Huygens permet le calcule du moment d'inertie d'un solide (S) dans n'importe point O de l'espace, en connaissant son moment d'inertie au centre d'inertie G par rapport au même repère.

Soit la matrice d'inertie du solide (S) dans le repère du barycentre $R_G(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

$$[I_{(S)}]_G = \begin{bmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{bmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Calculons maintenant les éléments de la matrice d'inertie du même solide (S) dans le repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ en fonction de $[I_{(S)}]_G$.

On donne :

$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{GM} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\Omega_{R_0}^{R_G}} = \vec{0}$$

Sachant que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM} = \begin{pmatrix} x_G + x_1 \\ y_G + y_1 \\ z_G + z_1 \end{pmatrix}$

Le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe (Ox)est par définition :

$$A = \int_S (y^2 + z^2).dm \Leftrightarrow A = \int_S [(y_1 + y_G)^2 + (z_1 + z_G)^2].dm$$

$$\Leftrightarrow A = \int_S (y_1^2 + z_1^2).dm + \int_S (y_G^2 + z_G^2).dm + 2.y_G \int_S y_1.dm + 2.z_G \int_S z_1.dm$$

Or, puisque G est le centre d'inertie du solide (S) on a :

$$\begin{cases} \int_S \overrightarrow{GM} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_S x_1.dm = 0 \\ \int_S y_1.dm = 0 \\ \int_S z_1.dm = 0 \end{cases} \\ A_G = \int_S (y_1^2 + z_2^2).dm \,) \end{cases}$$

Et donc :

$$A = A_G + m(y_G^2 + z_G^2)$$

De la même façon, les autres éléments de la matrice d'inertie sont :

- Les Moment d'inertie : $\boldsymbol{B} = B_G + m(x_G^2 + z_G^2)$ et $\boldsymbol{C} = C_G + m(x_G^2 + y_G^2)$
- Les produit d'inertie : $\boldsymbol{D} = D_G + m.y_G.z_G$, $\boldsymbol{E} = E_G + m.x_G.z_G$ et $\boldsymbol{F} = F_G + m.x_G.y_G$

6) Matrice d'inertie d'un solide en Mouvement rotationnelle :

Soit un solide (S) en mouvement de rotation par rapport à un repère fixe $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$. Le repère $R_1(G, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ est le repère lié au solide.

La matrice d'inertie du solide (S) par rapport au repère fixe R_0 est obtenue en utilisant un changement de base du repère mobile R_1 vers le repère fixe R_0 a l'aide d'une matrice de passage MP selon :

$$[I_{(S)}]_{(R_0)} = [MP]^t_{(R_1 \to R_0)} [I_{(S)}]_{(R_1)} [MP]_{(R_1 \to R_0)}$$

7) Axes principale d'inertie :

Dans une base orthonormée $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, la matrice d'inertie est de la forme :

$$[I_{(S)}]_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

Si on peut trouver une base de même centre O dans la quelle on peut diagonalise la matrice d'inertie selon des vecteur propres $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$.

$$[I_{(S)}]_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{bmatrix}$$

Cette dernière est appelée base principale ou les vecteur propres $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ sont les axes principaux d'inertie.

Cinétique et Dynamique des Solides

I. Introduction :

La cinétique traite les relations associant les grandeurs cinématiques tel que déplacements, vitesses, accélérations et la répartition des masses dans l'espace (centre de masse, tenseur d'inertie). Ce chapitre introduit de nouvelles grandeurs vectoriels et scalaires comme : *la quantité de mouvement et d'accélération, le moment cinétique et dynamique et l'énergie cinétique.*

II. Torseur cinétique :

On appelle torseur cinétique $[C]$ au un point fixe (A) du repère d'étude le torseur dont les éléments de réduction sont la quantité de mouvement $\vec{P}$ et le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_A}$ du système.

$$[C]_A = \begin{Bmatrix} \vec{P} \\ \overrightarrow{\sigma_A} \end{Bmatrix}$$

1) *Résultante cinétique « Quantité de mouvement » :*

A) *Point matériel :*

Soit $\vec{V}^0(M)$le vecteur vitesse d'un point M ayant une masse m en mouvement par rapport à un repère orthonormé fixe $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

On appelle quantité de mouvement du point M la grandeur vectorielle :

$$\vec{P} = m\,\overrightarrow{v(M)}$$

B) *Système discret :*

On appelle la quantité de mouvement d'un système de **n** points matériels M_i de masse m_i, la grandeur vectorielle :

$$P = \sum_{i=1}^{n} \vec{P_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{v_i}(M_i)$$

C) *Système continue* :

Soit (M) un point matériels du solide indéformable (S) associe à la vitesse absolue $\overrightarrow{v^0}(M)$, la quantité de mouvement du système de masse dm est donnée par :

$$\vec{P} = \int_{solide} \overrightarrow{v^0}(M)\, dm$$

2) Moment Cinétique :

A) Point matériel :

On appelle Moment cinétique du point M et de masse m en mouvement par rapport à un repère orthonormé fixe $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ le moment de la quantité de mouvement par rapport à un point quelconque A du R_0 :

$$\vec{\sigma_A} = \overrightarrow{AM} \wedge m\,\overrightarrow{v(M)}$$

B) Système discret :

On appelle le moment cinétique total du système l'ensemble des moments des quantités de mouvement élémentaires $\vec{P_i}$ des **n** points du système par rapport au point A du R_0 :

$$\vec{\sigma_A} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i\,\vec{v_i}(M_i)$$

C) Système continue :

Pour les systèmes continues, le moment cinétique est définie par :

$$\vec{\sigma_A} = \int_{solide} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v^0}(M)\,dm$$

III. Propriétés du torseur cinétique :

Soit (M) un point du solide indéformable (S) de masse m et de centre G en mouvement par rapport à un repère orthonormé fixe $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

1) La résultante cinétique :

La quantité de mouvement du système s'écrit en fonction des grandeurs massique comme :

$$\vec{P} = \int_{solide} \overrightarrow{v^0}(M)\,dm = \int_{solide} \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\,dm = \frac{d}{dt}\int_{solide} \overrightarrow{OM}\,dm$$

Par définition, nous avons :

$$\int_{solide} \overrightarrow{OM}\,dm = m\,\overrightarrow{OG}$$

Et donc,

$$\vec{P} = \frac{d}{dt}\left(m\,\overrightarrow{OG}\right) = m\overrightarrow{v^0}(G)$$

2) Le moment cinétique :

On appelle moment cinétique au point A le moment du vecteur vitesse au même point A :

$$\overrightarrow{\sigma_A} = \int_{solide} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v^0}(M)\, dm$$

A) La relation de transport :

Par définition, le moment cinétique au point A et B respectivement est :

$$\overrightarrow{\sigma_A} = \int_{solide} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v^0}(M)\, dm \qquad \overrightarrow{\sigma_B} = \int_{solide} \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{v^0}(M)\, dm$$

Calculons alors,

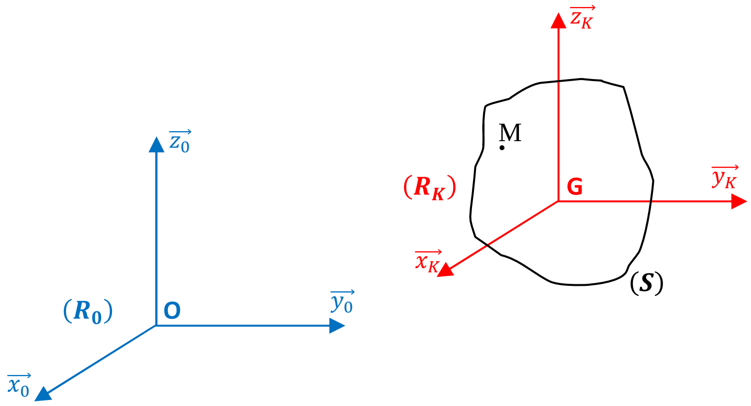
$$\overrightarrow{\sigma_A} - \overrightarrow{\sigma_B} = \int_{solide} \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right) \wedge \overrightarrow{v^0}(M)\, dm = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{P}$$

Sachant que $\vec{P}$ n'est que la résultante cinétique, donc on dit que le moment cinétique obéit à la relation de transport générale et donc on a :

$$\overrightarrow{\sigma_A} = \overrightarrow{\sigma_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{P}$$

B) Théorème de Koenig relatif au moment cinétique «mouvement de translation»:

On appelle référence de Koenig R_K, le référence dont les axes sont issus du centre d'inertie G et constamment parallèles à ceux du repère fixe R_0 ($\overrightarrow{\Omega_{R_k}^{R_0}} = \vec{0}$).



Le théorème de Koenig sert à relier le moment cinétique au centre de masse (G) du solide dans le repère fixe (R_0) avec celui dans le repère mobile (R_k) selon :

$$\overrightarrow{\sigma_G^0} = \vec{\sigma}_{G/R0} = \int_{solide} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{v^0}(M)\, dm$$

Utilisant la décomposition de mouvement et sachant que $\overrightarrow{\Omega_{R_k}^{R_0}} = \vec{0}$, la vitesse absolue au point (M) est donné par :

$$\overrightarrow{v^0}(M) = \overrightarrow{v^0}(G) + \overrightarrow{v^K}(M)$$

Ce qui implique :

$$\overrightarrow{\sigma_G^0} = \int_{solide} \overrightarrow{GM} \wedge \left(\overrightarrow{v^0}(G) + \overrightarrow{v^K}(M)\right)\, dm$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\sigma_G^0} = \overrightarrow{v^0}(G) \wedge \int_{solide} \overrightarrow{GM}\, dm + \int_{solide} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{v^K}(M) dm$$

Or que $\int_{solide} \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$ car G est le centre de masse du système et par définition le deuxième terme n'est que le moment cinétique dans le repère mobile :

$$\overrightarrow{\sigma_G^K} = \int_{solide} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{v^K}(M) dm$$

On a donc l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{\sigma_G^0} = \overrightarrow{\sigma_G^K}$$

Et par conséquent le théorème de Koenig appliqué à la relation de transport donne :

$$\overrightarrow{\sigma_A^0} = \overrightarrow{\sigma_G^K} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P}$$

C) <u>Moment cinétique d'un solide indéformable en mouvement quelconque :</u>

Dans ce cas le repère du barycentre n'est plus en translation direct par rapport au repère fixe $\left(\overrightarrow{\Omega_{R_k}^{R_0}} \neq \vec{0}\right)$. Le moment cinétique du solide indéformable est par définition :

$$\overrightarrow{\sigma_G^0} = \int_{solide} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{v^0}(M)\, dm$$

Utilisant la cinématique du solide, la vitesse absolue au point (M) est donné par :

$$\overrightarrow{v^0}(M) = \overrightarrow{v^0}(G) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}$$

Alors,

$$\overrightarrow{\sigma_G^0} = \int_{solide} \overrightarrow{GM} \wedge \left(\overrightarrow{v^0}(G) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}\right)\, dm$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\sigma_G^0} = \overrightarrow{v^0}(G) \wedge \int_{solide} \overrightarrow{GM} dm + \int_{solide} \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}\right)\, dm$$

Or que $\int_{solide} \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$ car G est le centre de masse du système, d'autre part le deuxième terme est calculer de la manière suivant :

On définie les vecteur suivant :

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{GM} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}$$

Calculons $\left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}\right)$:

$$\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} \Omega_y z_G - \Omega_z y_G \\ \Omega_z x_G - \Omega_x z_G \\ \Omega_x y_G - \Omega_y x_G \end{pmatrix}$$

Par la suite :

$$\overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}\right) = \begin{pmatrix} y_G\left(\Omega_x y_G - \Omega_y x_G\right) - z_G\left(\Omega_z x_G - \Omega_x z_G\right) \\ z_G\left(\Omega_y z_G - \Omega_z y_G\right) - x_G\left(\Omega_x y_G - \Omega_y x_G\right) \\ x_G\left(\Omega_z x_G - \Omega_x z_G\right) - y_G\left(\Omega_y z_G - \Omega_z y_G\right) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}\right) = \begin{pmatrix} \Omega_x(y_G^2 + z_G^2) - \Omega_y x_G y_G - \Omega_z x_G z_G \\ -\Omega_x x_G y_G + \Omega_y(z_G^2 + x_G^2) - \Omega_z y_G z_G \\ -\Omega_z x_G z_G - \Omega_z y_G z_G + \Omega_z(y_G^2 + x_G^2) \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\int_{sol} \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}\right) dm = \begin{pmatrix} \int_{solide} (y_G^2 + z_G^2)\, dm - \int_{solide} x_G y_G\, dm - \int_{solide} x_G z_G\, dm \\ -\int_{solide} x_G y_G\, dm + \int_{solide} (z_G^2 + x_G^2)\, dm - \int_{solide} x_G z_G\, dm \\ -\int_{solide} x_G z_G\, dm - \int_{solide} y_G z_G\, dm + \int_{solide} (y_G^2 + x_G^2)\, dm \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}\right) = I_G\ \vec{\Omega}$$

D'où le moment cinétique total pour un solide indéformable en mouvement quelconque s'écrit donc :

$$\overrightarrow{\sigma_G^0} = I_G\ \vec{\Omega}$$

Néanmoins, si le moment est calculer par rapport un point quelconque (A) du solide indéformable tel que $\vec{v}_{A\in S} = \vec{0}$ sa valeur sera calculer par :

$$\overrightarrow{\sigma_A^0} = I_A\ \vec{\Omega}$$

La matrice d'inertie I_A est obtenue par l'utilisation du théorème de Huygens (Chapitre précédant)

Remarque :

- Si la rotation à lieu autour d'un axe fixe $(A, \vec{z})$, et que cet axe est un axe *principal d'inertie* on a :

$$\overrightarrow{\sigma_A^0} = I_{zz}\ \vec{\Omega}$$

IV. L'énergie cinétique :

1) Définition :

L'énergie cinétique est l'énergie qui possède un corps (solide) lors de son mouvement, elle est exprimée en Joules et égale à la quantité scalaire suivante :

$$E_c = \int_{solide} \frac{1}{2} \overrightarrow{v^0}(M)^2 \, dm$$

2) Théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique :

Soit (M) un point du solide indéformable (S) de masse (m) et du centre G en mouvement par rapport au repère fixe (R_0) dont l'énergie cinétique est :

$$E_c^0 = \int_{solide} \frac{1}{2} \overrightarrow{v^0}(M)^2 \, dm$$

Et (R_K) le repère de Koenig (barycentre) le repère lié au solide (S), la relation entre l'énergie cinétique par rapport aux deux repères est obtenue par la décomposition du mouvement où :

$$\overrightarrow{v^0}(M) = \overrightarrow{v^0}(G) + \overrightarrow{v^K}(M)$$

Ce qui implique :

$$E_C^0 = \frac{1}{2} \int_{solide} \left(\overrightarrow{v^0}(G) + \overrightarrow{v^K}(M) \right)^2 \, dm$$

$$\Leftrightarrow E_C^0 = \frac{1}{2} \overrightarrow{v^0}(G)^2 \int_{solide} dm + \overrightarrow{v^0}(G) \int_{solide} \overrightarrow{v^K}(M) \, dm + \frac{1}{2} \int_{solide} \overrightarrow{v^K}(M)^2 \, dm$$

$$\Leftrightarrow E_C^0 = \frac{1}{2} m \overrightarrow{v^0}(G)^2 + \overrightarrow{v^0}(G) \frac{d}{dt} \int_{solide} \overrightarrow{GM} \, dm + E_C^k$$

Or que $\int_{solide} \overrightarrow{GM} \, dm = \vec{0}$ car G est le centre de masse du système, le théorème de Koenig est alors :

$$E_C^0 = E_C^k + \frac{1}{2} m \overrightarrow{v^0}(G)^2$$

Le débit d'augmentation de l'énergie cinétique d'un système continue dans un repère fixe E_C^0 par rapport à leur énergie dans le repère mobile E_C^k n'est que l'énergie cinétique qui possède son centre de masse dans R_0.

3) L'énergie cinétique d'un solide indéformable :

Soit (A) et (M) deux point du solide indéformable, nous pouvons écrire l'énergie cinétique à l'aide de la cinétique de solide sous la forme :

$$E_c^0 = \int_{solide} \frac{1}{2} \overrightarrow{v^0}(M) \left(\overrightarrow{v^0}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM} \right) \, dm$$

$$\Leftrightarrow E_C^0 = \frac{1}{2}\overrightarrow{v^0}(A)\int_{solide}\overrightarrow{v^0}(M)\,dm + \frac{1}{2}\int_{solide}\overrightarrow{v^0}(M)\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{AM}\right)dm$$

Selon les propriétés de produit mixte, nous avons : $\overrightarrow{v^0}(M)\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{AM}\right) = \vec{\Omega}\left(\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{v^0}(M)\right)$

$$\Leftrightarrow E_C^0 = \frac{1}{2}\overrightarrow{v^0}(A)\left(m\,\overrightarrow{v^0}(G)\right) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}\int_{solide}\left(\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{v^0}(M)\right)dm$$

$$\Leftrightarrow E_C^0 = \frac{1}{2}\overrightarrow{v^0}(A)\,\vec{P} + \frac{1}{2}\vec{\Omega}\,\overrightarrow{\sigma_a}$$

Alors, on conclue que l'énergie cinétique est le produit entre le torseur cinématique et cinétique :

$$\Leftrightarrow E_C^0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\vec{\Omega}\\ \overrightarrow{v^0}(A)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{P}\\ \overrightarrow{\sigma_a}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}[V]_A[C]_A$$

Cas particulier :

- Si A est le centre de masse du solide indéformable $\left(\overrightarrow{v^0}(A) = \overrightarrow{v^0}(G)\right)$, alors :

$$E_C^0 = \frac{1}{2}m\,\overrightarrow{v^0}(G)^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^t\,I_G\,\vec{\Omega}$$

Où :

- $\frac{1}{2}\boldsymbol{m}\,\overrightarrow{\boldsymbol{v^0}}(\boldsymbol{G})^2$ est l'énergie cinétique de translation
- $\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\Omega}}^t\,\boldsymbol{I_G}\,\vec{\boldsymbol{\Omega}}$ est l'énergie cinétique de rotation

Si le solide a uniquement un mouvement de translation, l'énergie cinétique totale est :

$$E_C^0 = E_{c_{Trans}} = \frac{1}{2}m\,\overrightarrow{v^0}(G)^2$$

Si le solide est en rotation pure autour d'un axe fixe $(O,\vec{z})$, l'énergie cinétique totale est :

$$E_C^0 = E_{c_{Rot}} = \frac{1}{2}\,I_{zz}\,\vec{\Omega}^t$$

V. <u>Torseur dynamique :</u>

Les éléments de réductions du torseur dynamique $[D]$ sont respectivement la quantité d'accélération et le moment dynamique.

1) <u>*La résultante dynamique :*</u>

Soit (M) un point du solide indéformable qui est mouvement par rapport à un repère fixe R_0 par une accélération absolue :

$$\overrightarrow{\gamma^0}(M) = \frac{d\overrightarrow{v^0}(M)}{dt}$$

On appelle la quantité $\int_{solide} \overrightarrow{\gamma^0}(M)\, dm$ la quantité d'accélération du point (M), elle représente la résultante du torseur dynamique noté par $\vec{D}$.

Néanmoins, la résultant dynamique peut s'écrit en fonction du centre de masse du solide comme :

$$\vec{D} = \int_{solide} \overrightarrow{\gamma^0}(M)\, dm = \int_{solide} \frac{d\overrightarrow{v^0}(M)}{dt}\, dm$$

$$\Leftrightarrow \vec{D} = \frac{d}{dt}\int_{solide} \overrightarrow{v^0}(M)\, dm = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

S'il y a une conservation de la masse, la quantité d'accélération est égale à :

$$\vec{D} = m\,\overrightarrow{\gamma^0}(M)$$

2) ***Le moment dynamique :***

Le moment dynamique par rapport à un point quelconque de repère est le moment de la quantité d'accélération par rapport à ce point :

$$\overrightarrow{\delta_A} = \int_{solide} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\gamma^0}(M)\, dm$$

Le moment dynamique obéit à la règle de transport des moments :

$$\overrightarrow{\delta_A} = \overrightarrow{\delta_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{D}$$

Par conséquent, le torseur dynamique s'écrit :

$$[C]_A = \begin{Bmatrix} \vec{D} \\ \overrightarrow{\delta_A} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m\,\overrightarrow{\gamma^0}(M) \\ \int_{solide} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\gamma^0}(M)\, dm \end{Bmatrix}$$

3) ***Théorème de Koenig relative au moment dynamique :***

Par définition, le moment dynamique au centre de masse (G) du solide par rapport au repère fixe (R_0) est :

$$\overrightarrow{\delta_G^0} = \int_{solide} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\gamma^0}(M)\, dm$$

Utilisant la décomposition de mouvement et sachant que $\overrightarrow{\Omega_{R_k}^{R_0}} = \vec{0}$, l'accélération absolue au point (M) est donné par :

$$\overrightarrow{\gamma^0}(M) = \overrightarrow{\gamma^0}(G) + \overrightarrow{\gamma^K}(M)$$

Ce qui implique :

$$\overrightarrow{\delta_G^0} = \int_{solide} \overrightarrow{GM} \wedge \left(\overrightarrow{\gamma^0}(G) + \overrightarrow{\gamma^K}(M)\right)\, dm$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\delta_G^0} = \overrightarrow{\gamma^0}(G) \wedge \int_{solide} \overrightarrow{GM}\, dm + \int_{solide} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\gamma^K}(M) dm$$

Or que $\int_{solide} \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$ car G est le centre de masse du système et par définition le deuxième terme n'est que le moment dynamique dans le repère mobile :

$$\overrightarrow{\delta_G^K} = \int_{solide} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{\gamma^K}(M) dm$$

On a donc l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{\delta_G^0} = \overrightarrow{\delta_G^K}$$

4) __Relation entre le moment dynamique et cinétique :__

La dérivée du moment cinétique en *A* donne :

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_A}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{solide} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v^0}(M)\, dm = \int_{solide} \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \wedge \overrightarrow{v^0}(M)\, dm + \int_{solide} \overrightarrow{AM} \wedge \frac{d\overrightarrow{v^0}(M)}{dt}\, dm$$

D'ici on peut écrire :

$$\overrightarrow{\delta_A} = \int_{solide} \overrightarrow{AM} \wedge \frac{d\overrightarrow{v^0}(M)}{dt}\, dm = \frac{d}{dt} \int_{solide} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v^0}(M)\, dm - \int_{solide} \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \wedge \overrightarrow{v^0}(M)\, dm$$

Sachant que : $\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} = \left(\overrightarrow{v^0}(M) - \overrightarrow{v^0}(A)\right)$ alors,

$$\overrightarrow{\delta_A} = \frac{d\overrightarrow{\sigma_A}}{dt} - \left(\overrightarrow{v^0}(A) \wedge m\, \overrightarrow{v^0}(G)\right)$$

- Si A est confondue avec le centre de masse $\left(\overrightarrow{v^0}(A) \parallel \overrightarrow{v^0}(G)\right)$, et si A est un point géométrique fixe $\left(\overrightarrow{v^0}(A) = \vec{0}\right)$ on à :

$$\overrightarrow{\delta_A} = \frac{d\overrightarrow{\sigma_A}}{dt}$$

Principe fondamental des Dynamiques des Systèmes

I. Introduction :

La dynamique est l'étude du mouvement d'un solide (corps) matériels en liaison avec les forces qui s'exercent sur lui. L'objectif de ce chapitre est l'étude des théorèmes généraux régissant la dynamique et le mouvement du solide.

II. Rappel sur le torseur des forces extérieures :

Une forces est une action capable de produire ou de modifie un mouvement ou crée une déformation.

Les efforts appliqués sur un système matériels peuvent être représentés mathématiquement par un torseur de force ou d'action comme :

$$[Fe]_{/o} = \begin{cases} \vec{F} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{/o}} \end{cases}$$

Pour un système matériel (S), le torseur des efforts extérieurs exercés sur un solide sera l'ensemble des forces présenté dans le système et les couples de ces forces.

$$[Fe]_{/o} = \begin{cases} \sum \vec{F_i} \\ \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{/o}}(\vec{F_i}) \end{cases} = \begin{cases} \sum \vec{F_i} \\ \sum \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F_i} \end{cases} = \begin{cases} \int d\vec{F} \\ \int \overrightarrow{OM_i} \wedge d\vec{F} \end{cases}$$

III. Rappelle de la dynamique des particules :

La dynamique des particules est régie par des principes basés sur les lois de Newton, qui sont définie comme :

A) 1ére loi de Newton : dans un repère fixe (R0), une particule (A) de masse (m) totalement isolé possède une Quantité de Mouvement

$$\vec{P} = m\overrightarrow{v(A)}$$

B) 2éme loi de Newton : une particule (A) est soumise à des actions $\vec{F_i}$ de l'appart d'une autre particule (B) à l'instant (t) sont mouvement est régi par le Principe Fondamentale de la Dynamique :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{\gamma(A)}$$

C) 3éme loi de Newton : deux particule (A) et (B) soumis à des forces extérieur et au même temps ils sont en interaction entre eux, à la ligne d'action nous avons :

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = -\overrightarrow{F_{2/1}}$$

C'est le principe action-Réaction

IV. Principe fondamental de dynamique appliquée aux systèmes matériels :

Dans ce cas, on cherche à généralisation du PFD d'un point matériel à un principe fondamental qui s'applique aux systèmes matériels continus et discrets. Cette généralisation n'est que l'égalité entre le torseur de forces et le torseur dynamique dans un point fixe du repère d'étude.

$$[Fe]_{/o} = [D]_{/o} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \sum \overrightarrow{F_{ext}} \\ \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{/o}}\left(\vec{F_i}\right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta_0} \end{Bmatrix}$$

Il en résulte deux équation vectorielles sont :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{\gamma^0(G)} \\ \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_o}\left(\vec{F_i}\right) = \dfrac{d\vec{\sigma_0}}{dt} \end{cases}$$

Cas particulier :

Si (Δ) est un axe principale d'inertie passant par le point le point (o) donc :

$$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_o}\left(\vec{F_i}\right) = \frac{d\vec{\sigma_0}}{dt} = I_\Delta \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$$

V. Théorème de l'énergie cinétique :

1) *Puissance et travail de force :*

A) *Point Matériel :* La puissance d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel (M) de vitesse $\overrightarrow{v(M)}$ à l'instant (t) est :

$$\mathcal{P} = \vec{F}.\overrightarrow{v(M)}$$

L'unité fondamentale de la puissance est le ***Watts***

En outre, le travail élémentaire accompli pendant l'intervalle du temps (dt) :

$$dW = \mathcal{P}\ dt \Leftrightarrow dW = \vec{F}.\overrightarrow{v(M)}dt$$

Sachant que : $\overrightarrow{v(M)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ donc :

$$dW = \vec{F}.\overrightarrow{OM}$$

L'unité fondamentale du travail élémentaire est ***Joule***

B) *Système Matériels :* Soit (A) et (M) deux point du solide indéformable (S), la puissance est donné par :

$$\mathcal{P} = \int \overrightarrow{v^0}(M).d\vec{F}$$

Utilisant la cinématique du solide, la vitesse au point (M) est donnée par :

$$\overrightarrow{v^0}(M) = \overrightarrow{v^0}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$$

Donc, la puissance sera :

$$\mathcal{P} = \int \left(\overrightarrow{v^0}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}\right).d\vec{F}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P} = \overrightarrow{v^0}(A) \int d\vec{F} + \int (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}) . d\vec{F}$$

Utilisant les propriétés du produit mixte nous avons :

$$\int (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}) . d\vec{F} = \vec{\Omega} \int (\overrightarrow{AM} \wedge d\vec{F})$$

Par conséquent, la puissance des efforts d'un système matériel sera le produit entre le torseur cinématique $[V]$ et celui de force $[Fe]$:

$$\mathcal{P} = \overrightarrow{v^0}(A) \int d\vec{F} + \vec{\Omega} \int (\overrightarrow{AM} \wedge d\vec{F})$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P} = \overrightarrow{v^0}(A) . \sum \overrightarrow{F_{ext}} + \vec{\Omega} . \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{o}} (\vec{F_i})$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P} = [V]_A . [Fe]_A$$

2) Energie Cinétique :

A) *Système matériel discret :* L'énergie cinétique d'un système discret est définie par :

$$E_C = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v_i}^2$$

On a alors :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v_i} \frac{d\vec{v_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v_i}\, \vec{\gamma_i}$$

Connaissant que :

$$\vec{F_i} = m_i\, \vec{\gamma_i}$$

Donc :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}\,\vec{v_i} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i = \mathcal{P}$$

Alors, la puissance des efforts intérieure et extérieurs est égale à la dérivée de l'énergie cinétique du système par rapport au temps :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext}$$

B) *Système matériel continue :* Soit (A) et (M) deux point du solide indéformable (S), l'énergie cinétique du système est définie par :

$$E_C = \frac{1}{2}\int \overrightarrow{v^0(M)}^2\ dm \implies \frac{dE_c}{dt} = \int \overrightarrow{v^0(M)}\ \overrightarrow{\gamma^0(M)}\ dm$$

On remplace la vitesse au point M par la cinématique de solide, on trouve que la dérivé de l'énergie cinétique dans un système continue égale au produit de torseur cinématique $[V]$ et le torseur dynamique $[D]$:

$$\frac{dE_c}{dt} = \int \left(\overrightarrow{v^0}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \overrightarrow{\gamma^0(M)}\ dm = \overrightarrow{v^0}(A) \int \overrightarrow{\gamma^0(M)}\ \ dm + \int \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}\right) \overrightarrow{\gamma^0(M)}\ dm$$

$$\Leftrightarrow \frac{dE_c}{dt} = \overrightarrow{v^0}(A) \int \overrightarrow{\gamma^0(M)}\ \ dm + \vec{\Omega} \int \left(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\gamma^0(M)}\right)\ dm$$

$$\Leftrightarrow \frac{dE_c}{dt} = \overrightarrow{v^0}(A)\,.\,\vec{D}\ + \vec{\Omega}\,.\,\overrightarrow{\delta_A}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dE_c}{dt} = [V]_A\,.\,[D]_A$$

D'autre part, sachant que le torseur dynamique égal au torseur de force $[D]_A = [Fe]_A$, on définie le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext} = [V]_A\,.\,[Fe]_A$$

VI. Conservation de l'énergie mécanique :

Le théorème de l'énergie cinétique pour un système continue est définie par :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext} \Leftrightarrow dE_c = \mathcal{P}_{ext}\, dt = dW$$

Si toutes les forces du système dérivent d'un potentiel (U) on à alors :

$$\vec{F}_{ext} = -\overrightarrow{grad}\, U \implies -dU = \vec{F}_{ext}\, d\vec{r} = dW$$

A partir des équations précédentes, on trouve que :

$$dE_c = -dU \Leftrightarrow d(E_c + U) = 0 \Longrightarrow E_c + U = C^{te}$$

On appelle l'énergie mécanique E_m totale du système la quantité conservé $E_c + U$ par rapport au temps.

Etude des Systèmes Dynamiques

Equation de Lagrange

I. Degrés de liberté et coordonnées généralisées :

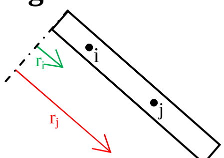
1) *Degrés de liberté et contraintes :*

La mécanique de Newton a montré sa puissance de description dans nombreux cas dynamique à l'aide de ces trois principes où le mouvement d'un système quelconque de **N** particules est obtenu par la résolution de **N** équations vectorielles différentielles du 2eme ordre, mettant en jeu **6N** constantes d'intégrations, correspondant aux positions et vitesses initiales des **N** particules.

Par ailleurs, cette description doit être indépendants de l'observateur, car toutes les points matériels sont soumis à des contraintes cinématiques qui restreignent leur liberté de mouvement et définissent les *relations de liaison* entre les points. Ce qui se traduit par une invariance de la forme des équations lors d'un changement de référentiel.

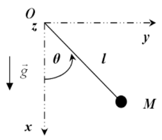
Il y a cependant des circonstances où l'application de la mécanique de Newton est délicate C'est lorsqu'un système mécaniques varie en nombre et en genre, Comme exemple :

Corps rigide : la distance entre deux points doit rester constante :



$$\left(r_i - r_j\right)^2 = c_{ij}^2$$

Pendule : les coordonnées cartésiennes obéissent à la contrainte :



$$x^2 + y^2 = l^2$$

D'une façon générale, s'il y a **k** contraintes imposées sur un solide indéformable, les degrés de liberté réels du système caractérisant la dynamique se réduisent en :

$$n = 3N - k$$

Cela signifie que la formulation newtonienne demande la résolution d'un trop nombre d'équation avec **k** liaisons qu'il faut l'étudier afin d'appliquer la *para métrisation minimale* sur les problèmes du système à résoudre.

2) Contraintes (liaisons) holonomes :

Sont les plus courantes, elles sont définies par des relations implicites, reliant entre elles les positions dans la configuration instantanée $\overrightarrow{r_{ij}}$ sans faire intervenir les vitesses :

$$f\left(\overrightarrow{r_{1j}}, \dots \dots, \overrightarrow{r_{Nj}}, t\right) = 0$$

Si la contrainte holonome dépend **explicitement** du temps, elle est dite ***Rheonôme***, sinon elle est dite ***Scléronôme*** (stationnaire).

Une liaison holonome permet de réduire le nombre de degrés de liberté du système (ddl) d'une unité.

Exemple : Pour un système spatial de 2 masses $m1$ et $m2$ reliées par une barre rigide de longueur l, les positions instantanées $\overrightarrow{r_{1J}}$ et $\overrightarrow{r_{2J}}$ sont reliées par une relation scléronôme de type :

$$f(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}) = 0$$

Car la variation des positions des masse dans l'espace est données par :

$$\sum_{i}^{3} (\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2})^2 = l^2)$$

Donc, parmi les 6 *degrés de liberté* du système, la connaissance de 5 est suffisante pour caractériser l'ensemble des positions de cette barre dans l'espace.

3) <u>Contraintes (Liaisons) non-holonomes</u>

Ces contraintes ne répondent pas à la définition précédente, elles sont souvent du type :

$$f\left(\overrightarrow{r_{iJ}}, \overrightarrow{\dot{r}_{iJ}}, t\right) = 0$$

Où les $\overrightarrow{\dot{r}_{iJ}}$ sont les vitesses associées aux $\overrightarrow{r_{iJ}}$, cette relation n'étant pas généralement intégrable, et ne permet pas de réduire le nombre de *ddl* du système.

Exemple : On considère une sphère (S) de rayon R et dont les coordonnées de son centre sont donnes par (x_c, y_c, z_c) dans le repère (R_0).

Cette sphère est assujettie à rouler sans glissement dans le plan (λ) ce qui signifie que la vitesse du point de contact I entre la sphère et le plan est nulle, elle est la même pour (S) et (λ), ce qui se traduit par :

$$\vec{V}(I \in S/R0) = \vec{V}(I \in \lambda/R0) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}(C \in S/R0) = \overrightarrow{CI} \wedge \vec{\Omega}(S/R0)$$

Ce qui donne les équations non-holonomes suivante:

$$\begin{cases} x^{\bullet} = R(-\varphi^{\bullet} \sin\theta \cos\psi + \theta^{\bullet} \cos\psi) \\ y^{\bullet} = R(-\varphi^{\bullet} \sin\theta \cos\varphi - \theta^{\bullet} \cos\psi) \end{cases}$$

Alors que pour résoudre ce problème indépendamment du type de contrainte imposé sur le solide il suffit d'exprimer les lois de la mécanique en fonction des coordonnées indépendantes non pas en coordonnées habituelles de position $\overrightarrow{\boldsymbol{r_i}}$ avec $\boldsymbol{i = 1, \ldots, N}$

Ces coordonnées indépendantes connues sous le nom « Coordonnées généralisé» désigne les paramètres de configuration $\boldsymbol{q_j}$ en fonction desquels on exprime les déplacements de tous les points du système :

$$\vec{r_i} = \vec{r_i}(q_j, \dots \dots, q_n, t) \quad avec\ j = 1, \dots . . n$$

Par la suite la vitesse associées sera en fonction de :

$$q_j^{\bullet} = \frac{\partial q_j}{\partial t}$$

II. <u>Principe de travail virtuel:</u>

Le du Principe des travaux Virtuels sert à caractériser l'équilibre mécanique d'une structure en manipulant des quantités scalaires (travail et énergie) plutôt que des quantités vectorielles et tensorielles. Autrement dit, comment faire disparaitre les forces de liaison $\overrightarrow{\boldsymbol{F_\iota}}$ en expriment les lois de la dynamiques de n degrés de liberté uniquement par les forces extérieur $\overrightarrow{\boldsymbol{F_{ext}}}$.

1) <u>Principe d'Ambert :</u>

Considérons un point matériel **A**, associée à une masse $\boldsymbol{m_A}$ soumis a un champ de forces $\vec{\boldsymbol{X}}$ *qui* peuvent être des forces volumiques données ou bien des efforts de réaction dû aux conditions cinématiques imposées au système.

L'équilibre dynamique est caractérisé par le *PFD :*

$$m_A \overrightarrow{r_i^{\bullet\bullet}} - \vec{X} = \vec{0}$$

Imaginons une trajectoire $\overrightarrow{\boldsymbol{r_\iota'}}(\boldsymbol{t})$ distincte de $\overrightarrow{\boldsymbol{r_\iota}}(\boldsymbol{t})$, mais suffisamment proche. On définit le déplacement virtuel $\boldsymbol{\delta \vec{r}_i}$ à un instant **t** arbitraire $\boldsymbol{\delta t = 0}$ par

$$\delta \vec{r_i} = \overrightarrow{r_i'}(t) - \vec{r_i}(t) = \sum_k \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_k} \delta q_k$$

Ce déplacement virtuel représente un écart par rapport au déplacement réel qui met en jeu une translation correspondante dans le temps ainsi qu'un éventuel travail des forces de liaison.

Le principe de d'Alembert stipule donc que les seuls déplacements virtuels possibles pour une particule $\boldsymbol{\alpha}$ du système sont ceux qui sont compatibles avec les forces (internes ou non) de liaison et donc n'engendrent aucun travail.

$$\delta W = \sum_\alpha \left(\overrightarrow{F_{ext}} + \overrightarrow{F_{liaison}}\right)_\alpha \delta \overrightarrow{r_\alpha} = \sum_\alpha \left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)_\alpha \delta \overrightarrow{r_\alpha}$$

On remplaçant le déplacement virtuel $\boldsymbol{\delta \overrightarrow{r_\alpha}}$ par sa formule en fonction des coordonnées généralisées, on trouve :

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)_\alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_k}\, \delta q_k = \sum_{k=1}^{n} Q_k\, \delta q_k$$

Etant que : **N** nombre des coordonnées du système, **n** le nombre de degrés de liberté (**n=3N-k**)

Remarque :

- Si les contraintes ne varient pas au cours du temps (contraintes Scléronômes), alors le déplacement virtuel est équivalent à un déplacement réel.
- Le principe de d'Alembert ne se vérifie que par l'expérience. Pour se convaincre malgré tout de sa validité,

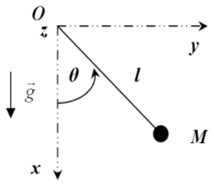
2) Forces généralisées :

Sachant que dans un déplacement virtuel l'écart temps est nulle, le travaille élémentaire du système s'exprime en fonction des forces généralisés Q_k telle que :

$$Q_k = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)_\alpha \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_k}$$

Ces force *intérieures* et *extérieures* au système peuvent être classées selon leur type (élastiques, conservatives, dissipatives, ...) ce qui permet de formuler les équations de Lagrange dans un cadre tout à fait général. Ces forces sont dites conservatives si le travail virtuel associé est récupérable.

Exercice 01: Utilisant le principe d'Ambert, trouver le travail élémentaire établie par un pendule simple de longueur l ?



Le système obéit aux relations suivantes :

$$x^2 + y^2 = l^2 \Rightarrow \begin{cases} x = l\cos\theta \\ y = l\sin\theta \end{cases}$$

Passant aux coordonnées généralisées :

$$\delta\vec{r} = \delta x\vec{\imath} + \delta y\vec{\jmath} = -l\sin\theta\,\delta\theta\vec{\imath} + l\cos\theta\,\delta\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\Leftrightarrow \delta\vec{r} = l\,\delta\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$$

Alors, le travail élémentaire établie par un pendule :

$$\delta W = \sum_\alpha \left(\overrightarrow{F_{ext}} + \overrightarrow{F_{liaison}}\right)_\alpha \delta\overrightarrow{r_\alpha} = \sum_\alpha \left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)_\alpha \delta\overrightarrow{r_\alpha} = \left(\vec{P} + \vec{T}\right)\delta\vec{r}$$

D'après le principe d'Ambert, la seul force agissant sur le système est $\vec{P}$, la force de liaison $\vec{T}$ ne travail pas car $\boldsymbol{\vec{T}} \perp \boldsymbol{\delta\vec{r}}$, donc :

$$\delta W = \vec{P}\,\delta\vec{r} = -mg\ \sin\theta\, l\,\delta\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$$

Par la suite, la force généralisée sera :

$$Q_\theta = -lmg\sin\theta\ \overrightarrow{u_\theta}$$

3) L'accélération généralisée :

D'après la relation fondamentale de la dynamique le travail élémentaire des forces extérieur lors un déplacement correspond à une variation d'énergie due à une variation d'impulsion mesuré dans un référence galiléen, qui se traduit par :

$$\delta W = \sum_{\alpha} m_\alpha \overrightarrow{\ddot{r}_\alpha}\, \overrightarrow{\delta r_\alpha} = \sum_{\alpha} m_\alpha \overrightarrow{\dot{v}_\alpha}\, \overrightarrow{\delta r_\alpha} \overrightarrow{u_\theta}$$

Remplaçant le déplacement virtuel $\boldsymbol{\delta\overrightarrow{r_\alpha}}$ par :

$$\delta \vec{r}_i = \sum_k \frac{\partial \vec{r_\imath}}{\partial q_k}\, \delta q_k \overrightarrow{u_\theta}$$

On trouve :

$$\sum_{\alpha} m_\alpha \overrightarrow{\ddot{r}_\alpha}\, \overrightarrow{\delta r_\alpha} = \sum_{\alpha} m_\alpha \overrightarrow{\dot{v}_\alpha} \sum_k \frac{\partial \vec{r_\imath}}{\partial q_k}\, \delta q_k = \sum_{k=1}^{n} A_k\, \delta q_k \overrightarrow{u_\theta}$$

Etant que les coefficients A_k sont des forces souvent appeler accélération généralisé :

$$A_k = \sum_{\alpha} m_\alpha \overrightarrow{\dot{v}_\alpha} \frac{\partial \vec{r_\imath}}{\partial q_k}\, \overrightarrow{u_\theta}$$

III. Equation de Lagrange :

La forme proposée par Lagrange est la forme la plus générale car elle ne se limite pas aux systèmes conservatifs, elle s'exprimé en fonction des coordonnées généralisées de la manière suivantes :

$$A_k = \sum_{\alpha} m_\alpha \overrightarrow{\dot{v}_\alpha} \frac{\partial \vec{r_\imath}}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha} m_\alpha \overrightarrow{v_\alpha} \frac{\partial \vec{r_\imath}}{\partial q_k}\right) - \sum_{\alpha} m_\alpha \overrightarrow{v_\alpha} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r_\imath}}{\partial q_k}\right) \overrightarrow{u_\theta}$$

D'autre part, et puisque nous avons des vitesses, le déplacement est réel :

$$d\vec{r}_i = \sum_k \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_k}\, dq_k + \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial t} dt\, \overrightarrow{u_\theta}$$

Par conséquent, la vitesse sera donné par :

$$\overrightarrow{v_\alpha} = \vec{r}^{\bullet} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_\alpha} = \sum_k \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_k}\, \dot{q}_k + \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial t}$$

Par ailleurs, le deuxième terme de $\boldsymbol{A_k}$ se simplifie en :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_k}\right) dq_i + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_k}\right) dt\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_k}\right) = \sum_i \frac{\partial^2 \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q_k} + \frac{\partial^2 \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial t \partial q_k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_k \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_k} \dot{q_k} + \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial t}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial \overrightarrow{v_\alpha}}{\partial q_i}$$

Car $\frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_k}$ est une fonction des q_i et du temps uniquement, alors : $\frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_k} = \frac{\partial \overrightarrow{v_\alpha}}{\partial \dot{q_k}}$

En regroupant tous dans l'équation de l'accélération généralisée A_k on obtient :

$$A_k = \frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha m_\alpha \overrightarrow{v_\alpha} \frac{\partial \overrightarrow{v_\alpha}}{\partial \dot{q_k}}\right) - \sum_\alpha m_\alpha \overrightarrow{v_\alpha} \frac{\partial \overrightarrow{v_\alpha}}{\partial q_k}$$

$$\Leftrightarrow A_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q_k}}\left(\sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \overrightarrow{v_\alpha}^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \overrightarrow{v_\alpha}^2\right)$$

Comme l'énergie cinétique totale de **N** particules constituant le système est la somme des énergies cinétiques de chaque particule $\boldsymbol{\alpha}$ du système :

$$T = \sum_\alpha T_\alpha = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \overrightarrow{v_\alpha}^2$$

Et donc l'accélération généralisée sera :

$$A_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q_k}} T - \frac{\partial}{\partial q_k} T$$

En outre, Le principe de d'Alembert permet donc de réécrire la relation fondamentale de la dynamique sous la forme :

$$\sum_{k=1}^{n} (A_k - Q_k)\, \delta q_k = 0$$

Où les **n** déplacements virtuels $\boldsymbol{\delta q_k}$ sont quelconques et indépendants. Cette indépendance découle directement du fait que les contraintes sont holonomes ce qui donne l'équation dynamique de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q_k}} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

Où les forces $\boldsymbol{Q_k}$ sont obtenues à l'aide de l'équation : $Q_k = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)_\alpha \frac{\partial \overrightarrow{r_\alpha}}{\partial q_k}$

Néanmoins, la variété des forces exerçant sur le système (type de force) permettant de formuler les équations de Lagrange dans un cadre tout à fait général.

A) Forces conservatives :

Sont des forces ou le travail virtuel associé est récupérable, ainsi qu'elles dérivent du même potentiel pour chaque particule α du système :

$$\overrightarrow{F_\alpha} = -\overrightarrow{\nabla_\alpha} V = -\frac{\partial V}{\partial r_{\alpha,i}}$$

Etant que : **i** compteur des coordonnées de l'espace

Alors, la force généralisée s'écrit :

$$Q_k = -\sum_\alpha \sum_i \frac{\partial V}{\partial r_{\alpha,i}} \frac{\partial r_{\alpha,i}}{\partial q_k}$$

$$\Leftrightarrow Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

Puisque $\boldsymbol{V(q_k)}$ est fonction de q_k uniquement et non pas du temps, on définie le *Lagrangien* $\mathcal{L}$ tel que : $\boldsymbol{\mathcal{L} = T - V}$

Et les **n** équations de Lagrange seront donné par :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$

Cette équation doit évidemment redonner la relation fondamentale de la dynamique. Donc, Pour une particule La force généralisé sera égale à :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k$$

Alors que : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$ doit être égale à la dérivée temporelle de l'impulsion généralisée –équivalent d'une quantité de mouvement-

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} p_k = Q_k$$

On remarque que l'on peut encore mettre les équations du mouvement sous la forme lagrangienne ci-dessus même si le système n'est pas conservatif dans le sens usuel. Il suffit que l'on puisse définir un potentiel généralisé $V\,(q, \dot{q})$ tel que la force généralisée s'écrive :

$$Q_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

B) Forces dissipatives (Fonction de Rayleigh):

Ces forces sont de sens opposé au vecteur vitesse, orientées dans la même direction. Elles ne dérivent pas d'un potentiel (même généralisé) et elles sont fonction du module du vecteur vitesse.

En outre, les liaisons non-parfaites peuvent être dissipatives, c'est souvent le cas dans les systèmes réels où on peut toujours écrire les équations de Lagrange sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k$$

Où $\boldsymbol{Q_k}$ sont des forces généralisées dissipatives qui s'écrivent généralement sous la forme $\boldsymbol{F_i} = -\boldsymbol{k_i}\boldsymbol{v_i}$ (comme exemple les forces de frottement), ces forces peuvent s'obtenir à partir d'une fonction, appelée ***fonction de dissipation de Rayleigh*** définie par :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\left(k_x v_{\alpha x}^2 + k_y v_{\alpha y}^2 + k_z v_{\alpha z}^2\right)$$

Avec :$Q_k = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}$

Remarque : le travail virtuel de ces forces dissipatives agissant sur le système est non-nul.

Dynamique des Systèmes Ouverts

I. Introduction :

Contrairement à la description de Lagrange qui s'accompagne chaque particule de son mouvement en indiquant à tout instant t la trajectoire (position) d'un élément au quel il est lié dans le système; la description d'Euler permet de repérer à tout instant t la grandeur et la direction de vecteur vitesse des particules quelque soit leurs endroits.

II. Définition système ouvert :

Un système ouvert est un système qui interagit en permanence avec son environnement. L'interaction peut se faire via des informations, de l'énergie ou des matières transférées vers ou depuis les frontières du système.

Le concept de système ouvert a été introduit premièrement dans le cadre de la thermodynamique. Son utilisation a ensuite été élargie dans les théories de l'information et des systèmes naturels et sociaux.

Le système ouvert en régime permanant échange de la matière où de l'énergie de façon continue avec le milieu extérieur en conservant ses variables d'état par rapport au temps, cela signifie que sa masse reste constante et par conséquent le débit massique d'entré et de sortie sera le même :

$$M_{out} = M_{in}$$

En outre, les variables d'états tels que l'énergie interne U, la vitesse $\vec{v}$ et l'enthalpie H restent constantes en fonction du travail et de la quantité de chaleur fournie par le système :

$$H_{out} + E_{c_{out}} + E_{P_{out}} - H_{in} - E_{c_{in}} - E_{P_{in}} = \delta W + \delta Q$$

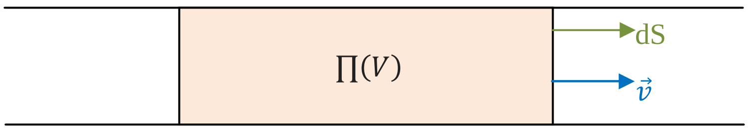
Exemple :

- Une turbine tourne avec vitesse constante : en régime permanant, la température et la pression reste constante dans le temps en touts point du système malgré ils ne sont pas homogène en espace
- Un moteur d'essence : malgré son fonctionnement alternatif, la température et la pression sont les mêmes a chaque instant d'observation après un entier de cycle.
- Ecoulement des fluides : les fluides incompressibles la pression, la vitesse et énergie potentielle sont uniformes sur toute section de la surface de système.

III. Loi de la conservation de la masse :

Soit un système ouvert ($\prod$) de volume (V) contenue dans une surface (S) limité dans le référence d'étude dite « surface de contrôle ».

A travers de cette surface de contrôle l'échange aura lieu avec le milieu extérieur.



La masse contenue dans le volume (V) est définie par :

- A l'instant t : $M(t) = \iiint_V \rho(\vec{r},t)dV$
- A l'instant $t+dt$: $M(t+dt) = \iiint_V \rho(\vec{r},t+dt)dV$

Donc la variation de la masse totale par rapport au volume totale du système lors du mouvement entre le temps t et $t+dt$ est :

$$dM = M(t) - M(t+dt) = \iiint_V [\rho(\vec{r},t) - \rho(\vec{r},t+dt)]dV$$

$$dM = \iiint_V \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} dV\ dt$$

D'autre part, la masse qui traverse la surface (S) pendant l'intervalle du temps dt, avec la vitesse $\vec{v}$ est donné par :

$$M^* = \oiint_S \rho(\vec{r},t)\vec{v}\,\overrightarrow{dS}\,dt$$

Comme : $M_{final} = M_{initial} + dM$

La masse M^* est égale aussi à : $M^* = M_{initial} - M_{final} = -dM$

Et donc on montre l'équation intégrable de la conservation de la masse dans un système ouvert :

$$M^* + dM = \Delta M = 0$$

$$\Leftrightarrow \oiint_S \rho(\vec{r},t)\vec{v}\,\overrightarrow{dS} + \iiint_V \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} dV = 0$$

Utilisant le théorème d'***Ostrogradski***, on obtient la forme *locale* de l'équation de la conservation de la masse connue sous le nom : équation de la continuité

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \overrightarrow{div}\,\vec{v} = 0$$

Remarque :

Le théorème d'Ostrogradski calcule le flux de divergence comme :

$$\iiint_V \overrightarrow{div}\,\vec{v}\,dV = \oiint_S \rho(\vec{r},t)\vec{v}\,\overrightarrow{dS}$$

IV. <u>Loi de la résultante dynamique « la quantité de mouvement » :</u>

Soit un volume (V) contenue dans une surface de contrôle (S) fixe dans le repère d'étude, utilisant le PFD nous avons :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\overrightarrow{P(t)}}{dt} = \frac{dM(t)\overrightarrow{v(t)}}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{dM(t)}{dt}\overrightarrow{v(t)} + M(t)\frac{d\overrightarrow{v(t)}}{dt}$$

Sachant que $\overrightarrow{v(t)} = cte$ par rapport au temps :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{dM(t)}{dt}\overrightarrow{v(t)} = \Delta M\,\overrightarrow{v(t)}$$

$$\Leftrightarrow \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \oiint_S \vec{v}\,\rho(\vec{r},t)\vec{v}\,\overrightarrow{dS} + \iiint_V \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}\vec{v}\,dV$$

$$\Leftrightarrow \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \boxed{\oiint_S \vec{v}\,\rho(\vec{r},t)\vec{v}\,\overrightarrow{dS}} + \boxed{\frac{d\vec{P}(M = c^{te})}{dt}}$$

Force Surfacique ou de Contacte
(Force de poussé)

Force Volumique
(À l'intérieur du volume total)

En outre, les forces surfaciques ou de contact représente le ***débit de la quantité de mouvement***

En cas du régime permanant, les forces volumiques en V à l'intérieur de la surface de contact (S) sont constantes :

$$\frac{d\vec{P}(M = c^{te})}{dt} = \vec{0}$$

Ceci définie le théorème d'Euler qui relie la somme des forces extérieur avec le débit de la quantité de mouvement :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \oiint_S \vec{v}\,\rho(\vec{r},t)\vec{v}\,\overrightarrow{dS}$$

Si le système est unidimensionnelle, le théorème d'Euler est donné par :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = q_m(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1})$$

Avec $q_m = \rho\, l$

V. Loi du Moment cinétique :

Le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_0}(t)$ totale en o de la matière ($\prod$) contenue à l'intérieur de la surface de contrôle (S) est définie par :

$$\overrightarrow{\sigma_0}(t) = \int_{\prod} \left(\overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}(A)\right) dM$$

Utilisant le PFD nous avons :

$$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_o}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \frac{d\overrightarrow{\sigma_0}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\prod} \left(\overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}(A)\right) dM$$

$$\Leftrightarrow \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_o}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \int_{\prod} \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \wedge \vec{v}(A)\right) dM + \int_{\prod} \left(\overrightarrow{OA} \wedge \frac{d\vec{v}(A)}{dt}\right) dM$$

$$+ \int_{\prod} \left(\overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}(A)\right) \frac{dM}{dt}$$

Sachant que $\overrightarrow{OA}\ et\ \overrightarrow{v(t)} = cte$ par rapport au temps :

$$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_o}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \int_{\prod} \left(\overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}(A)\right) \frac{dM}{dt} = \left(\overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}(A)\right)\Delta M$$

$$\Leftrightarrow \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \oiint_S \left(\overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}(A)\right) \rho(\vec{r},t)\vec{v}\, \overrightarrow{dS} + \iiint_V \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} \left(\overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}(A)\right) dV$$

$$\Leftrightarrow \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \oiint_S \left(\overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}(A)\right) \rho(\vec{r},t)\vec{v}\, \overrightarrow{dS} + \frac{d\overrightarrow{\sigma_0}(M = c^{te})}{dt}$$

Etant que : $\oiint_S \left(\overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}(A)\right) \rho(\vec{r},t)\vec{v}\, \overrightarrow{dS}$ le ***débit du Moment Cinétique à travers la surface de contrôle (S)***

VI. Loi de l'énergie cinétique :

Pour un système ouvert l'énergie cinétique est définie par :

$$E_c = \frac{1}{2}\int_{\prod} \vec{v}(A)^2\, dM$$

Utilisant le théorème de l'énergie cinétique est défini par :

$$\mathcal{P} = \frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Pi} \vec{v}(A)^2 \, dM$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P} = \frac{1}{2}\int_{\Pi} \frac{d\vec{v}(A)^2}{dt} dM + \frac{1}{2}\int_{\Pi} \vec{v}(A)^2 \frac{dM}{dt}$$

Sachant que $\overrightarrow{v(t)} = cte$ par rapport au temps :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\vec{v}(A)^2 \Delta M$$

$$\Leftrightarrow \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{1}{2}\oiint_S \vec{v}(A)^2 \, \rho(\vec{r},t)\vec{v}\,\overrightarrow{dS} + \frac{1}{2}\iiint_V \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}\vec{v}(A)^2 \, dV$$

$$\Leftrightarrow \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{1}{2}\oiint_S \vec{v}(A)^2 \, \rho(\vec{r},t)\vec{v}\,\overrightarrow{dS} + \frac{dE_C(M = c^{te})}{dt}$$

Etant que : $\frac{1}{2}\oiint_S \vec{v}(A)^2 \, \rho(\vec{r},t)\vec{v}\,\overrightarrow{dS}$ le ***débit de l'énergie cinétique sortante de la surface (S)***