

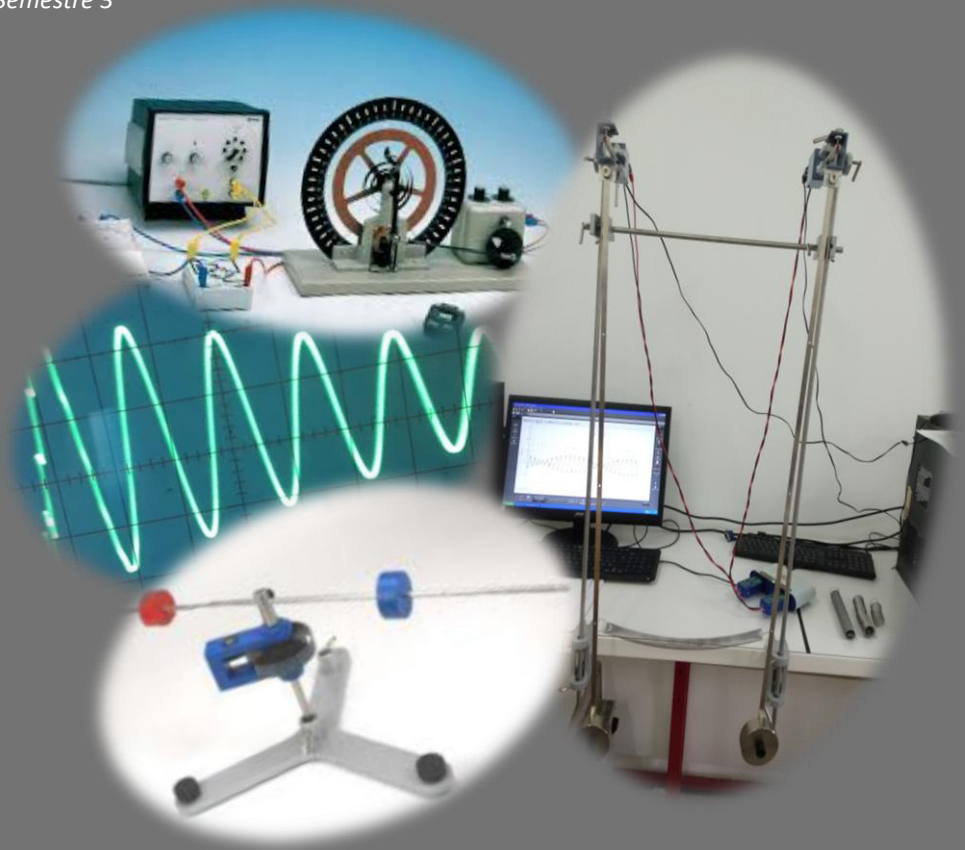
2020

ESG
EEO
O

Travaux pratiques

Ondes et Vibrations

Physique 3
Semestre 3



K. KHELLOUFI

M. CHAHI

L. FILALI



Organisation des Travaux Pratiques

- ❖ Les travaux pratiques « TP » sont obligatoires et la durée de chaque séance de TP est 1h30.
- ❖ Le port du tablier est obligatoire.
- ❖ L'étudiant doit préparer la partie théorique de chaque TP.
- ❖ Le rapport de TP doit être propre et présentable.
- ❖ Les comptes rendus doivent contenir tous les tableaux des mesures, courbes tracées sur papier millimétrique, partie théorique, conclusion et résultats interprétés.

TP N° 01 : Moment d'Inertie et Mouvement de Torsion

But de TP :

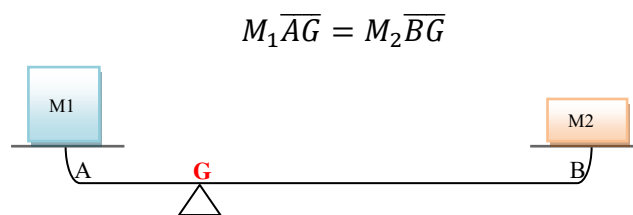
- Détermination du moment d'inertie d'un ensemble des solides indéformables homogènes.
- Etude des mouvements oscillatoires de torsion exécutée autour de l'axe de centre de masse de ces solides indéformables.
- Validation du théorème de Huygens.

I) Principe générale :

I.1. Centre de masse d'un solide (Centre d'Inertie): On appelle centre d'inertie ou de masse d'un solide (S) le barycentre (G) des différents points (p) de ce solide affectés de leurs masses respectives :

$$\int_{P \in (S)} \overrightarrow{GP} dm = \vec{0}$$

La notion du barycentre a été établie pour la 1^{ère} fois par Archimède dans leur expérience de balance, où il cherche à équilibrer le système de masse par rapport à la distance à G :



La quantité intégrale $\int_{P \in (S)} dm$ dépend de la nature du solide soit linéaire ($dm = \lambda dl$), soit surface ($dm = \sigma dS$) ou volume ($dm = \rho dV$).

I.2. Moment d'inertie :

Soit une tige de longueur (L) et de masse (dm) tourne librement sur un axe (Δ), le temps nécessaire pour que la tige atteindra une vitesse de rotation fixe est proportionnelle à $r^2 dm$.

Cette quantité est appelée *Moment d'Inertie* $I_{(S)}$, elle représente la résistance d'un solide à une mise en rotation ou à une accélération angulaire.

Le Moment d'Inertie est un scalaire exprimé en $Kg.m^2$, il peut être calculé par rapport à un point ou par rapport à un axe.

A) Moment d'inertie par rapport à un point :

Le moment d'inertie d'un solide (S) de masse dm par rapport à un point A (Fig.1), s'écrit :

$$I_A(S) = \int_{Solide} \overline{AM}^2 dm$$

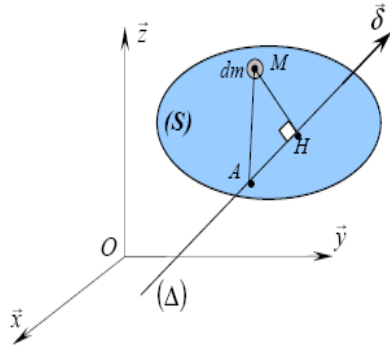


Fig. 1: Moment d’Inertie par rapport point et/ou axe

B) *Moment d’inertie par rapport à un axe (Δ) :*

On appelle moment d’inertie du solide (S) par rapport à un axe (Δ) (Fig.1), la quantité positive :

$$I_{\Delta}(S) = \int_{\text{Solide}} \overline{HM}^2 dm$$

Sachant que l’étude du système se fait dans un repère orthonormé (o, x, y, z) les éléments du moment d’inertie se présentent en une matrice (3 × 3) selon les axes du repère.

$$I_{(S)} = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & - \int x y dm & - \int x z dm \\ - \int y x dm & \int (x^2 + z^2) dm & - \int y z dm \\ - \int z x dm & - \int z y dm & \int (y^2 + x^2) dm \end{bmatrix}$$

Généralement, les solides utilisés dans la science sont de formes complexes, ils sont composés d’un certain nombre de solide élémentaire, La matrice d’inertie globale du solide n’est que la sommation des matrices d’inertie de chaque solide élémentaire par rapport au même point ou axe.

$$[I_{(S)}] = \sum_i [I_{(S_i)}]$$

Cependant, si le centre de masse du solide n’appartient pas à l’axe de rotation du système, le Moment d’Inertie se calcule à l’aide du « ***Théorème de Huygens*** ».

Ce théorème permet de calculer le moment d’inertie d’un solide (S) dans n’importe quel point P de l’espace, en connaissant son moment d’inertie au centre de sa masse dans même repère.

$$[I]_{/P} = [I]_{/G} + \begin{bmatrix} m(y_G^2 + z_G^2) & m \cdot x_G \cdot y_G & m \cdot x_G \cdot z_G \\ m \cdot x_G \cdot y_G & m(x_G^2 + z_G^2) & m \cdot y_G \cdot z_G \\ m \cdot x_G \cdot z_G & m \cdot y_G \cdot z_G & m(x_G^2 + y_G^2) \end{bmatrix}$$

I.3. Principe d'étude:

Etudier des moments d'inertie d'un ensemble des solides indéformables par l'utilisation d'un pendule de torsion mis en rotation dans le plan horizontale avec un angle θ

I.4. Grandeurs Physique utilisées:

- Angle de rotation du solide (θ)
- Moment d'inertie ($I_{(S)}$)
- Vitesse angulaire ($\omega = \dot{\theta}$)
- Rayon (R) (dépend du solide)
- Hauteur (h) (dépend du solide)
- Le centre de masse (G)
- La masse du solide (m)

I.5. Modèle théorique :

Les divers points d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe (Δ) de la même vitesse ω et la même accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ vérifient l'équation si dessous du Principe fondamentale de la dynamique :

$$\sum r F = \left(\sum m r^2 \right) \frac{d\omega}{dt} \Leftrightarrow \sum \mathcal{M} = I_{(S)} \frac{d\omega}{dt}$$

II) Dispositif expérimentale :

Afin d'étudier les moments d'inertie des solides indéformables, on utilise un pendule de torsion constitué d'une barre porte poids, sur la quelle sont disposées symétriquement deux solides indéformables de masse (m) écarté par une distance (r) par rapport à l'axe de rotation.

Le pendule est suspendu en un point O à un ressort spiral de constante de torsion C qui assure la rotation homogène du système.

Au moment de rotation, le corps solide sera soumis à un couple de torsion $\mathcal{M}_r = -C\theta$, alors en lâchant il sera équilibré par un couple d'inertie $\mathcal{M}_i = I_{(S)}\ddot{\theta}$.

D'où d'après la loi fondamentale de la dynamique : $I_{(S)}\ddot{\theta} + C\theta = 0$

En introduisant la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{I}}$, l'équation du mouvement devient $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$, sa solution est : $\theta = a \cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec une période $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}$.

La mesure de la durée d'oscillation, permet la détermination du moment d'inertie du corps par la relation :

$$I = \frac{CT^2}{4\pi^2}$$



Fig. 2 : Dispositif expérimental

III) Manipulation :

III.1. La constante de torsion du ressort :

- Fixer le dynamomètre sur l'une des extrémités de la barre (porte poids) comme mentionner dans la figure 3.
- Faire tourner la barre d'un angle ($\theta = \frac{\pi}{2}$) et la lâcher sans vitesse initiales.
- Mesurer la force de rappel et déterminer la constante de torsion.



Fig. 3 : Détermination de la constante de Torsion

III.2. Moment d'Inertie et rayon de rotation :

- Fixée la barre métallique (porte poids) dans le support rotatoire
- Accrocher les deux masses (petite cylindre) sur la barre à un rayon $r = 30\text{cm}$, par rapport à l'axe de rotation selon la figure 4
- Ecarter la barre d'un angle θ et mesurer la période T
- Dédire le moment d'inertie du système.
- Refaire la même expérience par différents rayons de rotation (changement de la position des masses dans la barre métallique)



Fig. 4 : Rapport Moment d’Inertie I et rayon r

III.3. Moment d’inertie pour différents solides indéformables :

- Remplacer la barre métallique (porte poids) par un disque
- Ecarter le disque d’un angle θ et mesurer la période T
- Déterminer le moment d’inertie du disque.
- Répéter la même expérience en utilisant la sphère et le cylindre.

III.4. Théorème de Huygens :

- Remplacer la barre métallique (porte poids) par le disque métallique (bleu)
- Fixer le disque dans le support rotatoire dans un point quelconque.
- Déterminer le moment d’inertie du disque.
- Le théorème de Huygens est-il vérifié ?

Compte Rendue TP N°01 : Moment d'Inertie et M^{vt} de Torsion

ESGEE, le.....

Groupe	Nom & Prénom	Notes & observations

But de TP :

- Détermination du moment d'inertie d'un ensemble des solides indéformables homogènes.
- Etude des mouvements oscillatoires de torsion exécutée autour de l'axe de centre de masse de ces solides indéformables
- Validation du théorème de Huygens

I Etude Théorique

1. Donner le moment d'inertie suivant l'axe de rotation d'un disque de rayon:.....

2. Donner le moment d'inertie suivant l'axe de rotation d'un cylindre plein de rayon et de hauteur

3. Donner le moment d'inertie suivant l'axe de rotation d'une sphère de rayon

.....

II Etude expérimental

1. La constante de torsion du ressort :

- Calculer le moment d'inertie de la barre métallique (porte poids) sachant que sa masse est :.....

.....

- Relever la force de rappel par le dynamomètre et déduire la constante de torsion :.....

.....

- Mesurer la période d'oscillation et vérifiez votre résultat (la constante de torsion).....

.....

2. Moment d'inertie et rayon de rotation:

- Remplir le tableau suivant sachant que :

Rayon r (m)		0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05
Période T (s)							
Moment d'inertie I_0	Théorique						
	Expérimental						

- Conclusion

.....

3. Moment d'inertie pour différents solides indéformables :

- Remplir le tableau suivant :

Forme géométrique	Disque Meublé	Disque métallique Bleu	Cylindre plein	Sphère

(s)				
I_0				

- Vérifie la valeur du moment d’Inertie des différent formes géométriques théoriquement sachant que :

Forme géométrique	Masse (Kg)	Rayon (m)	I_0
Disque Meublé	0,428	0,11	
Disque métallique Bleu	0,4525	0,16	
Cylindre plein	0,398	0,045	
Sphère	1,149	0,0725	

- Conclusion

.....

.....

.....

.....

.....

4. Théorème de Huygens:

- Remplir le tableau suivant :

Distance par rapport à l’axe de rotation (m)			
(s)			
I_0			

- Justifie le résultat obtenue et conclure :

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....

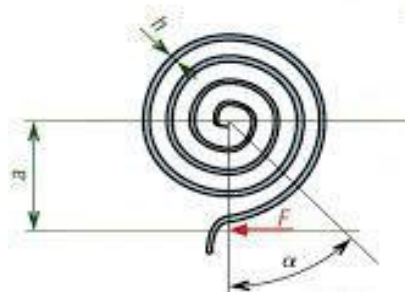
But de TP :

- Relevé l'amplitude d'oscillation d'un pendule de torsion en fonction de la fréquence d'excitation et d'amortissement.

I) Principe générale :

I.1. Définition :

Un pendule de torsion est constitué par un fil large (métallique) enroulé dans un même plan autour de son axe de fixation, il décrit des mouvements d'oscillation d'enroulement et déroulement autour de cet axe : on parle parfois de « ressort spirale »



I.2. Principe d'étude:

Etudier les oscillations libres amorties et les oscillations forcées pseudopériodique et critique

- le système oscillant est laissé libre de se mouvoir, la décroissance des amplitudes maximales successives (θ_a) varie considérablement avec la force d'amortissement présentant quatre (4) cas de régime libre (Non amortie, Amortie pseudopériodique, Critique, Apériodique)
- le mouvement du système oscillant est forcé avec un couple de torsion périodique extérieur, l'amplitude d'oscillation (θ_a) dépend de la fréquence d'excitation f c'est le phénomène de Résonance.

I.3. Grandeurs Physique utilisées:

- Angle de rotation du pendule (θ)
- Amplitude maximale des oscillations (θ_a)
- Vitesse angulaire ($\dot{\theta}$)
- Fréquence d'excitation (f) « variable »
- Fréquence propre (f_0) et de résonance (f_r) « Constantes »
- Moment de couple de torsion (\vec{M})
- Décrément logarithmique (Λ)

I.4. Modèle théorique :

La grandeur physique qui décrit entièrement l'état du système à l'instant t donné est l'angle de déviation par rapport à la position d'équilibre ou de repos ($\theta(t)$).

Quelque soit le régime étudié (libre ou forcé), deux couples de torsion interviennent sur le système:

- Celui exercée par le ressort spiral sur le pendule $M_1 = -C\theta(t)$, d'où C est la constante de rappel (raideur)
- Celui de l'amortissement exercé sur le pendule par les bobines magnétiques (frein à courants de Foucault) $M_2 = h\dot{\theta}(t)$ avec h le coefficient de frottement.

L'équation différentielle qui régie le mouvement du système est déterminée par l'utilisation de théorème du moment cinétique : $\sum \vec{\mathcal{M}} = \frac{dL}{dt}$, qui mènent à une équation différentielle selon le régime :

A. Oscillation Libres-Amortie : dans ce cas là, l'équation différentielle du mouvement s'écrit comme :

$$J\ddot{\theta}(t) + h\dot{\theta}(t) + C\theta(t) = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta}(t) + 2\lambda\dot{\theta}(t) + \omega_0^2\theta(t) = 0$$

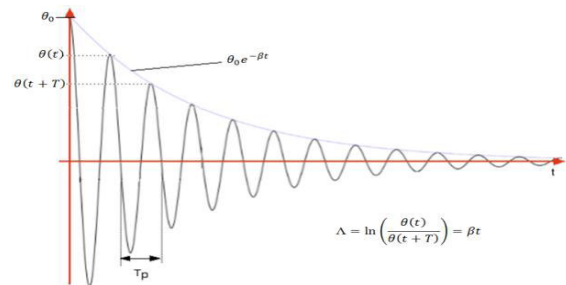
Etant que :

$$\begin{cases} J & \text{Le moment d'Inertie du solide} \\ \lambda = \frac{h}{2J} & \text{Le coefficient d'amortissement} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}} & \text{La pulsation des oscillations} \end{cases}$$

Cette équation est bien connue dans tout les systèmes oscillatoires libres amorties mécaniques où électriques, elle est caractérisé par une décroissance logarithmique (Λ) définie par la relation (voir Figure ci-contre):

$$\Lambda = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+nT)}\right)$$

Etant que n le nombre de période.



En outre, elle admet différent solutions selon l'évolution du mouvement par rapport au temps, où on trouve :

A.1. Cas pseudopériodique : apparait lorsque le coefficient d'amortissement vérifie la condition $\lambda^2 < \omega_0^2$; dans ce cas l'équation différentielle de mouvement admet comme solution $\theta(t) = \theta_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi)$ avec une pseudo pulsation $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ et un pseudo période

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

Etant que $(\tau = \frac{1}{\lambda})$ la constante de relaxation (du temps) définie pour le système

En outre, le décrément logarithmique est donc égale à $(\Lambda = \lambda T)$ sous les conditions initiales suivantes $\theta_0 = \theta_{Max} = \theta_{t=0}$ et $\dot{\theta}_{t=0} = 0$.

A.2. Cas critique : Lorsque $\lambda^2 = \omega_0^2$, le pendule retourne dans un temps minimum à sa position d'équilibre sans oscillations (il n'existe pas de valeur négative de θ)

Dans ce cas, la solution de l'équation différentielle de mouvement s'écrit comme : $\theta(t) = \theta_0 e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)$

A.3. Cas apériodique : Lorsque $\lambda^2 > \omega_0^2$, le pendule retourne asymptotiquement à sa position d'équilibre

B. Oscillation forcées : un couple d'excitation périodique d'un moment $\mathcal{M}_{ext} = \mathcal{M}_0 \cos(\Omega t)$ est appliqué sur le pendule. Appliquant le théorème de moment cinétique ($\sum \vec{\mathcal{M}} = \frac{dL}{dt}$) l'équation différentielle de système aura la forme :

$$\ddot{\theta}(t) + 2\lambda \dot{\theta}(t) + \omega_0^2 \theta(t) = \frac{\mathcal{M}_0}{J} \cos(\Omega t)$$

La solution mathématique de cette équation est donnée par la forme générale :

$$\theta(t) = \theta_g(t) + \theta_p(t)$$

Etant que $\theta_g(t)$ la solution générale du mouvement harmonique amortie et $\theta_p(t)$ la solution particulière de l'équation différentielle de mouvement avec second membre.

La solution particulière peut être déterminé par un calcul algébrique où par la méthode de représentation complexe des fonctions sinusoïdales, elle est donné par :

$$\theta_p(t) = \theta_{pm} \cos(\Omega t + \Phi_p)$$

Etant que l'amplitude d'oscillation de régime permanent θ_{pm} dépend (comme le déphasage ϕ_p) des caractéristiques du système d'excitation, ils sont définies par :

$$\theta_{pm} = \frac{\mathcal{M}_0/J}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}} ; \tan \Phi_p = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

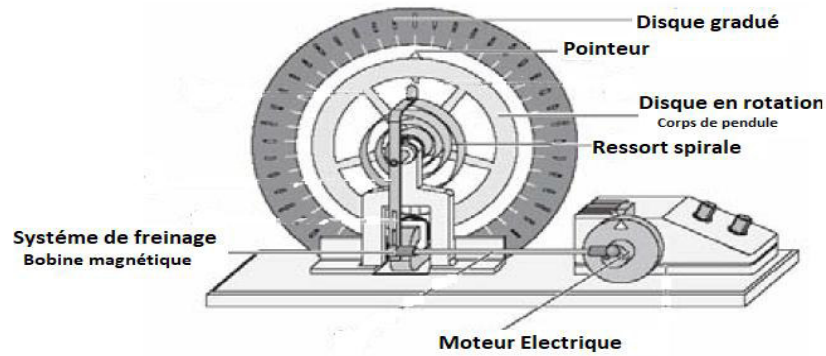
Par ailleurs, lorsque le temps augmente, la solution générale $\theta_g(t)$ tend vers zéro ($t \rightarrow +\infty$, $e^{-\lambda t} \rightarrow 0$), il en résulte que $\theta \rightarrow \theta_p$, l'oscillateur évolue donc en régime permanent plus ou moins rapide vers l'établissement du régime permanent.

II) Dispositif expérimentale :

Afin d'étudier les phénomènes vibratoires amorties où forcées liée à une force de rappel, on utilise un pendule de torsion dit pendule de « Pohl »

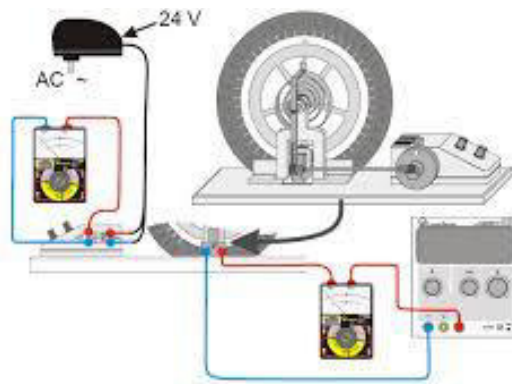
Ce pendule tournant de Pohl est un système mécanique oscillant de manière harmonique (sinusoïdale simple) sous un régime libre où forcée. Il est constitué d'un disque en rotation autour de son centre, un ressort spiral exerçant un couple mécanique pour ramener le disque à sa position d'équilibre. Ce ressort est lié à un moteur électrique dans le cas des oscillations forcées.

Le repérage des déviations angulaires se fait par un pointeur sur le disque en rotation, en plus le pendule possède un système de freinage à courant de Foucault permettant le réglage d'amortissement.



III) Manipulation :

Réaliser le montage si dessous :



A. Etude du régime libre amortis :

- Le moteur d'excitation étant à l'arrêt et le frein à courant de Foucault non alimenté ($I_F = 0$ A).
- Ecarter le pendule jusqu'à ce qu'il vienne en butée et lâcher sans vitesse initiale.
- Mesurer la période T des cinq (05) oscillations.
- Refaire la même manipulation en actionnant le frein à courant de Foucault pour $I_F = 0,25$ A ; 0,40A et 0,55A.
- Relever l'amplitude θ des oscillations chaque période pour les cinq premières oscillations (utiliser mode vidéo).
- Déduire la constante d'amortissement λ et le décrétement logarithmique Λ .
- Conclure

B. Etude du régime forcé. Visualisation de la résonance :

- Le pendule de torsion étant au repos et le frein à courant de Foucault étant non alimenté ($I_F = 0$ A)
- Allumer le moteur lié au ressort avec une tension de 15 V.
- Laisser le système se stabilise, ensuite diminuer graduellement la vitesse du moteur jusqu'à l'apparition de la résonance (mouvement oscillatoire à amplitude maximale).

- Refaire la même manipulation en régime amortis ($IF = 0,40A$) et relever maintenant la période T_a des oscillations ainsi que l'amplitude maximale θ_a .
- Tracer le graphe des oscillations forcées –amorties et déterminer la fréquence de résonance.
- .- Conclure.

.....

II Etude expérimental

1. Etude du régime libre amorti :

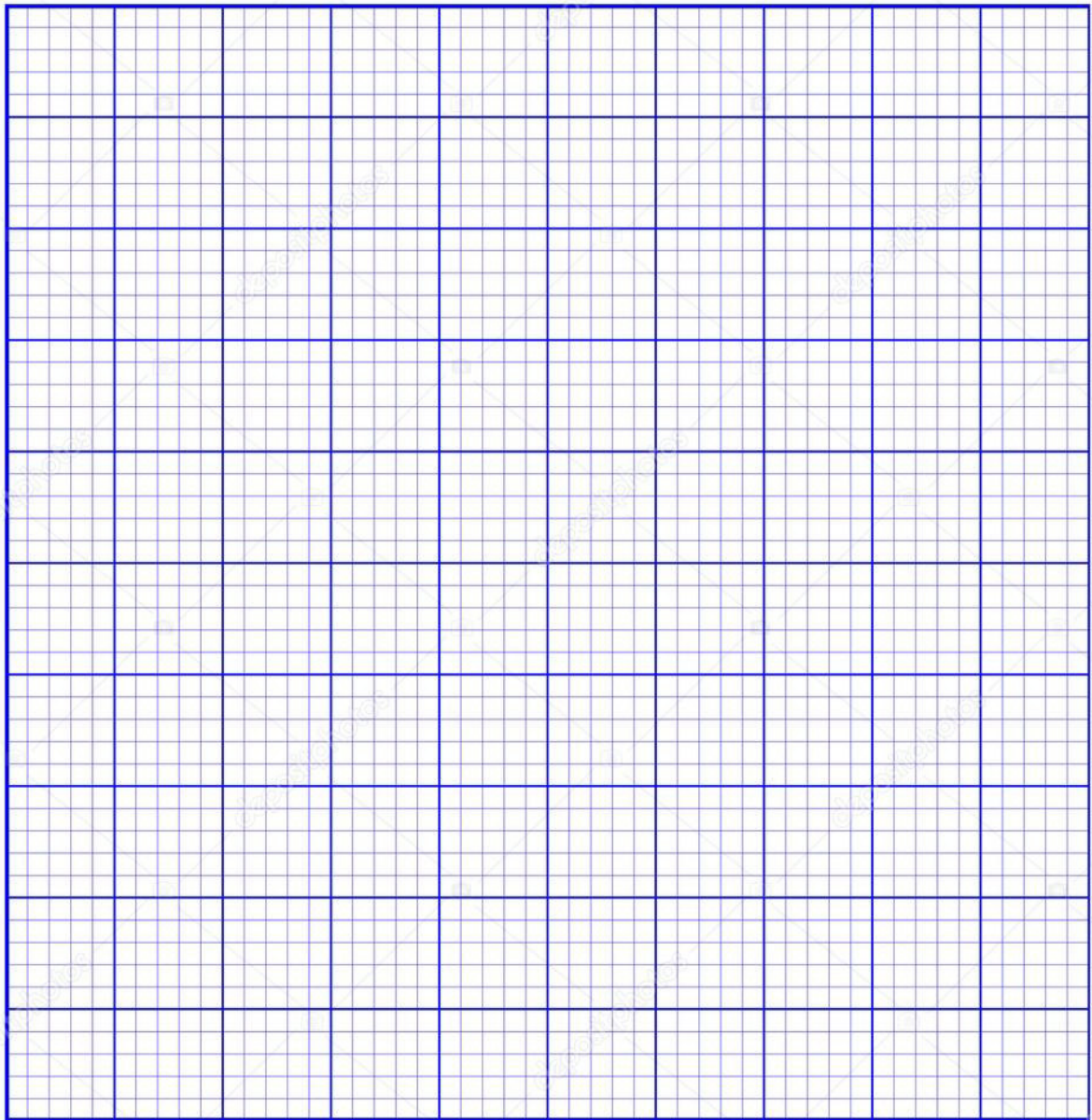
- Relever les périodes d'oscillation et remplir le tableau suivant:

Régime	Libre	Amortie (pseudopériodique)		
IF	0A	0.25A	0.40A	0.55A

- Mesuré l'amplitude de déviationséparé par un pseudo période et calculer le décrément logarithmique moyen pour le cas amortie IF=0.4A:

Nombre d'oscillations	1	2	3	5	6	9

- Déduire La constante d'amortissement :.....
- Tracer la variation de l'amplitude des oscillations en fonction du temps (utiliser solution avec condition initiale)
- Conclusion
-
-
-
-
-
-



2. Etude du régime forcé. Visualisation de la résonance

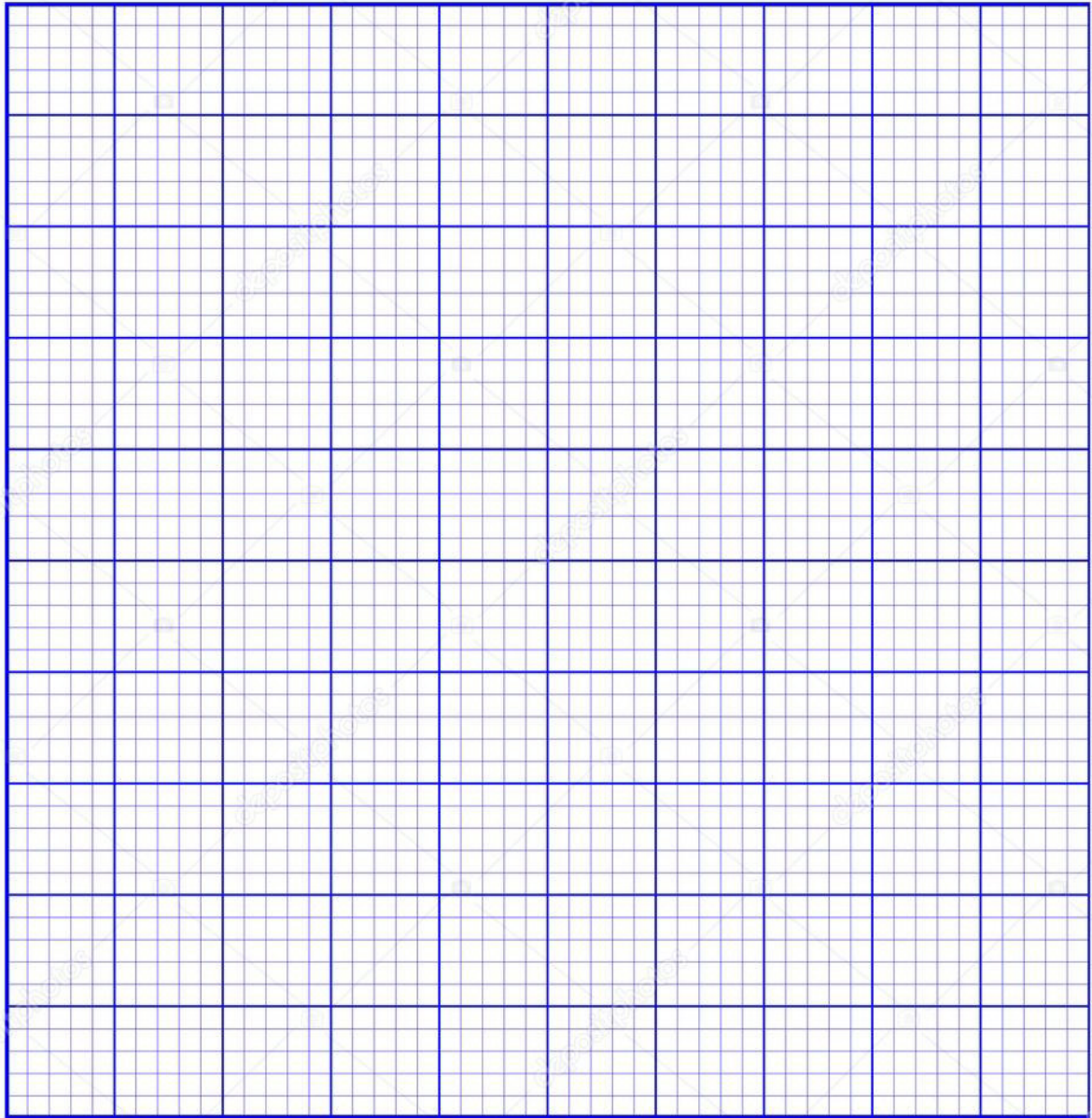
Fréquence extérieur (V)	12V	11V	10V	9V	8,5V	8V
Régime forcée						
Régime forcée- amortie IF=0,4A						

7,5V	7V	6,5V	6V	5V	4V

- Si on arrête l'amortissement, que se passe t'il pour le régime d'oscillations ?

.....
.....
.....

- Tracer le graphe des oscillations forcées et forcées –amorties en fonction de la pulsation et déterminer la fréquence de résonance.



- Conclusion

.....
.....
.....
.....

TP N° 03 : Le Pendule Couplé

But de TP :

- Mise en évidence des caractéristiques d'un système à deux pendules identiques couplées par un ressort.
- Visualisation des modes propres d'oscillations et du phénomène de battement.

I) Principe générale :

I.1. Définition : En physique, un pendule est un corps solide pouvant osciller autour d'un point ou d'un axe fixe et qui est, écarté de sa position d'équilibre, y retourne en oscillant sous l'effet d'une force, par exemple la gravité.

Un pendule est animé d'un mouvement périodique caractérisé par son amplitude θ (écartement maximal par rapport à la position d'équilibre) et par sa période T (durée d'un cycle d'oscillation).

Lorsque deux pendules mécaniques sont reliés entre eux, par exemple par l'intermédiaire d'un ressort, de nouveaux mouvements particuliers apparaissent par rapport au mouvement unique du pendule individuel. Parmi les différents mouvements possibles, trois cas sont particulièrement intéressants à observer et seront décrits théoriquement dans la section (4)

I.2. Principe d'étude:

Etudier le mouvement oscillatoire des deux pendules couplés (reliés par un ressort). L'expérience se déroule en deux parties:

- A.** Dans un premier temps, deux pendules identiques seront reliés par un ressort et les mouvements oscillatoires caractéristiques de ces deux pendules couplés seront étudiés « *modes de vibrations* ».
- B.** Dans un deuxième temps, la constante de rappel du ressort sera mesurée par deux méthodes différentes

I.3. Grandeur Physique utilisées:

- Angle de déviation du pendule 1 (θ_1)
- Angle de déviation du pendule 2 (θ_2)
- Masse du solide lié au pendule (M)
- Moment d'Inertie du solide lié au pendule (I)
- Constante de raideur du ressort (K)
- Accélération de gravité (g)
- Longueur de fil du pendule (L)
- La phase d'oscillation des pendules (ϕ_i)

- Distance de séparation des pendules au repos (a)

I.4. Modèle théorique :

Considérons deux pendules couplés par un ressort horizontal de constante de rappel (k) situé à une distance (a) de l'axe de rotation (Figure 1). La force de rappel d'un ressort est proportionnelle à l'élongation (Δx) du ressort par rapport à sa position d'équilibre :

$$\vec{F} = -k\vec{\Delta x}$$

Sachant que (Δx) sera calculé par des considérations géométriques en se plaçant dans l'approximation des petits angles de vibrations :

$$\Delta x = \|\vec{\Delta x}\| = a(\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \approx a(\theta_1 - \theta_2)$$

Comme pour le pendule simple, les équations du mouvement s'obtiennent en appliquant le théorème du moment cinétique ($\sum \vec{M} = \frac{dL}{dt}$) mais dans notre cas, les moments de force considérer n'est plus celle dû au poids mais aussi celle créée par la force de rappel du ressort entre les deux pendules.

A l'approximation des petits angles de vibration, les équations de mouvement pour les deux pendules s'écrit comme :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{MgL}{I}\theta_1 + \frac{ka^2}{I}(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{MgL}{I}\theta_2 - \frac{ka^2}{I}(\theta_1 - \theta_2) = 0 \end{cases}$$

Ces équations sont dites couplées: le mouvement du pendule 1 a un effet sur le pendule 2 et vice-versa (transfert énergétique entre les deux pendules). Il est possible de résoudre ce système d'équations en posant les phases :

$$\begin{cases} \phi_1 = \theta_1 + \theta_2 \\ \phi_2 = \theta_1 - \theta_2 \end{cases}$$

Ce qui permet d'écrire le système d'équations de mouvement comme :

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_1 + \frac{MgL}{I}\phi_1 = 0 \\ \ddot{\phi}_2 + \frac{(MgL + ka^2)}{I}\phi_2 = 0 \end{cases}$$

Dont les solutions sont donnés par :

$$\begin{cases} \phi_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \\ \phi_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \end{cases}$$

$$\text{Avec : } \omega_1 = \sqrt{\frac{MgL}{I}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{MgL + 2ka^2}{I}}$$

Etant que A_1, A_2, δ_1 et δ_2 des constantes à déterminer par les conditions initiales de mouvement.

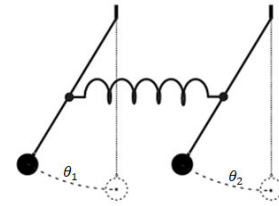
En revenant aux variables initiales du système, les solutions de l'équation de mouvement s'écrit comme :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \\ \theta_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \end{cases}$$

Par ailleurs et selon les conditions initiales du mouvement, trois cas particuliers ont observé :

A. Oscillation symétrique: cette situation correspond au cas où les deux pendules sont lâchés simultanément avec le même angle de départ, sans vitesse initiale:

$$\begin{cases} \theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0 \end{cases}$$



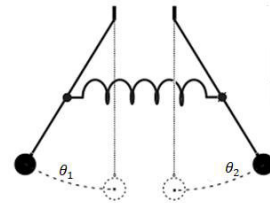
Les solutions de l'équation du mouvement deviennent alors:

$$\theta_1(t) = \theta_2(t) = \theta_0 \cos(\omega_1 t)$$

Il s'agit d'une oscillation en phase des deux pendules, à une pulsation ω_1 identique à celle d'un pendule simple.

B. Oscillations antisymétriques : cette situation correspond au cas où les deux pendules sont lâchés simultanément avec un même angle de départ, mais en direction opposée, et sans vitesse initiale:

$$\begin{cases} \theta_1(0) = \theta_0 \\ \theta_2(0) = -\theta_1(0) = -\theta_0 \\ \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0 \end{cases}$$



La solution des équations de mouvement s'écrit donc comme :

$$\theta_1(t) = -\theta_2(t) = \theta_0 \cos(\omega_2 t)$$

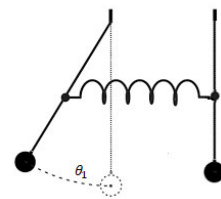
Il s'agit encore une fois d'une oscillation à une pulsation identique ω_2 pour les deux pendules, mais en opposition de phase. La période vaut dans ce cas-là $T_{A-sym} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MgL+2ka^2}}$

C. Oscillations avec Battements : cette situation correspond au cas où un des pendules est lâché d'un angle donné sans vitesse initiale, alors que le deuxième pendule est laissé à l'équilibre:

$$\begin{cases} \theta_1(0) = \theta_0 \\ \theta_2(0) = 0 \\ \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0 \end{cases}$$

Alors, La solution des équations du mouvement devient :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \theta_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \\ \theta_2(t) = \theta_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \end{cases}$$



Il s'agit donc d'un mouvement vibratoire des deux pendules avec deux pulsations caractéristiques $\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)$ et $\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)$.

Si le moment de force dû au ressort est faible par rapport à celui dû au poids nous avons $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_2 + \omega_1$, ce qui implique qu'une des composantes du mouvement varie lentement par rapport à l'autre.

Le déphasage de $\pi/2$ entre le sinus et le cosinus dans les solutions traduit le phénomène de battements entre les deux pendules: lorsqu'un pendule a son amplitude maximale, l'autre est à l'arrêt.

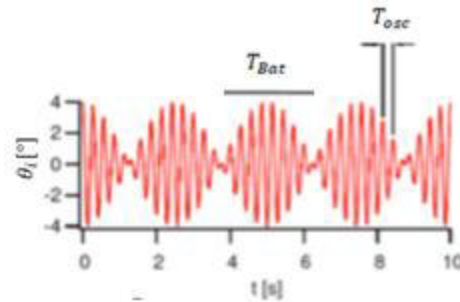
L'énergie mécanique est progressivement transférée à chaque oscillation d'un pendule à l'autre par l'intermédiaire du ressort de couplage.

La période d'oscillation rapide vaut:

$$T_{osc} = 2\pi \frac{2}{\omega_2 + \omega_1} = \frac{2T_{A-sym} T_{sym}}{T_{A-sym} + T_{sym}}$$

Alors que, la période de battements vaut :

$$T_{Bat} = 2\pi \frac{2}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{2T_{A-sym} T_{sym}}{T_{A-sym} - T_{sym}}$$



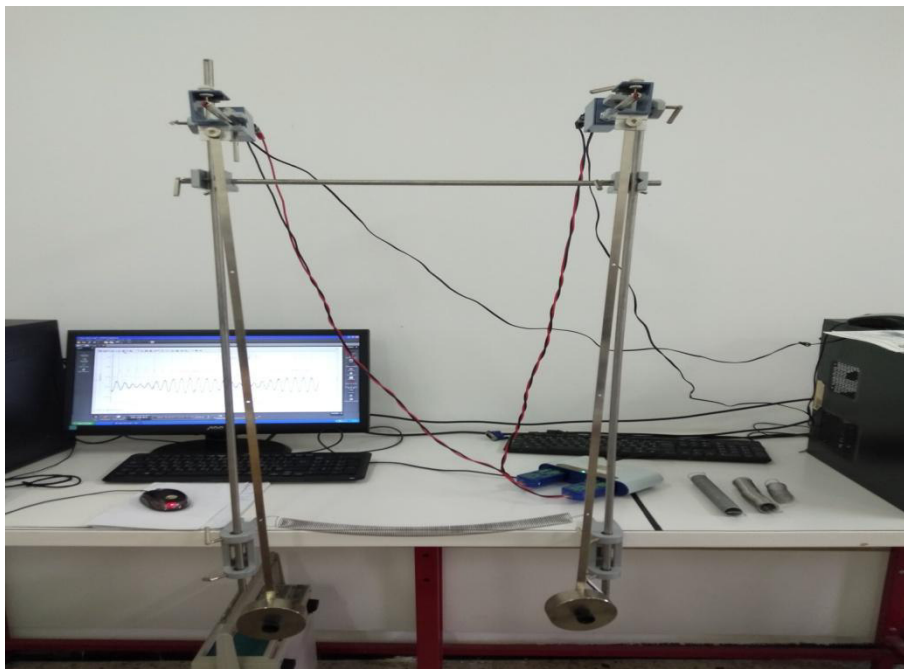
II) Dispositif expérimentale :

Le système est composé de deux pendules pesants fixés sur un support stable et montés sur le même axe par l'intermédiaire de roulement à billes et d'un ressort pouvant relier les deux pendules à plusieurs niveaux.

Chaque pendule est formé d'une tige de longueur ($L = 100\text{cm}$) et de masse ($M_T = 150\text{g}$) et d'une masse cylindrique du diamètre ($D = 1\text{cm}$) et de masse ($M_S = 1065\text{g}$).

III) Manipulation :

Réaliser le montage si dessous :



III.1. Etude du mode symétrique

- Mesuré la période d'oscillation symétrique en prenant trois (3) mesure de cinq (5) périodes.
- calculer la valeur moyenne de la période avec les incertitudes statistiques, vérifiez votre valeur du graphe.
- conclure

III.2. Etude du mode antisymétrique

- Mesuré la période d'oscillation symétrique en prenant trois (3) mesure de cinq (5) périodes.
- calculer la valeur moyenne de la période avec les incertitudes statistiques, vérifiez votre valeur du graphe.
- conclure

III.3. Etude du mode Battement

- Pour chaque ressort, mesurer la période rapide T_{osc} en prenant trois (3) mesures de cinq (5) périodes bien visibles entre deux arrêts successifs du même pendule, puis calculer la période moyenne.
- Evaluer l'erreur commise sur cette mesure.
- Pour chaque ressort, mesurer la période de battement T_{Bat} en prenant trois (3) mesure, puis calculer la période moyenne T_{Bat} . Evaluer l'erreur commise sur cette mesure.
- Comparer les valeurs mesurées et calculées.

Compte Rendue TP N°02 : Le Pendule Couplé

ESGEE, le.....

Groupe	Nom & Prénom	Notes & observations

But de TP :

- Mise en évidence des caractéristiques d'un système à deux pendules identiques couplées par un ressort.
- Visualisation des modes propres d'oscillations et du phénomène de battement.

I Etude Théorique

1. Donner l'équation différentielle de mouvement d'un pendule simple :.....

2. Utiliser les équations de mouvement de pendule couplée et sachant que , donner l'équation statique déterminant la constante de raideur K.....

.....
.....

II Etude expérimental

1. Pendule simple :

- Relever les périodes d'oscillation et remplir le tableau suivant:

Nombre d'essais	1	2	3
5T			

NB : erreur statistique sur la période est :

2. Pendule Couplée :

Cas Symétrique :

- Relever les périodes d'oscillation symétrique et remplir le tableau suivant:

Nombre d'essais	1	2	3
5			

- Que remarquer vous ?

.....
.....

- Vérifie la valeur de la période numériquement

.....
.....
.....

Cas Antisymétrique :

- Relever les périodes d'oscillation symétrique et remplir le tableau suivant:

Nombre d'essais	1	2	3

- Utiliser les mesures des cas symétrique et antisymétrique et calculer la valeur théorique de la période d'oscillation des battements :

-

.....

.....

.....

- Que remarquer vous ?
-
-

- Vérifie la valeur de la période numériquement
-
-
-

Cas Battements :

- Relever les périodes d'oscillation symétrique et remplir le tableau suivant:

Nombre d'essais	1	2	3

--	--

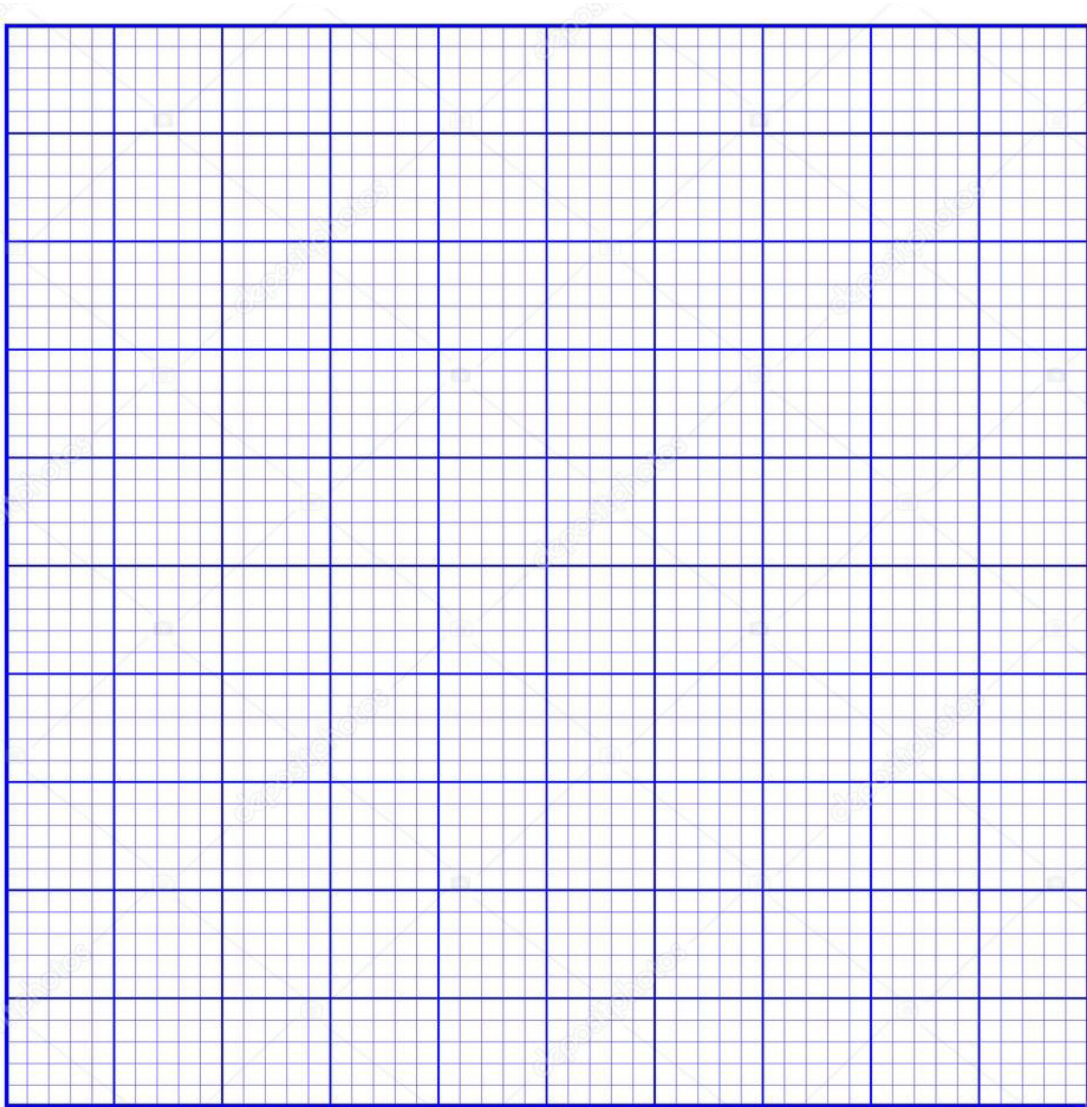
- Comparer les résultats de la période de battement théorique et expérimentale
- Relever du graphe la période d'oscillation de chaque pendule.....
.....
.....
.....
- Conclusion.....
.....
.....
.....
.....

3. Constante de raideur :

Méthode statique :

Nombre d'essais	1	2	3	4	5

- Tracer le graphe et déduire K sachant que :



Méthode Dynamique :

- Calculer la constante de raideur K en utilisant les périodes d'oscillation symétriques et antisymétriques

.....
.....
.....
.....

TP N° 04 : Oscillation forcées et résonance mécanique

« Circuit RLC »

But de TP :

- Etude des oscillations libres et amorties d'un circuit électrique simple comprenant une inductance, une résistance et un condensateur (RLC).
- Etude de phénomène de résonance apparaît dans le circuit RLC en régime forcé.

I) Principe générale :

I.1. Oscillations électriques libres :

La décharge d'un condensateur électrique C à travers une inductance L et une résistance R dans un circuit électrique simple (Figure 1) induit une variation de potentiel pendant le temps régit par une équation différentielle de type d'oscillations harmoniques.

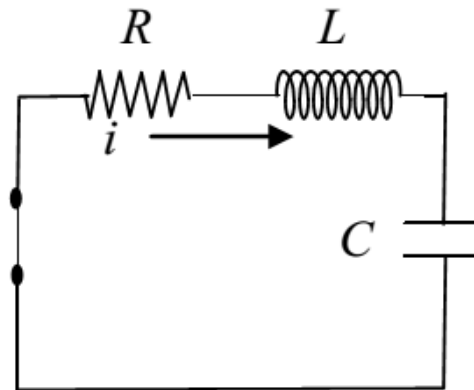


Figure 1: Circuit RLC série

En régime libre et /ou amortie, Cette équation différentielle s'exprime en fonction du courant (i) ou de la tension (u_c) sous la forme :

$$\ddot{u}_c + \frac{R_T}{L} \dot{u}_c + \frac{1}{LC} u_c = 0$$

Etant que le coefficient d'amortissement (λ) et la pulsation propre (ω_0) sont définie par :

$$2\lambda = \frac{R_T}{L} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

La solution de cette équation différentielle dépend du signe du discriminant (Δ) de l'équation caractéristique :

$$\Delta = (RC)^2 - 4LC$$

➤ Si $\Delta < 0$ où $R < 2\sqrt{L/C}$: le régime pseudo périodique apparaît, la solution de l'équation différentielle vaux :

$$u_c = u_{c0} e^{-(R/2L)t} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{Avec} \quad \omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$

Le système s'amortit après certain temps, caractérisé par décrement logarithmique δ égale à :

$$\delta = \ln \left(\frac{u_c(t)}{u_c(t+T)} \right)$$

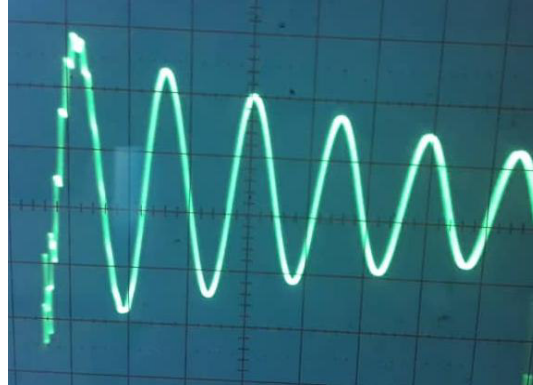


Fig. 2: Variation de u_c en fonction du temps extraite de la Figure 1

➤ Si $\Delta > 0$ où $R > 2\sqrt{L/C}$: le régime apériodique apparaît, la solution est définie comme :

$$u_c = C_1 \exp[-R/2L + \sqrt{\Delta}/2LC]t + C_2 \exp[-R/2L - \sqrt{\Delta}/2LC]t$$

Etant que C_1 et C_2 des constantes quelconques.

➤ Si $\Delta = 0$ où $R = 2\sqrt{L/C}$: le régime critique a lieu et la solution de l'équation différentielle sera :

$$u_c = [\exp[-R/2L]t]\{C_3t + C_4\}$$

Etant que C_3 et C_4 des constantes d'intégration.

I.2. Oscillations électriques Forcées :

Si la capacité C , l'inductance L et la résistance R sont montés en série dans un circuit électrique alimenté par une source de tension alternative $e(t) = e_0 \cos(\Omega t)$ (Figure 3)

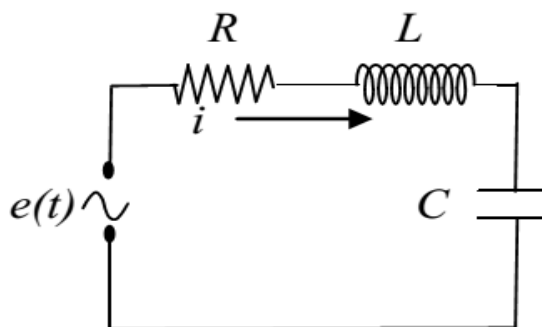


Fig. 3: Circuit électrique alimenté par une source de tension alternative $e(t)$

L'équation différentielle du système s'écrit comme :

$$\ddot{u}_c + \frac{R_T}{L} \dot{u}_c + \frac{1}{LC} u_c = e_0 \cos(\Omega t)$$

La solution générale est égale à la somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière de l'équation avec second membre. La solution de l'équation homogène s'annule après un certain temps, il ne reste que la solution particulière qui est de la forme :

$$u_c = u_{c0} \cos(\Omega t + \varphi)$$

Etant que l'amplitude permanente (u_{c0}) et déphasage (φ) sont respectivement:

$$u_{c0} = \frac{e_0}{\sqrt{(RC\Omega)^2 + (1 - LC\Omega^2)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \arctg \left[\frac{RC\Omega}{1 - LC\Omega^2} \right]$$

En dérivant l'amplitude (u_{c0}) par rapport à Ω , u_{c0} sera maximale à une fréquence caractéristique $\Omega_{rés}$, c'est le phénomène de résonance :

$$\Omega_{rés} = \sqrt{\frac{2LC - R^2C^2}{2L^2C^2}}$$

Le facteur de qualité du circuit, appelé aussi coefficient de surtension, est défini comme :

$$Q = \frac{u_{c0}(\Omega_{rés})}{u_{c0}(0)} = \frac{(u_{c0})_{max}}{e_0}$$

Si $(RC)^2$ est très petit devant (LC) , la pulsation de résonance s'approche de la pulsation propre

($\Omega_{rés} \approx 1/\sqrt{LC} = \omega_0$) et l'amplitude maximale $(u_{c0})_{max}$, sera par l'approximation :

$$(u_{c0})_{max} = e_0 \frac{\sqrt{L/C}}{RC} = \frac{L\omega_0}{R} e_0$$

D'où le facteur de qualité : $Q = \frac{L\omega_0}{R}$

En outre, la bande de fréquences dans laquelle $u_{c0} = \frac{(u_{c0})_{max}}{\sqrt{2}}$ est connue sous le nom **la bande passante** égale à :

$$B = \Omega_2 - \Omega_1$$

Si $(RC)^2$ est très petit devant (LC) , la largeur de la bande passante B est approximativement égale à (R/L) et donc Q sera :

$$Q = \frac{L}{R\omega_0} = \frac{1}{B\omega_0} = \frac{2\pi f_0}{B}$$

Etant que f_0 la fréquence de résonance.

I.3. Principe d'étude:

Etudier des oscillations mécaniques d'un circuit électrique simple RLC (en série), en régime libre, amortie et forcée. Par l'exploitation des différents modes d'oscillation et visualisation du phénomène de la résonance.

I.4. Grandeurs Physique utilisées:

- Résistance $R(\Omega)$
- Induction –Bobine- $L(H)$
- Condensateur $C(F)$
- Générateur de basse fréquence –GBF- $U(V)$
- Fréquence de résonance $f_0(Hz)$
- Pulsation de résonance $\Omega_{res}(rad/s)$
- Pulsation propre $\omega_0(rad/s)$
- Période d'oscillation $T(s)$

II) Dispositif expérimentale :

Afin d'étudier les oscillations mécaniques apparait dans les systèmes électriques simple on réalise le circuit RLC suivant :

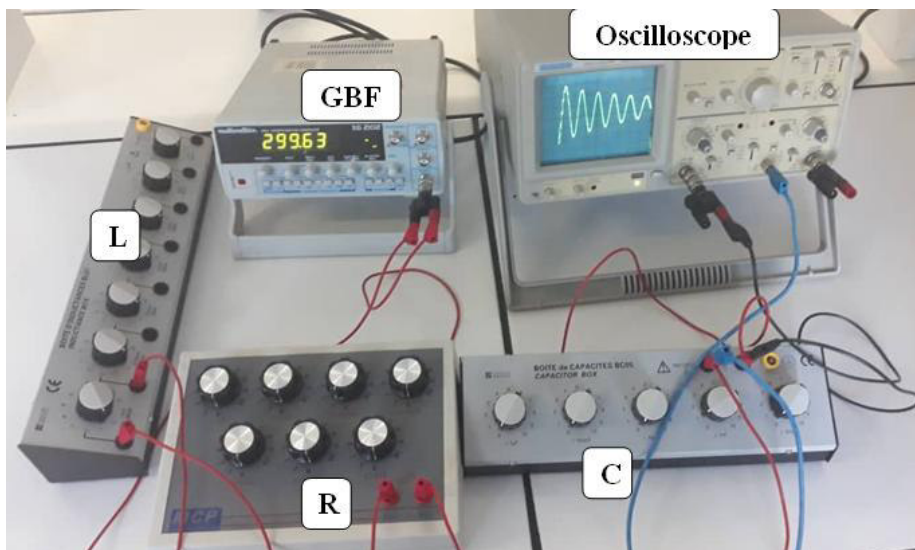


Fig. 4: Circuit électrique RLC en série

III) Manipulation :

III.1. Oscillations amorties :

- Lancer le générateur électrique (GBF) par une fréquence de 300 Hz en signal carré afin de chargé le condensateur C qui est en 1nF.
- Faire changer les valeurs de l'inductance L et la résistance R pour exploiter les différents régimes d'oscillation harmonique (apériodique, critique et pseudopériodique).

- Relever la valeur du pseudo période et le décrement logarithmique.
- Calculer le coefficient de frottement et la pulsation propre.
- Tracer le graphe caractéristique des différents régimes observé.

III.2. Oscillations Forcées :

- A la limite du régime pseudo périodique, faire augmenter la fréquence d'excitation en signale sinusoïdale du générateur afin de voir le phénomène de résonance
- Tracer le graphe $u_{c_{max}} = f(f_{excitation})$
- Relever la fréquence de résonance et déduire Ω_{res}

Compte Rendue TP N°02 : Circuit RLC

ESGEE, le.....

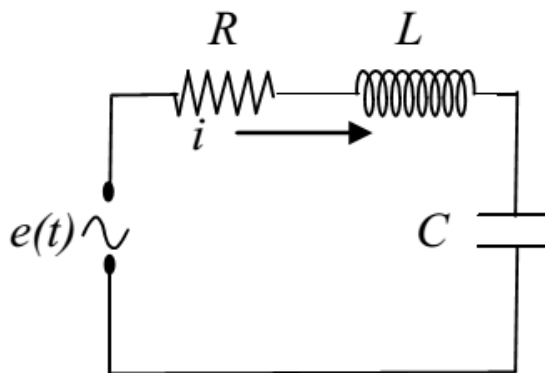
Groupe	Nom & Prénom	Notes & observations

But de TP :

- Etude des oscillations libres et amorties d'un circuit électrique simple comprenant une inductance, une résistance et un condensateur (RLC).
- Etude de phénomène de résonance apparait dans le circuit RLC en régime forcé.

I Etude Théorique

1. Donner l'équation différentielle d'oscillation en du circuit RLC suivant sachant que :



.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....

Donner la solution de l'équation différentielle et le déphasage

.....
.....
.....

2. Réécrire l'équation différentielle du circuit en fonction du courant I sachant que

.....
.....
.....

II Etude expérimental

1. Régime libre et/o amorti :

- Relever les valeurs de la résistance R et de l'inductance L correspondante à chaque régime d'oscillations :

Régime d'oscillation	C(F)	R(Ω)	L(H)
Apériodique			
Critique			
Pseudopériodique			

- Relever la valeur du pseudo période et le décrement logarithmique

.....
.....

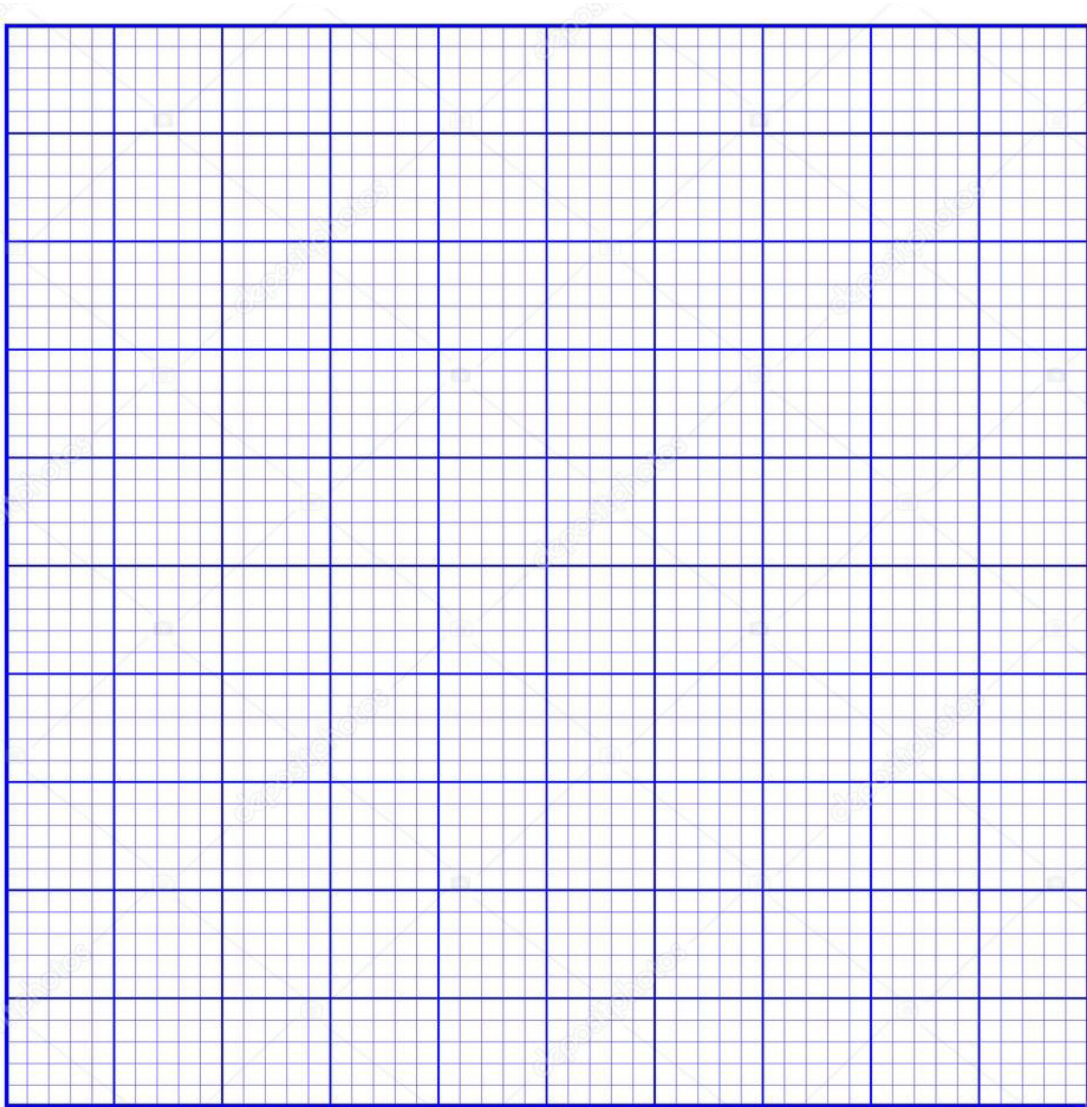
- Calculer le coefficient de frottement et la pulsation propre.....

.....
.....

- Vérifie théoriquement la valeur de la pulsation propre

.....
.....

- Tracer le graphe caractéristique des différents régimes observé.



2. Régime forcée :

- Relever les amplitudes maximales de la tension en fonction de la fréquence d'excitation afin de voir le phénomène de résonance :

- Tracer le graphe
 - Relever la fréquence de résonance, le facteur de qualité et déduire
-
-
-

